arXiv:2603.16802v1 [math.LO] 17 Mar 2026

# 重新审视哈恩-巴拿赫定理的可计算性

Vasco Brattka[1,2][0000-0003-4664-2183] 和
Christopher Sorg[1][0009-0003-9684-6966]

[1] 慕尼黑联邦国防军大学计算机科学学院，维尔纳·海森堡路39号，85577 诺伊比贝格，德国[2] 开普敦大学数学与应用数学系，邮政专用袋 X3，朗德博斯 7701，南非
Vasco.Brattka@cca-net.de chr.sorg@unibw.de

**摘要。** 哈恩-巴拿赫定理的计算性质已在可计算数学、构造数学和逆向数学中得到研究；在所有这些研究框架中，该定理都等价于弱柯尼希引理。Gherardi 和 Marcone 证明，这一结论在 Weihrauch 复杂度的一致意义下同样成立。不过，他们的结果要求底层空间是可变的。我们证明，对于巴拿赫空间 $\ell^1$，哈恩-巴拿赫定理已经达到其完整复杂度。我们还证明，该空间上的单步 Hahn-Banach 定理在 Weihrauch 意义下等价于介值定理。这也借助无穷乘积，为哈恩-巴拿赫定理可归约到弱柯尼希引理这一结论提供了一种全新且极其简单的证明。最后，我们证明，在二维情形下，$\ell^1$ 上的哈恩-巴拿赫定理在 Weihrauch 意义下等价于较弱有限全知原理。

**关键词：** 可计算分析 · Weihrauch复杂度 · 哈恩-巴拿赫定理。

## 1 引言

哈恩-巴拿赫定理（HBT）是泛函分析的核心定理之一。本文及下文中，我们只考虑域 $\mathbb{R}$上的赋范空间，所有计算结果均针对可分空间。我们用 $\|f\| := \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|$表示赋范空间 $X$中泛函 $f$ 的上确界范数。

**定理 1（哈恩-巴拿赫）。** 设 $X$ 是一个含有线性子空间$A \subseteq X$的赋范空间。那么，每个有界线性泛函 $f\colon A \to \mathbb{R}$ 都有一个线性延拓$g\colon X \to \mathbb{R}$，满足 $\|g\| = \|f\|$。

Narici 和 Beckenstein [18]对哈恩-巴拿赫定理的历史作了很好的综述。Metakides、Nerode 和 Shore [16,17], 从可计算分析的角度研究了哈恩-巴拿赫定理，Brown 和 Simpson [12,19], 在逆向数学中研究了它，而

Ishihara [15,13]则在逆向构造分析中研究了它。在所有这些研究路径中，该定理都被证明等价于弱柯尼希引理（弱柯尼希引理）。最后，Gherardi 和 Marcone [14] 证明，在 Weihrauch复杂度的一致意义下 [8]，这一结论同样成立（下文将定义 Weihrauch 等价 $\equiv_{\mathrm{W}}$ 以及引言中用到的其他相关概念）。

**定理 2（Gherardi 和 Marcone，2009年）**。Hahn-Banach 定理 $\equiv_{\mathrm{W}}$ 弱柯尼希引理。

利用一棵 Kleene 树，可以将 Metakides、Nerode 和 Shore [17]的结果作为这一分类的推论得到。

**推论 3（Metakides、Nerode 和 Shore，1985年）**。存在一个可计算的 *Banach* 空间 $X$，其中有一个可计算可分子空间 $A \subseteq X$，以及一个可计算泛函 $f\colon A \to \mathbb{R}$，满足 $\|f\| = 1$，使得 $f$ 没有可计算线性延拓 $g\colon X \to \mathbb{R}$ 满足 $\|g\| = 1$。

上述两个结果的构造都使用了一个可变的 Banach 空间 $X$，它取决于弱柯尼希引理的相应实例。我们探讨是否存在一个固定的可计算 Banach 空间 $X$，使得 Hahn-Banach 定理（HBT）$_X$ 与弱柯尼希引理在 Weihrauch 意义下等价。

每个映射到可计算度量空间且 Weihrauch 归约于弱柯尼希引理的单值问题都是可计算的 [7,定理8。8]因此，定理 2 意味着：如果可计算赋范空间$X$ 具有这样的性质，即其 $X$ 子空间上的所有有界线性泛函都有唯一的保范延拓（这一点在 [3]中也有所指出），那么 $\mathrm{HBT}_X$ 是可计算的。

根据 Taylor 和 Foguel 的经典结果 [18,定理 16.4，8]，已知，对于空间 $X$（对所有子空间和泛函而言），延拓具有唯一性，当且仅当 $X$ 的对偶空间是严格凸的。因此，我们得到以下结论。

**推论 4**。Hahn-Banach 定理$_X$ 对于每个具有严格凸对偶空间的可计算赋范空间 $X$ 都是可计算的。

我们回顾一下，在可数集 $I$ 上的赋范空间 $\ell^p(I) := \{x \in \mathbb{R}^I : \|x\|_p < \infty\}$ 是针对 $1 \le p \le \infty$ 定义的，其定义如下：

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_p := \left(\sum_{i\in I} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ if } p < \infty \text{ and } \|(x_i)_{i\in I}\|_\infty := \sup_{i\in I} |x_i|.$$

对于 $I = \mathbb{N}$，我们简记为 $\ell^p$；对于 $I = \{0,1\}$，我们记作 $\ell^p_2$。已知，对于满足 $1 < p < \infty$ 的 $p$，空间 $\ell^p$ 是严格凸的（见练习 16.201] ），其对偶空间也因此是严格凸的。因此，从某种意义上说，空间 $\ell^1$ 是一个简单的例子：它是无限维可计算赋范空间，而其对偶空间 $\ell^\infty$ 却不是严格凸的。事实上，哈恩-巴拿赫定理在 $\ell^1$ 上已经展现出其全部复杂性。我们的主要结果之一如下。

**定理 5.** Hahn-Banach 定理$_{\ell^1}$ $\equiv_{\mathrm{W}}$弱柯尼希引理。

我们将在第5节证明这一结果。在第6节中，我们将强化这一结果，并说明即使利用子空间 $A$ 的距离函数提供更多信息，也不会让 $\mathrm{HBT}_{\ell^1}$ 问题变得更简单。

从历史上看，Helly 首先针对特定的赋范空间 $X$ 归纳地证明了哈恩-巴拿赫定理，其起点是以下单步版本的定理 [18, 定理 7.3.1]。

**定理 6（单步 Hahn-Banach 定理）**。设 $X$ 是一个赋范空间，$A \subseteq X$ 是其线性子空间，且 $x \in X$。那么，每个满足 $\|f\| \leq 1$ 的线性泛函 $f\colon A \to \mathbb{R}$ 都有一个满足 $\|g\| \leq 1$ 的线性延拓 $g\colon A+\mathbb{R}x \to \mathbb{R}$。事实上，$f$ 的线性延拓 $g : A+\mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ 满足 $\|g\| \leq 1$ 当且仅当

$$\sup_{y\in A}(f(y) - \|x-y\|) \leq g(x) \leq \inf_{y\in A}(f(y) + \|x-y\|).$$

特别是，这两个界都存在，且都落在区间 $[-\|x\|, \|x\|]$ 内。

由于在两个分别以上确界和下确界给出的数之间求一个值，正是介值定理所能实现的，因此我们可以得出结论：单步 Hahn-Banach 定理（$\mathrm{HBT}^1$）可归约为介值定理（IVT）。

