arXiv:2603.16814v1 [math.GR] 17 Mar 2026

重新审视完全残差自由 Demushkin 群

HENRIQUE SOUZA 和 PAVEL ZALESSKII

Abstract. 我们在 Demushkin 群这一类群中确立了 pro-p 极限群的新例子和反例；也就是说，这些群是维数 2 的 pro-p Poincar´e 对偶群。

1. Introduction

极限群这一类群是一个研究充分的有限生成离散群类，有多种刻画方式：

- G 若完全残差自由，则称其为极限群；也就是说，对于任意有限子集 $X \subseteq G$，都存在一个同态 $\varphi\colon G \to F$，其中 F 是一个非阿贝尔自由群，且该同态在 X上的限制是单射。
- G 若某群与自由群具有相同的存在理论，则称其为极限群；也就是说，在群语言中仅使用存在量词 $\exists$ 且在G 中成立的一阶语句集合，恰好就是在非阿贝尔自由群中成立的那些语句。
- G 若某群是从自由群出发、经过迭代的中心化子扩张所得群的子群，则称其为极限群；也就是说，这些扩张是形如 $H *_C (C \times \mathbb{Z}^n)$ 的 amalgamated 自由积，其中 C 是 H的循环自中心化子群。

这类群因其在解决塔斯基问题中的作用（[KM06, Sel06]），以及其有趣的群论性质（[AB06, 命题 1.1]），而备受关注。一个非平凡的非自由极限群的例子是可定向闭曲面的基本群；欧拉示性数小于 -1的不可定向闭曲面的基本群也是如此。

极限群的 pro-p类比的研究可追溯至 D. Kochloukova 和第二作者的工作。在 [KZ11], 中，他们引入了由以下递归方式定义的有限生成 pro-p 群类 $\mathcal{L}$： $\mathcal{L}$ 包含有限生成自由 pro-p 群类 $\mathcal{G}_0$；并且对于所有 $n > 0$，它都包含中心化子扩张类 $\mathcal{G}_n$ 中的所有有限生成子群 $G_{n-1} \amalg_C A$，其中$G_{n-1} \in \mathcal{G}_{n-1}$, C 是 G_{n-1} 的自中心化拟循环子群，而 $A \simeq \mathbb{Z}_p^k$ 是有限秩自由阿贝尔 pro-p群，并将 C 作为直和项。使得 G 中的一个 n嵌入到 $\mathcal{G}_n$ 群中的最小 n称为 G的权 。暂且，我们将类 $\mathcal{L}$ 中的 pro-p 群称为pro-p 极限群。

pro-p 极限群与其离散对应物共享许多有趣的群论性质：它们是自由群扩张无挠幂零群，具有有限上同调维数，属于 FP_∞ 型且欧拉示性数非正；它们要么是阿贝尔群，要么满足任意有限生成闭正规子群都是开子群，并且任意二生成子群都是自由 pro-p群或同构于 $\mathbb{Z}_p^2$。在 [KZ11], 中，他们列出了一些抽象极限群的性质，而这些性质对于其 pro-p类比尚不明确。其中，我们特别指出一项：

问题 1.1. 每个 pro-p 极限群都是残余自由的 pro-p群吗?

我们还要指出，在 pro-p 情形下，是否每个完全残余自由的 pro-p群都是 pro-p 极限群，反之亦然，目前尚无定论。我们也不知道是否有人研究过自由 pro-p 群的存在理论。此外，与离散情形相比，关于实例的了解要少得多。例如：

问题 1.2. 设 Γ 是亏格为 g 的可定向曲面群， $G = \Gamma_p$ 是它的 pro-p 完备化。G是 pro-p极限群吗?

在 [KZ11], 中，已证明当亏格 g 为偶数时答案是肯定的；在这种情形下，他们还证明了这些群是完全剩余自由 pro-p 群。这篇短文旨在提供一种推广这类例子的方式。我们回顾一下，Demushkin 群是一个维数 2 的 pro-p Poincar´ 对偶群；关于挠不变量和定向特征的精确定义，请读者参见第 3 节。

Date: 2026年3月18日。

定理 1.3. 设 G 为一个 *pro-p Demushkin* 群，其极小生成元数为 n，挠不变量为 $q \in \{0, p, p^2, \cdots\}$，定向特征为 $\chi\colon\ G \to \mathbb{Z}_p^\times$。

(1) 若 n 能被 4 整除，则 G 是一个 *pro-p* 极限群。*(2)* 若 $p = 2$ 为偶数且 $n > 2$ 为偶数，则 G 是一个 *pro-2* 极限群。此外，在上述两种情形下，G 都是（完全）剩余 *pro-p* 自由的。

一般来说，不能去掉 n 为偶数这一假设，因为 pro-2 Demushkin 群

$$D = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^2[x_2, x_3] \rangle \simeq \langle a, b, c \mid a^2b^2c^2 = 1 \rangle$$

既不是 pro-2 极限群，也不是剩余 pro-2 自由的。我们将证明一个更强的命题 t:

定理 1.4. 从 D 到 *pro-2* 极限群的任意同态，其像都是阿贝尔的。

由于 $[x_2, x_3]$ 是 D 的非平凡元素，且无法将其非平凡地映入自由 pro-2 群，因此 D 既非剩余 pro-2 自由，也无法嵌入 pro-2 极限群。接下来，我们先在第 2 节汇集一些关于作用群的 Bass-Serre 理论 pro-p 类比结果，这些结果将用于证明定理 1.3 和 1.4。然后，在第 3 节中，我们回顾 Demushkin 群的定义及其相关不变量，以及根据这些不变量对其进行的分类。在讨论 Demushkin 群的 pro-循环分裂之后，我们将证明这两个定理。

2. Preliminaries on pro-p groups acting on pro-p trees

本节将回顾一些记号和事实，介绍群作用于树上的 Bass-Serre 理论的 pro-p 类比形式，这些内容将在全文中使用。关于这一主题，我们主要参考 Ribes-Zalesskii 在 [RZ00] 中的章节，以及 L. Ribes 的著作 [Rib17]。

profinite 图是一个紧致、豪斯多夫且全不连通的空间 Γ，它带有一个顶点的闭子空间 $V\Gamma$，以及两个连续函数 d_0，$d_1\colon\ \Gamma \to V(\Gamma)$，它们在 $V(\Gamma)$ 上延拓恒等映射。$E(\Gamma) = \Gamma \setminus V(\Gamma)$ 中的元素称为 Γ 的边，d_0 和 d_1 称为关联映射；对于每条边 $e \in E(\Gamma)$，我们称 $d_0(e)$ 为 e 的起点，称 $d_1(e)$ 为 e 的终点。我们只考虑 $E(\Gamma)$ 也是 Γ 的闭子集的 profinite 图——注意，这一性质在取闭子图时保持不变（但在取商时不保持）。

