arXiv:2603.16793v1 [math.FA] 17 Mar 2026

A 关于抽象Hardy空间插值中 Pisier 方法的注记

HUGUES MOYART

摘要。在研究环面上 Hardy 空间插值的 Jones 定理时，Pisier 提出了一种新颖的方法，借助实插值技巧来计算复插值空间。这种方法已成功推广到由次对角代数产生的非交换解析 Hardy 空间。本文在更一般的框架下阐述并证明 Pisier 方法的一个抽象版本，随后将其应用于非交换鞅变换的研究。

目录

引言 3

P第 1 部分. 预备知识1. 抽象插值理论 5
1.1. 相容对 1.2. 相容有界算子 1.3. 插 5
值函子 1.4. 子对 1.5. 商对 1.6. 补空间 5
1.7. 对偶性 2. 复插值方法 3. 实方法 5
3.1. K-泛函 3.2. J-泛函 3.3. 实插值空 6
间 3.4. 拟补性 4. 非交换积分理论 6
4.1. 半有限 von Neumann 代数 7
4.2. 相容对 $(L_1,\ L_\infty)$ 4.3. L_p-空间和 7
$L_{p,\ \infty}$-空间 4.4. 条件期望 8
8
9
10
10
11
11
11
13
14

第二部分. 解析 Hardy 空间的插值 15
5. 技术假设 6. Jones 型投影 7. 15
Pisier 方法 7.1. Stein 插值定理 17
7.2. Haagerup 嵌入 7.3. 18
Pisier 方法定理 8. 示例：解析 18
Hardy 空间 19
21
26

第3部分：鞅理论的应用9. 滤过 29
29

2020数学主题分类。主要分类：46L51、46L52、46B70。次要分类：46E30、60G42、60G48。关键词和短语。非交换 Lp 空间、插值理论、非交换 Hp 空间、非交换鞅。

10. 鞅投影 11. 双鞅投影 29
12. 鞅 Hardy 空间 31
34

致谢和参考文献致谢 参考文献 36
36
36

引言

自 Peter W. Jones 的开创性工作以来，Hardy 空间的插值已得到广泛研究。我们简要回顾这一背景下取得的结果。设 $\mathbb{T}$ 为单位圆。对于 $1 \le p \le \infty$，令 $H_p(\mathbb{T})$表示相应的 Hardy 空间，其定义在 $\mathbb{T}$上，即 $L_p(\mathbb{T})$的子空间，其中函数的负傅里叶系数均为零。Jones 在 [7] 中证明，存在一个普适正数 C，使得对于每个$f \in H_1(\mathbb{T}) + H_\infty(\mathbb{T})$，以及 $t > 0$，都有

$$K_t(f, H_1(\mathbb{T}), H_\infty(\mathbb{T})) \le C K_t(f, L_1(\mathbb{T}), L_\infty(\mathbb{T}))$$

其中，K指用于构造 Lions-Peetre 实插值空间的 K-泛函。根据 Pisier 在 [12], 中引入的术语，可以将 Jones 定理重新表述为：子对（H_1（$\mathbb{T}$，H_∞（$\mathbb{T}$））在相容对（L_1（$\mathbb{T}$，L_∞（$\mathbb{T}$））中是 K-闭的。这意味着对于每个 $0 < \theta < 1$，我们都有

$$(H_1(\mathbb{T}), H_\infty(\mathbb{T}))_{\theta, p_\theta, K} = H_{p_\theta}(\mathbb{T}) \tag{0.1}$$

其范数等价，且常数仅取决于 θ，其中$1/p_\theta = 1 - \theta$。这里左侧指 Lions-Peetre 实插值方法。Jones 还在 [6] 中证明了复插值方法下（0.1）的类似结果，具体如下：若 $0 < \theta < 1$，则

$$[H_1(\mathbb{T}), H_\infty(\mathbb{T})]_\theta = H_{p_\theta}(\mathbb{T}) \tag{0.2}$$

其范数等价，且常数仅取决于 θ，其中$1/p_\theta = 1 - \theta$。在处理 Jones 的结果时，Pisier 在 [12] 中引入了一种新颖的方法，从而由（0.1）推出（0.2）。Pisier 方法的特点之一是它能自然地兼容非交换框架。因此，Jones 的结果已成功推广到与次对角代数相关的非交换解析 Hardy 空间：Pisier 首先在 [12]中研究了上三角矩阵的情形，随后 Bekjan 在 [1] 中将其推广到一般情形。

本文的主要贡献是在最小假设下对 Pisier 的论证进行抽象表述。这种抽象层次不仅澄清了原始论证，也使得能够在统一框架内处理各种插值问题。对抽象表述的需求源于近期在 K闭性结果，该结果是在 [10] 非交换鞅的 Hardy 空间背景下获得的。为更好地说明我们的方法，下面介绍本文的数学设定。所有未作解释的概念和记号将在第2部分中回顾。

若 M 是一个半有限 von Neumann 代数，且 P 是 $L_2(M)$ 上的任意投影，并且 $1 \le p \le \infty$，则我们定义$H_p(P)$为 $L_p(M) \cap P(L_2(M))$ 在 $L_p(M)$ 中的闭包（当 $p < \infty$时取范数拓扑，当 $p = \infty$时取弱星拓扑）。

设 M 为一个半有限 von Neumann 代数。若 P 是 $L_2(M)$ 上的投影，则称其为 Jones 型投影，当且仅当它满足技术假设（定义见第2部分），并且子对 $(H_1(P), H_\infty(P))$ 和 $(H_1(P^\perp), H_\infty(P^\perp))$ 在相容对 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 中均为 K-闭，且具有一个普适常数。

事实上，在本文正文中，我们采用了一组略有不同的假设，这些假设在实践中更容易验证。在第2部分中，我们证明了这两种表述的等价性。

设 M 为一个半有限 von Neumann 代数。$L_2(M)$上的一个投影 P 称为满足*Pisier* 方法假设，如果对于每个半有限 von Neumann 代数 N，希尔伯特张量积 $L_2(M) \otimes L_2(N) = L_2(M \bar{\otimes} N)$上的放大投影 $Q := P \otimes I$ 是 Jones 型的，并且代数张量积$H_\infty(P^\perp) \odot L_\infty(N)$是 $H_\infty(Q^\perp)$的一个子空间。

我们的表述的优点在于，它始终完全处于赋范空间的框架内，从而避免了处理 L_p-空间时遇到的技术困难（其中 $0 < p < 1$）。这与 Pisier 的原始方法形成对比。为这一简化付出的代价是，我们不能期望对相容对 $(H_1(P), H_\infty(P))$得到结果。尽管如此，通过沿用 Pisier 的原始论证，我们在第2部分 证明了以下结果。

定理 A (Pisier 方法)。设 M 是一个半有限 *von Neumann* 代数，且 P 是作用在$L_2(M)$ 上的投影，并满足 *Pisier* 方法假设。若 $1 < p < \infty$ 且 $0 < \theta < 1$，则

$$[H_p(P), H_1(P)]_\theta = H_{p_\theta}(P)$$

具有等价范数，其常数仅取决于 p、θ，其中

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p} + \theta.$$

在第 3 部分中，我们将扩展后的 Pisier 方法用于研究非交换鞅。因此，我们获得了关于鞅投影的新结果，拓展了 [10], 中开启的研究，现简要介绍如下。

设 M 是一个配备滤过 $(M_n)_{n\geq 1}$ 的半有限 von Neumann 代数，其相应的条件期望记为 $(E_n)_{n\geq 1}$，相应的增量投影记为 $(D_n)_{n\geq 1}$，定义如下：

$$D_n := E_n - E_{n-1}, \quad \text{for } n \geq 1.$$

（约定 $E_0 := 0$）。设 I 是一个固定的正整数集合，并令 P 为与数据 $(M, (M_n)_{n\geq 1}, I)$ 相关联的鞅投影，即在 $L_2(M)$ 上的投影，使得若 $x \in L_2(M)$，则

$$P(x) = \sum_{n\in I} D_n(x), \quad \text{in } L_2(M).$$

那么，若 $1 \leq p \leq \infty$，我们有

$$H_p(P) = \big\{x \in L_p(M) \ : \ \forall n \notin I,\ D_n(x) = 0\big\}.$$

在 [10] 中，基本上已经证明了鞅投影 P 属于 Jones 型。通过应用我们对 Pisier 方法的扩展版本，我们随后得到了以下新结果。

定理。 设 M 是一个配备滤过的半有限 *von Neumann* 代数。如果 $1 < p < \infty$ 和$0 < \theta < 1$那么

$$[H_p(P), H_1(P)]_\theta = H_{p_\theta}(P)$$

具有等价范数，其常数仅依赖于 p、θ，其中

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p} + \theta.$$

通过运用众所周知的转移技巧，上述结果可推出若干关于非交换鞅的 Hardy 空间复插值的附加结论，详见第 4 部分。特别是，我们重新得到了 Musat 在 [11] 中关于非交换 Hardy 空间插值的所有经典结果。

第1 部分 预备知识

1. 抽象插值理论

本节内容摘自 [5] 和 [2]。

1.1. **相容对**。 若 (E_0, E_1) 是共同豪斯多夫拓扑向量空间 E 的两个子空间所构成的一对，且 E_j配备了使包含映射 $E_j \to E$连续的完备范数（ $j \in \{0,1\}$），则称其为一个相容对 。此时，交空间 $E_0 \cap E_1$ 和和空间 $E_0 + E_1$ 自然配备完备范数 $\|\cdot\|_{E_0\cap E_1}$ 和 $\|\cdot\|_{E_0+E_1}$，其定义如下:

$$\|u\|_{E_0\cap E_1} := \max\left\{\|u\|_{E_0},\ \|u\|_{E_1}\right\},$$

$$\|u\|_{E_0+E_1} := \inf\left\{\|u_0\|_{E_0} + \|u_1\|_{E_1}\ :\ u = u_0 + u_1,\ u_0 \in E_0, u_1 \in E_1\right\}.$$

相容对 (E_0, E_1) 的中间空间 是 $E_0 + E_1$ 的一个子空间 E_θ，它包含 $E_0 \cap E_1$，并配备了使包含映射 $E_0 \cap E_1 \to E_\theta$和 $E_\theta \to E_0 + E_1$均连续的完备范数。若 E_{θ_0}、 E_{θ_1}是相容对 (E_0, E_1) 的中间空间，则在配备相应的和范数 $\|\cdot\|_{E_{\theta_0}+E_{\theta_0}}$ 和交范数 $\|\cdot\|_{E_{\theta_0}\cap E_{\theta_1}}$ （定义如上）后，它们的和 $E_{\theta_0} + E_{\theta_1}$和交 $E_{\theta_0} \cap E_{\theta_1}$也都是 (E_0, E_1) 的中间空间。

1.2. **相容有界算子**。 设 (E_0, E_1) 和 (F_0, F_1) 是两个相容对。相容有界算子 $(E_0, E_1) \to (F_0, F_1)$ 是一个算子 T: $E_0 + E_1 \to F_0 + F_1$，满足: 若 $j \in \{0,1\}$，则 T将 E_j映射到 F_j，且 $T\colon E_j \to F_j$有界。在这种情况下，我们定义

$$\|T\|_{(E_0,E_1)\to(F_0,F_1)} := \max\left\{\|T\|_{E_0\to F_0}, \|T\|_{E_1\to F_1}\right\}.$$

设 $T\colon (E_0, E_1) \to (F_0, F_1)$ 是一个相容有界算子。注意， T是单射（分别为满射、双射）当且仅当对 $j \in \{0,1\}$, $T\colon E_j \to F_j$是单射（分别为满射、双射）。

若对 $j \in \{0,1\}$， $T\colon E_j \to F_j$ 是赋范空间的嵌入/商（回顾一下，赋范空间之间的有界算子 $T: E \to F$ 若为单射 / 满射，且诱导的有界算子 $E/\ker T \to \operatorname{ran} T$ 是赋范空间的同构），则称 T 是相容对的嵌入/商 。若对 $j \in \{0,1\}$， $T\colon E_j \to F_j$ 是赋范空间的同构，则称 T 是相容对的同构 。

我们称 T是压缩的，如果 $\|T\|_{(E_0,E_1)\to(E_0,E_1)} \le 1$。如果对 $T\colon E_j \to F_j$，在 $j \in \{0,1\}$ 时是赋范空间的等距嵌入/余等距商（回顾一下，赋范空间的商 $T\colon E \to F$ 是余等距的，当且仅当赋范空间的诱导同构 $E/\ker T \to F$ 是等距的），我们称 T是相容对的等距嵌入/余等距商 。如果对 $j \in \{0,1\}$， $T\colon E_j \to F_j$是赋范空间的等距同构，我们称 T 是相容对的等距同构 。

注记。 定义相容对以及相容的（压缩的）有界算子范畴，有一种显而易见的方法。该范畴中的同构对应于相容对的（等距）同构。

对于相容对 (E_0, E_1)，常数为 C 的插值空间是 (E_0, E_1)的中间空间 E_θ，并且满足: 若 $T: (E_0, E_1) \to (E_0, E_1)$ 是相容有界算子，则 T将 E_θ映射到 E_θ，且 $\|T\|_{E_\theta\to E_\theta} \le C\|T\|_{(E_0,E_1)\to(E_0,E_1)}$。精确插值空间是常数为$C \le 1$的插值空间。（精确）插值空间的和或交仍是（精确）插值空间。更一般地，对于一对相容对 (E_0, E_1) 和 (F_0, F_1)，常数为 C 的插值对是分别对应于 (E_0, E_1) 和 (F_0, F_1) 的一对中间空间 E_θ 和 F_θ，并且满足: 若 $T: (E_0, E_1) \to (F_0, F_1)$ 是相容有界算子，则 T将 E_θ映射到 F_θ，且 $\|T\|_{E_\theta\to F_\theta} \le C\|T\|_{(E_0,E_1)\to(F_0,F_1)}$。

精确插值对是一个常数为 $C \le 1$的插值对。

1.3. **插值函子**。一个插值函子F若常数为 C ，则它将每个相容对(E_0, E_1)映射到一个中间空间F (E_0, E_1); 并且，若(E_0, E_1)和(F_0, F_1)是一对相容对，则对于(E_0, E_1)和(F_0, F_1)，F (E_0, E_1)和F (F_0, F_1)构成一个常数为 C 的插值对（在这种情况下，若(E_0, E_1)是一个相容对，则对于(E_0, E_1)，F (E_0, E_1)必然是一个常数为 C 的插值空间）。

精确插值函子是一个常数为 $C \le 1$的插值函子。

注记。 例如，将每个相容对 (E_0, E_1) 映射到和空间$E_0 + E_1$ （分别映射到交空间 $E_0 \cap E_1$）的映射 Σ （分别为 Δ）是一个精确插值函子。

若 F 是一个（精确）插值函子，那么 F 以显然的方式定义了一个函子，将相容对及相容的（压缩的）有界算子范畴映射到完备赋范空间及（压缩的）有界算子范畴。

1.4. 子对。 相容对 (E_0, E_1) 的一个子对 是指形如 (A_0, A_1) 的对，其中 A_j是 E_j的闭子空间，适用于 $j \in \{0, 1\}$。在这种情况下，对 (A_0, A_1) 自然继承了唯一的相容对结构，使包含映射 $A_0 + A_1 \to E_0 + E_1$ 成为相容对 $(A_0, A_1) \to (E_0, E_1)$ 之间的等距嵌入。因此，若 F 是一个（精确）插值函子，那么包含映射

$$\begin{cases} \mathcal{F}(A_0, A_1) & \to & \mathcal{F}(E_0, E_1) \\ u & \mapsto & u \end{cases}$$

是一个定义良好的有界（压缩的）单射算子，但它可能不是赋范空间嵌入（$\mathrm{F} = \Sigma$ 时尤其如此；不过请注意，当 $\mathrm{F} = \Delta$ 时，包含映射$A_0 \cap A_1 \to E_0 \cap E_0$ 是赋范空间的等距嵌入）。

1.5. 商对。 设 (A_0, A_1) 是相容对 (E_0, E_1) 的子对，并令

$$\begin{cases} E_0 + E_1 & \to & (E_0 + E_1)/(A_0 + A_1) \\ u & \mapsto & \overline{u} \end{cases}$$

表示投影。若 E_θ 是 (E_0, E_1) 的一个中间空间，且子空间

$$A_\theta := E_\theta \cap (A_0 + A_1) = \left\{u \in E_\theta \ : \ \overline{u} = 0\right\}$$

在 E_θ 中是闭的，则

$$E_\theta/A_\theta := \left\{v \in (E_0 + E_1)/(A_0 + A_1) \ : \ \exists u \in E_\theta, \ v = \overline{u}\right\}$$

是 $(E_0+E_1)/(A_0+A_1)$ 的子空间，并赋予完备范数 $\|\cdot\|_{E_\theta/A_\theta}$，其定义如下：

$$\|v\|_{E_\theta/A_\theta} = \inf_{u \in E_\theta, \ \overline{u}=v} \|u\|_{E_\theta}.$$

此外，显然包含映射 $E_\theta/A_\theta \to (E_0+E_1)/(A_0+A_1)$ 是连续的（其中 $(E_0+E_1)/(A_0+A_1)$ 赋予商拓扑；该拓扑可能不是豪斯多夫的，因为 A_0+A_1 在 E_0+E_1 中未必是闭的），并且存在从 E_θ/A_θ 到 E_θ 对 A_θ 取商所得的通常商空间的典范等距同构。

若相容对 (E_0, E_1) 的子对 (A_0, A_1) 满足：$A_0 + A_1$ 在 $E_0 + E_1$ 中是闭的，并且对于 $j \in \{0, 1\}$，$A_j = (A_0 + A_1) \cap E_j$，则称其为正规 子对。在这种情况下，根据上述讨论，赋范空间对 $(E_0/A_0, E_1/A_1)$ 定义良好，并继承了唯一的相容对结构，使得投影$E_0+E_1 \to (E_0+E_1)/(A_0+A_1)$成为相容对 $(E_0, E_1) \to (E_0/A_0, E_1/A_1)$ 的余等距商。因此，若 F 是一个（精确）插值函子，则该投影

$$\begin{cases} \mathcal{F}(E_0, E_1) & \to & \mathcal{F}(E_0/A_0, E_1/A_1) \\ u & \mapsto & \overline{u} \end{cases}$$

是一个定义良好的有界（压缩的）算子，但它可能不是赋范空间的商，甚至可能不是满射（但请注意，当 $\mathrm{F} = \Sigma$ 时，投影 $E_0 + E_1 \to (E_0/A_0) + (E_1/A_1)$ 是赋范空间的余等距商，因此 $(E_0/A_0) + (E_1/A_1) = (E_0 + E_1)/(A_0 + A_1)$ 的范数相等）。

命题 1.1. 设(A_0, A_1) 是相容对(E_0, E_1)的正规子偶。那么投影$E_0 \cap E_1 \to (E_0/A_0) \cap (E_1/A_1)$ 是满射。

证明。 令 $u \in (E_0/A_0) \cap (E_1/A_1)$。那么 $u = u_0 = \overline{u}_1$，其中 $u_0 \in E_0, u_1 \in E_1$。由于 $u_0 - u_1 = 0$，我们可以写成 $u_0 - u_1 = a_0 - a_1$，其中 $a_0 \in A_0, a_1 \in A_1$。若 $v := u_0 - a_0 = u_1 - a_1$，则 $v \in E_0 \cap E_1$ 且 $v = u$，如所需。 □

1.6. **补空间**。 相容对 (E_0, E_1) 的子对 (A_0, A_1) 是可补的，其常数为C，如果存在一个有界（压缩的）相容算子 P: $(E_0, E_1) \to (E_0, E_1)$，使得 P: $E_j \to E_j$ 是幂等的，且值域为 A_j，并且 $\|P\|_{E_j \to E_j} \le C$，对 $j \in \{0,1\}$。