**命题 7**。 Hahn-Banach 定理$^1_X \leq_{\mathrm{W}}$IVT 适用于每个可计算赋范空间 $X$。

我们在第 3 节证明的第二个主要结果是，单步定理在空间 $X = \ell^1$ 上就已经呈现出其最复杂的行为。

**定理8**。 Hahn-Banach 定理$^1_{\ell^1} \equiv_{\mathrm{W}}$IVT。

Banach 和 Hahn 给出的哈恩-巴拿赫定理的历史性证明，从单步版本出发，通过超限归纳法逐步推导得出 [18]。如今，教科书中的证明改用佐恩引理；这两种情况下的证明都以选择公理为基础。对于可分空间，众所周知 [18] ，依赖选择公理足以通过归纳从单步版本推出哈恩-巴拿赫定理。我们可以仿照这一证明，从而得到一个新的上界证明。

**命题9**。 Hahn-Banach 定理$_X \leq_{\mathrm{W}}$IVT$^\infty$ 适用于每个可计算赋范空间 $X$。

这里，IVT$^\infty$ 表示按 [5],意义下的 IVT 无限乘积；该文还证明了 WKL$^\infty \equiv_{\mathrm{W}}$ WKL，因此可得 IVT$^\infty \equiv_{\mathrm{W}}$ WKL。Kihara 注意到，在某些逻辑框架下，无限乘积运算对应于依赖选择公理。[3]

如果所考虑的空间 $X$ 是有限维的，那么只需有限次循环即可得到哈恩-巴拿赫定理。事实上，我们得到以下结果。

[3] Takayuki Kihara，无限循环运算与依赖选择公理，在日本京都举行的 CCA 2025 上的报告，2025年9月24日。

**命题 10**。 Hahn-Banach 定理$_X \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{IVT}^{[n-1]}$ 对每个 $n$ 维可计算赋范空间 $X$ 以及 $n \geq 1$。

这里，$\mathrm{IVT}^{[n]}$ 表示 IVT 的 $n$ 重复复合积。我们注意到，$\mathrm{IVT} <_{\mathrm{W}} \mathrm{IVT}^{[2]}$ [10, 定理 9.3]。已知介值定理 IVT 对于可计算实例具有可计算解。这立即给出了哈恩-巴拿赫定理的一个非一致可计算版本，作为推论。

**推论 11（Metakides 和 Nerode，1982年）**。设 $X$ 是一个有限维可计算赋范空间，其含有一个可计算可分子空间 $A \subseteq X$。那么，每个可计算线性泛函 $f\colon A \to \mathbb{R}$ 都有一个可计算线性延拓$g\colon X \to \mathbb{R}$，且满足 $\|g\| = \|f\|$。

最后，我们指出命题 10 给出的上界并不紧。事实上，我们在第 4 节证明了以下关于二维情形的结果。

**定理 12**。Hahn-Banach 定理$_{\ell^1_2} \equiv_{\mathrm{W}} \mathrm{LLPO}$。

图 1 中的图示展示了我们将要研究的相关 Weihrauch度。

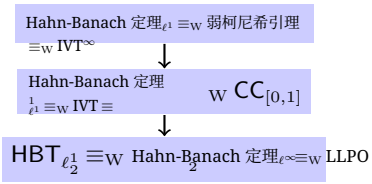



**图 1**。Weihrauch格中的哈恩-巴拿赫定理。

## 2 Weihrauch复杂度与Hahn-Banach定理

我们将介绍可计算分析和Weihrauch复杂度中的一些概念，并在此过程中加以使用；更多详情请参阅 [9,20] 。回顾一下，空间 $X$ 的一个表示是一个满射偏映射 $\delta_X :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$。此时，$(X, \delta_X)$称为一个表示空间。若有两个表示空间$(X, \delta_X)$和$(Y, \delta_Y)$，则我们自动得到函数空间 $f : X \to Y$ 的一个表示$\delta_{\mathcal{C}(X,Y)}$，其中这些函数具有连续实现器。若一个部分函数 $F :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 满足以下条件，则称其为某个部分多值函数$f :\subseteq X \rightrightarrows Y$的实现器：

$$\delta_Y F(p) \in f\delta_X(p)$$

对所有 $p \in \mathrm{dom}(f\delta_X)$。在这种情况下，我们也记作 $F \vdash f$。众所周知，存在通用函数 U:$\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得对于每个连续的

$F:\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 存在某个 $q \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得 $F(p) = \mathsf{U}\langle q, p\rangle$ 对所有 $p \in \mathrm{dom}(F)$。这里 $\langle\cdot\rangle$ 表示贝尔空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上的某个标准配对函数（我们对成对元素以及序列的配对都使用这一记号）。简便起见，我们写作 $\mathsf{U}_q(p) := \mathsf{U}\langle q, p\rangle$ 对于所有 $q, p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$。现在，我们通过以下方式得到集合 $\mathcal{C}(X, Y)$ 的一个表示 $\delta_{\mathcal{C}(X,Y)}$：该集合由具有连续实现器的全定义单值函数 $f\colon X \to Y$ 组成

$$\delta_{\mathcal{C}(X,Y)}(q) = f :\iff \mathsf{U}_q \vdash f.$$

众所周知，对于适当表示的 $T_0$–空间 $X, Y$ 函数空间 $\mathcal{C}(X, Y)$ 恰好由通常意义下的连续函数构成（更多细节请参见 [9,20] ）。我们需要为定义域可变的函数空间 $\mathcal{C}(A, Y)$ 构造一种表示 $A$。为此，我们使用以下形式的余积。

**定义 13（余积函数空间）**。设 $X, Y$ 为表示空间，且 $(\mathcal{P}(X)\ \delta_{\mathcal{P}})$ 为表示空间，其中 $\mathcal{P}(X) \subseteq 2^X$。那么

$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(X,Y) := \bigsqcup_{A\in\mathcal{P}(X)} \mathcal{C}(A,Y) := \{(f,A) : A \in \mathcal{P}(X) \text{ and } f \in \mathcal{C}(A,Y)\}$$

表示我们以 $\delta_{\mathcal{C}_{\mathcal{P}}}$ 表示的余积函数空间，其定义为

$$\delta_{\mathcal{C}_{\mathcal{P}}}\langle q,p\rangle = (f,A) :\iff \delta_{\mathcal{P}}(p) = A \text{ and } \mathsf{U}_q \vdash f$$