有限图的态射 $\alpha\colon\ \Gamma \to \Delta$ 是一个与 d_0 和 d_1相交换的连续映射。任意有限图都同构于有限离散图的一个逆极限。若一个有限图的所有有限商图都是连通的，则称该有限图为连通的。

对于任意有限图 Γ，我们都有如下自由有限 $\mathbb{F}_p$-向量空间之间的一列态射：

$$0 \to \mathbb{F}_p[\![E(\Gamma)]\!] \xrightarrow{d} \mathbb{F}_p[\![V(\Gamma)]\!] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{F}_p \to 0 \tag{1}$$

其中，ϵ 将 $V(\Gamma)$ 中的每个元素映至 $1 \in \mathbb{F}_p$，且对每个 $e \in E(\Gamma)$，$d(e) = d_1(e) - d_0(e)$。有限图连通当且仅当 $\ker(\epsilon) = \mathrm{im}(d)$（[Rib17，命题 2.3.2]）；若一个连通有限图使序列 (1) 正合，则称其为 pro-p 树。有限图是 pro-p 树，当且仅当它作为抽象图是一棵树。若 $\alpha\colon\ \Gamma \to \Delta$ 是连通图之间的一个满射态射，Δ 是有限图，且 T 是 Δ的极大子树，则 α 的基本 0-截面（相对于 T）是一个函数$\sigma\colon\ \Delta \to \Gamma$，满足 $\sigma_{|T}$ 是 T 到其像上的同构，并且对所有 $e \in E(\Gamma)$，$\partial_0(\sigma(e)) \in \sigma(\Delta)$。若某个有限群 G 作用于 Γ 且商为有限图（[Rib17，命题 3.4.5]），则基本 0-截面总是存在。

若 Δ 是一个有限图，则定义在 Δ 上的一个（真）pro-p 群群图 $\mathcal{G}$ 是一个映射：它为每个顶点$v \in V(\Delta)$ 附加一个 pro-p 群 $\mathcal{G}(v)$，为每条边 $e \in E(\Delta)$ 附加一个 pro-p 群 $\mathcal{G}(e)$，并配备两个单射连续同态 $\partial_0\colon\ \mathcal{G}(e) \to \mathcal{G}\, d_0(e)$ 以及 $\partial_1\colon\ \mathcal{G}(e) \to \mathcal{G}\, d_1(e)$。群图 $\mathcal{G}$ 的基本群$\pi_1(\mathcal{G}, \Delta)$定义如下：固定 Δ的一个极大子树 T，令F为所有顶点群 $\mathcal{G}(v)$、$v \in V(\Delta)$的自由 pro-p 积与由所有字母 t_e、$e \in E(\Delta)$生成的自由 pro-p 群的自由 pro-p 积。然后，$\pi_1(\mathcal{G}, \Delta)$定义为商群 F/N，其中 N 是由以下所有元素生成的 F 的闭正规子群：对于 $e \in E(T)$ 和 $t_e\partial_0(x)\, t_e\partial_1 x^{-1}$，以及对于 $e \in E(\Delta)$ 和 $x \in \mathcal{G}(e)$。$\pi_1(\mathcal{G}, \Delta)$的同构类不依赖于 T的选择。与此群图 $\mathcal{G}$ 相关联的是一个 pro-p 树 Γ，称为 $\mathcal{G}$ 的标准 Bass-Serre 树（见 [Rib17，第 2.3]节）。该树可以赋予一个 $\pi_1(\mathcal{G}, \Delta)$ 的作用，使得 $\pi_1(\mathcal{G}, \Delta)$ 作为图$\backslash\Gamma \simeq \Delta$。pro-$p$ 群群图的基本群的特殊情形包括带合并的自由 pro-p 积 $A \amalg_C B$以及 HNN 扩张 HNN(A, C, t)。

若 Γ 是一棵 pro-p 树，且 G 是一个作用于 Γ 且不反转边、并具有有限商图 $\Delta = G\backslash\Gamma$的 pro-$p$ 群，我们如下定义在 Δ上的诱导群图 $\mathcal{G}$：令 T 为 Δ的一个极大子树，$\sigma\colon\ \Delta \to \Gamma$ 为关于 T 的一个基本 0-截面，并且对每个 $x \in \Gamma$，令

$\mathcal{G}(x) = \mathrm{Stab}_G(\sigma(x))$. 对所有 $e \in E(\Gamma)$，映射 $\partial_0\colon \mathcal{G}(e) \to \mathcal{G}(d_0(e))$ 就是包含映射 $\mathrm{Stab}_G(\sigma(e)) \to \mathrm{Stab}_G(d_0(\sigma(e)))$。对所有 $e \in E(\Gamma)$，$\sigma(d_1(e))$ 和 $d_1(\sigma(e))$ 属于同一G-轨道，因此我们选取一个元素 $\gamma_e \in G$，使得 $\gamma_e\sigma(d_1(e)) = d_1(\sigma(e))$，并注意当 $e \in T$时选取 $\gamma_e = 1$。然后，令 $\partial_1\colon \mathcal{G}(e) \to \mathcal{G}(d_1(e))$ 为包含映射 $\mathrm{Stab}_G(\sigma(e)) \to \mathrm{Stab}_G(d_1(\sigma(e)))$ 与由 γ_e^{-1} 给出的共轭映射的复合

$$\mathrm{Stab}_G(d_1(\sigma(e))) = \gamma_e \mathrm{Stab}_G(\sigma(d_1(e)))\gamma_e^{-1} \to \mathrm{Stab}_G(\sigma(d_1(e)))\,.$$

Bass-Serre 理论基本结构定理的 pro-p 类比指出（[Rib17, 定理 6.6.1]）：若 G 是一个作用于 pro-p 树 Γ 的 pro-p 群，且 $\Delta = G\backslash\Gamma$ 有限，那么对于上述构造的、定义在 Δ 上的群图 $\mathcal{G}$，映射 $\varphi\colon \pi_1(\mathcal{G}, \Delta) \to G$ 由各顶点群 $\mathcal{G}(v)$ 上的包含映射定义，并将 $t_e \mapsto \gamma_e$ 映射为……，它是有限群的一个同构（对 γ_e的任意适当选择均成立）。

回顾一下，若 pro-p 群 G作用于 pro-p 树 Γ，则称该作用为 k-强可折叠的，如果对每个非平凡的 $g \in G$，其不变子树 Γ^g 的直径至多为 k。我们将用到 Z. Chatzidakis 和第二作者的以下结果：

定理 2.1 ([CZ22, 定理 5.4])。设 G 是一个有限生成的 *pro-p* 群，它以 k-强可折叠的方式作用于一棵 *pro-p* 树 Γ，且在共轭意义下只有有限多个极大顶点稳定子。则：