相容对 (E_0, E_1) 的子对 (A_0, A_1) 若为可补的，且补常数为 $C \le 1$，则称其为收缩补的。

若 (A_0, A_1) 是相容对 (E_0, E_1) 的（收缩）补子对，则对每个（精确）插值函子 F，包含映射 $\mathrm{F}(A_0, A_1) \to \mathrm{F}(E_0, E_1)$ 是赋范空间的（等距）嵌入，其值域为 $(A_0+A_1)\cap \mathrm{F}(E_0, E_1)$；而投影 $\mathrm{F}(E_0, E_1) \to \mathrm{F}(E_0/A_0, E_1/A_1)$ 是赋范空间的（余等距）商，其核为 $\mathrm{F}(A_0, A_1)$。

1.7. **对偶性**。设 (E_0, E_1) 是一个相容对。若 E_θ 是 (E_0, E_1) 的中间空间，且$E_0 \cap E_1$在 E_θ中稠密，则

$$E_\theta^* := \Big\{u^* \in (E_0 \cap E_1)^*, \sup_{u \in E_0 \cap E_1,\ \|u\|_{E_\theta} \le 1} |\langle u, u^*\rangle| < \infty\Big\}$$

是（$E_0 \cap E_1$）*的子空间，并赋予由下列表达式给出的完备范数 $\|\cdot\|_{E_\theta^*}$

$$\|u^*\|_{E_\theta^*} = \sup_{u \in E_0 \cap E_1,\ \|u\|_{E_\theta} \le 1} |\langle u, u^*\rangle|.$$

此外，显然包含映射 $E_\theta^* \to$ （$E_0 \cap E_1$）*是连续的，并且存在从 E_θ^*到 E_θ通常对偶空间的典范等距同构。

相容对（E_0， E_1）若 $E_0 \cap E_1$在 E_j中对 $j \in \{0,\ 1\}$稠密，则称其为正则。在这种情况下，根据上述讨论，完备赋范空间对（E_0^*， E_1^*）是定义良好的，并继承了相容对的典范结构。此外，我们有 $E_0^* + E_1^* =$ （$E_0 \cap E_1$）*，且范数相等；以及$E_0^* \cap E_1^* =$ （$E_0 + E_1$）*，且范数相等。

命题 1.2 ([5](命题 6.2))。 设 (A_0, A_1) 是正则相容对的一个正则子对(E_0, E_1) 且满足 $A_0 + A_1$ 在 $E_0 + E_1$中闭。对 $j \in \{0,1\}$，考虑正交补

$$A_j^\perp := \big\{\phi \in E_j^* : \phi(u) = 0,\ \forall u \in A_j\big\}$$

于是 $(A_0^\perp, A_1^\perp)$ 是对偶子偶(E_0^*, E_1^*)的正规子对，并且在相容对$(E_0^*/A_0^\perp, E_1^*/A_1^\perp)$ 与(A_0^*, A_1^*)之间存在典范同构。

2. The complex method

令 $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$ 表示复平面中的开单位条带，其边界为$\partial\mathbb{S} = \{it : \ t \in \mathbb{R}\} \cup \{1 + it : t \in \mathbb{R}\}$，闭包为 $\overline{\mathbb{S}} := \{z \in \mathbb{C} : \ 0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1\}$。

设 (E_0, E_1) 为一个相容对。令 $\mathrm{F}(E_0, E_1)$ 表示如下函数的函数空间： f: 在 $\mathbb{S}$ 上连续、在 $\mathbb{S}$ 上全纯，满足对于 $t \in \mathbb{R}, j \in \overline{\{0,1\}}$ 有 $f(j + it) \in E_j$，并且对于 $j \in \{0,1\}$，函数 $\mathbb{R} \to E_j, t \mapsto f(j + it)$ 连续且在无穷远处消失。若 $f \in \mathrm{F}(E_0, F_1)$，则定义

$$\|f\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)} := \max_{j \in \{0,1\}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(j + it)\|_{E_j}.$$

若 $0 < \theta < 1$，则< शैली id='2'>复插值空间 $[E_0, E_1]_\theta$是 $E_0 + E_1$ 的子空间，由形如 $f(\theta)$ 且满足 $f \in \mathrm{F}(E_0, E_1)$ 的元素构成。赋予它完备范数 $\|\cdot\|_{[E_0,E_1]_\theta}$，其定义式为

$$\|u\|_{[E_0,E_1]_\theta} := \inf\big\{\|f\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)} : \ f \in \mathcal{F}(E_0, E_1),\ u = f(\theta)\big\}.$$

对于固定的 $0 < \theta < 1$，这一构造给出一个精确插值函子。按照约定，令 $(E_0, E_1)_0 := E_0$ ，以及 $(E_0, E_1)_1 := E_1$。

命题 1.3 ([2](定理 4.2.2)). 设 (E_0, E_1) 为一个相容对。则对于每个 $0 < \theta < 1$， $E_0 \cap E_1$ 在 $[E_0, E_1]_\theta$中稠密。

以下对偶定理是众所周知的。它可由 [19][引理 2]直接推出。

定理 1.4 (对偶定理)。 设(E_0, E_1) 是一个正则相容对，且 $0 < \theta < 1$。那么对于每个$u \in E_0 \cap E_1$，我们有

$$\|u\|_{[E_0,E_1]_\theta} = \sup_{\substack{u^* \in [E_0^*, E_1^*]_\theta \\ \|u\|_{(E_0^*, E_1^*)_\theta} \le 1}} |\langle u, u^*\rangle|.$$

推论 1.5。 设(E_0, E_1)是一个正则相容对，并设 E_θ是(E_0, E_1)的一个中间空间，且 $E_0 \cap E_1$在 E_θ中稠密。设 $0 < \theta < 1$，并设 C为一个常数，使得若 $u^* \in E_0^* \cap E_1^*$，则$u^* \in E_\theta^*$，其中

$$\|u^*\|_{E_\theta^*} \le C\|u^*\|_{[E_0^*, E_1^*]_\theta}.$$

那么，对于每个 $u \in E_\theta$，我们都有 $u \in [E_0, E_1]_\theta$，其中

$$\|u\|_{[E_0,E_1]_\theta} \le C\|u\|_{E_\theta}.$$

证明。 由于 $E_0^* \cap E_1^*$在 $[E_0^*, E_1^*]_\theta$中稠密，根据假设可推出，对于每个 $u^* \in [E_0^*, E_1^*]_\theta$，我们都有 $u^* \in E_\theta^*$，其中 $\|u^*\|_{E_\theta^*} \le C\|u^*\|_{[E_0^*,E_1^*]_\theta}$。因此，若 $u \in E_0 \cap E_1$，则由定理 1.4可得

$$\|u\|_{[E_0,E_1]_\theta} \le \sup_{\substack{u^* \in [E_0^*,E_1^*]_\theta \\ \|u^*\|_{[E_0^*,E_1^*]_\theta} \le 1}} |\langle u, u^*\rangle| \le \sup_{\substack{u^* \in [E_0^*,E_1^*]_\theta \\ \|u^*\|_{[E_0^*,E_1^*]_\theta} \le 1}} \|u\|_{E_\theta}\|u^*\|_{E_\theta^*}$$

$$\le C \sup_{\substack{u^* \in [E_0^*,E_1^*]_\theta \\ \|u^*\|_{[E_0^*,E_1^*]_\theta} \le 1}} \|u\|_{E_\theta}\|u^*\|_{[E_0^*,E_1^*]_\theta} \le C\|u\|_{E_\theta}.$$

由于 $E_0 \cap E_1$在 E_θ中稠密，所需结论即得。 □

Th复插值方法的重申定理是经典结果。证明可见 [2][定理 4.6。 1]

定理 1.6 （重申定理）。 设 $(E_0, E_{\theta_0}, E_{\theta_1}, E_1)$是一个相容四元组，满足 $E_0 \cap E_1$在 $E_{\theta_0} \cap E_{\theta_1}$中稠密，并假设

$$E_{\theta_0} := [E_0, E_1]_{\theta_0} \quad and \quad E_{\theta_1} := [E_0, E_1]_{\theta_1},$$

其中 $0 \le \theta_0 < \theta_1 \le 1$。令 $0 < \eta < 1$。则有

$$[E_{\theta_0}, E_{\theta_1}]_\eta = [E_0, E_1]_{\theta_\eta}$$

且范数相等，其中 $\theta_\eta := (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$。

3. The real method

3.1. K-泛函。设(E_0, E_1)是一个相容对。 $u \in E_0 + E_1$ 的 K-泛函定义为，对$t > 0$有

$$K_t(u) = K_t(u, E_0, E_1) := \inf\left\{\|u_0\|_{E_0} + t\|u_1\|_{E_1} \ : \ u_0 \in E_0,\ u_1 \in E_1,\ u = u_0 + u_1\right\}.$$

对于固定的$t > 0$， K_t是 $E_0 + E_1$上的一个等价范数。如果(E_0, E_1)和(F_0, F_1)是两个相容对，且$T : (E_0, E_1) \to (F_0, F_1)$是一个相容有界算子，则

$$K_t(Tu, F_0, F_1) \le \|T\|_{(E_0,E_1)\to(F_0,F_1)} K_t(u, E_0, E_1)$$

对每个 $u \in E_0 + E_1$ 和 $t > 0$均成立。

A K-方法参数是一个完备赋范空间 Φ，其元素为（等价类的）勒贝格可测函数，并且变量 $t \quad > 0$使得，

- ▹如果 f， $g \in \Phi$ 且 $|g| \le |f|$，那么 $\|g\|_\Phi \le \|f\|_\Phi$，
- ▹函数 $t \mapsto 1 \wedge t$ 属于 Φ。

若 Φ 是一个 K-方法参数，且 $(E_0,\ E_1)$ 是一个相容对，则 K-方法插值空间

$$K_\Phi(E_0, E_1) := \left\{u \in E_0 + E_1 \ : \ t \mapsto K_t(u, E_0, E_1) \in \Phi\right\}$$

is a $E_0 + E_1$ 的子空间，并赋予完备范数 $\|\cdot\|_{K_\Phi(E_0,\ E_1)}$，该范数由下列表达式给出

$$\|u\|_{K_\Phi(E_0,E_1)} := \|t \mapsto K_t(u, E_0, E_1)\|_\Phi.$$

这一构造定义了一个精确插值函子 K_Φ，称为带参数 Φ的 K-方法 。

如果 (A_0, A_1) 是相容对 (E_0, E_1) 的子对，那么我们有

$$K_t(u, E_0, E_1) \le K_t(u, A_0, A_1), \quad \text{for } u \in A_0 + A_1,\ t > 0$$

相容对 (E_0, E_1) 的子对 (A_0, A_1) 是 K-闭 的，常数为 C，如果

$$K_t(u, A_0, A_1) \le CK_t(u, E_0, E_1)$$

对每个 $u \in A_0 + A_1$ 和 $t > 0$。

注记。 若 $(A_0,\ A_1)$ 是相容对 $(E_0,\ E_1)$ 的一个 K-闭子对，则 A_0+A_1 在 E_0+E_1 中是闭的（换言之，包含映射 $A_0+A_1\to E_0+E_1$ 是一个赋范空间嵌入）。

以下命题直接由定义得到。

命题 1.7。 如果(A_0, A_1) 是相容对(E_0, E_1)的一个 K-闭子对，那么对于每个 K-方法参数 Φ，包含映射 $K_\Phi(A_0, A_1)\to K_\Phi(E_0, E_1)$ 是赋范空间嵌入，其值域为$(A_0+A_1)\cap K_\Phi(E_0, E_1)$。

以下关键结果归功于 Pisier。详细证明见 [5][定理 6。1]。

定理 1.8 (Pisier)。 设(A_0, A_1) 是正则相容对(E_0, E_1) 的一个 K-闭子对，且常数为 C。则子对$(A_0^\perp, A_1^\perp)$ 在(E_0^*, E_1^*) 中是 K-闭的，其常数仅取决于 C。

以下结果是 K-泛函的广义 Holmstedt 公式的推论，摘自 [5][定理 2.2]

定理 1.9. 设(A_0, A_1) 是相容对(E_0, E_1) 的一个 K-闭子对，其常数为 C。设Φ_0, Φ_1 是 K-参数空间。令

$$E_{\theta_0}:=K_{\Phi_0}(E_0,E_1)\quad and\quad E_{\theta_1}:=K_{\Phi_1}(E_0,E_1).$$

并对相容对(A_0, A_1)采用类似的记号。以下断言成立 $d.$

(1) 子对$(A_{\theta_0}, A_{\theta_1})$是$(E_{\theta_0}, E_{\theta_1})$中的 K-闭子对，其常数仅依赖于 C, Φ_0, Φ_1。*(2)* 若 Φ_0 包含一个连续无界正凹函数，则子对(A_{θ_0}, A_1) 是(E_{θ_0}, E_1) 中的K-闭子对，其常数仅依赖于 C, Φ_0。*(3)* 若 Φ_1 包含一个连续无界正凹函数，则子对(A_0, A_{Φ_1}) 是(E_0, E_{Φ_1}) 中的K-闭子对，其常数仅依赖于 C, Φ_1。

3.2. **J-泛函**。设 (E_0, E_1) 是一个相容对。 $u\in E_0\cap E_1$ 的 J-泛函定义为，对 $t>0$,

$$J_t(u)=J_t(u,E_0,E_1):=\|u\|_{E_0\cap tE_1}=\max\left\{\|u\|_{E_0}, t\|u\|_{E_1}\right\}.$$

对于固定的 $t>0$， J_t 是 $E_0\cap E_1$ 上的一个等价范数。若 $T:(E_0,E_1)\to(F_0,F_1)$ 是相容对之间的有界相容算子，则

$$J_t(Tu,F_0,F_1)\le\|T\|_{(E_0,E_1)\to(F_0,F_1)}J_t(u,E_0,E_1)$$

对每个 $u\in E_0\cap E_1$ 和 $t>0$ 均成立。

一个 J-方法参数是一个完备赋范空间 Φ，其元素为变量为 $t>0$ 的勒贝格可测函数（类），并满足

▹若 $f,g\in\Phi$ 且 $|g|\le|f|$，则 $\|g\|_\Phi\le\|f\|_\Phi$；▹函数 $t\mapsto 1\wedge t$ 属于 Φ;
▹若 $f\in\Phi$，则 $\int_0^\infty|f(t)|(1\wedge t^{-1})\frac{dt}{t}\le c_\Phi\|f\|_\Phi$，其中 c_Φ 仅依赖于 Φ。

（每个 J-方法参数都是一个 K-方法参数）。若 Φ 是一个 J-方法参数，且（$E_0,\ E_1$）是一个相容对，记

$$L_1^\Phi(dt/t,E_0,E_1):=\left\{f\in L_1(dt/t,E_0+E_1)\ :\ t\mapsto J_t(f(t))\in\Phi\right\}$$

那么， J-方法插值空间

$$J_\Phi(E_0,E_1):=\left\{u\in E_0+E_1\ :\exists f\in L_1^\Phi(dt/t,E_0,E_1),\ u=\int_0^\infty f(t)\frac{dt}{t}\right\}$$

是 E_0+E_1 的一个子空间，并配备完备范数 $\|\cdot\|_{J_\Phi(E_0,\ E_1)}$，其定义由下式给出

$$\|u\|_{J_\Phi(E_0,E_1)}:=\inf\left\{\|t\mapsto J_t(f(t))\|_\Phi\ :\ f\in L_1^\Phi(dt/t,E_0,E_1),\ u=\int_0^\infty f(t)\frac{dt}{t}\right\}.$$

这一构造定义了一个称为 J-方法、参数为 Φ 的精确插值函子 J_Φ。

相容对（$E_0,\ E_1$）的子对（$A_0,\ A_1$）称为 J-闭的，常数为 C，如果它在（$E_0,\ E_1$）中正规，并且对于每个 $u\in E_0\cap E_1$ 和 $t>0$，存在 $v\in E_0\cap E_1$ 使得 $u-v\in A_0+A_1$ 且

$$J_t(v,E_0,E_1)\le CJ_t(\overline{u},E_0/A_0,E_1/A_1).$$

同样，以下命题可直接由定义推出。

命题 *1.10*（[5]（定理 *4.1*））。设（A_0, A_1）是相容对（E_0, E_1）的正规子偶，且 C 是常数。那么，（A_0, A_1）在（E_0, E_1）中是 K-闭的，且其常数仅依赖于 C，当且仅当（A_0, A_1）在（E_0, E_1）中是 J-闭的，且其常数仅依赖于 C。

命题 1.11. 若(A_0, A_1) 是相容对(E_0, E_1)的一个 J-闭子对，则对于每个 J-方法参数 Φ，投影 $J_\Phi(E_0, E_1) \to J_\Phi(E_0/A_0, E_1/A_1)$ 是赋范空间的商，其核为 $J_\Phi(A_0, A_1)$。

3.3. **实插值空间**。设 $0 < \theta < 1$ 和 $1 \le p \le \infty$。令 $\Phi_{\theta,p}$ 表示具有变量 $t > 0$ 的勒贝格可测函数 f所构成的空间，使得

$$\|f\|_{\Phi_{\theta,p}} := \|t \mapsto t^{-\theta} f(t)\|_{L_p(dt/t)} < \infty$$

那么 $\Phi_{\theta,p}$ 是一个 J-方法参数（因此也是一个 K-方法参数）。若 (E_0, E_1) 是一个相容对，记

$$(E_0, E_1)_{\theta,p,K} := K_{\Phi_{\theta,p}}(E_0, E_1), \quad (E_0, E_1)_{\theta,p,J} := J_{\Phi_{\theta,p}}(E_0, E_1).$$

按照惯例，设 $(E_0, E_1)_{0,p,K} = (E_0, E_1)_{0,p,J} := E_0$ 以及 $(E_0, E_1)_{1,p,K} = (E_0, E_1)_{1,p,J} := E_1$ 对每个$1 \le p \le \infty$均如此。它们就是所谓的实插值空间。

以下结果取自 [2]。

定理 1.12 (等价定理)。设 (E_0, E_1) 是一个相容对。那么，对于 $0 < \theta < 1$ 和$1 \le p \le \infty$，我们有

$$(E_0, E_1)_{\theta,p,K} = (E_0, E_1)_{\theta,p,J}$$

其范数等价，且常数仅取决于 θ。

定理 1.13 (重申定理)。设 (E_0, E_1) 是一个相容对。令

$$E_{\theta_0} := (E_0, E_1)_{\theta_0,p_0,K} \quad and \quad E_{\theta_1} := (E_0, E_1)_{\theta_1,p_1,K},$$

其中 $0 \le \theta_0 < \theta_1 \le 1$和 $1 \le p_0, p_1 \le \infty$（约定：若 $\theta_0 = 0$则 $E_{\theta_0} = E_0$，若 $\theta_1 = 1$则 $E_{\theta_1} = E_1$）。令 $0 < \eta < 1$ 和 $1 \le p \le \infty$。那么，

$$(E_{\theta_0}, E_{\theta_1})_{\eta,p,K} = (E_0, E_1)_{\theta_\eta,p,K}$$

其 e 等价范数，其常数仅取决于 θ_0、θ_1、p_0、p_1、η、p，其中 $\theta_\eta := (1-\eta)\,\theta_0 + \eta\theta_1$。

3.4. **拟补性**。在 [9]中使用的 K-闭性概念与我们在此处使用的概念略有不同。为避免任何混淆，我们引入一种新的术语。

定义 1.14。相容对 (E_0, E_1) 的子对 (A_0, A_1) 若满足以下条件，则称为具有常数 C 的拟补子对：对每个 $a \in A_0 + A_1$，若 $a = u_0 + u_1$ 且对于 $j \in \{0, 1\}$ 有 $u_j \in E_j$，则 $a = a_0 + a_1$，并且 $a_j \in A_j$，且对于 $j \in \{0, 1\}$ 有$\|a_j\|_{E_j} \le C\|u_j\|_{E_j}$。

设 (A_0, A_1) 是相容对 (E_0, E_1) 的子对。若 (A_0, A_1) 在 (E_0, E_1) 中是常数为 C 的可补的，则 (A_0, A_1) 显然在 (E_0, E_1) 中是常数为 C 的拟补。此外，显然，若 (A_0, A_1) 在 (E_0, E_1) 中是常数为 C 的拟补，则它在 (E_0, E_1) 中是常数为C 的 K-闭的；并且我们还有 $A_j = E_j \cap (E_0 + E_1)$，其中 $j \in \{0, 1\}$，因此它在 (E_0, E_1) 中也是正规的（因而是 J-闭的）。