对于所有具有 $A \in \mathcal{P}(X)$ 的全定义单值函数 $f\colon A \to Y \in \mathcal{C}(A, Y)$。

若 $Y = \mathbb{R}$，则简写为 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(X) := \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(X, \mathbb{R})$。对于某些可计算度量空间 $X$ 的闭子集空间，我们将使用 $\mathcal{P}(X)$。回顾一下，可计算度量空间 是一个度量空间 $(X, d)$，连同一个稠密序列 $s : \mathbb{N} \to X$，满足 $d \circ (s \times s)$ 是可计算的。我们用 $\mathcal{S}(X)$ 表示非空闭子集空间 $A \subseteq X$，其表示由一个序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 给出，满足

$$A = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

我们用 $\mathcal{L}(X)$ 表示由其距离函数表示的非空闭集空间 $A \subseteq X$

$$d_A : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \inf_{y\in A} d(x,y).$$

在第一种情况下，集合 $A$ 的名称是 $X^{\mathbb{N}}$ 中某个点的名称；在第二种情况下，则是 $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 中某个函数的名称。可计算集合 $A \in \mathcal{S}(X)$ 称为可计算可分，可计算集合 $A \in \mathcal{L}(X)$ 称为可定位 [11]。由 [11, 定理 3.8、3.9] 可知，$\mathcal{L}(X)$ 的表示所包含的关于闭子空间的信息，远多于 $\mathcal{S}(X)$ 的表示。特别是，对于每个可计算度量空间，恒等映射 $\mathrm{id} : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{S}(X)$ 都是可计算的，但其逆映射通常不可计算（即使对于 $X = \mathbb{R}$ 也不可计算）。如果我们分别使用 $\mathcal{P}(X) = \mathcal{S}(X)$ 或 $\mathcal{P}(X) = \mathcal{L}(X)$，则用 $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ 或 $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ 代替 $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$。

我们回顾一下，可计算赋范空间 $X$ 是一个赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$，并配有一个基本序列 $e\colon \mathbb{N} \to X$ （即一个其线性

张成稠密的序列），使得由此诱导的度量空间是可计算度量空间。该度量空间通过对 $e$ 的有理线性组合进行某种标准枚举 $s\colon \mathbb{N} \to X$ 来定义。我们只考虑实数域 $\mathbb{R}$上的赋范空间。

众所周知，可分赋范空间上的线性映射可以由其在基本序列上的取值以及一个界来表示（参见例如 [2, 定理 4.3]）。

**命题 14（有界线性泛函）**。设 $X$ 是一个带有基本序列 $e\colon \mathbb{N} \to X$的可计算赋范空间。多值函数

$$F :\subseteq \mathcal{C}(X) \rightrightarrows \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}, f \mapsto \{((f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}, M) : \|f\| \leq M\},$$

定义在所有有界线性泛函 $f$上，是可计算的，并且有一个可计算的左逆。

现在我们可以定义*Hahn-Banach*问题 Hahn-Banach 定理$_X$ 以及单步 *Hahn-Banach* 问题 Hahn-Banach 定理$^1_X$。

**定义15（Hahn-Banach问题）**。设 $X$ 是一个可计算赋范空间。于是我们定义：

1. Hahn-Banach 定理$_X :\subseteq \mathcal{C}_S(X) \rightrightarrows \mathcal{C}(X)$，其中 Hahn-Banach 定理$_X(f,\ A)$ 是集合

$$\{g \mid g : X \to \mathbb{R} \text{ is a linear extension of } f \text{ with } \|g\| \leq \|f\|\}$$

其 dom(Hahn-Banach 定理$_X$) $:= \{(f,\ A) \mid f\colon A \to \mathbb{R}$线性且具有 $0 < \|f\| < \infty\}$。

2. Hahn-Banach 定理$^1_X :\subseteq \mathcal{C}_S(X) \times X \rightrightarrows \mathcal{C}_S(X)$，其中 Hahn-Banach 定理$^1_X(f,\ A,\ x)$ 是集合

$$\{(g, A+\mathbb{R}x) \mid g : A+\mathbb{R}x \to \mathbb{R} \text{ is a linear extension of } f \text{ with } \|g\| \leq \|f\|\}$$

$$\text{with } \mathrm{dom}(\mathsf{HBT}^1_X) := \{(f, A, x) \mid f : A \to \mathbb{R} \text{ linear with } 0 < \|f\| < \infty\}.$$

注意，我们不要求 Hahn-Banach 定理$^1_X$满足 $x \notin A$。为了比较问题，我们采用通常的 Weihrauch归约概念（综述见 [8]）。一般来说，问题 是定义在表示空间$X$，$Y$上的多值函数 $f :\subseteq X \rightrightarrows Y$。此处，$\mathrm{id}\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 表示贝尔空间上的恒等映射。

**定义16（Weihrauch归约）**。设 $f :\subseteq X \rightrightarrows Y$和 $g :\subseteq Z \rightrightarrows W$是问题。若存在可计算的 $H$，$K :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得只要$G \vdash g$ 成立，就有 $H\langle \mathrm{id}\ GK\rangle \vdash f$，则称 $f$ 可Weihrauch归约到 $g$，记作 $f \leq_{\mathrm{W}} g$。

通常，我们用 $\equiv_{\mathrm{W}}$ 表示相应的等价关系。我们还需要一些著名的基准问题，用来刻画上述 Hahn-Banach问题。下述定义中的问题分别称为弱柯尼希引理（WKL）、分离问题 （SEP）、介值定理 （IVT）、连通选择问题 （CC$_{[0,1]}$） of$[0, 1]$ 以及较弱有限全知原理。我们用 Tr 表示由特征函数表示的二叉树 $T \subseteq \{0, 1\}^*$ 集合。我们用 range($f$) $= \{f(x) : x \in X\}$ 表示函数 $f\colon X \to Y$ 的值域 。

**定义 17（基准问题）**。我们定义以下问题:

1. 弱柯尼希引理 $:\subseteq \mathsf{Tr} \rightrightarrows 2^{\mathbb{N}}, T \mapsto [T]$，其中 dom(WKL) 是所有无限二叉树的集合，$[T]$ 表示 $T$的无限路径集合。 2. 分离问题 $:\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows 2^{\mathbb{N}}, (p, q) \mapsto \{A : (\forall n)\ \mathrm{range}(p) \subseteq A \subseteq \mathbb{N} \setminus \mathrm{range}(q)\}$，其中 $\mathrm{dom}(\mathrm{SEP}) := \{(p, q) : \mathrm{range}(p) \cap \mathrm{range}(q) = \varnothing\}$。 3. IVT $:\subseteq \mathcal{C}[0,1] \rightrightarrows [0,1], f \mapsto f^{-1}\{0\}$，其 $\mathrm{dom}(\mathrm{IVT}) = \{f : f(0) \cdot f(1) < 0\}$。 4. $\mathsf{CC}^{[0,1]} :\subseteq [0,1]^{\mathbb{N}} \times [0,1]^{\mathbb{N}} \rightrightarrows [0,1], ((a_n), (b_n)) \mapsto \{x : (\forall n)\ a_n \leq x \leq b_n\}$，其 $\mathrm{dom}(\mathsf{CC}^{[0,1]}) = \{((a_n), (b_n)) : (\forall n)\ a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n\}$。 5. LLPO $:\subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \{0,1\}, (p_0, p_1) \mapsto \{i \in \{0,1\} : p_i = \widehat{0}\}$，其 $\mathrm{dom}(\mathrm{LLPO}) := \{(p_0, p_1) : (\exists i \in \{0,1\})\ p_i = \widehat{0}\}$。