(i) D 的闭包：稳定子$_G(t) \neq 1\}$ 是 Γ 的一个 *pro-* G不变子图，它至多有有限多个连通分支 $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$，相差一个平移。*(ii)* 对于集合稳定子 $G_i =$稳定子 $_G(\Sigma_i)$，商图 $G_i\backslash\Sigma_i$ 的直径有限，且 Σ_i 包含一个 G_i-不变子树 Γ_i，使得 $G_i\backslash\Gamma_i$ 是有限的。*(iii)* $G = \coprod_{i=1}^m G_i \amalg F$是一个自由 *pro-$p$* 积，其中 F 是一个自由 *pro-p* 群，在 T上自由作用。

我们还需要 I. Snopche 和第二作者的以下结果：

命题 2.2 ([SZ14, 命题 3。3])。设 G 是一个有限生成的 *pro-p* 群，它作用于一棵具有拟循环边稳定子的 *pro-p* 树 Γ。那么，G 中的极大顶点稳定子均为有限生成的，并且在 G 中除共轭外只有有限多个。

3. Demushkin 群

我们回顾一下，若一个 pro-p 群 G 的 $\mathbb{F}_p$ 上同调满足维数为 2 的庞加莱对偶性，也就是说：

- 维数$_{\mathbb{F}_p} H^1(G, \mathbb{F}_p) < \infty$;
- $\dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G, \mathbb{F}_p) = 1$;
- 杯积
$$H^1(G, \mathbb{F}_p) \times H^1(G, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\cup} H^2(G, \mathbb{F}_p)$$
是一个非退化双线性形式。

Demushkin 群的例子包括可定向曲面群的 pro-p 完备化、不可定向曲面群的 pro-2 完备化，以及包含所有 p 次单位根的 p-进域的最大 p 扩张的伽罗瓦群（[Ser97，第 I.4.5 节，定理 II.5.4]）。根据对 $H^i(G, \mathbb{F}_p)$ 的生成元与关系诠释（[Ser97，第 I.4] 节），前两个条件意味着 G 必须是有限生成的单关系 pro-p 群。小秩（即 p-进解析或可解）的 Demushkin 群恰好是二生成元群：$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 以及所有半直积 $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$。至少需要 3 个生成元的任何 Demushkin 群都是满规模的，也就是说，它包含一个非阿贝尔自由 pro-p 子群。

给定一个有限生成的单关系 pro-p 群 G，其极小表示为

$$G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r \rangle\,,$$

存在唯一的 $q \in \{0, p, p^2, p^3, \ldots\}$，使得阿贝尔化 $G/[G,G]$ 同构于 $\mathbb{Z}_p^{n-1} \times \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p$，我们称其为 G 的挠不变量。如果 $F = F(x_1、\ldots\ldots、x_n)$ 是以基 $x_1、\ldots\ldots、x_n$ 为基的自由 pro-p 群，并且 $F_1 = F$, $F_i = F_{i-1}^q[F_{i-1}, F]$ 表示 F 的下 q-中心列，则我们有 $r \in F_2$，且存在唯一的系数 a_i, b_{ij} 属于 $\mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p$，使得

$$r \equiv x_1^{qa_1} \cdots x_n^{qa_n} \prod_{1 \le i < j \le n} [x_i, x_j]^{b_{ij}} \pmod{F_3}\,.$$

这些系数都可以通过杯积检测出来：

命题 3.1 ([NSW08, 命题 3.9。13])。 表示杯积的矩阵

$$H^1(G,\mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p)\times H^1(G,\mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p)\to H^2(G,\mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p)$$

在与 $x_1,\dots,x_n$ 对偶的有序基 $\chi_1,\dots,\chi_n$ 中，由 (c_{ij}) 给出，其中

$$c_{ij}=\begin{cases} b_{ij},\ \text{if } i<j\\ -b_{ji},\ \text{if } i>j\\ -\binom{q}{2}a_i,\ \text{if } i=j\end{cases}$$

特别地， G 是 *Demushkin* 群，当且仅当矩阵 (c_{ij}) 在 $\mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p$ 中可逆。

在 B. Eckmann 和 P. Linnell 对维数 2 的抽象 Poincar´e 对偶群进行分类（[EL83]）近二十年前，S. Demushkin、J.-P. Serre 和 J. Labute 已完成 Demushkin 群的分类。我们还回顾一下，对于任意 pro-pPoincar´e 对偶群，都可以关联一个称为其定向特征的典范连续同态 $\chi\colon G\to\mathbb{Z}_p^\times$（[Ser97，第 I.4.5] 节）。为陈述分类定理，我们引入以下定义：

定义 3.2. 设 $F=F(x_1,\dots,x_n)$ 为自由 pro-p 群， $q\in\{0,p,p^2,p^3,\dots\}$ 且 $\mathbb{U}$ 为一个闭合的 d pro-p 子群$\mathbb{Z}_p^\times$。我们将标准 Demushkin 关系 $r_1(n,\ q,\ \mathbb{U})$ 定义如下：

- 若 $q\neq 2$， 则 n 为偶数， $\mathbb{U}=1+q\mathbb{Z}_p$ 且
$$r_1(n,q,\mathbb{U})=x_1^q[x_1,x_2]\cdots[x_{n-1},x_n]\,.$$
- 若 $q=2$， n 为偶数，并且对于某个 $f\geq 2$有 $\mathbb{U}=\langle -1+2^f\rangle$ ，则
$$r_1(n,q,\mathbb{U})=x_1^{2+2^f}[x_1,x_2]\cdots[x_{n-1},x_n]\,.$$
- 如果 $q=2$, n 为偶数且 $\mathbb{U}=\langle -1,\ 1+2^f\rangle$ 对于某个 $f\geq 2$ 或 ∞，则
$$r_1(n,q,\mathbb{U})=x_1^2[x_1,x_2]x_3^{2^f}[x_3,x_4]\cdots[x_{n-1},x_n]\,.$$
- 如果 $q=2$, n 为奇数且 $\mathbb{U}=\langle -1,\ 1+2^f\rangle$ 对于某个 $f\geq 2$ 或 ∞，则
$$r_1(n,q,\mathbb{U})=x_1^2x_2^{2^f}[x_2,x_3]\cdots[x_{n-1},x_n]\,.$$

否则，我们称 $r_1(n,\ q,\ \mathbb{U})$ 未定义。

定理 3.3 （[Lab67]）。 如果 G 是一个具有不变量 n, q 且 $\mathbb{U}=\mathrm{im}(\chi)$的 *Demushkin* 群，则 $r_1,\ (n,q,\mathbb{U})$ 有定义，并且存在一个表示

$$G\simeq\langle x_1,\dots,x_n\mid r_1(n,q,\mathbb{U})\rangle\,.$$

反之，给定 n, q和 $\mathbb{U}\leq\mathbb{Z}_p^\times$，若 $r_1\ (n,q,\mathbb{U})$ 有定义，则这样的表示定义了一个具有给定不变量的 *Demushkin* 群，并且任意两个这样的群都不彼此同构。