命题 1.15. 设 (A_0, A_1) 是相容对 (E_0, E_1) 的一个 K-闭子对，且对 $j \in \{0, 1\}$有 $A_j = E_j \cap (E_0 + E_1)$。则 (A_0, A_1) 在 (E_0, E_1) 中是常数为 $4C$ 的拟补。

证明。令 $a \in A_0 + A_1$，并写作 $a = u_0 + u_1$，其中 $u_j \in E_j$ 对于 $j \in \{0, 1\}$。若 $u_j = 0$，则 $a \in (A_0 + A_1) \cap E_j = A_j$，无需证明。因此，我们可以假设 u_0，$u_1 \ne 0$。令 $t := \|u_0\|_{E_0}/\|u_1\|_{E_1}$。于是，我们可将 $a = a_0 + a_1$ 写为，其中 $a_j \in A_j$，并且

$$\|a_0\|_{E_0} + t\|a_1\|_{E_1} \le 2K_t(a, A_0, A_1) \le 2CK_t(a, E_0, E_1) \le 2C(\|u_0\|_{E_0} + t\|u_1\|_{E_1}) = 4C\|u_0\|_{E_0}.$$

由此得到以下估计

$$\|a_0\|_{E_0} \le 4C\|u_0\|_{E_0}, \quad \|a_1\|_{E_1} \le 4C\|u_1\|_{E_1}.$$

□

以下陈述改编自 [9][定理 2]。

定理 1.16 (Kislyakov/Xu)。 设$(A_0, A_{\theta_0}, A_{\theta_1}, A_1)$ 是相容四元组$(E_0, E_{\theta_0}, E_{\theta_1}, E_1)$的一个子四元组，使得

$$E_{\theta_0} = (E_0, E_{\theta_1})_{\eta_0,p_0,J}, \quad E_{\theta_1} = (E_{\theta_0}, E_1)_{\eta_1,p_1,J}$$

对于给定的 $0 < \eta_0, \eta_1 < 1$ 和 $1 \le p_0, p_1 \le \infty$。此外，我们作出以下两个假设。

(1) 子对(A_0, A_{θ_1})在(E_0, E_{θ_1})中是拟补的，并且存在连续嵌入$A_{\theta_0} \to (A_0, A_{\theta_1})_{\eta_0,p_0,K}$，二者的常数均为 C_0。*(2)* 子对(A_{θ_0}, A_1)在(E_{θ_0}, E_1)中是拟补的，并且存在连续嵌入$A_{\theta_1} \to (A_{\theta_0}, A_1)_{\eta_1,p_1,K}$，二者的常数均为 C_1。

那么，子对(A_0, A_1) 在(E_0, E_1) 中是拟补的，其常数仅取决于 C_0, C_1, η_0, η_1。

4. 非交换积分理论

本节内容摘自 [3]。

4.1. **半有限 von Neumann 代数**。 设 M 是一个（半）有限 *von Neumann* 代数，即配备了正规（半）有限忠实（n.s.f.）迹 τ的 von Neumann 代数。令 H 表示 M 作用其上的希尔伯特空间。若 H 上的闭稠密定义算子 x 具有极分解 $x = u|x|$ 和谱分解 $|x| = \int_0^\infty s de_s$，则称其隶属于 M，如果 $u \in M$ 且对所有 $s > 0$都有 $e_s \in M$。 x 的分布函数是关于变量 $s > 0$ 的右连续递减函数，记作 λ_x，满足

$$\lambda_x(s) = \tau(1 - e_s), \quad \text{for } s > 0.$$

x 的奇异函数 是关于变量 $s > 0$ 的右连续递减函数，记作 μ_x，满足

$$\mu_x(s) := \inf\{t > 0 : \lambda_x(t) \le s\}, \quad \text{for } s > 0.$$

H 上的闭稠密定义算子 x 若隶属于 M 且其分布函数（或奇异函数）至少取一个有限值，则称其为 τ-可测的 。 M 的任意元素都是 τ-可测的。于是， τ-可测算子集合 $L_0(M)$具有 $*$-代数的典范结构，使得包含映射$M \to L_0(M)$是一个 $*$-态射，并且 τ 典范地扩张到 $L_0(M)$ 的正部 $L_0(M)_+$，使得

$$\tau(x) = \int_0^\infty \lambda_x(s)ds = \int_0^\infty \mu_x(s)ds, \quad \text{for } x \in L_0(M)_+.$$

我们定义

$$L_\infty(M) := M$$

and

$$L_1(M) := \{x \in L_0(M) : \tau(|x|) < \infty\}$$

于是， $L_1(M)$ 是 $L_0(M)$ 的一个子空间，并赋予完备范数 $\|\cdot\|_{L_1(M)}$，其定义如下

$$\|x\|_{L_1(M)} = \tau(|x|).$$

此外，迹 τ 可延拓为 $L_1(M)$ 上的正压缩线性泛函。

4.2. **相容对 (L_1, L_∞).** 设 M 是一个半有限 von Neumann 代数，其迹记为 τ。 $*$-代数 $L_0(M)$ 具有一个典范的豪斯多夫拓扑，使包含映射 $L_1(M) \to L_0(M)$ 和$L_\infty(M) \to L_0(M)$ 均为连续映射，从而使这一对 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 成为相容对。

命题 1.17。 设 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的一个精确插值空间。若 $x \in E(M)$, $a, b \in M$，则 $axb \in E(M)$，其中 $\|axb\|_{E(M)} \le \|a\|_M \|x\|_{E(M)} \|b\|_M$。

定理 1.18 ([3](定理 3.9.16))。 设 $x \in L_0(M)$。那么 $x \in L_1(M) + L_\infty(M)$ 当且仅当对每个$t > 0$，我们都有

$$\int_0^t \mu_x(s)ds < \infty$$

在这种情况下，我们有

$$K_t(x, L_1(M), L_\infty(M)) = \int_0^t \mu_x(s)ds, \quad \text{for } t > 0.$$

定理 *1.19*（[4]（定理 *2.4*））。设 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的精确插值空间。对于每个x，若 $y \in L_0(M)$ 满足 $K_t(x) \le K_t(y)$（对 $t>0$），且我们有 $y \in E(M)$，则 $x \in E(M)$，其中 $\|x\|_{E(M)} \le \|y\|_{E(M)}$。注记。因此，如果 $x \in E(M)$，那么我们有 x^*，$|x| \in E(M)$，其中 $\||x|\|_{E(M)} = \|x^*\|_{E(M)} = \|x\|_{E(M)}$。

如果 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的精确插值空间，那么它的 *Köthe* 对偶

$$E^\times(M) := \{y \in L_0(M) : \forall x \in E(M),\ xy \in L_1(M)\}$$
$$= \{y \in L_0(M) : \forall x \in E(M),\ yx \in L_1(M)\}$$

是 $L_0(M)$ 的一个子空间，并赋予完备范数 $\|\cdot\|_{E^\times(M)}$，该范数由表达式给出

$$\|y\|_{E^\times(M)} = \sup_{x\in E(M),\ \|x\|_{E(M)}\le 1} |\tau(xy)| = \sup_{x\in E(M),\ \|x\|_{E(M)}\le 1} |\tau(yx)|, \quad \text{for } y \in E^\times(M).$$

根据定义，若 $x \in E(M)$ 且 $y \in E^\times(M)$，则 xy，$yx \in L_1(M)$，并且

$$\max\{\|xy\|_{L_1(M)}, \|yx\|_{L_1(M)}\} \le \|x\|_{E(M)}\|y\|_{E^\times(M)}. \qquad \textit{(generalized Hölder's inequality)}$$

如果 $E(M)$、$F(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的两个精确插值空间，那么我们有

$$(E\cap F)^\times(M) = E^\times(M) + F^\times(M), \quad (E+F)^\times(M) = E^\times(M)\cap F^\times(M)$$

范数相等。

定理 1.20([3](命题 3.4.8，定理 3.4.24))。我们有 $L_1(M)^\times = L_\infty(M)$ 和 $L_\infty(M)^\times = L_1(M)$，且范数相等。

定理 1.21 ([3](推论 4.3.9))。设 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$的精确插值空间。则 *Köthe* 对偶 $E^\times(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$的精确插值空间。此外，双线性形式

$$\begin{cases} E(M)\times E^\times(M) & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & \tau(xy^*) \end{cases}$$

是非退化的，因此在 $E(M)$与 $E^\times(M)$之间定义了典范对偶性，称为迹对偶。最后，$L_1(M)\cap L_\infty(M)$ 相对于此对偶性分别分离 $E(M)$和 $E^\times(M)$中的每个点。

设 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的精确插值空间，并令 $E^*(M)$ 表示作为赋范空间的 $E(M)$ 的对偶空间。于是，迹对偶给出一个典范等距算子 $E^\times(M) \to E^*(M)$，但一般而言它不一定是满射。根据 [3][定理 5.2.9，命题 5.3.2], ，当且仅当 $E(M)$ 的范数是序连续的时，它是满射；也就是说，对于每个递减网 $(x_\alpha)_\alpha$，其中 $E(M)_+$满足 $\inf_\alpha x_\alpha = 0$，都有 $\inf_\alpha \|x_\alpha\|_{E(M)} = 0$。因此，如果 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的精确插值空间且范数序连续，那么 $E(M)$ 是 $E^\times(M)$ 的预对偶，从而 $E^\times(M)$ 继承一个典范弱星拓扑。

以下结果可直接得出。

定理 1.22. 设 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的一个具有序连续范数的精确插值空间。那么，子空间 $L_1(M)\cap L_\infty(M)$在 $E(M)$中范数稠密，并且在 $E^\times(M)$中 w*-稠密。

推论 1.23. 设 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的一个具有序连续范数的精确插值空间。设 $(p_\alpha)_\alpha$ 是 M 的一个有限投影递增网，满足 $\sup_\alpha p_\alpha = 1$。

(1) 若 $x \in E(M)$，则网 $(p_\alpha x p_\alpha)_\alpha$ 在 $E(M)$中关于范数拓扑收敛到 x。*(2)* 若 $y \in E^\times(M)$，则网 $(p_\alpha y p_\alpha)_\alpha$ 在 $E^\times(M)$中关于 w*-拓扑收敛到 y。

证明。令 $x \in E(M)$ 且 $\epsilon > 0$。由于 $\cup_\alpha p_\alpha M p_\alpha$ 在 M 中弱*稠密，我们推得 $\cup_\alpha p_\alpha(L_1(M)\cap L_\infty(M))p_\alpha$ 在 $\sigma(E(M), E^\times(M))$ 中弱稠密，因此在 $E(M)$ 中范数稠密，因为 $E(M)$ 具有序连续范数。因此，存在 β 和 $y \in L_1(M)\cap L_\infty(M)$，使得 $\|x - p_\beta y p_\beta\|_{E(M)} < \epsilon$。于是，对于所有 $\alpha \ge \beta$，我们有

$$\begin{aligned} \|x - p_\alpha x p_\alpha\|_{E(M)} &= \|x - p_\beta y p_\beta + p_\beta y p_\beta - p_\alpha x p_\alpha\|_{E(M)} \\ &\le \|x - p_\beta y p_\beta\|_{E(M)} + \|p_\alpha(p_\beta y p_\beta - x)p_\alpha\|_{E(M)} \\ &\le 2\|x - p_\beta y p_\beta\|_{E(M)} < 2\epsilon \end{aligned}$$

其 表明 $(p_\alpha x p_\alpha)_\alpha$ 在范数下收敛到 x。现在，如果 $y \in E^\times(M)$，那么对于每个 $x \in E(M)$，我们得到

$$\tau(xp_\alpha y p_\alpha) = \tau(p_\alpha x p_\alpha y) \underset{\alpha}{\to} \tau(xy)$$

如所需。 □

4.3. **L_p-空间与 $L_{p,\infty}$-空间**。设 M为一个半有限 von Neumann 代数，其迹记为 τ。对于$1 < p < \infty$，以及 $x \in L_0(M)$，我们定义

$$\|x\|_{L_p(M)} := \int_0^\infty \lambda_x(s) p s^{p-1} ds = \int_0^\infty \mu_x(s)^p ds.$$

那么，对于 $1 < p < \infty$， L_p-空间

$$L_p(M) := \left\{x \in L_0(M) \ : \ \|x\|_{L_p(M)} < \infty\right\}$$

是 $L_0(M)$ 的一个子空间，并且在 $\|\cdot\|_{L_p(M)}$ 下成为一个完备赋范空间。

定理 1.24 ([3](推论 6.2.1)).设 $1 < p < \infty$。则 $L_p(M)$是以下空间的一个带序连续范数的精确插值空间：$(L_1(M), L_\infty(M))$，并且 $L_p(M)^\times = L_q(M)$其中 $1 < q < \infty$满足$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$。

以下两个结果是经典结论。

定理 1.25(Riesz-Thorin 定理). 设 $1 < p < \infty$。则

$$L_p(M) = [L_1(M), L_\infty(M)]_{1-1/p}$$

范数相等。

定理 1.26。设 $1 < p < \infty$。则

$$L_p(M) = (L_1(M), L_\infty(M))_{1-1/p,p,K}$$

范数等价，其中常数仅依赖于 p。

对于 $1 < p < \infty$和 $x \in L_0$（M），我们定义

$$\|x\|_{L_{p,\infty}(M)} := \sup_{t>0} t^{-(1-1/p)} \int_0^t \mu_x(s) ds$$

那么，对于 $1 < p < \infty$，$L_{p,\ \infty}$-空间

$$L_p(M) := \left\{x \in L_0(M) \ : \ \|x\|_{L_p(M)} < \infty\right\}$$

是 $L_0(M)$的一个子空间，并且在范数 $\|\cdot\|_{L_{p,\ \infty}(M)}$下成为一个完备赋范空间。这并非文献中通常给出的定义，但由于以下估计，它与通常定义等价

$$\sup_{t>0} t^{1/p} \mu_x(t) \le \|x\|_{L_{p,\infty}(M)} \le q \sup_{t>0} t^{1/p} \mu_x(t), \quad \text{for } x \in L_0(M)$$

其中 $1 < q < \infty$ 满足 $p^{-1} + q^{-1} = 1$。最后，对于 $1 \le p < \infty$，我们定义

$$L_{p,1}(M) := L_{q,\infty}(M)^\times$$

其中 $1 < q < \infty$ 满足 $p^{-1} + q^{-1} = 1$。

定理 1.27 （[3]（定理 6.3.8，定理 6.4.3））。 设 $1 < p \le \infty$，并设 $1 \le q < \infty$ 满足$p^{-1} + q^{-1} = 1$。那么$L_{q,\ 1}$（M） 具有序连续范数，并且

$$L_{q,1}^\times(M) = L_{p,\infty}(M)$$

且范数相等。

因此，若 $1 < p \le \infty$，则 $L_{p,\ \infty}(M)$ 作为 $L_{q,\ 1}(M)$ 的对偶，具有规范赋予的弱星拓扑，其中 $1 \le q < \infty$ 满足 $p^{-1} + q^{-1} = 1$。

命题 1.28。 设 N 是一个半有限 *von Neumann* 代数，且 $1 < p \leq \infty$。若 $x \in L_p(M)$ 且 $f \in L_{p,\ \infty}(N)$，则 $x \otimes f \in L_{p,\ \infty}(M\bar{\otimes}N)$，其中

$$\|x \otimes f\|_{L_{p,\infty}(M\bar{\otimes}N)} \leq q\|x\|_{L_p(M)}\|f\|_{L_{p,\infty}(N)}.$$

其中 $1 \leq q < \infty$ 满足 $p^{-1} + q^{-1} = 1$。此外，若 $x \in L_p(M)$，则有界算子

$$\begin{cases} L_p(N) & \to & L_{p,\infty}(M\bar{\otimes}N) \\ f & \mapsto & x \otimes f \end{cases}$$

是w*-连续的。

证明。 情形 $p = \infty$ 是经典的，因此我们假设 $p < \infty$。若 $x \in L_p(M)$ 且 $f \in L_{p,\infty}(N)$，则有

$$\begin{aligned} \|x \otimes f\|^p_{L_{p,\infty}(M)} &\leq q \sup_{t>0} t^{1/p}\mu_{x\otimes f}(t) = q \sup_{t>0} t^p \lambda_{x\otimes f}(t) \\ &= q \sup_{t>0} t^p \int_0^\infty \lambda_y(t/\mu_x(s))ds \\ &= q \sup_{t>0} \int_0^\infty (t/\mu_x(s))^p \lambda_f(t/\mu_x(s))\mu_x(s)^p ds \\ &\leq q \int_0^\infty \sup_{t>0} t^p \lambda_f(t)\mu_x(s)^p ds \leq q\|x\|^p_{L_p(M)}\|f\|^p_{L_{p,\infty}(N)}. \end{aligned}$$

现在，固定 $x \in L_p(M)$，并考虑算子 $T_x\colon L_q(M) \odot L_{q,1}(N) \to L_{q,1}(N)$，使得

$$T_x(y \otimes g) = \tau(xy)g, \quad \text{for } y \in L_p(M),\ g \in L_{q,1}(N).$$

令 σ 表示 N 的迹。若 $w \in L_q(M) \odot L_{q,1}(N)$，则直接计算可知，对于 $f \in L_{p,\infty}(N)$，有

$$\sigma(fT_x(w)) = (\tau \otimes \sigma)((x \otimes f)w).$$

因此，对于 $w \in (L_1 \cap L_\infty)(M) \odot (L_1 \cap L_\infty)(N)$，我们得到

$$\begin{aligned} \|T_x(w)\|_{L_{q,1}(N)} &= \sup_{\|f\|_{L_{p,\infty}(N)} \leq 1} |\sigma(yT_x(w))| \\ &= \sup_{\|f\|_{L_{p,\infty}(N)} \leq 1} |(\tau \otimes \sigma)((x \otimes f)w)| \\ &\leq \sup_{\|f\|_{L_{p,\infty}(N)} \leq 1} \|x \otimes f\|_{L_{p,\infty}(M\bar{\otimes}N)}\|w\|_{L_{q,1}(M\bar{\otimes}N)} \\ &\leq p\|x\|_{L_p(M)}\|w\|_{L_{q,1}(M\bar{\otimes}N)} \end{aligned}$$

由于代数张量积 $(L_1 \cap L_\infty)(M) \odot (L_1 \cap L_\infty)(N)$ 分离了 $(L_1 + L_\infty)(M\bar{\otimes}N)$ 中的点，上述计算表明，T_x 可延拓为有界算子 $L_{q,\ 1}(M\bar{\otimes}N) \to L_{q,\ 1}(N)$，其对偶与算子

$$\begin{cases} L_{p,\infty}(N) & \to & L_{p,\infty}(M\bar{\otimes}N) \\ f & \mapsto & x \otimes f \end{cases}.$$

证明完毕。 □

4.4. **条件期望**。 设 M 为半有限 von Neumann 代数，且 N 为 M的半有限冯诺依曼子代数，即 N 的冯诺依曼子代数，并且迹在 N上的限制仍为半有限，因此是 N上的正规半有限忠实迹。在这种情况下，存在一个（保迹的正规忠实）条件期望 E，将 M 映到 N上。此外，条件期望 E 可延拓为一个压缩且幂等的相容算子

$$E : (L_1(M), L_\infty(M)) \to (L_1(N), L_\infty(N))$$

其在 $L_1(N) + L_\infty(N)$ 上限制为恒等映射。因此，如果 F 是精确插值函子，那么 F $(L_1(N), L_\infty(N))$ 是 F $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的子空间，并且包含算子 F $(L_1(N), L_\infty(N)) \to$F $(L_1(M), L_\infty(M))$ 是等距的。因此，如果 F 是精确插值函子，那么条件期望 E 诱导出一个规范的压缩幂等算子

$$E : \mathcal{F}(L_1(M), L_\infty(N)) \to \mathcal{F}(L_1(M), L_\infty(M))$$

值域为 F $(L_1(N),\ L_\infty(N))$。

第2. 抽象 Hardy 空间的插值

设 M 为一个半有限 von Neumann 代数。

记号。 若 P 是 $L_2(M)$ 上任意一个（自伴）投影，且 $E(M)$ 是相容对 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的任意一个精确插值空间，则定义 $H_E(P)$ 为子空间在 $\sigma(E(M), E^\times(M))$ 中的弱闭包

$$E(M) \cap P(L_2(M))$$

位于 $E(M)$ 中。记 $H_p(P) := H_{L_p}(P)$，其中 $1 \le p \le \infty$。根据定义， $H_2(P) = P(L_2(M))$。此外，记 $H_{p,1}(P) := H_{L_{p,1}}(P)$，以及 $H_{p,\infty}(P) := H_{L_{p,\infty}}(P)$，其中 $1 < p < \infty$。它们是与 P 相关联的抽象 *Hardy* 空间。