这里，$\widehat{0} \in 2^{\mathbb{N}}$ 表示常零序列。以下等价关系广为人知。弱柯尼希引理与分离问题的等价性由Gherardi和Marcone证明； [14], 连通选择与介值定理的等价性则归功于Gherardi和第一作者 [6, 命题 3.6，定理 6。2]关于连通选择的更多结果可见 [10]。弱柯尼希引理在无限循环下封闭的证明，以及无限循环所需的其他所有结果，也可见 [5], 。

**命题 18**。 弱柯尼希引理$^\infty \equiv_{\mathrm{W}}$ 弱柯尼希引理 $\equiv_{\mathrm{W}}$ 分离问题 $\equiv_{\mathrm{W}} \mathrm{IVT}^\infty$ 和 $\mathrm{IVT} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{CC}^{[0,1]}$。

现在我们回顾无限循环的定义，该概念在 [5]中引入。直观而言，$f^\infty = \ldots \star f \star f$ 可视为无限复合积。贝尔空间上的两个问题 $f$， $g$ 的复合积可定义为 $f \star g := \langle \mathrm{id} \times f\rangle \circ \mathsf{U} \circ \langle \mathrm{id} \times g\rangle$。我们用 $f^{[n]}$ 表示 $f$ 与自身的 $n$重复复合积。无限循环是基于该乘积的逆极限构造。这里，对于 $f :\subseteq X \rightrightarrows Y$和 $A \subseteq X$， $f(A) = \bigcup_{x \in A} f(x)$。

**定义 19（无限循环）**。设 $f :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个问题。则我们定义 $f$ 的逆极限 $f^\infty :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 为

$$f^\infty(q_0) := \{\langle q_0, q_1, q_2, \ldots\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\forall i)\ q_{i+1} \in \mathsf{U} \circ \langle \mathrm{id} \times f\rangle(q_i)\}$$

其中，$\mathrm{dom}(f^\infty)$ 由所有满足以下条件的 $q_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 构成： $A_0 := \{q_0\} \subseteq \mathrm{dom}(\mathsf{U} \circ \langle \mathrm{id} \times f\rangle)$，且对于所有 $i \in \mathbb{N}$， $A_{i+1} := \mathsf{U} \circ \langle \mathrm{id} \times f\rangle(A_i) \subseteq \mathrm{dom}(\mathsf{U} \circ \langle \mathrm{id} \times f\rangle)$。

利用标准技巧，可以将此定义从贝尔空间上的问题推广到任意表示空间上的问题。 [5] 中还证明了，关于（强）Weihrauch归约， $f \mapsto f^\infty$ 是一个单调运算。现在我们已经为证明主要结果做好了充分准备。

## 3 Hahn-Banach 定理的一步形式

我们对 $\mathsf{CC}^{[0,1]}$ 的定义方式，使得命题 7 可直接由命题 18 和定理 6 推出。也就是说，对于每个可计算赋范空间 $X$，单步 Hahn-Banach 定理都可归约为介值定理。

**命题 20.** Hahn-Banach 定理$^1_X \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{CC}_{[0,1]}$ 对每个可计算赋范空间 $X$均成立。

证明。 给定一个泛函 $f\colon A \to \mathbb{R}$，满足 $0 < \|f\| < \infty$ 和 $x \in X$，我们可以假设 $\|f\| \leq 1$，因为只需将 $f$除以一个上界 $M$即可；根据命题 14，该上界可以计算得到。于是，我们得到一个延拓$g\colon A + \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$，满足 $\|g\| \leq 1$；借助 $\mathsf{CC}_{[0,1]}$和定理 6，我们可以确定 $g(x)$。根据命题 14，利用现有信息，我们实际上可以将 $g$ 作为函数空间 $\mathcal{C}(A + \mathbb{R}x)$中的一个点计算出来。为了将$g$ 转化为原泛函的延拓，我们还必须再次将它乘以 $M$。□

我们强调，这个证明只能得到普通的 Weihrauch 归约，而非强归约。如果我们在无限循环中反复应用 Hahn-Banach 问题的单步版本，就能得到一个关于著名的弱柯尼希引理归约的新证明。

**定理 21.** Hahn-Banach 定理$_X \leq_{\mathrm{W}}$弱柯尼希引理 对每个可计算赋范空间均成立。

证明. 从一个泛函 $f\colon A \to \mathbb{R}$ 出发，我们仍可假设$\|f\| \leq 1$，只需针对该空间的基本序列 $(e_n)_n$ 反复应用 Hahn-Banach 定理$^1_X$ 。归纳地，从 $f_0 := f$ 和 $A_0 := A$ 出发，可得到泛函 $h_{n+1}\colon A_n + \mathbb{R}e_n \to \mathbb{R}$ 以及闭集 $A_{n+1}$，后者是 $A_n + \mathbb{R}e_n$的线性张成的闭包。利用命题 14，我们可以计算出每个 $h_{n+1}$ 到一个类型为 $f_{n+1}\colon A_{n+1} \to \mathbb{R}$的泛函的延拓，并将其用于下一次应用 Hahn-Banach 定理$^1_X$。因此，每个 $f_{n+1}$ 都是 $f_n$ 的线性延拓，且满足$\|f_n\| \leq 1$。总之，值 $(f_{n+1}(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 确定了一个线性泛函$g\colon X \to \mathbb{R}$，它将 $f$ 延拓为 $\|g\| \leq 1$；这些数据足以通过命题 14 得到 $g$ 作为 $\mathcal{C}(X)$中的一个点。总之，根据命题 18，这证明了 Hahn-Banach 定理$_X \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{IVT}^\infty \equiv_{\mathrm{W}}$ 弱柯尼希引理。□

在有限维情形中，同样的论证只需有限次应用 IVT，即可得到命题 10。在下一节中，我们将看到这一界并不紧，甚至对于 $\ell^1$–范数在 $\mathbb{R}^2$上也是如此。

接下来，我们要证明单步 Hahn-Banach 定理在 $X = \ell^1$ 情形下达到其最大复杂度。我们使用如下可计算线性等距映射

$$R : \ell^1(\mathbb{N} \times \{0,1\}) \to \ell^1, R((x_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\{0,1\}})(2n+i) := x_{n,i}, \tag{1}$$

它使我们能够将 $\ell^1(\mathbb{N} \times \{0,1\})$ 与 $\ell^1$ 视为同一对象。我们还使用 $\ell^1(\mathbb{N} \times \{0,1\})$ 的单位向量的标准基本序列 $(e_{n,i})$。

**命题 22。** $\mathsf{CC}_{[0,1]} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{HBT}^1_{\ell^1}$。

证明。 给定 $[0,1]$ 中两列有理数 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $a_n \leq a_{n+1}$ 以及 $b_{n+1} \leq b_n$，其中 $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n =: b$，目标是找到一个满足 $a \leq y \leq b$ 的实数 $y \in [0,1]$。不失一般性，我们甚至可以假设对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n < b_n$。