注意，不变量 q 是使 $\mathbb{U}$ 包含于 $1+q\mathbb{Z}_p$中的 p 的最大幂。特别地，不变量 n 和 $\mathbb{U}$ 完全决定了 G 在同构意义下的形式；如果满足 $q\neq 2$， n 和 q也具有同样的作用。可定向曲面群的 pro-p 完备化是满足 $\mathbb{U}=\{1\}$的那些群，而不可定向曲面群的 pro-2 完备化是满足 $\mathbb{U}=\{\pm 1\}$的那些群。

下述定理是 G. Wilkes 的一项结果（[Wil19]）的特例，我们给出另一种证明。

定理 3.4. 设 n, q 和 $\mathbb{U}$ 满足标准 *Demushkin* 关系 $r=r_1(n,q,\mathbb{U})$ 在 $\sim$ $\sim F=F(x_1,\dots,x_n)$ 中有定义。那么，*Baumslag* 双重 $G=F\amalg_{r=\widetilde{r}}F$（其中 $F=F(\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n)$ 是 F 的一个同构副本）是一个不变量为 $2n$, q 和 $\mathbb{U}$ 的 *Demushkin* 群。

$\widetilde{\ }$证明。 由于 r 和 $\widetilde{r}$ 分别属于 F 和 F 的弗拉蒂尼子群，因此不难验证 G 的极小生成元数为 $2n$。根据 G 作为一个粘合自由 pro-$p\widetilde{\ }$ 乘积的表示，也容易验证其挠不变量恰为 q。在自由 pro-p 群 $F\amalg F$ 中，我们有

$$r\widetilde{r}^{-1}\equiv\begin{cases} x_1^\alpha\widetilde{x}_1^{-\alpha}x_3^\beta\widetilde{x}_3^{-\beta}[x_1,x_2][\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2]^{-1}\cdots[x_{n-1},x_n][\widetilde{x}_{n-1},\widetilde{x}_n]^{-1}, \text{ if } n \text{ is even}\\ x_1^2\widetilde{x}_1^{-2}x_2^{2^f}\widetilde{x}_2^{-2^f}[x_2,x_3][\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3]^{-1}\cdots[x_{n-1},x_n][\widetilde{x}_{n-1},\widetilde{x}_n]^{-1} \text{ if } n \text{ is odd}\end{cases}\tag{2}$$

模去 $F\amalg\widetilde{F}$ 的下部 q-中心列的第三项。在与基 $x_i,\ \widetilde{x}_j$ 对偶的 $H^1(G)$ 的基下，由命题 3.1 和同余式 (2) 可知，表示杯积的矩阵是分块对角的，其分块为

$$\pm\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\text{ and }\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\text{ if } n \text{ is odd}\,,\pm\begin{pmatrix}\binom{\alpha}{2}&1\\-1&0\end{pmatrix}\text{ if } n \text{ is even}\,,$$

它们模 q 均可逆。因此， G 是一个 Demushkin 群，其不变量为 $2n$ 和 q。只剩下确定它的不变量 $\mathrm{im}(\chi)$。

若 $q \neq 2$，则 $\mathrm{im}(\chi) = 1+q\mathbb{Z}_p = \mathbb{U}$，结论成立。因此现假设 $q = 2$，并令 $\chi\colon G \to 1+2\,\mathbb{Z}_2$ 为 G 的定向特征。 [Lab67，定理 4] 表明， χ 是 G 的唯一特征，使得若 $I = \mathbb{Z}_p$ 是具有由 χ 诱导的连续作用的 G-模，则任意函数 $\{x_1, \widetilde{x}_1, \ldots, x_n, \widetilde{x}_n\} \to I$ 都可连续延拓为唯一的导子 $G \to I$。若 $D\colon G \to I$ 是一个导子且 $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab \in G$，则有

$$D([a,b]) = \chi(a^{-1}b^{-1})((1-\chi(b))D(a) + (\chi(a)-1)D(b))\,.$$

此外，我们有

$$D(a^k) = (1+\chi(a)+\chi(a)^2+\cdots+\chi(a)^{k-1})D(a)$$

对任意 $k \geq 0$。最后，注意到由于 $[G,G] \in \ker\chi$，我们有

$$D([a,b][c,d]) = D([a,b]) + D([c,d])$$

对于任意 a、b、c、$d \in G$。

现在，令 $D_i\colon G \to I$ （分别地， $D_i\colon G \to I$）为如下导子：它在 x_i （分别地， $\widetilde{x}_i$）上取值为 1，并在所有其他生成元上为零。我们有：

- 如果 n 为偶数且 $\mathbb{U} = \langle -1+2^f \rangle$，则

$$\begin{aligned}
D_2(r\widetilde{r}^{-1}) = \chi(x_1)^{2+2^f}\chi(x_1^{-1}x_2^{-1})(\chi(x_1)-1) = 0 &\implies \chi(x_1) = 1\,,\\
D_1(r\widetilde{r}^{-1}) = 2+2^f+\chi(x_2^{-1})(1-\chi(x_2)) = 0 &\implies \chi(x_2) = (-1-2^f)^{-1}\,,\\
D_i(r\widetilde{r}^{-1}) = 0 &\implies \chi(x_i) = 1 \text{ for } i>2\,,\\
\widetilde{D}_2(r\widetilde{r}^{-1}) = \chi(\widetilde{x}_2^{-1}\widetilde{x}_1^{-1})(1-\chi(\widetilde{x}_1)) = 0 &\implies \chi(\widetilde{x}_1) = 1\,,\\
\widetilde{D}_1(r\widetilde{r}^{-1}) = \chi(\widetilde{x}_2^{-1})(\chi(\widetilde{x}_2)-1)-2-2^f = 0 &\implies \chi(\widetilde{x}_2) = (-1-2^f)^{-1}\,,\\
\widetilde{D}_i(r\widetilde{r}^{-1}) = 0 &\implies \chi(\widetilde{x}_i) = 1 \text{ for } i>2\,.
\end{aligned}$$