注记。 若 P 是 $L_2(M)$ 上的一个投影，其补投影为 $P^\perp$，且 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的精确插值空间，则根据定义显然， $H_E(P)$ 和 $H_{E^\times}(P)$ 分别包含于 $H_{E^\times}(P^\perp)$ 和 $H_E(P^\perp)$ 的正交补；这里的正交性是相对于 $E(M)$ 与 $E^\times(M)$ 之间的迹对偶而言。

5. 技术假设

设 M 是一个半有限 von Neumann 代数。

若 P 是 $L_2(M)$ 上的一个投影，则称其满足 技术假设 ，如果

(1) 若 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的一个带序连续范数的精确插值空间，则 $H_E(P)$、$H_{E^\times}(P)$ 关于迹对偶的正交补分别与 $H_E(P^\perp)$、$H_{E^\times}(P^\perp)$ 重合。(2) 存在 $(L_1 + L_\infty)(M)$ 的一个子空间 $H(P)$，它在 $(L_1 + L_\infty)(M)$ 中是弱闭的（关于 $(L_1 + L_\infty)(M)$ 与 $(L_1 \cap L_\infty)(M)$ 之间的迹对偶），并且满足：若 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的一个带序连续范数的精确插值空间，则有 (3) 若 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的一个带序连续范数的精确插值空间，则该子空间在 $H_E(P)$ 中范数稠密，并在 $H_{E^\times}(P)$ 中弱*稠密

$$H_E(P) = H(P) \cap E(M), \quad H_{E^\times}(P) = H(P) \cap E^\times(M).$$

$$(L_1 \cap L_\infty)(M) \cap P(L_2(M))$$

命题 2.1. 设 P 是 $L_2(M)$ 上的一个投影，且满足技术假设。那么， $L_2(M)$ 上的补投影 $P^\perp$ 也满足技术假设。

证明。 由于 P 满足 (1)，由双极定理可知， $P^\perp$ 满足 (1)。

对于 (2)，令 $H(P^\perp)$ 表示在 $(L_1 + L_\infty)(M)$ 与 $(L_1 \cap L_\infty)(M)$ 之间的迹对偶下，$(L_1 \cap L_\infty)(M) \cap P(L_2(M))$ 的正交补。那么， $H(P^\perp)$ 确实是 $(L_1 + L_\infty)(M)$ 中的弱闭集。设 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的一个具有序连续范数的精确插值空间。由于 $H_E(P^\perp)$ 与 $H_{E^\times}(P)$ 正交，且 $H_{E^\times}(P)$ 包含 $(L_1 \cap L_\infty)(M) \cap P(L_2(M))$，我们推得 $H_E(P^\perp)$ 包含于 $H(P^\perp)$，从而包含于 $E(M) \cap H(P^\perp)$。对于反向包含，设 $x \in E(M) \cap H(P^\perp)$。由于 P 满足 (3)，我们推得 x 与 $H_{E^\times}(P)$ 正交。由于 P 满足 (1)，我们推得 $x \in H_E(P^\perp)$。因此，$H_E(P^\perp) = E(M) \cap H(P^\perp)$，正如所需。类似地，我们证明 $H_{E^\times}(P^\perp) = E^\times(M) \cap H(P^\perp)$。

下面仍需证明（3）。注意到，由于 P 对 $L_2(M)$ 的弱拓扑是弱连续的，$(L_1 \cap L_\infty)(M) \cap P^\perp(L_2(M))$ 是 $(L_1 \cap L_\infty)(M)$ 中的弱闭集。因此，由于 P 满足（ 1 ），根据双极定理，只需证明：如果 $x \in E^\times(M)$（分别地， $x \in E(M)$）与 $(L_1 \cap L_\infty)(M) \cap P^\perp(L_2(M))$ 正交，那么 $x \in H_{E^\times}(P)$（分别地， $x \in H_E(P)$）。设 $x \in E^\times(M)$（分别地， $x \in E(M)$）与 $(L_1 \cap L_\infty)(M) \cap P^\perp(L_2(M))$ 正交。那么，关于 $(L_1 + L_\infty)(M)$ 与 $(L_1 \cap L_\infty)(M)$ 之间的迹对偶， x 属于 $H(P)$ 的双正交补。根据双极定理，并且由于按假设 $H(P)$ 是 $(L_1 + L_\infty)(M)$ 中的弱闭集，我们推出 $x \in H(P)$。因此， $x \in E^\times(M) \cap H(P)$（分别地， $x \in E^\times(M) \cap H(P)$）。由于 P 满足（2），最终得到 $x \in H_{E^\times}(P)$（分别地， $x \in H_E(P)$），如所要求。□

下面的结果是 Pisier 定理（定理 1.8）的直接推论。

命题 *2.2.* 设 P 是 $L_2(M)$ 上满足技术假设的一个投影，并设 $E_0(M)E_1(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的两个具有序连续范数的精确插值空间。若子对 $(H_{E_0}(P), H_{E_1}(P))$ 在 $(E_0(M), E_1(M))$ 中是拟补的，且常数为 C，则子对 $(H_{E_0^\times}(P^\perp), H_{E_1^\times}(P^\perp))$ 在 $(E_0^\times(M), E_1^\times(M))$ 中也是拟补的，其常数仅依赖于 C。

命题 *2.3.* 设 P 是 $L_2(M)$上的一个投影，满足技术假设；设 $E_0(M)$、 $E_1(M)$是 $(L_1(M), L_\infty(M))$的两个精确插值空间，使得子对 $(H_{E_0}(P), H_{E_1}(P))$在 $(E_0(M), E_1(M))$中准可补，常数为 C；并设 Φ 是一个 K-参数空间，使得该精确插值空间

$$E_\theta(M) := K_\Phi(E_0(M), E_1(M))$$

具有序连续范数。于是

$$H_{E_\theta}(P) = K_\Phi(E_0(M), E_1(M))$$

在等价范数意义下成立，其中常数仅依赖于 C。

证明。 根据命题 1.7，只需验证

$$(H_{E_0}(P) + H_{E_1}(P)) \cap E_\theta(M)$$

是 $H_{E_\theta}(P)$的稠密子空间。根据技术假设的第 (2) 点，它是一个子空间；根据技术假设的第 (3) 点，它是稠密的。□

命题 *2.4.* 设 P 是 $L_2(M)$ 上满足技术假设的一个投影，并设 $E_0(M)$,$E_1(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的两个精确插值空间，使得子对 $(H_{E_0}(P), H_{E_1}(P))$ 在 $(E_0(M), E_1(M))$ 中是拟补的，其常数为 C。设 Φ 是一个 J-参数空间，使得该精确插值空间

$$E_\theta^\times(M) := J_\Phi(E_0^\times(M), E_1^\times(M))$$

是某个具有序连续范数的精确插值空间 $E_\theta(M)$ 的 *Köthe* 对偶。此外，假设 $E_0(M)$、 $E_1(M)$ 都具有序连续范数。那么，子对 $(H_{E_0^\times}(P^\perp), H_{E_1^\times}(P^\perp))$ 在$(E_0^\times(M), E_1^\times(M))$中是正规的，并且

$$E_\theta^\times(M) \cap (H_{E_0^\times}(P^\perp) + H_{E_1^\times}(P^\perp)) = H_{E_\theta^\times}(P^\perp)$$

and

$$E_\theta^\times(M)/H_{E_\theta^\times}(P^\perp) = J_\Phi(E_0^\times(M)/H_{E_0^\times}(P^\perp), E_1^\times(M)/H_{E_1^\times}(P^\perp))$$

其范数等价，等价常数仅依赖于 C。

证明. 由于 $P^\perp$ 满足技术假设，我们可知 $E_\theta^\times(M) \cap (H_{E_0^\times}(P^\perp) + H_{E_1^\times}(P^\perp))$ 是 $H_{E_\theta^\times}(P^\perp)$ 的弱星稠密子空间。因此，根据克莱因-斯米连定理，只需验证 $E_\theta^\times(M) \cap (H_{E_0^\times}(P^\perp) + H_{E_1^\times}(P^\perp))$ 的单位球在 $H_{E_\theta^\times}(P^\perp)$ 中是弱星闭的。设 $(x_\alpha)_\alpha$ 是 $E_\theta^\times(M) \cap (H_{E_0^\times}(P^\perp) + H_{E_1^\times}(P^\perp))$ 单位球中的一个网，并设 $x \in H_{E_\theta^\times}(P^\perp)$ 满足 $(x_\alpha)_\alpha$ 按 $E_\theta^\times(M)$ 的弱星拓扑收敛到 x。根据命题 2.2，我们知道 $(H_{E_0^\times}(P^\perp), H_{E_1^\times}(P^\perp))$ 在 $(E_0^\times(M), E_1^\times(M))$ 中是 K-闭的，其常数为 C。由于 $x_\alpha \in H_{E_0^\times}(P^\perp) + H_{E_1^\times}(P^\perp)$，我们推得可以写成

$$x_\alpha = y_\alpha + z_\alpha$$

其中 $y_\alpha \in H_{E_0^\times}(P^\perp)$、 $z_\alpha \in H_{E_1^\times}(P^\perp)$，且

$$\|y_\alpha\|_{E_0^\times} + \|z_\alpha\|_{E_1^\times} \le 2C\|x_\alpha\|_{E_0^\times + E_1^\times}.$$

根据 $E_\theta^\times(M)$ 的定义，我们有 $\|x_\alpha\|_{E_0^\times(M)+E_1^\times(M)} \le \|x_\alpha\|_{E_\theta^\times(M)} \le 1$。因此，网 $(y_\alpha)_\alpha$ 和 $(z_\alpha)_\alpha$ 分别在 $E_0^\times(M)$ 和 $E_1^\times(M)$ 中有界。由于 $E_0(M)$、 $E_1(M)$ 具有序连续范数，根据巴拿赫-阿劳格鲁定理，我们推得网 $(y_\alpha)_\alpha$ $(z_\alpha)_\alpha$ 分别存在聚点 $y \in H_{E_0^\times}(P^\perp)$ 和 $z \in H_{E_1^\times}^\times(P^\perp)$。

由于 $x = y + z$，我们得到 $x \in H_{E_0^\times}(P^\perp) + H_{E_1^\times}(P^\perp)$，如所需。最后，由命题 1.11，我们推得

$$E_\theta^\times(M)/H_{E_\theta}(P^\perp) = J_\Phi(E_0^\times(M)/H_{E_0}(P^\perp), E_1^\times(M)/H_{E_1}(P^\perp))$$

具有等价范数，其常数仅取决于 C。 □

以下结果直接由 Kislyakov/Xu定理（定理 1.16）以及定理 2.3推得。

命题 2.5. 设 P 是 $L_2(M)$ 上的一个投影，满足技术假设；再设 $E_0(M)$、$E_{\theta_0}(M)$、$E_{\theta_1}(M)$、 $E_1(M)$ 是 $(L_1(M)$、 $L_\infty(M))$ 的四个精确插值空间，且 $E_{\theta_0}(M)$、$E_{\theta_1}(M)$均具有序连续范数，并且

$$E_{\theta_0}(M) = (E_0(M), E_{\theta_1}(M))_{\eta_0,p_0,K}, \quad E_{\theta_1}(M) = (E_{\theta_0}(M), E_1(M))_{\eta_1,p_1,K}$$

对于给定的 $0 < \eta_0$、 $\eta_1 < 1$ 和 $1 \le p_0$、 $p_1 \le \infty$。此外，我们作出以下两个假设。

(1) 子对 $(H_{E_0}(P)$、 $H_{E_{\theta_1}}(P))$ 在 $(E_0(M)$、 $E_{\theta_1}(M))$ 中是拟补的，常数为 C_0.

(2) 子对 $(H_{E_{\theta_1}}(P)$、$H_{E_1}(P))$ 在 $(E_{\theta_1}(M)$、 $E_1(M))$ 中是拟补的，常数为 C_1。于是，子对 $(H_{E_0}(P)$、$H_{E_1}(P))$ 在 $(E_0(M)$、 $E_1(M))$ 中是拟补的，且其常数仅依赖于 C、 η_0、 η_1。

6. Jones 型投影

设 M 是一个半有限 von Neumann 代数。

如果投影 P 在 $L_2(M)$ 上是 Jones 型的，则称其满足

(1) P 满足技术假设。(2) 如果 $1 < p < \infty$，则 P 是 $L_p(M)$-有界的，其常数仅取决于 p。(3) 子对 $(H_1(P)$， $H_2(P))$ 和 $(H_1(P^\perp)$， $H_2(P^\perp))$ 都以一个普适常数在相容对 $(L_1(M)$， $L_2(M))$ 中是 K-闭的。

注记。 显然，如果 P 是 $L_2(M)$ 上的一个 Jones 型投影，那么补投影 $P^\perp$ 也是 Jones 型的。

定理2.6。 设 P 是作用在 $L_2(M)$ 上的 *Jones* 型投影。则子对 $(H_1(P)$， $H_\infty(P))$ 以一个普适常数在相容对 $(L_1(M)$， $L_\infty(M))$ 中是拟可补的。

证明。由性质 (2)，子对 $(H_{3/2}(P), H_4(P))$ 在 $(L_{3/2}(M), L_4(M))$ 中是可补的，因此也是拟补的，且具有一个普适常数。因此，我们可以对 $(L_1(M)$， $L_{3/2}(M)$， $L_2(M)$， $L_4(M))$ 的子四元组 $(H_1(P), H_{3/2}(P), H_2(P)$, $H_4(P))$ 应用命题 2.5，从而推出子对 $(H_1(P)$， $H_4(P))$ 在 $(L_1(M)$， $L_4(M))$ 中是拟补的，且具有一个普适常数。由于 $(H_1(P^\perp), H_2(P^\perp))$ 在 $(L_1(M), L_2(M))$ 中是拟补的，且具有一个普适常数，根据命题 2.2 以及性质 (1) 和 (3)，子对 $(H_2(P), H_\infty(P))$ 在 $(L_2(M)$， $L_\infty(M))$ 中是拟补的，且具有一个普适常数。因此，我们可以再次对 $(L_1(M)$， $L_2(M)$， $L_4(M)$， $L_\infty(M))$ 的子四元组 $(H_1(P), H_2(P), H_4(P), H_\infty(P))$ 应用命题 2.5，从而推出子对 $(H_1(P), H_\infty(P))$ 在 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 中是拟补的，且具有一个普适常数。□

由命题2.3，我们推导出以下结果。

定理 2.7。 设 P 是定义在 $L_2(M)$ 上的 *Jones* 型投影，且 Φ 是一个 K-参数空间，使得精确插值空间

$$E(M) := K_\Phi(L_1(M), L_\infty(M))$$

具有序连续范数。则

$$H_E(P) = K_\Phi(H_1(P), H_\infty(P))$$

两者的等价范数由普适常数控制。

推论 2.8。 设 P 是定义在 $L_2(M)$ 上的 *Jones* 型投影，且 $0 < \theta < 1$。则

$$H_{p_\theta}(P) = (H_1(P), H_\infty(P))_{\theta,p_\theta,K}$$

在等价范数下，常数仅依赖于 θ，其中 $1/p_\theta = 1 - \theta$。

7. Pisier 方法

7.1. Stein 插值定理。为满足后续需要，我们需要一个 Stein 插值定理的版本，用于弱星拓扑下的对偶空间中的解析算子族。由于我们未能在文献中找到这样的表述，故在此给出一个稍弱的形式的证明，这已足以满足本文的需要。

设 E^* 是一个赋有预对偶 E 的完备赋范空间，因此 E^* 赋有弱星拓扑。若函数 $f\colon \mathbb{S} \to E^*$ 满足对每个 $u \in E$，函数 $\mathbb{S} \to \mathbb{C}, z \mapsto u,\ f(z)$ 都是全纯的，则称其为弱星全纯函数。

设 (F_0^*, F_1^*) 是一个赋有预对偶的相容对，即正则相容对 (F_0, F_1)，并且存在相容对 (F_0^*, F_1^*) 与 (F_0, F_1) 的对偶空间之间的等距同构，如预备部分所定义。令 $\mathrm{F}_*(F_0^*, F_1^*)$ 表示如下函数 $f\colon \mathbb{S} \to F_0^* + F_1^*$ 所构成的函数空间：这些函数在 $\mathbb{S}$ 上弱星连续，在 $\mathbb{S}$ 上弱星全纯（其中 $F_0^* + F_1^*$ 赋有由与 $F_0 \cap F_1$ 的配对诱导的弱星拓扑），并满足 $f(j+it) \in F_j^*$，其中 $t \in \mathbb{R}, j \in \in \{0,1\}$；此外，对于 $j \in \in \{0,1\}$，函数 $\mathbb{R} \to F_j^*, t \mapsto f(j+it)$ 弱星连续且有界。显然，$\mathrm{F}(F_0^*, F_1^*)$ 是 $\mathrm{F}_*(F_0^*, F_1^*)$ 的子空间。对于 $f \in \mathrm{F}_*(F_0^*, F_1^*)$，定义

$$\|f\|_{\mathcal{F}(F_0^*, F_1^*)} := \max_{j\in\{0,1\}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(j+it)\|_{F_j^*}.$$

以下命题的证明是直接的。

命题 2.9。设 (F_0^*, F_1^*) 和 (G_0^*, G_1^*) 是两个配备预对偶的相容对。设 $T\colon (G_0^*, G_1^*) \to (F_0^*, F_1^*)$ 是一个相容有界算子，且算子 $T\colon G_0^* \to F_0^*$ 和 $T\colon G_1^* \to F_1^*$ 是w*-连续的。若 $f \in \mathcal{F}_*(G_0^*, G_1^*)$，则函数

$$\begin{cases} \mathbb{B} & \to & F_0^* + F_1^* \\ z & \mapsto & T(f(z)) \end{cases}$$

属于 $\mathcal{F}_*(F_0^*, F_1^*)$。

定理2.10 (w*-Stein 插值定理)。设 (E_0, E_1) 是一个相容对，且 (F_0^*, F_1^*)是一个配备预对偶的相容对。设 $(T_z)_{z\in\mathbb{S}}$ 是一个算子族 $E_0 \cap E_1 \to F_0^* + F_1^*$，满足以下两个条件。

- 对于每个 $u \in E_0 \cap E_1$，函数
$$\begin{cases} \mathbb{S} & \to & F_0^* + F_1^* \\ z & \mapsto & T_z(u) \end{cases}$$
属于$\mathcal{F}_*(F_0^*, F_1^*)$。
- 对于每个 $u \in E_0 \cap E_1$、$t \in \mathbb{R}$ 和 $j \in \{0,1\}$，我们有
$$\|T_{j+it}(u)\|_{F_j^*} \le \|u\|_{E_j}.$$

那么，对于 $u \in E_0 \cap E_1$ 和 $0 < \theta < 1$，我们有 $T_\theta(u) \in (F_0^*, F_1^*)_{\theta,\infty,K}$，其中

$$\|T_\theta(u)\|_{(F_0^*, F_1^*)_{\theta,\infty,K}} \le \|u\|_{[E_0,E_1]_\theta}.$$