我们使用空间 $X = \ell^1(\mathbb{N} \times \{0,1\})$，它由 (1) 同构于 $\ell^1$。现在我们计算子空间 $A \subseteq X$ 上的泛函 $f\colon A \to \mathbb{R}$，其中 $\|f\| \leq 1$

以及一个点 $x \in X$，使得 $f$ 的每个线性延拓 $g\colon A + \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$（满足$\|g\| \leq 1$）都满足 $a \leq g(x) \leq b$。这证明了 $\mathsf{CC}_{[0,1]} \leq_{\mathrm{W}} \text{Hahn-Banach 定理}^{1}_{\ell^1}$。

为了构造 $f$，我们首先根据输入数据计算

$$\alpha_n := \frac{a_n - b_n}{2} < 0 \text{ and } \beta_n := \frac{a_n + b_n}{2} \in [0,1]$$

然后对所有 $n \in \mathbb{N}$

$$u_n := e_{n,0} + \alpha_n e_{n,1} \text{ and } v_n := e_{n,0} - e_{n+1,0}.$$

因此，我们也可以计算由 $B := \{v_n, u_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ 和 $x := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n-1} e_{n,0} \in X$ 的线性张成的闭包 $A \in \mathcal{S}(X)$。由于 $B$ 线性无关，存在唯一的线性 $f_0 : \mathrm{span}(B) \to \mathbb{R}$，其取值为

$$f_0(v_n) := 0 \text{ and } f_0(u_n) := \beta_n$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。我们声称 $f_0$ 有界，且 $\|f_0\| \leq 1$，因此根据哈恩-巴拿赫定理，它唯一地延拓为有界线性泛函 $f\colon A \to \mathbb{R}$，其中 $\|f\| \leq 1$。暂且继续假设这一声称成立。

设 $h\colon A+\mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ 是我们作为 $\mathrm{HBT}^{1}_{X}(f, A, x)$ 的输出所得到的一个泛函。根据经典哈恩–巴拿赫定理，$h$ 有一个延拓 $g : X \to \mathbb{R}$，它是 $f$ 的线性连续延拓，且满足 $\|g\| \leq 1$。由于 $Y = \ell^\infty(\mathbb{N} \times \{0,1\})$ 是 $X$ 的对偶空间，因此存在一个 $w \in Y$，满足 $\|w\|_\infty \leq 1$，使得

$$g(z) = \langle w, z\rangle := \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}} (w_{k,0} z_{k,0} + w_{k,1} z_{k,1})$$

对所有 $z \in X$（此处 $\langle\cdot\rangle$ 仅表示对偶配对）。于是

$$0 = g(v_n) = \langle w, e_{n,0} - e_{n+1,0}\rangle = w_{n,0} - w_{n+1,0}$$

因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$，$y := w_{n,\,0}$ 的取值均为常数。我们还得到

$$\beta_n = g(u_n) = \langle w, e_{n,0} + \alpha_n e_{n,1}\rangle = w_{n,0} + \alpha_n w_{n,1} = y + \alpha_n w_{n,1}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。由于 $\|w\|_\infty \leq 1$，我们有 $|w_{n,\,1}| \leq 1$，从而

$$y = \beta_n - \alpha_n w_{n,1} \in [\beta_n + \alpha_n, \beta_n - \alpha_n] = [a_n, b_n]$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$，这意味着 $a \leq y \leq b$。

上述论证也可以反过来。若从某个满足 $a \leq y \leq b$ 的任意 $y$ 出发，那么可以选取 $w_{n,\,1}$，其中 $|w_{n,\,1}| \leq 1$，使得 $\beta_n = y + \alpha_n w_{n,\,1}$ 且 $w_{n,\,0} = y$。那么 $w = (w_{n,\,0},\ w_{n,\,1})_n \in Y$ 是一个满足 $\|w\|_\infty \leq 1$ 的点，因此定义了一个泛函 $g\colon X \to \mathbb{R}$，$z \mapsto \langle w,\ z\rangle$，其中 $\|g\| \leq 1$，并且通过与上述相同的计算，该泛函扩张了 $f_0$。这证明了如下断言：$f_0$ 可以扩张为 $f\colon A \to \mathbb{R}$，其中 $\|f\| \leq 1$。

若此时 $g\colon X \to \mathbb{R}$ 是如上所述以 $\|g\| \leq 1$ 为.....的 $f$ 的延拓，那么我们可以在 $x$ 上计算 $g$，并得到

$$g(x) = \left\langle w, \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n-1} e_{n,0} \right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n-1} w_{n,0} = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n-1} y = y \in [a,b].$$

这意味着 $h(x) = y \in [a,b]$，并完成了证明。 □

结合命题 20，我们得到了所需的刻画。

**推论23**。Hahn-Banach 定理$^1_{\ell^1} \equiv_W$ IVT $\equiv_W$ CC$^{[0,1]}$。

## 4 Hahn-Banach 定理对 $\ell^1_2$ 的情形

我们将空间 $\ell^p_2$ 视为配备了 $\ell^p$–范数的 $\mathbb{R}^2$。本节中，我们要证明，对于 $\ell^1_2$（以及 $\ell^\infty_2$），哈恩-巴拿赫定理等价于 LLPO，这表明命题 10 给出的上界并不紧，即使对于 $\ell^1$–范数也是如此。

事实上，只需考虑 $\ell^1$ 的情形，因为存在一个可计算的线性等距映射

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto \left( \frac{u - v}{2}, \frac{u + v}{2} \right) \tag{2}$$

满足 $\|S(u,\ v)\|_1 = \frac{1}{2}(|u + v| + |u - v|) = \max(|u|,\ |v|) = \|(u,\ v)\|_\infty$。。图 2展示了相应的单位球。我们考虑 $X = \ell^1_2$ 的情形。若有一个泛函 $f\colon A \to \mathbb{R}$，且 $\|f\| = 1$ 定义在一维子空间 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ 上，那么将此泛函延拓为一个满足 $\|g\| = 1$ 的泛函 $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，实际上是唯一确定的，前提是 $A$ 不穿过单位球的任何角点。这是因为 $f^{-1}\{1\}$ 是一个不允许穿过球内部的仿射子空间（因为 $\|f\| = 1$），因此它必须包含单位球的一条边，这就确定了延拓的所有取值。可以使用 LLPO 来确定仿射超平面 $f^{-1}\{1\}$ 位于单位球的哪一侧。我们回顾一下，LLPO 等价于判定以下两种情况之一：$r \leq 0$ 或 $r \geq 0$；对于实数 $r \in \mathbb{R}$，其中一种情况成立。对于归约的另一个方向，我们采用 Ishihara 的一个想法 [15]。