- 如果 n 为偶数且 $\mathbb{U} = \langle -1,\ 1+2^f \rangle$，则

$$\begin{aligned}
D_2(r\widetilde{r}^{-1}) = \chi(x_1)^2\chi(x_1^{-1}x_2^{-1})(\chi(x_1)-1) = 0 &\implies \chi(x_1) = 1\,,\\
D_1(r\widetilde{r}^{-1}) = 2+\chi(x_2^{-1})(1-\chi(x_2)) &\implies \chi(x_2) = -1\,,\\
D_4(r\widetilde{r}^{-1}) = \chi(x_3)^{2^f}\chi(x_3^{-1}x_4^{-1})(\chi(x_3)-1) = 0 &\implies \chi(x_3) = 1\,,\\
D_3(r\widetilde{r}^{-1}) = 2^f+\chi(x_4^{-1})(1-\chi(x_4)) = 0 &\implies \chi(x_4) = -(1+2^f)^{-1}\,,\\
D_i(r\widetilde{r}^{-1}) = 0 &\implies \chi(x_i) = 1 \text{ for } i>4\,,\\
\widetilde{D}_4(r\widetilde{r}^{-1}) = \chi(\widetilde{x}_4^{-1}\widetilde{x}_3^{-1})(1-\chi(\widetilde{x}_3)) = 0 &\implies \chi(\widetilde{x}_3) = 1\,,\\
\widetilde{D}_3(r\widetilde{r}^{-1}) = \chi(\widetilde{x}_4^{-1})(\chi(\widetilde{x}_4)-1)+2^f = 0 &\implies \chi(\widetilde{x}_4) = -(1+2^f)^{-1}\,,\\
\widetilde{D}_2(r\widetilde{r}^{-1}) = \chi(\widetilde{x}_2^{-1}\widetilde{x}_1^{-1})(1-\chi(\widetilde{x}_1)) = 0 &\implies \chi(\widetilde{x}_1) = 1\,,\\
\widetilde{D}_1(r\widetilde{r}^{-1}) = \chi(\widetilde{x}_2^{-1})(\chi(\widetilde{x}_2)-1)-2 = 0 &\implies \chi(\widetilde{x}_2) = -1\,,\\
\widetilde{D}_i(r\widetilde{r}^{-1}) = 0 &\implies \chi(\widetilde{x}_i) = 1 \text{ for } i>4.
\end{aligned}$$

- 如果 n 为奇数且 $\mathbb{U} = \langle -1,\ 1+2^f \rangle$，则

$$\begin{aligned}
D_1(r\widetilde{r}^{-1}) = 1+\chi(x_1) = 0 &\implies \chi(x_1) = -1\,,\\
D_3(r\widetilde{r}^{-1}) = \chi(x_2)^{2^f}\chi(x_2^{-1}x_3^{-1})(\chi(x_2)-1) = 0 &\implies \chi(x_2) = 1\,,\\
D_2(r\widetilde{r}^{-1}) = 2^f+\chi(x_3^{-1})(1-\chi(x_3)) = 0 &\implies \chi(x_3) = (1-2^f)^{-1}\,,\\
D_i(r\widetilde{r}^{-1}) = 0 &\implies \chi(x_i) = 1 \text{ for } i>3\,,\\
\widetilde{D}_3(r\widetilde{r}^{-1}) = \chi(\widetilde{x}_3^{-1}\widetilde{x}_2^{-1})(1-\chi(\widetilde{x}_2)) = 0 &\implies \chi(\widetilde{x}_2) = 1\,,\\
\widetilde{D}_2(r\widetilde{r}^{-1}) = \chi(\widetilde{x}_3^{-1})(\chi(\widetilde{x}_3)-1)-2^f = 0 &\implies \chi(\widetilde{x}_3) = (1-2^f)^{-1}\,,\\
\widetilde{D}_1(r\widetilde{r}^{-1}) = -\chi(\widetilde{x}_1)-1 = 0 &\implies \chi(\widetilde{x}_1) = -1\,,\\
D_i(r\widetilde{r}^{-1}) = 0 &\implies \chi(\widetilde{x}_i) = 1 \text{ for } i>3\,.
\end{aligned}$$

I在所有情况下，我们都有 $\mathrm{im}(\chi) = \mathbb{U}$，因此 G 的不变量必须如定理中所述 . □

备注 3.5。定理 3.4 的逆命题也成立，这可由 G. Wilkes 的两个结果推出。也就是说，如果一个具有不变量 n、q 和 $\mathbb{U}$ 的 Demushkin 群 G 分裂为一个双重 $F \amalg_{r=\tilde{r}} F$，那么 n 为偶数，并且存在 F 的一组基 x_1, ..., $x_{n/2}$，使得 $r = r_1(n/2、q、\mathbb{U})$。如果存在这样的分裂，那么根据 [Wil19，定理 5.16]，自由 pro-p 群 F 与包含 pro-循环子群 $\langle r \rangle$ 的单元素集合在维数 2 上构成一个 Poincaré 对偶对（定义见 [Wil19]）。所有维数 2 上的 Poincaré 对偶对（H、$\mathcal{S}$），其中 $\mathcal{S} = \{S_0, \ldots, S_b\}$ 是 H 的非平凡闭子群集合，均已在 [Wil20，定理 3.3] 中分类。特别地，如果（F、$\{\langle r \rangle\}$）是这样的一对，那么必然存在 F 的一组基，使得 r 是一个已定义的标准 Demushkin 关系。事实上，利用 [Wil19，定理 5.18]，可以对群图作出一个一般性陈述：如果 G 是一个边群同构于 $\mathbb{Z}_p$ 的自由 pro-p 群有限图的基本群，那么当且仅当每个顶点群都相对于与其关联的边群，在维数 2 上构成一个 Poincaré 对偶对时，G 才是一个 Demushkin 群。对于 Poincaré 对偶对同样存在定向特征，并且 G 的定向特征的像将由每个顶点群的定向特征的像生成。

推论 3.6. 设 G 是一个不变量为 $n > 2$、q 和 $\mathbb{U}$ 的 *Demushkin* 群。如果标准 *Demushkin* 关系 $r_1(n/2, q, \mathbb{U})$ 有定义，那么 G 是一个 *pro-p* 极限群。

注 3.7. 关系 $r_1(n/2, q, \mathbb{U})$ 有定义，意味着 $n \in 4\mathbb{Z}$ 或 $q = 2$、$n \in 4\mathbb{Z}+2$ 和 $[\mathbb{U}$ 满足：$\mathbb{U}^2] = 4$。若 $n \leq 2$，则 $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 或 $G \simeq \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$。由于 pro-$p$ 极限群的任意二生成子群都必须是自由 pro-p 群或与 $\mathbb{Z}_p^2$ 同构，唯一的二生成 pro-p 极限 Demushkin 群是 $\mathbb{Z}_p^2$。

~证明。 在这些假设下，由定理 3.4 可得 $G \simeq F \amalg_{r=\tilde{r}} F$，其中 $r = r_1(n/2, q, \mathbb{U})$。由于 r 在非阿贝尔自由群 F 中是自中心化的（这里我们用到 $n > 2$），在中心化子扩张 $F \amalg_{\langle r \rangle} (\langle r \rangle \times \langle a \rangle)$ 中，由 F 和 aFa^{-1} 生成的子群与 G 同构。因此，G 是一个 pro-p 极限群。□

现在我们转向问题 1.1。根据 G. Baumslag 的一项结果（[Bau62]），离散情形下的一般中心化子扩张已知是剩余自由的；而在 pro-p世界中，我们现有的最佳工具是 D. Kochloukova 和第二作者的以下结果：

定理 3.8 ([KZ10, 定理 4。1]). 设 $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ 是一个自由 *pro-p* 群，且 $y = [x_1, x_2]t$ 是 F的一个元素，其中 t 属于由 $x_2, \ldots, x_n$生成的 F的闭子群。那么，中心化子扩张 $F \amalg_{\langle y \rangle} (\langle y \rangle \times \mathbb{Z}_p)$ 是剩余自由 *pro-p*群。