证明需要一些预备结果。若 (E_0, E_1) 是一个相容对，令 $\mathrm{F}_\tau(E_0, E_1)$ 表示函数 $f\colon \mathbb{S} \to E_0 + E_1$ 的集合，其中的函数可写成有限和 $f = \sum_n g_n \otimes u_n$，其中$u_n \in E_0 \cap E_1$，且 $g_n : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ 是一个有界连续函数，在 $\mathbb{S}$ 上全纯，并且连续函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto g(j+it)$ 对于 $j \in \{0,1\}$ 在无穷远处消失。显然，$\mathrm{F}_\tau(E_0, E_1)$ 是 $\mathrm{F}(E_0, E_1)$ 的子空间。

引理 2.11 ([18][引理 2.5])。设 (E_0, E_1) 是一对相容对，$0 < \theta < 1$ 且 $u \in E_0 \cap E_1$ 满足$\|u\|_{[E_0,E_1]_\theta} < 1$。那么存在 $f \in \mathcal{F}_\tau(E_0, E_1)$ 使得 $u = f(\theta)$ 且 $\|f\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)} < 1$。

引理 2.12. 设 (F_0^*, F_1^*) 是一个配备预对偶 (F_0, F_1) 的相容对，$f \in \mathcal{F}_*(F_0^*, F_1^*)$ 且$0 < \theta < 1$。则 $f(\theta) \in (F_0^*, F_1^*)_{\theta,\infty}$ 满足

$$\|f(\theta)\|_{(F_0^*, F_1^*)_{\theta,\infty,K}} \le \|f\|_{\mathcal{F}(F_0^*, F_1^*)}.$$

证明. 固定 $t>0$。若 $u\in F_0\cap F_1$，则由 Hadamard三线定理应用于函数 $\mathbb{S}\to\mathbb{C}, z\mapsto u, f(z)\overline{\rangle}$ 可得

$$|\langle u,f(\theta)\rangle|\le \sup_{s\in\mathbb{R}}|\langle u,f(is)\rangle|^{1-\theta}\sup_{s\in\mathbb{R}}|\langle u,f(1+is)\rangle|^{\theta}.$$

现在，若记 $C:=\|f\|_{\mathcal{F}(F_0^*,F_1^*)}$，对于 $s\in\mathbb{R}$，我们有

$$|\langle u,f(is)\rangle|\le\|u\|_{F_0}\|f(j+is)\|_{F_0^*}\le C\|u\|_{F_0},$$
$$|\langle u,f(1+is)\rangle|\le\|u\|_{F_1}\|f(j+is)\|_{F_1^*}\le C\|u\|_{F_1}=Ct\|u\|_{t^{-1}F_1}.$$

因此，结合前面的估计，我们得到

$$|\langle u,f(\theta)\rangle|\le C\|u\|_{F_0}^{1-\theta}t^{\theta}\|u\|_{t^{-1}F_1}^{\theta}\le Ct^{\theta}\|u\|_{F_0\cap t^{-1}F_1}.$$

最后，我们得到

$$\begin{aligned}K_t(f(\theta),F_0^*,F_1^*)&=\|f(\theta)\|_{F_0^*+tF_1^*}\\&=\sup_{\substack{u\in F_0\cap F_1\\ \|u\|_{F_0\cap t^{-1}F_1}\le 1}}|\langle u,f(\theta)\rangle|\\&\le\sup_{\substack{u\in F_0\cap F_1\\ \|u\|_{F_0\cap tF_1}\le 1}}Ct^{\theta}\|u\|_{F_0\cap t^{-1}F_1}\\&\le Ct^{\theta}.\end{aligned}$$

这确实表明 $f(\theta)\in(F_0^*,F_1^*)_{\theta,\infty,K}$，其中 $\|f(\theta)\|_{(F_0^*,F_1^*)_{\theta,\infty,K}}\le C$。 □

现在我们可以完成定理 2.10的证明。

w-Stein*插值定理的证明。 取 $u\in E_0\cap E_1$ 和 $0<\theta<1$ 满足 $\|u\|_{[E_0,E_1]_\theta}<1$。由引理2.11，可得 $u=f(\theta)$ 满足 $f=\sum_n f_n\otimes u_n\in\mathcal{F}_\tau(E_0,E_1)$ 使得

$$\|f\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)}<1.$$

令 $g:\mathbb{S}\to F_0^*+F_1^*$为满足 $g(z)=T_z(f(z))=\sum_n f_n(z)T_z(u_n)$ 的函数，其中 $z\in\mathbb{S}$。根据假设，显然 g属于 $\mathrm{F}_*(F_0^*,F_1^*)$。此外，若 $t\in\mathbb{R}$，则根据假设

$$\|g(j+it)\|_{F_j^*}=\|T_{j+it}(f(j+it))\|_{F_j^*}\le\|f(j+it)\|_{E_j}\le\|f\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)}$$

因此

$$\|g\|_{\mathcal{F}(F_0^*,F_1^*)}\le\|f\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)}<1.$$

由于我们有

$$g(\theta)=T_\theta(f(\theta))=T_\theta(u),$$

由引理 2.12可推得 $T_\theta(u)\in(F_0^*,F_1^*)_{\theta,\infty,K}$，其中

$$\|T_\theta(u)\|_{(F_0^*,F_1^*)_{\theta,\infty,K}}\le\|g\|_{\mathcal{F}(F_0^*,F_1^*)}<1.$$

证明完成。 □

7.2. **Haagerup 嵌入**。 令 N 表示交换 von Neumann 代数 $L_\infty(\mathbb{R})$，并配备满足以下条件的（正规、半有限、忠实）迹 σ

$$\sigma(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^t\,dt,\quad\text{for } f\in N_+.$$

In t在后文中，我们固定一个指数 $1<q<\infty$，并考虑共轭指数 $1<p<\infty$，即满足 t

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

对于 $z\overline{\in}\mathbb{B}$，令 $p_z\in[1,p]$ 和 $q_z\in[q,\infty]$ 为满足以下条件的指数

$$\frac{1}{p_z}=\frac{1-\mathrm{Re}(z)}{p}+\mathrm{Re}(z),\qquad\frac{1}{q_z}=\frac{1-\mathrm{Re}(z)}{q}.$$

最后，对于 $z\overline{\in}\mathbb{B}$，我们考虑连续函数 $f_z\in C(\mathbb{R})$，使得

$$f_z(s)=e^{-s(1-z)/q},\qquad\text{for } s\in\mathbb{R}.$$

直接计算可得

$$\lambda_{f_z}(s) = s^{-q_z}, \quad \mu_{f_z}(s) = s^{-1/q_z} \text{ for } s > 0.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\|f_z\|_{L_{q_z,\infty}(N)} &= \sup_{t>0} t^{-1/p_z} K_t(f_z, L_1(M\bar{\otimes}N), L_\infty(M\bar{\otimes}N)) \\ &= \sup_{t>0} t^{-1/p_z} \int_0^t \mu_{f_z}(s)ds \\ &= \sup_{t>0} t^{-1/p_z} \int_0^t s^{-1/q_z} ds \\ &= p_z.\end{aligned}$$

特别地，$f_z \in L_{q_z,\ \infty}(N)$。下文中，相容对 $(L_{q,\ \infty}(N),\ L_\infty(N))$ 配备其典范前对偶，该典范前对偶来自它与相容对 $(L_{p,\ 1}(N),\ L_1(N))$ 的典范配对，因此我们可以将空间 $\mathrm{F}_*(L_{q,\ \infty}(N),\ L_\infty(N))$ 视为按上一段中的定义所得的空间。

引理 2.13。函数

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{S}} & \to & L_{q,\infty}(N) + L_\infty(N) \\ z & \mapsto & f_z \end{cases}$$

是良定义的，并且属于 $\mathcal{F}_*(L_{q,\ \infty}(N),\ L_\infty(N))$。

证明。若 $z \overline{\in} \mathbb{S}$，则根据实方法的重申定理，我们有

$$L_{q_z,\infty}(N) = (L_{q,\infty}(N), L_\infty(N))_{\mathrm{Re}(z),\infty}.$$

由于 $f_z \in L_{q_z,\infty}(N)$，我们推得 $f_z \in L_{q,\infty}(N) + L_\infty(N)$。因此，函数 $\mathbb{S} \to L_{q,\infty}(N) + \overline{L_\infty}(N), z \mapsto f_z$ 确实定义良好。此外，函数 $\mathbb{R} \to L_{q,\infty}(N)$、$t \mapsto f_{it}$ 和 $\mathbb{R} \to L_\infty(N)$、$t \mapsto f_{1+it}$显然是范数有界的。现在，若 $g \in L_1(N)$，则对每个 $t \in \mathbb{R}$，我们都有

$$\sigma(f_{1+it}g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist/q} g(s)d\sigma(s).$$

因此 函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto \sigma(f_{1+it}g)$ 是连续的。现在，若 $g \in L_{p,1}(N)$，则对每个 $t \in \mathbb{R}$，我们有 ve

$$\sigma(f_{it}g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s(1-it)/q} g(s)d\sigma(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist/q} f_0(s)g(s)d\sigma(s).$$

由于 $f_0 \in L_{q,\infty}(N) = L_{p,1}(N)^\times$，我们有 $f_0 g \in L_1(N)$，因此函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto \sigma(f_{it}g)$ 是连续的。因此，函数 $\mathbb{R} \to L_{q,\infty}(N)$、$t \mapsto f_{it}$ 和 $\mathbb{R} \to L_\infty(N)$、$t \mapsto f_{1+it}$ 都是弱星连续的。类似地，容易看出函数

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{S}} & \to & L_{q,\infty}(N) + L_\infty(N) \\ z & \mapsto & f_z \end{cases}$$

在 $\mathbb{S}$ 上弱星连续，并在 $\mathbb{S}$ 上 w*全纯。 □

现在，设 M 是一个半有限 von Neumann 代数。

若 $z \overline{\in} \mathbb{S}$，由于 $f_z \in L_{q_z,\ \infty}(N)$，根据命题 1.28 可知算子

$$F_z : \begin{cases} L_{q_z}(M) & \to & L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N) \\ x & \mapsto & x \otimes f_z \end{cases}.$$

是良定义的。下文中，相容对 $(L_{q,\ \infty}(M\bar{\otimes}N),\ L_\infty(M\bar{\otimes}N))$ 配备了其预对偶，该预对偶来自它与相容对 $(L_{p,\ 1}(M\bar{\otimes}N),\ L_1(M\bar{\otimes}N))$ 的典范配对，因此我们可以考虑上一段中定义的空间 $\mathrm{F}_*(L_{q,\ \infty}(M\bar{\otimes}N),\ L_\infty(M\bar{\otimes}N))$。

定理 2.14。 算子族 $(F_z)_{z\in\mathbb{S}}$ 满足以下条件。–

- 对于每个 $x \in (L_q \cap L_\infty)(M)$，函数

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{S}} & \to & L_{q,\infty}(M\bar{\otimes}N) + L_\infty(M\bar{\otimes}N) \\ z & \mapsto & F_z(x) \end{cases}$$

属于 $\mathcal{F}_*(L_{q,\infty}(M\bar{\otimes}N), L_\infty(M\bar{\otimes}N))$,

- 对任意 $z \in \mathbb{S}$ 以及 $x \in L_{q_z}(M)$，我们有

$$\|F_z(x)\|_{L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N)} = p_z\|x\|_{L_{q_z}(M)}.$$

证明。 - 设 $x \in (L_q \cap L_\infty)(M)$。由命题 1.28，我们知道这些算子

$$\begin{cases} L_{q,\infty}(M) & \to & L_{q,\infty}(M\bar{\otimes}N) \\ f & \mapsto & x \otimes f \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} L_\infty(N) & \to & L_\infty(M\bar{\otimes}N) \\ f & \mapsto & x \otimes f \end{cases}$$

均为弱星连续。结合引理2.13 与命题 2.9，我们可推出函数

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{S}} & \to & L_{q,\infty}(M\bar{\otimes}N) + L_\infty(M\bar{\otimes}N) \\ z & \mapsto & x \otimes f_z \end{cases}$$

属于 $\mathrm{F}_*(L_{q,\infty}(M\bar{\otimes}N), L_\infty(M\bar{\otimes}N))$.

- 设 $z \in \overline{\mathbb{B}}$。不妨设 $\mathrm{Re}(z) < 1$，否则结论显然成立。于是，如果 $x \in L_{q_z}(M)$，我们有 e

$$\begin{aligned} \lambda_{x\otimes f_z}(s) &= \int_0^\infty \lambda_{f_z}(s/\mu_x(t))dt = \int_0^\infty (s/\mu_x(t))^{-q_z}dt \\ &= s^{-q_z}\int_0^\infty \mu_x(t)^{q_z}dt = s^{-q_z}\|x\|^{q_z}_{L_{q_z}(M)}. \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\mu_{x\otimes f_z}(s) = s^{-1/q_z}\|x\|_{L_{q_z}(M)}$$

进而

$$\begin{aligned} \|F_z(x)\|_{L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N)} &= \|x \otimes f_z\|_{L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N)} \\ &= \sup_{t>0} t^{-1/p_z} K_t(x \otimes f_z, L_1(M\bar{\otimes}N), L_\infty(M\bar{\otimes}N)) \\ &= \sup_{t>0} t^{-1/p_z}\int_0^t \mu_{x\otimes f_z}(s)ds \\ &= \sup_{t>0} t^{-1/p_z}\|x\|_{L_{q_z}(M)}\int_0^t s^{-1/q_z}ds \\ &= \sup_{t>0} t^{-1/p_z}(1-1/q_z)^{-1}t^{1-1/q_z}\|x\|_{L_{q_z}(M)} \\ &= p_z\|x\|_{L_{q_z}(M)}. \end{aligned}$$

□

注记。 设 $1 < q \le \infty$。算子的值域

$$F_0 : \begin{cases} L_q(M) & \to & L_{q,\infty}(M\bar{\otimes}N) \\ x & \mapsto & x \otimes f_0 \end{cases}$$

就是与 M 相关联的所谓*Haagerup* L_q-空间。

7.3. **Pisier 方法定理**。 设 M 是一个半有限 von Neumann 代数。

若投影 P 在 $L_2(M)$上满足*Pisier* 方法假设，则称其满足该条件：对于每个半有限 von Neumann 代数 N，放大投影 $Q := P\otimes I$ 在希尔伯特张量积 $L_2(M)\otimes L_2(N) = L_2(M\bar{\otimes}N)$上属于 Jones 型，且代数张量积 $H_\infty(P^\perp) \odot L_\infty(N)$是 $H_\infty(Q^\perp)$的子空间。

现在我们来陈述本节主要结果。

定理 A (Pisier 方法)。 设 P 是 $L_2(M)$ 上的一个投影，满足 *Pisier* 方法假设。如果 $0 < \theta < 1$且 $1 < p < \infty$，那么

$$[H_p(P), H_1(P)]_\theta = H_{p_\theta}(P)$$

具有等价范数，其常数仅取决于 p、θ，其中 $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p} + \theta$。 — —

定理 A 的证明遵循 Pisier 的原始方法。设 P 是 $L_2(M)$ 上满足 Pisier 方法假设、常数为 C 的投影。设 N 表示上一段中引入的交换半有限 von Neumann 代数。设 τ、σ 分别表示 M、N 上的迹。设 $\tau \otimes \sigma$ 表示张量积 von Neumann 代数 $M \bar{\otimes} N$ 上的张量积迹。设 $Q := P \otimes I$ 表示希尔伯特张量积 $L_2(M) \otimes L_2(N) = L_2(M \bar{\otimes} N)$ 上的放大投影。

设 $1 < p < \infty$ 为一个固定指数，$1 < q < \infty$ 表示其共轭指数，即满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

对于 $z \in \overline{\mathbb{S}}$，设 $p_z \in [1, p]$ 和 $q_z \in [q, \infty]$ 为满足以下条件的指数

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1 - \mathrm{Re}(z)}{p} + \mathrm{Re}(z), \qquad \frac{1}{q_z} = \frac{1 - \mathrm{Re}(z)}{q}.$$

注意到我们有

$$\frac{1}{p_z} + \frac{1}{q_z} = 1.$$

此外，$\mathrm{Re}(z) < 1$ 当且仅当 $p_z \neq 1$ 和 $q_z \neq \infty$。

由于 P 满足技术假设，相容对（$H_p(P)$，$H_1(P)$）是正则的，因此我们可以考虑论文预备部分中定义的对偶相容对（$H_p(P)^*$，$H_1(P)^*$）。于是，存在一个压缩的相容（反线性）算子

$$I^* : (L_q(M), L_\infty(M)) \to (H_p(P)^*, H_1(P)^*)$$

使得

$$\langle x, I^*(y) \rangle = \tau(xy^*), \quad \text{for } y \in L_q(M) + L_\infty(M),\ x \in H_p(P) \cap H_1(P).$$

By 根据 Hahn-Banach 定理，若 $\overline{z} \in \mathbb{S}$，则 I^* 导出一个压缩且满射的（反线性）算子

$$I^* : L_{q_z}(M) \to H_{p_z}(P)^*$$

引理 2.15。算子 I^*： L_q（M）$\cap L_\infty$（M）$\to H_p$（P）$^* \cap H_1$（P）*是满射。

证明。由于子对 $(H_q(P^\perp),\ H_\infty(P^\perp))$ 在 $(L_q(M),\ L_\infty(M))$ 中是拟补的，我们可以考虑商相容对 $(L_q(M)/H_q(P^\perp),\ L_\infty(M)/H_\infty(P^\perp))$。由于 $(L_q(M)/H_q(P^\perp),\ L_\infty(M)/H_\infty(P^\perp))$ 与 $(H_p(P)^*, H_1(P)^*)$ 作为相容对是典范（反）同构的，因此我们只需证明投影 $L_q(M) \cap L_\infty(M) \to L_q(M)/H_q(P^\perp) \cap L_\infty(M)/H_\infty(P^\perp)$ 的满射性。这由命题 1.1 得证。□

引理 2.16. 若 $z \in \mathbb{S}$, 则算子 I^*： $L_{q_z}(M) \to H_{p_z}(P)^*$ 的核为 $H_{q_z}(P^\perp)$。

证明。 根据定义，该算子的核为

$$\left\{ y \in L_{q_z}(M) \ :\ \tau(xy^*) = 0,\ \forall x \in H_p(P) \cap H_1(P) \right\}.$$

由于 $H_p(P) \cap H_1(P)$ 是 $H_{p_z}(P)$ 的范数稠密子空间，我们看到上述集合与 $H_{p_z}(P)$ 关于 $L_{q_z}(M)$ 和 $L_{p_z}(M)$ 之间对偶性的正交补一致，即 $H_{q_z}(P^\perp)$，因为 P 满足技术假设。□

由于 P 是 Jones 型的，且因为 P 是自伴的，我们很容易得到以下结果。

引理 2.17。 若 $z \in \overline{\mathbb{S}}$，实部$(z) < 1$，则 P 延拓为一个有界且幂等的相容算子 r

$$P : (L_{p_z}(M), L_{q_z}(M)) \to (L_{p_z}(M), L_{q_z}(M))$$

使得这两个算子 P： $L_{p_z}(M) \to L_{p_z}(M)$和 P： $L_{q_z}(M) \to L_{q_z}(M)$的值域分别为 $H_{p_z}(P)$和$H_{q_z}(P)$，核分别为 $H_{p_z}(P^\perp)$和 $H_{q_z}(P^\perp)$。最后，这些算子

$$P : L_{p_z}(M) \to L_{p_z}(M), \quad P : L_{q_z}(M) \to L_{q_z}(M)$$

相对于 $L_{p_z}(M)$ 和 $L_{q_z}(M)$ 之间的迹对偶互为共轭，其含义是

$$\tau(P(x)y^*) = \tau(xP(y)^*)$$

对于 $x \in L_{p_z}(M)$， $y \in L_{q_z}(M)$。

引理 2.18. 若 $z \in \mathbb{S}$, $\overline{\mathrm{Re}}(z) < 1$ 且 $y \in L_{q_z}(M)$，则 $I^*(y) = I^*(P(y))$ 且

$$\|P(y)\|_{L_{q_z}(M)} \le \|P\|_{L_{p_z}(M)\to L_{p_z}(M)} \|I^*(y)\|_{H_{p_z}(P)^*}.$$