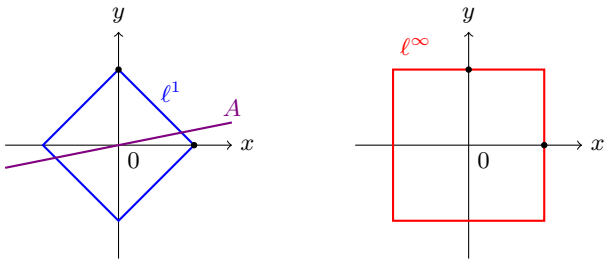



**图 2.** $\mathbb{R}^2$ 关于 $\ell^1$ 和 $\ell^\infty$的单位球。

**命题24.** Hahn-Banach 定理$^{\ell^1_2} \equiv_W$Hahn-Banach 定理$^{\ell^\infty_2} \equiv_W$LLPO。

证明。 我们考虑 $X = \ell^1_2$ 的情形，即带有 $\ell^1$–范数的 $\mathbb{R}^2$。给定一个泛函 $f$：对于某个线性子空间 $A \subseteq \mathbb{R}^2$，有 $A \to \mathbb{R}$，且满足 $0 < \|f\| \leq 1$。在

事实上，我们可以假设 $\|f\| = 1$，因为可以将 $f$ 除以其范数（由于有限维空间 [2] 上的算子范数是可计算的）。我们知道 $A \neq \{0\}$，因为 $\|f\| > 0$。因此，我们可以找到某个 $0 \neq x = (x_0, x_1) \in A$，满足 $\|x\|_1 = 1$，并且可以找到某个 $i \in \{0,1\}$，满足 $x_i \neq 0$。不失一般性，我们假设 $x_0 > 0$ 且 $f(x_0, x_1) = 1$。如果还有 $x_1 \neq 0$，那么子空间 $A$ 不是一个穿过单位球某个角点的一维子空间，而 $f$ 的延拓是唯一确定的。事实上，如果 $x_1 > 0$，那么保范延拓 $g$ 由附加条件 $g(0, 1) = 1$ 唯一确定；如果 $x_1 < 0$，那么它由 $g(0, -1) = 1$ 唯一确定。如果 $x_1 = 0$，那么这两个保范延拓都可能。借助 LLPO，我们可以选择其中一种情形。其余情形可以类似处理。总之，这表明 $\mathrm{HBT}_{\ell_2^1} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{LLPO}$。

对于 $\mathrm{LLPO} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{HBT}^{\ell_2^1}$ 的证明，我们采用 Ishihara [15] 的构造。给定 $r \in \mathbb{R}$，考虑 $x = (1, r) \in \mathbb{R}^2$、子空间 $A := \{ax : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ 和泛函 $f\colon A \to \mathbb{R}$，满足 $f(ax) := a \cdot \|x\|_1 = a(1 + |r|)$。于是 $\|f\| = 1$。令 $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为 $f$ 的一个线性延拓，且满足 $\|g\| = 1$。那么，对于两个单位向量 $e_1 = (1,0)$ $e_2 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$，$|g(e_i)| \leq 1$ 成立。因此

$$1 + |r| = f(x) = g(x) = g(e_1 + re_2) = g(e_1) + rg(e_2) \leq g(e_1) + |r|. \tag{3}$$

于是 $g(e_1) = 1$，从而 $rg(e_2) = |r|$。要判断 $r \leq 0$ 还是 $r \geq 0$，我们只需查明 $g(e_2) > -1$ 还是 $g(e_2) < 1$。这些条件在输入中是半可判定的，因此可以并行检验。根据哪个条件先得到见证，我们分别输出 1 或 0。由于 $r > 0$ 蕴含 $g(e_2) = 1$，而 $r < 0$ 蕴含 $g(e_2) = -1$，在这些情况下只有一个检验会成功。如果 $r = 0$，两个检验都可能成功。

利用可计算等距映射 (2) 可得 $\ell_2^\infty$的陈述 □

## 5 $\ell^1$的哈恩-巴拿赫定理

在证明 $\mathrm{WKL} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{HBT}$ 的归约时，Gherardi 和 Marcone [14] 沿用了 Brown 和 Simpson [12,19],的构造，而后者则采用了 Bishop、Metakides、Nerode 和 Shore [16,17]的类似构造中的一些思想。我们简要回顾 Gherardi 和 Marcone 的构造。对于分离问题的每个实例 $(p, q) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，即满足 $\mathrm{range}(p) \cap \mathrm{range}(q) = \varnothing$的实例，他们都将其对应到一个按如下方式定义的巴拿赫空间 $(X_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$。首先，

$$\delta_n := \begin{cases} 2^{-k-1} & \text{if } k = \min\{i \in \mathbb{N} : p(i) = n\} \text{ exists} \\ -2^{-k-1} & \text{if } k = \min\{i \in \mathbb{N} : q(i) = n\} \text{ exists} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

然后对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\varepsilon_n := \frac{1-\delta_n}{1+\delta_n}$。由此可在 $\mathbb{R}^2$ 上得到范数:

$$\|(\alpha, \beta)\|_{p,q,n} := \begin{cases} \max(|\varepsilon_n \alpha + \beta|,\ |\alpha - \beta|) & \text{if } \varepsilon_n < 1, \\ \max(|\alpha + \beta|,\ |\varepsilon_n^{-1} \alpha - \beta|) & \text{if } \varepsilon_n > 1, \\ \max(|\alpha + \beta|,\ |\alpha - \beta|) & \text{if } \varepsilon_n = 1. \end{cases}$$

对于 $x=(\alpha_n,\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$，我们使用记号 $x_n=(\alpha_n,\beta_n)$ 和 $x_{n,0}=\alpha_n$ 以及 $x_{n,1}=\beta_n$。现在可得到一个巴拿赫空间 $(X_{p,q},\|\cdot\|_{p,q})$，其具有

$$X_{p,q}:=\Big\{x\in(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}:\|x\|_{p,q}<\infty\Big\},\text{ where }\|x\|_{p,q}:=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}\|x_n\|_{p,q,n}.$$

也就是说，$\|\cdot\|_{p,\,q}$ 是 $(\mathbb{R}^2,\ \|\cdot\|_{p,\,q,\,n})$ 中加权 $\ell^\infty$–块的 $\ell^1$–和。在这个巴拿赫空间上，Gherardi 和 Marcone 考虑了如下泛函

$$f_{p,q}:A_{p,q}\to\mathbb{R},x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}x_{n,0}\tag{4}$$

对于子空间

$$A_{p,q}:=\{x\in X_{p,q}:x_{n,1}=0\text{ for all }n\in\mathbb{N}\}.\tag{5}$$

于是，由泛函 $g:X_{p,\,q}\to\mathbb{R}$（它将 $f_{p,\,q}$ 延拓，且满足 $\|g\|=1$）可以计算出一个集合 $B\subseteq\mathbb{N}$，将 range($p$) 与 range($q$) 分离，使得

$$n\in\operatorname{range}(p)\Longrightarrow g(z_n)=-2^{-n-1}\text{ and }n\in\operatorname{range}(q)\Longrightarrow g(z_n)=+2^{-n-1}\tag{6}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$，其中 $z_n\in X_{p,\,q}$ 由 $(z_n)_n=(0,\ 1)$ 和 $(z_n)_k=(0,\ 0)$ 对 $k\neq n$ 定义。