有了这一结果，Kochloukova 和第二作者得以证明，偶数亏格的可定向曲面群的 pro-p完备化是剩余自由的；并且当 $p = 2$时，还可以去掉对亏格的限制。根据我们的定理 3.4 中的构造，还可得到一类更广的剩余自由 pro-p群：

推论 3.9. 设 G 是一个 *Demushkin* 群，其不变量为 $n > 2$、q 和 $\mathbb{U}$。若标准 *Demushk* in 关系 r_1 $(n/2、q、\mathbb{U})$ 有定义，则 G 是剩余自由的 *pro-p*。

~证明。 同样，我们可以将 G 写成 Baumslag 双重 $F \amalg_{r=\tilde{r}} F$，其中 $r = r_1(n/2, q, \mathbb{U})$，并且我们已在推论 3.6 中证明，$G$ 随后嵌入中心化子扩张 $F \amalg_{\langle r \rangle} (\langle r \rangle \times \mathbb{Z}_p)$。交换 x_1 和 x_2后，我们可以应用定理 3.8，得出该中心化子扩张（从而 G 本身）是剩余自由的 pro-p。□

下一个扩张也受到 [KZ10, 推论 5.2] 的启发

推论 3.10. 设 G 是一个不变量为 $n > 2$、q 和 $\mathbb{U}$ 的 *pro-2 Demushkin* 群。若 n 为偶数，则G 是一个 *pro-2* 极限群，且剩余 *pro-2*。

证明。 若 n 是 4 的倍数，或者 $q = 2$ 但 $[\mathbb{U}$: $\mathbb{U}^2] = 4$，则推论 3.9 已涵盖此情形。因此，我们可以假设 $q = 2$、$\mathbb{U}$ 是 pro-循环，且 $n = 2d$，其中 $d > 1$ 是奇整数。因此，存在唯一的整数 $s \geq 0$、$l \geq 1$，使得 $d - 1 = 2^s(2l - 1)$。注意，标准 Demushkin 关系$r_1(4l, 2, \mathbb{U})$ 有定义，并令

$$H = \langle y_1, \ldots, y_{4l} \mid r_1(4l, 2, \mathbb{U}) \rangle .$$

在 [Lab67] 中已证明，H 的定向特征的像由 $\chi(y_2)$ 生成（这也可由定理 3.4 的证明中的计算得出）。

设 U 是 H 的一个指数为 2^s 且包含 y_2 的开子群。我们断言，U 同构于 G。如果U 由 m 个元素生成，则计算欧拉示性数可得：

$$\chi(U) = 2 - m = 2^s \chi(H) = 2^s(2 - 4l) = 2 - 2d,$$

由此我们得出 $m = 2d = n$。由于根据 [Ser97，命题 I.18] 和 $y_2 \in U$， U 的定向特征是 H 的定向特征的限制，因此 U、 H 和 G 具有相同的不变量 $\mathbb{U}$。所以，根据分类定理， U 和 G 同构。由于根据推论 3.6， H 是一个 pro-2 极限群，并且根据推论 3.9 是剩余 pro-2 自由的，因此 G 也具有这些性质。□

现在我们可以证明引言中的第一个定理：

定理 *1.3* 的证明。 情形 (1) 由推论 3.6 和 3.9 得出，情形 (2) 则由推论 3.10 得出。 □

现在我们转而研究 pro-2 Demushkin 群

$$D = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^2[x_2, x_3]\rangle \simeq \langle a, b, c \mid a^2b^2c^2 = 1\rangle$$

以及定理 1.4 的证明。我们先处理 D 的自由商群：

命题 3.11。 设 F 是一个自由 *pro*-2 群，且 a、 b、 $c \in F$ 是满足 $a^2b^2c^2 = 1$ 的三个元素。那么， $\langle a$、 b、 $c\rangle$ 是阿贝尔的。

证明。 令 H 为由 a、 b 和 c生成的 F 的闭子群。它是自由 pro-p，而任何在 H/H^2 中的像构成一组基的集合，都是 H的自由生成集。若 $\{a, b, c\}$ 是 H的自由生成集，我们便可得到一个同态 $H \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z})$，其定义为

$$a \mapsto A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \mapsto B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c \mapsto C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

然而，很容易验证矩阵 $A^2B^2C^2$ 不是单位矩阵，由此产生矛盾。因此， a、 b、 c模 H^2线性相关。不失一般性，我们可以假设 H 由 a 和 b生成。若 $\{a, b\}$ 是 H的一组自由基，我们也可以通过将 a映射到 A，将 b映射到 B，得到一个同态 $f\colon H \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z})$。由于矩阵 A^2B^2 在 $f(H)$中没有平方根，这同样导致矛盾。因此， a 和 b 模H^2 线性相关，且 H 必须是 pro-循环。□

注 3.12. 命题 3.11 是 Lyndon 关于离散自由群的一个著名结果（[Lyn59]）的 pro-2 版本。由于可以使用 Frattini 论证，pro-2 证明比相应抽象陈述的证明简短得多。这也可以视为 J. Sonn 的一个一般结果（[Son74]）的推论：如果 $f\colon G \to F$ 是从一个由 n 个元素生成的 Demushkin 群G 到秩为 k 的自由 pro-p 群的满射同态，那么 $n \geq 2k$。

在证明定理 1.4 之前，我们需要一个引理 a.

引理 3.13. 设 Γ 是与一个中心化子扩张相关联的标准 *Bass-Serre* 树

$$(G_n = G_{n-1} \amalg_C A),$$

其中 C 是 *pro*-p 极限群 G_{n-1} 的一个自中心化拟循环子群，且 $A \simeq \mathbb{Z}_p^k$ 将 C 作为直和项。于是，对于任意 $H \leq G_n$， H 在 Γ 上的作用是 2-挠定的。

证明。 我们回顾一下， Γ 是一个顶点集为 $G_n/G_{n-1} \cup G_n/A$ 、边集为 G_n/C的 pro-p 树；对于 $g \in G_n$，边 gC 连接顶点 gG_{n-1} 和 gA 。顶点 gG_{n-1} 周围的星形子图由形如 ghC 的边组成，其中 $h \in G_{n-1}$，并且 $gh_1C = gh_2C$ 当且仅当 $h_1C = h_2C$ 属于 G_{n-1}/C。如果它们的稳定子 $gh_1Ch_1^{-1}g^{-1}$ 和 $gh_2Ch_2^{-1}g^{-1}$ 的交非平凡，那么就存在非零整数 k_1， k_2 ，使得

$$h_2^{-1}h_1c^{k_1}h_1^{-1}h_2 = c^{k_2}$$

其中 $C = \langle c\rangle$。因此，pro-p 极限群 G_{n-1} 的二生成子群 $\langle h_2^{-1}h_1$， $c\rangle$ 必为阿贝尔群，因而 $h_2^{-1}h_1$ 中心化 c。这意味着 $h_1C = h_2C$ ，因为 C 在 G_{n-1}中是自中心化的，所以顶点 gG_{n-1} 周围星形子图中不同边的稳定子交平凡。由于 Γ 中的任意一条长度为 ≥ 3 的线段都包含一个顶点 gG_{n-1} 作为其中间顶点之一，因此它在G_n中的稳定子必为平凡稳定子。□