证明。由于两个算子 $P\colon L_{q_z}(M) \to L_{q_z}(M)$ 和 $I^*\colon L_{q_z}(M) \to H_{p_z}(P)^*$ 具有相同的核，即 $H_{q_z}(P^\perp)$，因此对于每个 $y \in L_{q_z}(M)$，我们有 $I^*(y) = I^*(P(y))$。此外，若 $y \in L_{q_z}(M)$，则有

$$\begin{aligned}
\|P(y)\|_{L_{q_z}(M)} &= \|P(y)\|_{L^{\times}_{p_z}(M)} \\
&= \sup_{x\in(L_p\cap L_1)(M),\ \|x\|_{L_{p_z}(M)}\le 1} |\tau(xP(y)^*)| \\
&= \sup_{x\in(L_p\cap L_1)(M),\ \|x\|_{L_{p_z}(M)}\le 1} |\tau(P(x)y^*)| \\
&= \sup_{x\in(L_p\cap L_1)(M),\ \|x\|_{L_{p_z}(M)}\le 1} |\langle P(x), I^*(y)\rangle| \\
&\le \sup_{x\in(L_p\cap L_1)(M),\ \|x\|_{L_{p_z}(M)}\le 1} \|I^*(y)\|_{H_{p_z}(P)^*}\|P(x)\|_{H_{p_z}(P)} \\
&= \|I^*(y)\|_{H_{p_z}(P)^*}\|P\|_{L_{p_z}(M)\to L_{p_z}(M)}.
\end{aligned}$$

□

由于 $Q = P\otimes I$ 满足与 P相同的假设，相容对 $(H_{p,\ 1}(Q),\ H_1(Q))$ 也是正则的，因此我们可以考虑对偶相容对 $(H_{p,\ 1}(Q)^*,\ H_1(Q)^*)$。接着，如前所述，存在一个压缩的相容（反线性）算子

$$J^* : (L_{q,\infty}(M\bar{\otimes}N), L_\infty(M\bar{\otimes}N)) \to (H_{p,1}(Q)^*, H_1(Q)^*)$$

使得

$$\langle x, J^*(y)\rangle = (\tau\otimes\sigma)(xy^*), \quad \text{for } y \in (L_{q,\infty}+L_\infty)(M\bar{\otimes}N),\ x \in H_{p,1}(Q)\cap H_1(Q),.$$

再次根据 Hahn-Banach 定理，若 $z \in \mathbb{S}$, 则 J^* 诱导出一个压缩且满射的（反线性）算子

$$J^* : L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N) \to H_{p_z,1}(Q)^*$$

以下三个结果的证明与前面的证明类似。

引理 2.19。若 $z \in \overline{\mathbb{S}}$，则算子 $J^* : L_{q_z,\ \infty}(M\bar{\otimes}N) \to H_{p_z,\ 1}(Q)^*$ 的核为 $H_{q_z,\ \infty}(Q^\perp)$。

引理 2.20。若 $z \in \overline{\mathbb{S}}$，$\overline{\mathrm{Re}}(z) < 1$，则 Q 可延拓为一个相容有界算子

$$Q : (L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N), L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N)) \to (L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N), L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N))$$

使得两个算子 $Q\colon L_{p_z}1(M\bar{\otimes}N) \to L_{p_z}1(M\bar{\otimes}N)$ 和 $Q\colon L_{q_z}\infty(M\bar{\otimes}N) \to L_{q_z}\infty(M\bar{\otimes}N)$ 的值域分别为 $H_{p_z}1(Q)$ 和 $H_{q_z}\infty(Q)$，核分别为 $H_{p_z}1(Q^\perp)$ 和 $H_{q_z}\infty(Q^\perp)$。最后，这些算子

$$Q : L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N) \to L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N), \quad Q : L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N) \to L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N)$$

相对于迹对偶，$L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N)$ 与 $L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N)$互为共轭。

引理 2.21. 若 $z \in \mathbb{B}, \overline{\mathrm{Re}}(z) < 1$且 $y \in L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N)$，则 $J^*(y) = J^*(Q(y))$ 以及

$$\|Q(y)\|_{L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N)} \le \|Q\|_{L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N)\to L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N)} \|J^*(y)\|_{H_{p_z,1}(Q)^*}.$$

对于 $z \in \overline{\mathbb{S}}$, 令

$$F_z : \begin{cases} L_{q_z}(M) & \to & L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N) \\ x & \mapsto & x\otimes f_z \end{cases}$$

表示上一节研究的放大算子。

引理 2.22. 若 $z \in \mathbb{S}$，$\overline{\mathrm{Re}}(z) < 1$，则对每个 $x \in L_{q_z}(M)$，都有 $Q(F_z(x)) = F_z(P(x))$。

证明。根据定义，有 $Q(x\otimes f)=P(x)\otimes f$，对 $x\in(L_2\cap L_{q_z})(M)$ 和 $f\in(L_2\cap L_{q_{\overline{z}},\infty})(N)$ 均成立，因此对每个 $x\in L_{q_z}(M)$ 以及 $f\in L_{q_{\overline{z}},\infty}(N)$ 也成立，因为 $P\colon L_{q_z}(M)\to L_{q_z}(M)$ 和 $Q\colon L_{q_{\overline{z}},\infty}(M\bar{\otimes}N)\to L_{q_{\overline{z}},\infty}(M\bar{\otimes}N)$ 是弱星连续的，分别因为它们是 $P\colon L_{p_z}(M)\to L_{p_z}(M)$ 和 $Q\colon L_{p_{\overline{z}}}1(M\bar{\otimes}N)\to L_{p_{\overline{z}}}1(M\bar{\otimes}N)$ 的反对偶。特别地，若 $x\in L_{q_z}(M)$，则得到

$$Q(F_z(x))=Q(x\otimes f_z)=P(x)\otimes f_z=F_z(P(x))$$

正如所希望的。 □

引理 2.23. 若 $z\in\mathbb{S}$，则 $F_z\colon\ L_{q_z}(M)\to L_{q_z,\ \infty}(M\bar{\otimes}N)$ 将 $H_{q_z}(P^\perp)$ 映射到 $H_{q_z,\ \infty}(Q^\perp)$。

证明。 根据 Pisier 方法假设，我们知道 $H_\infty(P^\perp)\odot L_\infty(M)$ 是 $H_\infty(Q^\perp)$ 的一个子空间。因此，若 $\mathrm{Re}(z)=1$，则 F_z 显然将 $H_\infty(P^\perp)$ 映射到 $H_\infty(Q^\perp)$。现在，我们假设 $\mathrm{Re}(z)<1$。若 $x\in H_{q_z}(P^\perp)$，则 $P(x)=0$，因此由引理可得 $Q(F_z(x))=F_z(P(x))=0$，这表明$F_z(x)\in H_{q_z,\ \infty}(Q^\perp)$，如所需。□

作为上述引理的推论，对于 $z\in\mathbb{S}$，存在唯一的算子

$$T_z:H_{p_z}(P)^*\to H_{p_z,1}(Q)^*$$

使下图交换。

$$\begin{array}{ccc} L_{q_z}(M) & \xrightarrow{F_z} & L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N) \\ {\scriptstyle I^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J^*} \\ H_{p_z}(P)^* & \xrightarrow{T_z} & H_{p_z,1}(Q)^* \end{array}$$

引理 2.24。 算子族 $(T_z)_{z\in\mathbb{S}}$ 满足以下性质。–

- 若 $\phi\in H_p(P)^*\cap H_1(P)^*$，则函数

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{S}} & \to & H_{p,1}(Q)^*+H_1(Q)^* \\ z & \mapsto & T_{\overline{z}}(\phi) \end{cases}$$

  属于 $\mathcal{F}_*(H_{p,1}(Q)^*,H_1(Q)^*)$，
- 对每个 $z\in\mathbb{S}$ 和 $\phi\in H_{p_z}(P)^*$ 我们有

$$\|T_z(\phi)\|_{H_{p_z,1}(Q)^*}\le p_z\|\phi\|_{H_{p_z}(P)^*}$$

  并且，如果还有 $\mathrm{Re}(z)<1$，那么

$$\|\phi\|_{H_{p_z}(P)^*}\le p_z^{-1}\|Q\|_{L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N)\to L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N)}\|T_z(\phi)\|_{H_{p_z,1}(Q)^*}$$

证明。 该引理的证明基于定理 2.14。

- 固定 $\phi\in H_p(P)^*\cap H_1(P)^*$。于是，根据引理 2.15，我们可以找到 $y\in(L_q\cap L_\infty)(M)$，使得 $\phi=I^*(y)$。若$z\in\mathbb{S}$，则根据 T_z的定义，我们有 $T_z(\phi)=J^*(F_z(y))$。由于反线性算子

$$J^*:L_{q,\infty}(M\bar{\otimes}N)\to H_{p,1}(M\bar{\otimes}N)^*\qquad J^*:L_\infty(M\bar{\otimes}N)\to H_1(M\bar{\otimes}N)^*$$

作为对偶算子显然是 *-弱连续的，并且由于我们知道函数

$$\begin{cases} \overline{\mathbb{S}} & \to & L_{q,\infty}(M\bar{\otimes}N)+L_\infty(M\bar{\otimes}N) \\ z & \mapsto & F_z(y) \end{cases}$$

属于 $\mathcal{F}_*(L_{q,\infty}(M\bar{\otimes}N),\ L_{q,\ \infty}(M\bar{\otimes}N))$，通过应用命题 2.9 我们便得到所需结论。

- 固定 $\overline{z}\in\mathbb{S}$ 和 $\phi\in H_{p_z}(P)^*$。那么，根据 Hahn-Banach 定理，存在 $y\in L_{q_z}(M)$，使得 $\phi=I^*(y)$ 且 $\|y\|_{L_{q_z}(M)}=\|\phi\|_{H_{p_z}(P)^*}$。于是

$$\begin{aligned} \|T_z(\phi)\|_{H_{p_z,1}(Q)^*}&=\|J^*(F_z(y))\|_{H_{p_z,1}(Q)^*} \\ &\le\|F_z(y)\|_{L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N)} \\ &=p_z\|y\|_{L_{q_z}(M)} \\ &=p_z\|\phi\|_{H_{p_z}(P)^*} \end{aligned}$$

现在我们假设 $\mathrm{Re}(z)<1$。由引理 2.18 可得 $\phi=I^*(y)=I^*(P(y))$，因此

$$\|\phi\|_{H_{p_z}(P)^*}\le\|P(y)\|_{L_{q_z}(M)}.$$

根据命题 2.22，我们得到

$$\begin{aligned}\|P(y)\|_{L_{q_z}(M)} &= p_z^{-1}\|F_z(P(y))\|_{L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N)}\\ &= p_z^{-1}\|Q(F_z(y))\|_{L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N)}.\end{aligned}$$

此外，由引理 2.21可得

$$\begin{aligned}\|Q(F_z(y))\|_{L_{q_z,\infty}(M\bar{\otimes}N)} &\le \|Q\|_{L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N)\to L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N)}\|J^*(F_z(y))\|_{H_{p_z,1}(Q)^*}\\ &= \|Q\|_{L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N)\to L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N)}\|T_z(I^*(y))\|_{H_{p_z,1}(Q)^*}\\ &= \|Q\|_{L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N)\to L_{p_z,1}(M\bar{\otimes}N)}\|T_z(\phi)\|_{H_{p_z,1}(Q)^*}\end{aligned}$$

By c结合上述估计，我们得到所需的结果。 □

引理 2.25。若 $0<\theta<1$，则有

$$H_{p_\theta,1}(Q)^* = (H_{p,1}(Q)^*, H_1(Q)^*)_{\theta,\infty,K}$$

且两者的等价范数的常数仅依赖于 p、θ。

证明。由于 Q（因而 $Q^\perp$ 也）是 Jones 型，我们知道 $(H_1(Q^\perp),\ H_\infty(Q^\perp))$ 在 $(L_1(M\bar{\otimes}N),\ L_\infty(M\bar{\otimes}N))$ 中是拟补的，且具有一个普适常数。由定理 1.9，我们推得 $(H_{q,\ \infty}(Q^\perp),\ H_\infty(Q^\perp))$ 在 $(L_{q,\ \infty}(M\bar{\otimes}N),\ L_\infty(M\bar{\otimes}N))$ 中是拟补的，其常数仅依赖于 p。此外，由实方法的重申定理以及 K-方法与 J-方法之间的等价定理可得

$$L_{q_\theta,\infty}(M\bar{\otimes}N) = (L_{q,\infty}(M\bar{\otimes}N), L_\infty(M\bar{\otimes}N))_{\theta,\infty,J}$$

其等价范数对应的常数仅依赖于 $p,\ \theta$。由命题 2.4，可得

$$L_{q_\theta,\infty}(M\bar{\otimes}N)/H_{q_\theta,\infty}(Q^\perp) = (L_{q,\infty}(M\bar{\otimes}N)/H_{q,\infty}(Q^\perp), L_\infty(M\bar{\otimes}N)/H_\infty(Q^\perp))_{\theta,\infty,K}$$

其等价范数对应的常数仅依赖于 $p,\ \theta$。所需结论由此得证。 □

最后，我们现在可以完成定理 A的证明。

固定 $\phi\in H_p(P)^*\cap H_1(P)^*$ 和 $0<\theta<1$。然后，我们可以将弱-* 版本的 Stein 插值定理应用于算子解析族 $(p^{z-1}T_z)_{z\in\mathbb{S}}$。由此可得 $T_\theta(\phi)\ \in(H_{\bar{p},\ 1}(Q)^*,\ H_1(Q)^*)_{\theta,\ \infty,\ K}$，其中

$$\|T_\theta(\phi)\|_{(H_{p,1}(Q)^*,H_1(Q)^*)_{\theta,\infty,K}} \le p^{1-\theta}\|\phi\|_{[H_p(P)^*,H_1(P)^*]_\theta}$$

由引理 2.25 可推出 $T_\theta(\phi)\in H_{p_\theta,\ 1}(Q)^*$，其中

$$\|T_\theta(\phi)\|_{H_{p_\theta,1}(Q)^*} \le C_{p,\theta}p^{1-\theta}\|\phi\|_{[H_p(P)^*,H_1(P)^*]_\theta}$$

其中 $C_{p,\ \theta}$ 仅取决于 $p,\ \theta$。最后，由定理 2.24的最后一点可推出 $\phi\in H_{p_\theta}(P)^*$，其中

$$\|\phi\|_{H_{p_\theta}(P)^*} \le C_{p,\theta}p^{1-\theta}p_\theta^{-1}\|Q\|_{L_{p_\theta,1}(M\bar{\otimes}N)\to L_{p_\theta,1}(M\bar{\otimes}N)}\|\phi\|_{[H_p(P)^*,H_1(P)^*]_\theta}$$

由复插值方法的对偶定理（更准确地说，由推论 1.5），可推出对每个 $x\in H_{p_\theta}(P)$，都有 $x\in[H_p(P),\ H_1(P)]_\theta$，其中

$$\|x\|_{[H_p(P),H_1(P)]_\theta} \le C_{p,\theta}p^{1-\theta}p_\theta^{-1}\|Q\|_{L_{p_\theta,1}(M\bar{\otimes}N)\to L_{p_\theta,1}(M\bar{\otimes}N)}\|x\|_{H_{p_\theta}(M)}.$$

证明完成。

注记。在引理 2.25 中谨慎应用 Holmstedt 公式可得估计式

$$C_{p,\theta} \lesssim [\theta(1-\theta)]^{-1}$$

此外，在附加假设 Q 满足带有普适常数的弱型 (1<style id="2">，1) 不等式的条件下，Marcinkiewicz 插值定理给出

$$\|Q\|_{L_{p_\theta,1}(M\bar{\otimes}N)\to L_{p_\theta,1}(M\bar{\otimes}N)} \lesssim p_\theta q_\theta.$$

因此，对于 $x\in H_{p_\theta}(P)$，我们得到估计式

$$\|x\|_{[H_p(P),H_1(P)]_\theta} \lesssim [\theta(1-\theta)]^{-1}p^{1-\theta}q_\theta\|x\|_{H_{p_\theta}(M)}.$$

这是通过该方法能够得到的最佳估计。

8. 示例：解析 Hardy 空间

在本段中，我们详细说明著名的解析 Hardy 空间情形如何纳入我们的抽象 Hardy 空间框架。

设 M 是一个半有限 von Neumann 代数，其迹记为 τ，模共轭记为 J，并配备一个次对角代数，即 M 的一个弱*闭（但请注意，不一定是 $*$闭）子代数 A，使得 $A+J(A)$ 在 M 中弱*稠密；迹在对角代数 $D:=A\cap J(A)$ 上的限制仍为半有限，并且对于每个 $x,y\in A$，都有 $E_D(xy)=E_D(x)E_D(y)$，其中 E_D 表示从 M 到 D 的条件期望。

若 $E(M)$ 是相容对 $(L_1(M),L_\infty(M))$ 的一个精确插值空间，我们将 $H_E(A)$ 定义为 $A\cap E(M)$ 在 $E(M)$ 中关于 $\sigma(E(M),E^\times(M))$ 的闭包。对于 $1\le p\le\infty$，我们也将 $H_p(A):=H_{L_p}(A)$ 记作 $1\le p\le\infty$。它们就是与 A 相关联的所谓 Hardy 空间，其定义见 [1]。

注记。 若 $E(M)$ 是 $(L_1(M),L_\infty(M))$ 的精确插值空间，那么对于 $x\in H_E(A)$ 和 $y\in H_{E^\times}(A)$，显然有

$$E_D(xy)=E_D(x)E_D(y) \tag{8.1}$$

令.....表示

$$A^0:=\{x\in A\ :\ E_D(x)=0\}.$$

若 $E(M)$ 是 $(L_1(M),L_\infty(M))$ 的精确插值空间，则定义 $H_E^0(A)$ 为 $E(M)$ 中 $A^0\cap E(M)$ 的 $\sigma(E(M),E^\times(M))$-弱闭包。那么显然

$$H_E^0(A)=\big\{x\in H_E(M)\ :\ E_D(x)=0\big\}.$$

我们还将 $H_p^0(A):=H_{L_p}^0(A)$ 记作 $1\le p\le\infty$。

引理 2.26。 若 M 有限，则

$$H_1(A)=\{x\in L_1(M)\ :\ \tau(xy)=0,\ \forall y\in A^0\}$$

and

$$H_1^0(A)=\{x\in L_1(M)\ :\ \tau(xy)=0,\ \forall y\in A\}.$$

证明。 例如， [17][引理 3，引理 4] 中证明了这一点。 □

以下引理的证明是显然的。

引理 2.27. 设 $p\in D$ 是一个有限投影。那么， pAp 是 pMp 的一个次对角代数，其对角代数为 pDp。此外，若 $E(M)$ 是 $(L_1(M),L_\infty(M))$的一个精确插值空间，则 $H_{pEp}(pAp)=pH_E(A)p$ 和 $H^0_{pEp}(pAp)=pH^0_E(A)p$。

定理 2.28. 设 $E(M)$ 是 $(L_1(M),L_\infty(M))$ 的一个精确插值空间，且其范数序连续。那么

$$H_E(A)=\{x\in E(M)\ :\ \tau(xy)=0,\ \forall y\in H^0_{E^\times}(A)\}$$

and

$$H^0_E(A)=\{x\in E(M)\ :\ \tau(xy)=0,\ \forall y\in H_{E^\times}(A)\}.$$

证明。 若 $x\in H_E(A)$ 且 $y\in H^0_{E^\times}(A)$，则由 (8.1) 可得

$$\tau(xy)=\tau(E_D(xy))=\tau(E_D(x)E_D(y))=\tau(0)=0.$$

因此我们得到一个包含关系。反证法，假设反向包含关系是严格的，于是存在$x\in E(M)\setminus H_E(A)$，使得对每个$y\in H^0_{E^\times}(A)$都有 $\tau(xy)=0$。由于 $E(M)$具有序连续范数，根据 Hahn-Banach 定理，存在 $y\in E^\times(M)$，使得 $\tau(xy)\neq0$，并且对每个 $x\in H_E(A)$都有 $\tau(x'y)=0$。由于迹在 D上的限制是半有限的，存在一个递增网 $(p_\alpha)_\alpha$，由 D中的有限投影构成，且 $\sup_\alpha p_\alpha=1$。于是，根据引理 2.26，我们有 $p_\alpha xp_\alpha\in H_1(p_\alpha Ap_\alpha)$和 $p_\alpha y^*p_\alpha\in H_1^0(p_\alpha Ap_\alpha)$。事实上，若$x'_\alpha\in p_\alpha Ap_\alpha$，则 $x'_\alpha\in H_E(A)$，因此

$$\tau(x'_\alpha p_\alpha yp_\alpha)=\tau(p_\alpha x'_\alpha p_\alpha y)=\tau(x'_\alpha y)=0.$$