为了证明哈恩-巴拿赫定理在 $\ell^1$ 上展现出其最大威力，我们构造一个可计算线性等距映射。

**命题 25.** 存在一个线性等距映射 $F_{p,\,q}:X_{p,\,q}\to\ell^1$ 它能够根据分离问题的实例 $(p,q)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 一致地可计算。

证明. 线性映射 $T_n:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 满足

$$T_n(\alpha,\beta):=\begin{cases}(\varepsilon_n\alpha+\beta,\ \alpha-\beta) & \text{if }\varepsilon_n<1\\ (\alpha+\beta,\ \varepsilon_n^{-1}\alpha-\beta) & \text{if }\varepsilon_n>1\\ (\alpha+\beta,\ \alpha-\beta) & \text{if }\varepsilon_n=1\end{cases}$$

相对于 $p$，$q$，它能够关于 $n$ 一致地可计算，并且满足

$$\|(\alpha,\beta)\|_{p,q,n}\ =\ \|T_n(\alpha,\beta)\|_\infty.$$

现在我们使用（2）中的可计算线性映射 $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$。因此，对于 $ST_n=S\circ T_n$ 和 $x\in\mathbb{R}^2$，我们得到 $|(ST_n(x))_0|+|(ST_n(x))_1|=\|ST_n(x)\|_1=\|x\|_{p,\,q,\,n}$。现在我们可以定义 $F_{p,\,q}:X_{p,\,q}\to\ell^1$，使得

$$F_{p,q}(x)(2n+i):=(2^{-n-1}ST_n(x_n))_i$$

对所有 $x\in X_{p,\,q}$, $n\in\mathbb{N}$ 和 $i\in\{0,1\}$ 均成立。最后，我们得到

$$\|F_{p,q}(x)\|_1=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}\|ST_n(x_n)\|_1=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}\|x_n\|_{p,q,n}=\|x\|_{p,q}$$

并且，$F_{p,\,q}$ 在 $(p,\ q)$ 中是一致可计算的。 □

由于 $F_{p,\ q}:X_{p,\ q}\to\ell^1$ 是可计算巴拿赫空间之间的单射可计算线性映射，根据可计算版本的巴拿赫逆映射定理 [4,推论 5.3]，它有一个可计算的逆映射 $F_{p}^{-1}{}_{,\ q}:\mathrm{range}(F_{p,\ q})\to X_{p,\ q}$。然而，这并不自动意味着它在 $p,\ q$ 中是一致的。但由于 $F_{p,\ q}$ 甚至是一个等距映射，逆映射的算子范数为 1，因此根据 [4, 定理 5.9]，我们可以得到它在 $p,\ q$ 中的一致性。这使我们能够得出以下结论。

**命题26.** 分离问题 $\leq_{\mathrm{W}}$ Hahn-Banach 定理$_{\ell^1}$

证明. 给定一个分离问题的实例 $(p,q)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，我们可以根据 (4) 计算泛函 $f_{p,q}:A_{p,q}\to\mathbb{R}$，并得到一个泛函 $f\colon A\to\mathbb{R}$，满足 $A:=F_{p,q}(A_{p,q})$，依据 $f:=f_{p,\ q}\circ F_{p\ q}^{-1},$。由于所有步骤对 $p,q$ 都是一致的，我们可以计算 $(f,A)\in\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(\ell^1)$。现在可以应用 Hahn-Banach 定理$_{\ell^1}$，从而得到 $f$ 的一个线性延拓 $g\colon\ell^1\to\mathbb{R}$，满足 $\|g\|\leq\|f\|$。于是 $g':=g\circ F_{p,q}$ 是一个线性泛函 $g':X_{p,q}\to\mathbb{R}$，它延拓了 $f_{p,q}$。由于 $F_{p,q}$ 是等距映射，我们有 $\|g'\|=\|f_{p,q}\|=1$。因此，我们得到值 $g'(z_n)=g\circ F_{p,q}(z_n)$，据此可利用 (6) 确定分离集合 $B\in$ 分离问题$(p,q)$。□

现在我们得到如下结果。

**推论27**。Hahn-Banach 定理$_{\ell^1}\equiv_{\mathrm{W}}$弱柯尼希引理。

## 6 针对可定位子空间的哈恩-巴拿赫定理

命题26的证明将复杂性从空间$X_{p,\ q}$转移到了泛函 $f\colon\ A\to\mathbb{R}$ 以及子空间 $A\subseteq\ell^1$，所使用的是等距映射 $F_{p,\ q}$。因此，一个相关的问题是，是否可以通过提供关于子空间 $A$的更多信息，来降低 $\ell^1$上的哈恩-巴拿赫定理的复杂性。我们将证明，即使我们以其距离函数 $d_A$的形式提供子空间，也无法做到这一点；也就是说，在 Hahn-Banach 定理的定义中，如果将 $\mathcal{S}(\ell^1)$ 替换为 $\mathcal{L}(\ell^1)$，结论仍然成立。我们首先证明，(5)中的子空间可以作为 $\mathcal{L}(X_{p,\ q})$中的点计算出来。

**命题28**。 集合 $A_{p,\ q}\in\mathcal{L}(X_{p,\ q})$ 可以在分离问题的实例$(p,q)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中一致地计算出来。

证明。$\|\cdot\|_{p,q,n}$的定义蕴含 $\|(\alpha,\beta)\|_{p,q,n}\geq|\beta|=\|(0,\beta)\|_{p,q,n}$，并且 $\|(\alpha,\beta)\|_{p,q,\ n}\geq\frac{1}{2}|\alpha|=\frac{1}{2}\|(\alpha,0)\|_{p,q,n}$对所有$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$均成立。特别地，$(\alpha_n,\beta_n)_n\in X_{p,q}$蕴含$(\alpha_n,0)_n\in X_{p,q}$。因此，对于$(\alpha_n,\beta_n)_n\in X_{p,q}$，以下下确界在 $\alpha'_n=\alpha_n$ 处取到，其值为

$$d_{A_{p,q}}((\alpha_n,\beta_n)_n)=\inf_{(\alpha'_n,0)_n\in X_{p,q}}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}\|(\alpha_n-\alpha'_n,\beta_n)\|_{p,q,n}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}|\beta_n|.$$

因此，$d_{A_{p,\ q}}$在 $p,\ q$中是可计算的，因为 $\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}|\beta_n|\leq\|(\alpha_n,\ \beta_n)\|_{p,\ q}$。 □

接下来我们证明，可定位性在可计算线性等距映射下保持不变。

**命题29**。 设 $F\colon\ X \to Y$ 是可计算赋范空间 $(X, \|\cdot\|_X)$ 与 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 之间的可计算双射线性等距映射。那么

$$F : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(Y), A \mapsto F(A)$$

是可计算的。这甚至对 $F$ 一致成立。

证明。 由于 $F$ 是双射线性等距映射，我们得到

$$\begin{aligned} d_{F(A)}(x) &= \inf_{z \in F(A)} \|x - z\|_Y = \inf_{y \in A} \|F(F^{-1}(x) - y)\|_Y \\ &= \inf_{y \in A} \|F^{-1}(x) - y\|_X = d_A(F^{-1}(x)) \end{aligned}$$