此外，由于 $e \in E(\Gamma)$ 的边稳定子 $\mathrm{Stab}_{G_n}(e)$ 是 pro-循环的，因此对于任意子群$H \leq G_n$，它们也都是 pro-循环的。因此，命题 2.2 表明，如果 $H \leq G_n$ 是有限生成的，那么在共轭意义下，极大顶点稳定子只有有限多个，因而定理 2.1 适用。现在我们准备证明以下定理：

定理 *1.4* 的证明。设 G 是一个 pro-2 极限群，$\varphi\colon D \to G$ 是一个群同态。我们将对 G的权 n 作归纳，情形 $n=0$ 可由命题 3.11 推出。现在假设 G 的权为 $n>0$，并且通过进一步将 φ 与一个从 G 到某个迭代中心化子扩张的嵌入复合，我们可以假设

$$G = G_{n-1} \amalg_C A$$

其中，G_{n-1} 是权为 $n-1$ 的 pro-2 极限群，C 是 G_{n-1}的自中心化的 procyclic 子群，而 A 是一个有限生成的自由阿贝尔 pro-p 群，且包含 C 作为直因子。我们将 D 在 G 中的像记为 $H=\varphi(D)$。

令 $S(G)$ 为与 G 的这一分裂相关联的标准 Bass-Serre pro-p 树，其中我们选择 $S(G)$ 的一个定向，使得 $d_0(gC)=gA$，且 $d_1(gC)=gG_{n-1}$。根据 [RZ00，引理 3.11]，$S(G)$ 包含唯一的极小 H-不变 pro-p 子树 Γ。此外，结合前面的注记、引理 3.13、命题 2.2 和定理 2.1 可知，$\Delta = H\backslash\Gamma$ 是有限的，且所有顶点稳定子都是有限生成的。因此，根据 [ZM90，命题 4.4] 或 [Rib17，定理 6.6] H 是一个由有限生成的 pro-p 群构成、边群为循环群的图的基本 pro-p 群 $\pi_1(\mathcal{H},\ \Delta)$。

H 对 Γ 的作用的顶点稳定子是形如 $H\cap gG_{n-1}g^{-1}$ 和 $H\cap gAg^{-1}$ 的子群，其中 $g\in G$。注意，我们有一个收缩 $\pi\colon G\to G_{n-1}$，它由收缩 $A\to C$ 诱导，并且在 G_{n-1}的所有 G-共轭上都是单射。由归纳假设，$\pi\circ\varphi$ 的像是阿贝尔的。由于

$$\pi(H\cap gG_{n-1}g^{-1}) \subseteq \pi(\varphi(D))\,,$$

我们得出结论，H 对 Γ 的作用的所有顶点稳定子都必定是阿贝尔的。

令 T 为 Δ 的一棵极大子树，并令 $\sigma\colon \Delta\to\Gamma$ 为关于 T 的一个基本 0-截面。若 $e\in\Delta$ 是一条边，且 $\mathcal{H}(e)=\mathrm{Stab}_H(\sigma(e))=\{1\}$，那么将 Δ 中其余所有边收缩后可见，要么 H 可自由分解，要么 e 是一座桥，并且 $\Delta\smallsetminus\{e\}$ 的某个连通分支上的诱导群图的基本群是平凡的。在第一种情形下，H 必定是秩为 ≤ 3 的自由 pro-2 群（根据命题 3.11，这不可能），或者同构于形如 $\mathbb{Z}_2^2\amalg\mathbb{Z}_2$ 的自由积，这将导致一个满射

$$D/[D,D]\simeq\mathbb{Z}_2^2\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to H/[H,H]\simeq\mathbb{Z}_2^3\,,$$

再次得到矛盾。因此，任何满足 $\mathcal{H}(e)=1$ 的边 $e\in\Delta$ 都是桥，且其某个连通分支的基本群平凡。然而，由于 Γ 是一个极小的 H-不变子树，根据 [KZ25，引理 3.1]，这样的边不可能存在。

现在考虑非平凡边可以被约化的情形，也就是说，映射 $\partial_0\colon \mathcal{H}(e)\to\mathcal{H}(d_0(e))$ 或 $\partial_1\colon \mathcal{H}(e)\to\mathcal{H}(d_1(e))$ 中有一个是同构。若 ∂_1 是同构，且 $d_1(e)$ 是一个位于 G_{n-1} 的某个陪集的 G-轨道上的顶点，不妨设 $\sigma(e)=gC$，其中对某个 $g\in G$ 有 $\sigma(d_1(e))=gG_{n-1}$，那么我们断言 e 是 Δ 中与 $d_1(e)$ 相接的唯一一条边。事实上，若 $e'\in\Delta$ 是另一条满足 $d_1(e')=d_1(e)$ 的边，则必有某个 $g'\in G$ 使得 $\sigma(e')=g'C$，如图 1 所示，因此

$$\begin{aligned}
H\cap g'Cg'^{-1} &= \mathrm{Stab}_H(\sigma(e')) \\
&= \mathcal{H}(e') \\
&\leq \gamma_{e'}\mathcal{H}(d_1(e'))\gamma_{e'}^{-1} = \gamma_{e'}\mathcal{H}(d_1(e))\gamma_{e'}^{-1} \\
&= \gamma_{e'}\gamma_e^{-1}\mathcal{H}(e)\gamma_e\gamma_{e'}^{-1} \\
&= \gamma_{e'}\gamma_e^{-1}\mathrm{Stab}_H(\sigma(e))\gamma_e\gamma_{e'}^{-1} \\
&= H\cap\gamma_{e'}\gamma_e^{-1}gCg^{-1}\gamma_e\gamma_{e'}^{-1}\,.
\end{aligned}$$