类似地，若 $y'_\alpha \in (p_\alpha A p_\alpha)^0$,，则$y'_\alpha \in H^0_{E^\times}(A)$，因此

$$\tau(p_\alpha x p_\alpha y'_\alpha) = \tau(x p_\alpha y'_\alpha p_\alpha) = \tau(x y'_\alpha) = 0.$$

因此，如果 γ满足 $\gamma \geq \alpha$且 $\gamma \geq \beta$，则有 $p_\alpha x p_\alpha \in H_1(p_\gamma A p_\gamma)$以及 $p_\beta y p_\beta \in J(H^0_1(p_\gamma A p_\gamma))$，根据（8.1）可推出

$$E_{p_\gamma D p_\gamma}(p_\alpha x p_\alpha p_\beta y p_\beta) = E_{p_\gamma D p_\gamma}(p_\alpha x p_\alpha) E_{p_\gamma D p_\gamma}(p_\beta y p_\beta) = 0.$$

特别地，我们得到

$$\tau(p_\alpha x p_\alpha p_\beta y p_\beta) = \tau(E_{p_\gamma D p_\gamma}(p_\alpha x p_\alpha p_\beta y p_\beta)) = 0.$$

由于网（$p_\alpha x p_\alpha$）$_\alpha$在范数拓扑下收敛于 x，其中收敛所在空间为 E（M），且网（$p_\alpha y p_\alpha$）$_\alpha$在弱星拓扑下收敛于 y，其中收敛所在空间为 $E^\times$（M），我们推得 τ（xy） $= 0$，从而产生矛盾。因此，$H^0_{E^\times}$（A）是 H_E（A）的正交补。类似地，我们证明 $H_{E^\times}$（A）是 H^0_E（A）的正交补。□

定理 *2.29*。设 E（M）是（L_1（M），L_∞（M））的具有序连续范数的精确插值空间。则 $A \cap L_1$（M）表示。 $A^0 \cap L_1$（M）在 H_E（A）中关于范数拓扑稠密，分别地， H^0_E（A）在E（M）的范数拓扑下稠密；并且 $H_{E^\times}$（A）在$H^0_{E^\times}$（A）中关于弱星拓扑稠密，分别地， $E^\times$（M）在其弱星拓扑下稠密。

证明。 只需对 $H_E(A)$ 和 $H_{E^\times}(A)$ 证明该结论。由于迹在 D上的限制是半有限的，存在 D的有限投影递增网 $(p_\alpha)_\alpha$，使得 $\sup_\alpha p_\alpha = 1$。若 $x \in A \cap E(M)$，分别地，若 $x \in A \cap E^\times(M)$，那么我们知道 $(p_\alpha x p_\alpha)_\alpha$在 $E(M)$ 的范数拓扑下收敛到 x，分别地，在 $E^\times(M)$ 的弱星拓扑下收敛到 x。由于 $p_\alpha x p_\alpha$显然属于 $A \cap L_1(M)$，证明完毕。□

相应的黎斯投影 P 是从 $L_2(M)$ 到 $H_2(A)$ 的投影。

Th定理 2.30。 设 $E(M)$ 是关于 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的精确插值空间，且具有序连续 $norm$。于是

$$H_E(P) = H_E(A), \quad H_{E^\times}(P) = H_{E^\times}(A),$$
$$H_E(P^\perp) = J(H^0_E(A)), \quad H_{E^\times}(P^\perp) = J(H^0_{E^\times}(A)).$$

证明。由定理 2.28 可知， $H_2(M) \cap E(M)$ 介于 $A \cap L_1(M)$ 与 $A \cap E(M)$ 之间。因此，由定理 2.29 可推出 $H_E(P) = H_E(A)$。此外，由定理 2.29， $P^\perp$的值域是 $J(H^0_2(A))$，因此 $H_E(P)$ 是 $E(M)$ 中 $J(H^0_2(A)) \cap E(M)$ 的范数闭包。同样，由定理 2.28 和定理 2.29 可知，后者与 $J(H^0_E(A))$ 一致。□

定理 2.31。 黎斯投影 P 是 *Jones* 型。

证明。前面的结果（连同双极定理）表明， P 满足技术假设。 [1][引理 6.2] 中也证明了，子对 $(H_1(A), H_2(A))$ 在 $(L_1(M), L_2(M))$ 中是 K- 闭的，且具有一个普适常数。因此，子对 $(H^0_1(A), H^0_2(A))$ 在 $(L_1(M), L_2(M))$ 中也同样是 K-闭的，且具有一个普适常数。由定理 2.30 可知， P 确实是 Jones 型。□

引理 2.32。 设 N 是一个半有限 *von Neumann* 代数，并令 $A \bar{\otimes} N$ 表示 $M \bar{\otimes} N$中 $A \odot N$的w*-闭包。那么， $A \bar{\otimes} N$ 是 $M \bar{\otimes} N$的一个次对角代数。此外，希尔伯特张量积 $L_2(M \bar{\otimes} N)$ 上的放大投影 $P \otimes I$ 与对应于 $A \bar{\otimes} N$的黎斯投影相同。

证明。容易验证， $A \bar{\otimes} N$ 确实是 $M \bar{\otimes} N$的次对角代数。令 Q 表示与 $A \bar{\otimes} N$相关联的黎斯投影。固定 $u \in A \cap L_2(M)$、 $v \in A^0 \cap L_2(M)$和 $y \in N \cap L_2(N)$。于是我们有$u \otimes y \in A \bar{\otimes} N \cap L_2(M \bar{\otimes} N) \subset H_2(A \bar{\otimes} N)$和 $v \otimes y^* \in (A \bar{\otimes} N)^0 \cap L_2(M \bar{\otimes} N) \subset H^0_2(A \bar{\otimes} N)$。由定理 2.28 可知， P、 Q是投影，其值域分别为 $H_2(A)$、 $H_2(A \bar{\otimes} N)$，核分别为 $J(H^0_2(A))$、 $J(H^0_2(A \bar{\otimes} N))$，因此得到

$$Q((u + v^*) \otimes y) = Q(u \otimes y) + Q((v \otimes y^*)^*) = u \otimes y = P(u) \otimes y$$

由于 $A \cap L_2(M)$在 $H_2(A)$中稠密， $A^0 \cap L_2(M)$在 $H_2^0(A)$中稠密，且 $N \cap L_2(N)$在 $L_2(N)$中稠密，我们推得

$$Q(x \otimes y) = P(x) \otimes y$$

对于每个 $x \in H_2(A) + J(H_2^0(A))$ 以及 $y \in L_2(M)$。因此 $Q = P \otimes I$如所需。 □

定理 2.33。 黎斯投影 P 满足 *Pisier* 方法假设。

证明。 这是定理 2.31 与引理 2.32的直接推论。 □

应用定理A，我们得到：若 $0 < \theta < 1$ 且 $1 < p < \infty$ 则

$$[H_p(A), H_1(A)]_\theta = H_{p_\theta}(A)$$

具有等价范数，其常数仅取决于 p、θ，其中 $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p} + \theta$。自然地，这在一定程度上恢复了 [1] 中得到的结果，其中主要结果处理一般情形 $0 < p \leq \infty$。正如引言中所提到的，由于我们将自身限制在赋范空间的框架内，我们的方法无法达到如此一般的程度。

第3 部分：鞅理论中的应用

9. 滤过

设 M 为一个半有限 von Neumann 代数，其迹记为 τ，并配备一个滤过，即 M 的 von Neumann 子代数的一个递增序列 $(M_n)_{n\geq 1}$，其并集 $\cup_{n\geq 1}M_n$ 在 M 中弱*稠密，并且对每个 $n\geq 1$，存在从 M 到 M_n 的保迹正规忠实条件期望 E_n。于是，$(E_n)_{n\geq 1}$ 是一个交换投影的递增序列。对于每个 $n\geq 1$，令

$$D_n := E_n - E_{n-1}$$

（约定 $E_0 := 0$）。那么 $(D_n)_{n\geq 1}$ 是一列两两正交投影，并且与 $(E_n)_{n\geq 1}$ 交换。我们将它们称为与该滤过相联系的增量投影。

定理 *3.1.* 设 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的一个具有序连续范数的精确插值空间。*(1)* 若 $x\in E(M)$，则序列 $(E_n(x))_{n\geq 1}$ 在 $E(M)$ 中按范数拓扑收敛于 x。*(2)* 若 $y\in E^\times(M)$，则序列 $(E_n(y))_{n\geq 1}$ 在 $E^\times(M)$ 中按弱星拓扑收敛于 y。

证明。设 $x\in E(M)$ 且 $\epsilon>0$。由于 $\cup_{n\geq 1}M_n$ 在 M 中弱*稠密，我们推得 $\cup_{n\geq 1}(L_1\cap L_\infty)(M_n)$ 在 $E(M)$ 中关于 $\sigma(E(M),E^\times(M))$ 弱稠密，因此在 $E(M)$ 中范数稠密，因为 $E(M)$ 具有序连续范数。因此，存在 $k\geq 1$ 和 $y\in(L_1\cap L_\infty)(M_k)$，使得 $\|x-y\|_{E(M)}<\epsilon$。于是，对所有 $n\geq k$，有

$$\begin{aligned}\|E_n(x)-x\|_{E(M)} &= \|E_n(x)+E_n(y)+y-x\|_{E(M)}\\ &\leq \|E_n(x-y)\|_{E(M)}+\|x-y\|_{E(M)}\\ &\leq 2\|x-y\|_{E(M)}<2\epsilon\end{aligned}$$

这表明 $(E_n(x))_{n\geq 1}$ 在范数意义下收敛到 x。现在，若 $y\in E^\times(M)$，则对每个 $x\in E(M)$，我们有

$$\tau(xE_n(y))=\tau(E_n(x)y)\underset{n\to\infty}{\to}\tau(xy)$$

正如所需。 □

推论 3.2。设 $E(M)$ 是 $L_1(M)$ 与 $L_\infty(M)$ 之间的一个精确插值空间，且其范数序连续。若 $x\in E(M)$ 且 $y\in E^\times(M)$，则

$$\tau(xy)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(D_n(x)D_n(y)).$$

10. 鞅投影

设 M 是一个配备滤过 $(M_n)_{n\geq 1}$ 的半有限 von Neumann 代数，其对应的条件期望记为 $(E_n)_{n\geq 1}$，对应的增量投影记为 $(D_n)_{n\geq 1}$。

现在，设 I 是一个固定的正整数集合，并令 P 为与数据 $(M,(M_n)_{n\geq 1},I)$ 相关联的鞅投影，即在 $L_2(M)$ 上的投影，使得若 $x\in L_2(M)$，则

$$P(x)=\sum_{n\in I}D_n(x),\quad \text{in } L_2(M).$$

注意，补投影 $P^\perp$ 与数据 $(M、(M_n)_{n\geq 1}、I^\perp)$ 所对应的鞅投影重合，其中 $I^\perp$ 是正整数集合中 I 的补集。下文中，我们记

$$H(P):=\left\{x\in(L_1+L_\infty)(M)\ :\ \forall n\notin I,\ D_n(x)=0\right\}$$

因此我们有

$$P(L_2(M))=L_2(M)\cap H(P).$$

Th定理 3.3。设 $E(M)$ 是 $(L_1(M),L_\infty(M))$ 的精确插值空间，且具有序连续性 *norm.* 因此，我们有

$$\begin{aligned}H_E(P) &= E(M)\cap H(P),\\ H_{E^\times}(P) &= E^\times(M)\cap H(P).\end{aligned}$$

此外，子空间

$$(L_1 \cap L_\infty)(M) \cap H(P)$$

在 $H_E(P)$ 中范数稠密，并且在 $H_{E^\times}(P)$中 w*-稠密。

证明。 显然，

$$E(M) \cap H(P) = \left\{x \in E(M) \ : \ \forall n \notin I,\ D_n(x) = 0\right\}$$

是 $E(M)$ 的一个范数闭子空间，其中包含 $E(M) \cap P(L_2(M))$，此外 $E(M) \cap P(L_2(M))$ 显然包含 $(L_1 \cap L_\infty)(M) \cap H(P)$。因此，只需证明 $(L_1 \cap L_\infty)(M) \cap H(P)$ 在$E(M) \cap H(P)$ 中范数稠密。设 $x \in E(M) \cap H(P)$。由于序列 $(E_n(x))_{n\geq 1}$在 $E(M)$ 中按范数拓扑收敛于 x，且也属于 $E(M) \cap H(P)$，我们可以假设存在 $n \geq 1$，使得 $E_n(x) = x$，从而有

$$x = \sum_{k=1}^{n} D_k(x) = \sum_{k\in I, k\leq n} D_k(x).$$

由于 $(L_1 \cap L_\infty)(M)$ 在 $E(M)$ 中范数稠密，存在一个网 $(y_\alpha)_\alpha$，其元素属于 $(L_1 \cap L_\infty)(M)$，并且在范数拓扑下收敛到 x（属于 $E(M)$）。令

$$x_\alpha := \sum_{k\in I, k\leq n} D_k(y_\alpha).$$

于是 $x_\alpha \in (L_1 \cap L_\infty)(M) \cap H(P)$。由于网 $(x_\alpha)_\alpha$ 显然在范数拓扑下收敛到 x（属于 $E(M)$），证明完成。对偶的结论可类似证明。□

定理 3.4。 鞅投影 P 满足技术假设。

证明。设 $E(M)$ 是 $(L_1(M), L_\infty(M))$ 的一个序连续范数精确插值空间。只需证明 $H_E(P)$、$H_{E^\times}(P)$ 关于迹对偶的极集分别与 $H_{E^\times}(P^\perp)$、 $H_E(P^\perp)$ 相同。这是定理 3.3 的直接推论。□

定理 3.5。 鞅投影 P 是 *Jones* 型。

证明。作为一种鞅变换，众所周知（见 [15][定理 3.1]）， P 是弱型 $(1, 1)$，且具有普适常数，因此对于每个 $1 < p < \infty$，它都是 L_p-有界的，其常数仅取决于 p。此外， [10][定理 2.8] 证明了子对 $(H_1(P), H_2(P))$ 在 $(L_1(M), L_2(M))$ 中是 K-闭的，且具有普适常数。由于 $P^\perp$ 也是鞅投影，我们推得子对 $(H_1(P^\perp), H_2(P^\perp))$ 在 $(L_1(M), L_2(M))$ 中也同样是 K-闭的，且具有普适常数。因此， P 确实是 Jones 型。□

引理 3.6。 设 N 是一个带迹*von Neumann*代数。则放大投影 $Q := P \otimes I$ 在$L_2(M\bar{\otimes}N) = L_2(M) \otimes L_2(N)$ 上是与数据 $(M\bar{\otimes}N,\ (M_n\bar{\otimes}N)_{n\geq 1},\ I)$ 相关联的鞅投影。

定理 3.7. 鞅投影 P 满足 *Pisier* 方法假设。

证明。这是引理 3.6 与定理 3.3 和定理 3.5的直接推论。□

推论 3.8。若 $1 < p < \infty$ 且 $0 < \theta < 1$，则

$$[H_p(P), H_1(P)]_\theta = H_{p_\theta}(P)$$

具有等价范数，其常数仅取决于 p、θ，其中

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p} + \theta.$$

11. 双鞅投影

设 M 是一个半有限 von Neumann 代数，配备两个滤过 $(M_n^-)_{n\geq 1}$、$(M_n^+)_{n\geq 1}$，与之对应的条件期望分别记为 $(E_n^-)_{n\geq 1}$、$(E_n^+)_{n\geq 1}$，增量投影分别记为 $(D_n^-)_{n\geq 1}$、$(D_n^+)_{n\geq 1}$。我们假设这两个滤过可交换，即对于任意 $m,n\geq 1$，有

$$E_m^- E_n^+ = E_n^+ E_m^-.$$

我们先给出一个预备结果。

Lem命题 3.9。 设 $E(M)$ 是 $(L_1(M),\ L_\infty(M))$ 的精确插值空间，且其范数序连续。 .

(1) 若 $x\in E(M)$，则 $(E_n^- E_n^+(x))_{n\geq 1}$ 在 $E(M)$ 中按范数拓扑收敛到 x。*(2)* 若 $y\in E^\times(M)$，则 $(E_n^- E_n^+(y))_{n\geq 1}$ 在 $E^\times(M)$ 中按 w* 拓扑收敛到 y。

证明。 如果 $x\in E(M)$，那么

$$\begin{aligned}\|E_n^- E_n^+(x)-x\|_{E(M)} &= \|E_n^-(E_n^+(x)-x)+E_n^-(x)-x\|_{E(M)}\\ &\leq \|E_n^+(x)-x\|_{E(M)}+\|E_n^-(x)-x\|_{E(M)} \underset{n\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

现在，若 $y\in E^\times(M)$ 且 $x\in E(M)$，则

$$\tau(xE_n^- E_n^+(y)) = \tau(E_n^- E_n^+(x)y) \underset{n\to\infty}{\to} \tau(xy).$$

□

现在，设 I^-，I^+ 是两个固定的正整数集，并设 P 是与数据 $(M,\ (M_n^-)_{n\geq 1},\ (M_n^+)_{n\geq 1},\ I^-,\ I^+)$ 相关联的双鞅投影，即在 $L_2(M)$ 上的投影，满足：若 $x\in L_2(M)$，则

$$P(x) = \sum_{m\in I^-,n\in I^+} D_m^- D_n^+(x),\quad \text{in } L_2(M).$$

下文中，我们记

$$H(P) := \left\{x\in (L_1+L_\infty)(M)\ :\ \forall m\notin I^-,\ D_m^-(x)=0,\ \forall n\notin I^+,\ D_n^+(x)=0\right\}$$

从而有

$$P(L_2(M)) = L_2(M)\cap H(P).$$

定理 3.10. 设 $E(M)$ 是 $(L_1(M),\ L_\infty(M))$ 的一个具有序连续范数的精确插值空间。则有

$$\begin{aligned}H_E(P) &= E(M)\cap H(P),\\ H_{E^\times}(P) &= E^\times(M)\cap H(P).\end{aligned}$$

此外，子空间

$$(L_1\cap L_\infty)(M)\cap H(P)$$

在 $H_E(P)$ 中范数稠密，并且在 $H_{E^\times}(P)$中按 w* 稠密。

证明。 显然，

$$E(M)\cap H(P) := \left\{x\in E(M)\ :\ \forall m\notin I^-,\ D_m^-(x)=0,\ \forall n\notin I^+,\ D_n^+(x)=0\right\}$$

是 $E(M)$ 的范数闭子空间，它包含 $E(M)\cap P(L_2(M))$；此外，$E(M)\cap P(L_2(M))$ 显然包含 $(L_1\cap L_\infty)(M)\cap H(P)$。因此，只需证明 $(L_1\cap L_\infty)(M)\cap H(P)$ 在 $E(M)\cap H(P)$ 中范数稠密。令 $x\in E(M)\cap H(P)$。由于序列 $(E_n^- E_n^+(x))_{n\geq 1}$ 在范数拓扑下于 $E(M)$ 中收敛到 x，且也属于 $E(M)\cap H(P)$，我们可以假设存在 $n\geq 1$，使得 $E_n^-(x)=E_n^+(x)=x$，于是有

$$x = \sum_{i,j=1}^{n} D_i^- D_j^+(x) = \sum_{i\in I^-,j\in I^+,i,j\leq n} D_i^- D_j^+(x).$$

由于（$L_1\cap L_\infty$）（M）在 E（M）中范数稠密，因此存在一个网（y_α）$_\alpha$，其由（$L_1\cap L_\infty$）（M）组成，并在 E（M）中收敛到 x 对于无 范数拓扑。我们设

$$x_\alpha := \sum_{i\in I^-,j\in I^+,i,j\leq n} D_i^- D_j^+(y_\alpha).$$

于是 $x_\alpha \in (L_1 \cap L_\infty)(M) \cap H(P)$。由于网 $(x_\alpha)_\alpha$ 显然在范数拓扑下收敛到 x 于 $E(M)$，证明完毕。对偶命题的证明类似。□

定理 3.11。 双鞅投影 P 满足技术假设。

证明。 设 $E(M)$ 是 $(L_1(M),\ L_\infty(M))$ 的一个具有序连续范数的精确插值空间。只需证明，关于迹对偶性的 $H_E(P)$、 $H_{E^\times}(P)$ 的极集分别与 $H_{E^\times}(P^\perp)$、 $H_E(P^\perp)$ 重合。设 P_- 和 P_+ 表示 $L_2(M)$ 上的两个交换投影，使得若 $x \in L_2(M)$，则

$$P_-(x) = \sum_{m\in I^-} D_m^-(x), \quad \text{in } L_2(M),$$

$$P_+(x) = \sum_{n\in I^+} D_n^+(x), \quad \text{in } L_2(M).$$

于是显然有

$$P = P_-P_+ = P_+P_-$$

and

$$H_E(P) = H_E(P_-) \cap H_E(P_+).$$

作为上一节的推论，关于迹对偶性的 $H_E(P)$ 的极集是 $H_{E^\times}(P_-^\perp) + H_{E^\times}(P_+^\perp)$ 的弱*闭包。因此，只需证明 $P^\perp(L_2(M)) \cap E^\times(M)$ 在 $H_{E^\times}(P_-^\perp) + H_{E^\times}(P_+^\perp)$ 中是弱*稠密的。设 $x^\pm \in H_{E^\times}(P_\pm^\perp)$。由上一节可知，存在一个 $(L_1\cap L_\infty)(M)$ 的网 $(x_\alpha^\pm)_\alpha$，其在 $E^\times(M)$ 中按弱星拓扑收敛于 $x^\pm$，并且对每个 $n \in I^\pm$ 都有 $D_n^\pm(x) = 0$。由于 $P_\pm(x_\alpha^\pm) = 0$，我们 deduce that$P(x_\alpha^- + x_\alpha^+) = 0$。因此， $x^- + x^+$ 属于 $P^\perp(L_2(M)) \cap E^\times(M)$ 的弱*闭包，正如所要求的。对偶命题的证明类似。□

Now we introduce two assumptions on $(M, (M_n^-)_{n\geq 1}, (M_n^+)_{n\geq 1}, I^-, I^+)$.