对所有 $x \in Y$ 都成立。如果给定 $F$，那么我们可以根据 [4, 定理 5.9] 计算出 $F^{-1}$，其形式为 $\|F^{-1}\| = 1$。此外，如果给定以 $d_A \in \mathcal{C}(X)$ 形式表示的 $A \in \mathcal{L}(X)$，那么我们可以通过上述等式计算出 $d_{F(A)} \in \mathcal{C}(Y)$，从而得到 $F(A) \in \mathcal{L}(Y)$。□

现在，我们可以将命题26的证明从 $\mathcal{S}(\ell^1)$ 转移到 $\mathcal{L}(\ell^1)$。

**推论30**。 Hahn-Banach 定理$_{\ell^1} \equiv_{\mathrm{W}}$弱柯尼希引理，即使定义Hahn-Banach 定理中的空间 $\mathcal{S}(\ell^1)$ 被替换为 $\mathcal{L}(\ell^1)$，也依然成立。

以下推论强化了推论 3。

**推论31**。 存在一个可计算线性泛函 $f\colon\ A \to \mathbb{R}$，定义在一个可定位闭子空间 $A \subseteq \ell^1$ 上，满足 $\|f\| = 1$，且不存在可计算线性延拓 $g\colon\ \ell^1 \to \mathbb{R}$ 满足 $\|g\| = 1$。

**致谢**。 我们感谢德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）通过项目编号554999067提供资助，也感谢南非国家研究基金会（NRF）通过资助编号151597提供资助。

## 参考文献

1. Bishop, E.: 《构造性分析基础》。麦格劳-希尔，纽约（1967年） 2. Brattka, V.: 《线性有界算子空间的有效表示》。《应用一般拓扑学》**4**(1)，115–131（2003年）。https://doi.org/10.4995/agt.2003。2014，2014 3 http://polipapers.upv.es/index.php/AGT/article/view/ 。Brattka, V.: 《哈恩-巴拿赫定理的博雷尔复杂度与可计算性》。《数学逻辑文档》**46**(7–8)，547–564（2008年），http://dx.doi.org/10. 1007/s00153-007-0057-z 4. Brattka, V.: 《巴拿赫逆映射定理的一个可计算版本》。《纯粹与应用逻辑年刊》**157**，85–96（2009年），http://dx.doi.org/10.1016/j.apal。2008.09.002 5. Brattka, V.: 《循环、逆极限与非确定性》。arXiv arXiv:2501.17734（2025年 17734 6 2501），https://arxiv.org/abs/ 。。Brattka, V., Gherardi, G.: 《可计算分析中的有效选择与有界性原则》。《符号逻辑通报》**17**(1)，73–117（2011年）。https: //doi.org/10.2178/bsl/1294186663, http://dx.doi.org/10.2178/bsl/1294186663

7. Brattka, V., Gherardi, G.: 《Weihrauch度、全知原则与弱可计算性》。《符号逻辑杂志》**76**(1)，143–176（2011年）。https://doi.org/ 10 1294170993 8 2178 1294170993，10 2178 。 /jsl/ http://dx.doi.org/ 。 /jsl/ 。Brattka, V., Gherardi, G., Pauly, A.: 《可计算分析中的Weihrauch复杂度》。载于：Brattka, V., Hertling, P.（编），《分析中的可计算性与复杂性手册》，第367–417页。《可计算性理论与应用》，施普林格，Cham（2021年）。https://doi.org/10.1007/978-3-030-59234-9_11, https://doi.org/10.1007/ 978-3-030-59234-9 119 。Brattka, V., Hertling, P.（编）：《分析中的可计算性与复杂性手册》。《可计算性理论与应用》，施普林格，Cham（2021年）。https: //doi.org/10 9 10 1007 978 3 030 59234 9，10 1007 978 3 030 59234 。 / - - - - https://doi.org/ 。 / - - - - 。Brattka, V., Le Roux, S., Miller, J.S., Pauly, A.: 《连通选择与布劳威尔不动点定理》。《数理逻辑杂志》**19**(1)，1–46（2019年）。https:// doi.org/10 0219061319500041 11 1142 0219061319500041，10 1142 。 /S https://doi.org/ 。 /S 。Brattka, V., Presser, G.: 《度量空间子集上的可计算性》。《理论计算机科学》**305**，43–76（2003年），http://dx.doi.org/10.1016/S0304-3975(02) 00693-X 12. Brown, D.K., Simpson, S.G.: 《证明可分哈恩-巴拿赫定理需要哪些集合存在公理？》。《纯粹与应用逻辑年刊》**31**(2-3)，123–144（1986年）。https://doi.org/10.1016/0168-0072(86)90066-7, https://doi.org/ 10.1016/0168-0072(86)90066-7，专刊：第二届东南亚逻辑会议（曼谷，1984年）13. Diener, H., Ishihara, H.: 《比肖普风格的构造性逆向数学》。载于：Brattka, V., Hertling, P.（编），《分析中的可计算性与复杂性手册》，第347–365页。《可计算性理论与应用》，施普林格，Cham（2021年）。https://doi.org/10.1007/978-3-030-59234-9_10，https://doi.org/10.1007/ 978-3-030-59234-9 1014 。Gherardi, G., Marcone, A.: 《可分哈恩-巴拿赫定理的不可计算程度如何？》。《圣母大学形式逻辑杂志》**50**(4)，393–425（2009年）。https://doi。 org/10 018 15 1215 00294527 2009 018，10 1215 00294527 2009 。 / - - http://dx.doi.org/ 。 / - - 。Ishihara, H.: 《一个全知原则、柯尼希引理与哈恩-巴拿赫定理》。《数学逻辑与数学基础杂志》**36**，237–240（1990年）16. Metakides, G., Nerode, A.: 《将非递归方法引入数学》。载于：Troelstra, A., van Dalen, D.（编），《L.E.J. Brouwer百年纪念研讨会》。《逻辑与数学基础研究》，第110卷，第319–335页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹（1982年），会议论文集，会议于1981年6月8日至13日在诺德韦克豪特举行 17 – 。Metakides, G., Nerode, A., Shore, R.A.: 《哈恩-巴拿赫定理的递归极限》。载于：Rosenblatt, M.（编），《Errett Bishop：对其本人及其研究的反思》。《当代数学》，第39卷，第85–91页。美国数学会，普罗维登斯（1985年），Errett Bishop纪念会议论文集，加利福尼亚大学圣迭戈分校，1983年9月24日 18. Narici, L., Beckenstein, E.: 《拓扑向量空间》，《纯粹与应用数学》，第296卷。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，第二版（2011年）19. Simpson, S.G.: 《二阶算术的子系统》。《逻辑视角》，剑桥大学出版社，第二版（2009年）20. Weihrauch, K.: 《可计算分析》。施普林格，柏林（2000年）