($\star$) 对于每个 $m \notin I^-$ 和 $n \notin I^+$，我们都有

$$D_m^- D_n^+ = D_n^+ D_m^- = 0. \tag{11.1}$$

($\star\star$) 我们有 $I^- = \{2m-1 :\ m \geq 1\}$、 $I^+ = \{2n :\ n \geq 1\}$，存在半有限 von Neumann 代数A 和 B，其配备了滤过 $(A_n)_{n\geq 1}$ 和 $(B_n)_{n\geq 1}$，使得 $M = A\bar{\otimes}B$，并且对于 $n \geq 1$，我们有

$$M_{2n-1}^- := A_n\bar{\otimes}B_n, \qquad M_{2n}^- := A_{n+1}\bar{\otimes}B_n,$$
$$M_{2n-1}^+ := A_n\bar{\otimes}B_{n+1}, \qquad M_{2n}^+ := A_{n+1}\bar{\otimes}B_{n+1}.$$

引理 3.12。 ($\star\star$) 强于($\star$)。

证明。假 设 ($\star\star$) 成立。分别用 $(E_n^A)_{n\geq 1}$ 和 $(E_n^B)_{n\geq 1}$ 表示相应的条件期望
相联系 d，配有滤过 $(A_n)_{n\geq 1}$ 和 $(B_n)_{n\geq 1}$。那么，如果 $m \geq 1$，我们有

$$D_{2m}^- D_1^+ = (E_{m+1}^A \otimes E_m^B - E_m^A \otimes E_m^B)(E_1^A \otimes E_2^B) = (E_{m+1}^A - E_m^A)E_1^A \otimes E_m^B E_1^B = 0.$$

如果 $m \geq 1$和 $n \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned} D_{2m}^- D_{2n-1}^+ &= (E_{m+1}^A \otimes E_m^B - E_m^A \otimes E_m^B)(E_n^A \otimes E_{n+1}^B - E_n^A \otimes E_n^B) \\ &= \big((E_{m+1}^A - E_m^A) \otimes E_m^B\big)\big((E_n^A \otimes (E_{n+1}^B - E_n^B)\big) \\ &= E_n^A(E_{m+1}^A - E_m^A) \otimes E_m^B(E_{n+1}^B - E_n^B). \end{aligned}$$

但如果 $m \leq n$，那么 $E_m^B(E_{n+1}^B - E_n^B) = 0$；如果 $m \geq n$，那么 $E_n^A(E_{m+1}^A - E_m^A) = 0$。因此， $D_{2m}^- D_{2n-1}^+$ 始终为 0，正如所需。□

定理3.13. 假设(★★) 成立。那么双鞅投影 P 是 *Jones* 型。

证明。由于它是两个鞅投影的复合，我们知道，对于每个 $1 < p < \infty$， P 是 L_p-有界的，且其常数仅依赖于 p。 [10][引理 2.13] 证明，在条件 **(★)** 下，子对（H_1（$P^{\perp}$）， H_2（$P^{\perp}$）） 在（L_1（M）， L_2（M）） 中是 K-闭的，且具有一个普适常数。最后， [10][事实14] 证明，在条件 **(★★)** 下，子对（H_1（P）， H_2（P）） 在（L_1（M）， L_2（M）） 中是 K-闭的，且具有一个普适常数。证明完毕。□

先前的结果表明，投影 P 满足技术条件。

引理 3.14. 设 N 是一个带迹*von Neumann*代数。那么，放大投影 $Q := P \otimes I$ 在L_2（$M\bar{\otimes}N$） $= L_2$（M） $\otimes L_2$（N） 是与数据相关联的双鞅投影

$$(M\bar{\otimes}N, (M_n^-\bar{\otimes}N)_{n\geq 1}, (M_n^+\bar{\otimes}N)_{n\geq 1}, I^-, I^+).$$

定理3.15。 假设(★★) 成立。那么双鞅投影 P 满足 *Pisier* 方法的假设。

证明。 设 N是一个半有限 von Neumann 代数。由于数据 $(M,(M_n^-)_{n\geq 1},(M_n^+)_{n\geq 1}, I^-, I^+)$ 满足 $(\star)$，我们看到数据

$$(M\bar{\otimes}N, (M_n^-\bar{\otimes}N)_{n\geq 1}, (M_n^+\bar{\otimes}N)_{n\geq 1}, I^-, I^+).$$

因此，由引理 3.14 和定理3.13 可得，放大投影 $Q := P \otimes I$ 在$L_2(M\bar{\otimes}N)$上是 Jones 型。因此，只需证明 $H_\infty(P^{\perp}) \odot L_\infty(N)$ 包含于 $H_\infty(P^{\perp} \otimes I)$。设 $x \in H_\infty(P^{\perp})$ 和 $f \in L_\infty(N)$。由于 $H_\infty(P^{\perp}\otimes I)$ 关于迹对偶是 $H_1(P\otimes I)$ 的极集，只需证明对每个 $w \in H_1(P\otimes I)$， $\tau((x\otimes f)w) = 0$。设 $w \in H_1(P\otimes I)$。由于序列 $((E_n^-\otimes I)(E_n^+\otimes I)(w))_{n\geq 1}$在 $L_1(M\bar{\otimes}N)$ 中收敛到 w， 且也属于 $H_1(P \otimes I)$，我们可以假设存在 $n \geq 1$， 使得 $(E_n^- \otimes I)(w) = (E_n^+ \otimes I)(w) = w$，从而得到

$$w = \sum_{i\in I^-, j\in I^+, i,j\leq n} (D_i \otimes I)^-(D_j^+ \otimes I)(w).$$

此外，由于代数张量积 $L_1(M) \odot L_1(N)$ 在 $L_1(M\bar{\otimes}N)$ 中范数稠密，存在 $L_1(M) \odot L_1(N)$ 的一个网 $(w_\alpha)_\alpha$， 其在 $L_1(M\bar{\otimes}N)$ 中收敛于 w。最后，我们令

$$w'_\alpha := \sum_{i\in I^-, j\in I^+, i,j\leq n} (D_i \otimes I)^-(D_j^+ \otimes I)(w_\alpha).$$

则显然，该网 $(w'_\alpha)_\alpha$ 在 $L_1(M\bar{\otimes}N)$ 中收敛于 w。因此，只需验证 $(\tau\otimes\sigma)((x\otimes f)w'_\alpha) = 0$。但我们可以写成

$$w_\alpha = \sum_\beta y_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta}$$

其中 $y_{\alpha\beta} \in L_1(M)$ 且 $g_{\alpha\beta} \in L_1(N)$。因此，我们有

$$\begin{aligned} w'_\alpha &= \sum_\beta \sum_{i\in I^-, j\in I^+, i,j\leq n} (D_i \otimes I)^-(D_j^+ \otimes I)(y_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta}) \\ &= \sum_\beta \sum_{i\in I^-, j\in I^+, i,j\leq n} D_i^- D_j^+(y_{\alpha\beta}) \otimes g_{\alpha\beta} \\ &= \sum_\beta \Big[\sum_{i\in I^-, j\in I^+, i,j\leq n} D_i^- D_j^+(y_{\alpha\beta}) \Big] \otimes g_{\alpha\beta} \\ &= \sum_\beta y'_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

其中

$$y'_{\alpha\beta} := \sum_{i\in I^-, j\in I^+, i,j\leq n} D_i^- D_j^+(y_{\alpha\beta})$$

显然属于 $H_1(P)$。因此，我们有 $\tau(xy'_{\alpha\beta}) = 0$，进而

$$\begin{aligned}(\tau\otimes\sigma)((x\otimes f)w'_\alpha) &= \sum_\beta (\tau\otimes\sigma)((x\otimes f)(y'_{\alpha\beta}\otimes g_{\alpha\beta}))\\ &= \sum_\beta (\tau\otimes\sigma)(xy'_{\alpha\beta}\otimes fg_{\alpha\beta})\\ &= \sum_\beta \tau(xy'_{\alpha\beta})\sigma(fg_{\alpha\beta}) = 0\end{aligned}$$

如所需。 □

推论 3.16. 假设(★★) 成立。若 $1 < p < \infty$ 且 $0 < \theta < 1$，则

$$[H_p(P), H_1(P)]_\theta = H_{p_\theta}(P)$$

在等价范数意义下，常数仅依赖于 p、θ，其中

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p} + \theta.$$

12. 鞅 Hardy 空间

设 M 是一个配备滤过 $(M_n)_{n\geq 1}$ 的半有限冯·诺依曼代数，其关联的条件期望记为 $(E_n)_{n\geq 1}$，关联的增量投影记为 $(D_n)_{n\geq 1}$。对于 $1 \leq p \leq \infty$，且 $\dagger \in \{r, c, rc\}$，令 $L_p(M, l_2^\dagger)$ 表示相关的行/列/混合 l_2-值 L_p-空间，正如其开创性论文 [13]中所介绍的。

序列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 由 $(L_1 + L_\infty)(M)$ 组成，若对每个 $n \geq 1$，都有适应于 $E_n(x_n) = x_n$。对于 $1 \leq p \leq \infty$，以及 $\dagger \in \{r, c, rc\}$，我们定义

$$L_p^{\mathrm{ad}}(M, \ell_2^\dagger) := \big\{x = (x_n)_{n\geq 1} \in L_p(M, \ell_2^\dagger) \,:\, (x_n)_{n\geq 1} \text{ is an adapted sequence}\big\}.$$

显然，它们是 $L_p(M, l_2^\dagger)$ 的闭子空间。利用 [10][引理3。1],中提到的转移技巧，以下结果可直接由推论 3.8 得出。

定理 3.17。 设 $\dagger \in \{r, c, rc\}$。若 $1 < p < \infty$ 且 $0 < \theta < 1$，则

$$[L_p^{\mathrm{ad}}(M, \ell_2^\dagger), L_1^{\mathrm{ad}}(M, \ell_2^\dagger)]_\theta = L_{p_\theta}^{\mathrm{ad}}(M, \ell_2^\dagger)$$

范数等价，等价常数仅依赖于 p、θ，其中

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p} + \theta.$$

注记。 在 $\dagger \in \{r, c\}$ 的情形下，上述定理最早在 [16][命题 318]，中得到证明；事实上，该结果是在更一般的拟赋范空间框架下证明的。情形 $\dagger = rc$ 似乎是新的。

一个序列 $(x_n)_{n\geq 1}$ of $(L_1 + L_\infty)(M)$ 是一个鞅增量，如果它是适应的，且对于 $E_{n-1}(x_n) = 0$，每个 $n \geq$ 2. 对于 $1 \leq p \leq \infty$，以及 $\dagger \in \{r, c, rc\}$，我们定义

$$L_p^{\mathrm{mi}}(M, \ell_2^\dagger) := \big\{x = (x_n)_{n\geq 1} \in L_p(M, \ell_2^\dagger) \,:\, (x_n)_{n\geq 1} \text{ is a martingale increment}\big\}.$$

显然，它们是 $L_p^{\mathrm{ad}}(M, l_2^\dagger)$ 的闭子空间。结合推论3.16，运用相同的转移技巧，我们得到以下结果。

定理 3.18. 设 $\dagger \in \{r, c, rc\}$。若 $1 < p < \infty$ 且 $0 < \theta < 1$，则

$$[L_p^{\mathrm{mi}}(M, \ell_2^\dagger), L_1^{\mathrm{mi}}(M, \ell_2^\dagger)]_\theta = L_{p_\theta}^{\mathrm{mi}}(M, \ell_2^\dagger)$$

在等价范数意义下成立，常数仅取决于 p, θ，其中

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p} + \theta.$$

注记。 情形 $\dagger \in \{r,\ c\}$ 等价于 [11][定理 3.1]。它也可以直接由情形 $\dagger \in \{r,\ c\}$ 在定理 3.17 中，结合针对非交换鞅的 Stein 不等式和 Lépingle-Yor 不等式；这两个不等式分别在 [13][定理 2.3]和 [14][定理 2.1] 中得到证明。

对于 $1 \le p < \infty$，令 $\mathrm{H}_p(M)$ 表示相应的混合鞅 Hardy 空间，其定义为

$$\mathscr{H}_p(M) = \begin{cases} L_p^{\mathrm{mi}}(M, \ell_2^r) + L_p^{\mathrm{mi}}(M, \ell_2^c) & \text{if } 1 \le p < 2 \\ L_p^{\mathrm{mi}}(M, \ell_2^r) \cap L_p^{\mathrm{mi}}(M, \ell_2^c) & \text{if } p \ge 2 \end{cases}$$

如 [11], 所详述，以下结果可直接由定理 $\dagger \in \{r,\ c\}$ 中的情形 3.18 以及 [8]中证明的非交换 Burkholder-Gundy 不等式直接推出。

定理 3.19 (Musat)。 假设 M 是有限的。若 $1 < p < \infty$ 且 $0 < \theta < 1$，则

$$[\mathscr{H}_p(M), \mathscr{H}_1(M)]_\theta = \mathscr{H}_{p_\theta}(M)$$

具有等价范数，其常数仅取决于 p、θ，其中

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p} + \theta.$$

注记。 显然，

$$\mathscr{H}_p(M) = L_p^{\mathrm{mi}}(M, \ell_2^{rc}), \quad \text{for } p \ge 2.$$

实际上，作为非交换鞅的 Stein 不等式的推论，我们有

$$\mathscr{H}_p(M) = L_p^{\mathrm{mi}}(M, \ell_2^{rc}), \quad \text{for } p > 1.$$

在等价范数下，常数仅依赖于 p。然而，没有理由认为两个空间$L_1^{\mathrm{mi}}(M,\ l_2^{rc})$ 和 $\mathrm{H}_1(M)$ 相等。尽管如此，如果 $x \in \mathrm{H}_1(M)$，那么显然 $x \in L_1^{\mathrm{mi}}(M,\ l_2^{rc})$，且

$$\|x\|_{L_1^{\mathrm{mi}}(M, \ell_2^{rc})} \le \|x\|_{\mathscr{H}_1(M)}.$$

致谢与参考文献

致谢

我非常感谢我的导师 Éric Ricard，在本文写作过程中与我进行的许多宝贵讨论，并给予我的指导。

参考文献

[1] Turdebek N. Bekjan. 与半有限次对角代数相关的非交换 Hardy 空间.《数学分析及其应用杂志》，429(2):1347–1369，2015.[2] Jöran Bergh 和 Jörgen Löfström. 插值空间：导论，数学科学基础丛书第223卷. 施普林格出版社，柏林-纽约，1976. [3] Peter G. Dodds、Ben de Pagter 和 Fedor A. Sukochev. 非交换积分与算子理论，数学进展第349卷. Birkhäuser/Springer，查姆， [2023]©2023. [4] Peter G. Dodds、Theresa K. Dodds 和 Ben de Pagter. 全对称算子空间.《积分方程与算子理论》，15(6):942–972，1992.[5] Svante Janson. 子对与商对的插值.《阿克塔数学》，31(2):307–338，1993. [6] Peter W. Jones. L^∞ 半平面上 $\bar\partial$ 问题的估计.《数学学报》，150(1-2):137–152，1983. [7] Peter W. Jones. 关于 H^1 与 H^∞之间的插值. 载于《分析中的插值空间及相关主题》（隆德，1983），《数学讲义》第1070卷，第143–151页. 施普林格，柏林，1984. [8] Marius Junge 和 Quanhua Xu. 非交换 Burkholder/Rosenthal 不等式.《概率年刊》，31(2):948–995，2003. [9] S. V. Kislyakov 和 Kuankhua Shu. 实插值与奇异积分.《代数与分析》，8(4):75–109，1996. [10] Hugues Moyart. 非交换 Lebesgue 空间中带滤过的 K 288 7 110829, -闭性 45, 2025 结果.《泛函分析杂志》，( ):论文编号 .[11] Magdalena Musat. 非交换 BMO 与非交换 L_p 202 1 195 225, 空间 2003 之间的插值.《泛函分析杂志》，( ): – .[12] Gilles Pisier. H^p 9 2 281 291, 空间 1993 与非交换推广之间的插值. II.《伊比利亚美洲数学评论》，( ): – .[13] Gilles Pisier 和 Quanhua Xu. 非交换鞅不等式.《数学物理通讯》，189(3):667–698，1997. [14] Yanqi Qiu. Lépingle-Yor 鞅不等式的非交换版本.《统计与概率快报》，91:52–54，2014. [15] Narcisse Randrianantoanina. 非交换鞅变换.《泛函分析杂志》，194(1):181–212，2002. [16] Narcisse Randrianantoanina. 非交换鞅 Hardy 空间与 BMO 空间之间的插值：情形 $0 < p < 1$.《加拿大数学杂志》，74(6):1700–1744，2022.[17] Kichi-Suke Saito. 关于有限极大次对角代数不变子空间的注记.《美国数学会会刊》，77 352，1979 3 348( ): – .[18] James D. Stafney. 插值空间上算子的算子谱 .《美国数学会汇刊》，144:333–349，1969. [19] Thomas H. Wolff. 关于插值空间的一则注记. 载于《调和分析》（明尼阿波利斯，明尼苏达州，1981），《数学讲义》第908卷，第199–204页. 施普林格，柏林-纽约，1982.

UNICAEN , CNRS, LMNO, 14000 卡昂, 法国
电子邮件地址：hugues.moyart@unicaen.fr