因此，若 $C=\langle c\rangle$，则存在非零整数 k_1 和 k_2，使得 $hc^{k_1}h^{-1}=c^{k_2}$，其中

$$h = g'^{-1}\gamma_{e'}\gamma_e^{-1}g^{-1}\in G_{n-1}$$

因为 $\gamma_{e'}^{-1}g'G_{n-1}=\gamma_e^{-1}gG_{n-1}$。这意味着，$G_{n-1}$ 的二生成子群 $\langle h,c\rangle$ 是阿贝尔的，且并且由于 C 是自身在 G_{n-1} 中中心化的，这种情况只有在 $h\in C$ 时才会发生。然而，我们有

$$h\in C \iff g'C=(\gamma_{e'}\gamma_e^{-1})gC\,,$$

因此 $\sigma(e)=gC$ 和 $\sigma(e')=g'C$ 属于同一个 G-轨道，这表明 $e=e'$。

因此，如果一条边可以约化为 G 中某个陪集的 G_{n-1} 轨道内的一个顶点，那么该顶点必定独自悬挂在 Δ 上。现在我们断言，G 中某个陪集的 G_{n-1} 轨道内的所有顶点都具有这种情况。若 e 是 Δ 中满足 $\sigma(e)=gC$ 的一条边，则 $\mathcal{H}(e)=H\cap gCg^{-1}$ 非平凡。映射 $\mathcal{H}(e)\to\mathcal{H}(d_1(e))$ 由包含映射 $H\cap gCg^{-1}\to H\cap gG_{n-1}g^{-1}$ 再接上与 γ_e 的共轭给出。由于 $H\cap gG_{n-1}g^{-1}$ 是阿贝尔群，其中任意元素都必须与 gCg^{-1} 对易，因此也包含在 gCg^{-1} 中。这表明 ∂_1 总是一个同构，因此 G 中某个陪集的 G_{n-1} 轨道内的所有顶点都必须

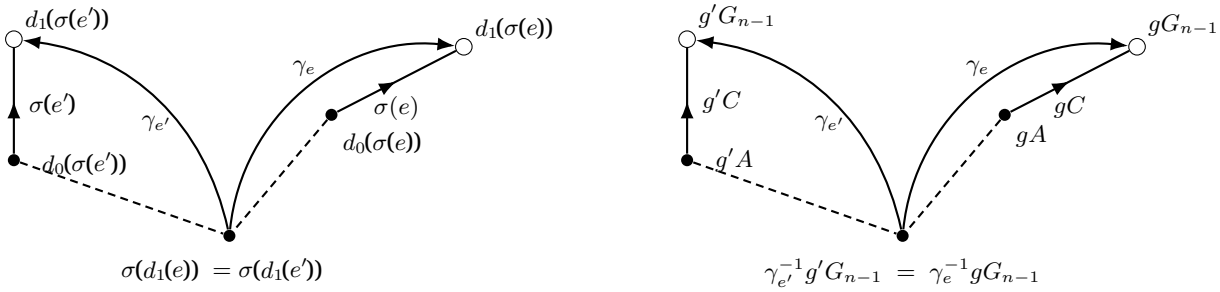

FIGURE 1. 当终端顶点在 Δ 中有两条关联边时，Γ 中会发生什么。填充的顶点属于 σ 的像，空心顶点则未必如此。左图中的标记由映射 σ 诱导，右图则将标记显示为 A 的 G- 陪集、C 和 G_{n-1}。

独自悬挂在 Δ 上。然而，根据 [KZ25 引理 3.1]，这样的边不可能存在，因为 Γ 是极小的，所以 Δ 必须只由一个顶点 v 组成，该顶点位于 G 中某个陪集的 A 轨道内，这意味着 $H = \mathcal{H}(v) = H \cap gAg^{-1}$ 是阿贝尔群。□

最后，我们对完全残余自由的 pro-p 群作一条注记。

注 3.14. 正如 [KZ10, 定理 7.1] 所示，残余自由的 pro-p 群是完全残余自由的 pro-p 群，当且仅当它是交换传递的，也就是说，任意非平凡元素的中心化子都是阿贝尔群。由于 Demushkin 群的任何闭子群都是自由 pro-p 群或有限指数子群，因此不难证明，唯一不是交换传递的 Demushkin 群是 $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$，其中 $\mathbb{Z}_2$ 通过乘以 -1 作用于自身。因此，任何残余自由的 pro-p Demushkin 群也是完全残余自由的 pro-p 群。

REFERENCES

[AB06] Emina Alibegović 和 Mladen Bestvina。极限群是 Cat(0)。 *Journal of the London Mathematical Society*，74 1 259 272，2006 ( ): – 。[Bau62] Gilbert Baumslag。关于广义自由积。 *Mathematische Zeitschrift*，78(1):423–438，1962年12月。[CZ22] Zo´e Chatzidakis 和 Pavel Zalesskii。作用在树上且在共轭意义下只有有限多个极大顶点稳定子的 pro-p 群。 *Israel Journal of Mathematics*，247(2):593–634，2022年4月。[EL83] Beno Eckmann 和 Peter Linnell。二维庞加莱对偶群，II。，( ): – 12月 。[KM06] Olga Kharlampovich 和 Alexei Myasnikov。非阿贝尔自由群的初等理论。 *Journal of Algebra*，302 2 451 2006 ( ): –552，8月 。[KZ10] D. H. Kochloukova 和 P. A. Zalesskii。完全剩余自由的 pro-p 群。 *Journal of Algebra*，324(4):782–792，2010年8月。[KZ11] D. H. Kochloukova 和 P. A. Zalesskii。通过中心化子扩张研究极限群的 pro-p 类比。 *Mathematische Zeitschrift* 267 1 2 109 128, 2011 ，(-): – 2月 。[KZ25] Dessislava H. Kochloukova 和 Pavel A. Zalesskii。直角阿廷 pro-c 群中的有限生成正规 pro-c 子群。 *Journal of Algebra*，666:475–506，2025年3月。[Lab67] John P. Labute。Demushkin 群的分类。 *Canadian Journal of Mathematics*，19:106–132，1967年。[Lyn59] R. C. Lyndon。自由群中的方程 $a^2b^2 = c^2$ 。 *Michigan Mathematical Journal*，6(1)，1959年1月。[NSW08] J¨urgen Neukirch、Alexander Schmidt 和 Kay Wingberg。 *Cohomology of Number Fields*。数学科学基础丛书 323。Springer-Verlag Berlin Heidelberg，第2版，2008年。[Rib17] Luis Ribes。 *Profinite Graphs and Groups*。数学及其边缘领域成果。第三辑／现代数学调查系列。Springer International Publishing，2017年。[RZ00] Luis Ribes 和 Pavel Zalesskii。pro-p 树及其应用。载于 Aner Shalev、Marcus du Sautoy 和 Dan Segal（编），*New horizons in pro-p groups*，Prog. Math.，184，页75–119。Birkhäuser Boston，2000年。[Sel06] Z. Sela。群上的丢番图几何 VI：自由群的初等理论。 *Geometric & Functional Analysis GAFA* 16 3 707 730, 2006 ，( ): – 6 月 。[Ser97] Jean-Pierre Serre。 *Galois Cohomology*。Springer 数学专著。Springer-Verlag，Berlin Heidelberg，1997年。[Son74] Jack Sonn。Demushkin 群的满同态。 *Israel Journal of Mathematics*，17(2):176–190，1974年12月。[SZ14] Ilir Snopce 和 Pavel A. Zalesskii。中心化子的 pro-p 扩张的子群性质。 *Selecta Mathematica*，20 2 465 489，2014 ( ): – 4月 。[Wil19] Gareth Wilkes。有限群的相对上同调理论。 *Journal of Pure and Applied Algebra*，223 4 1617 2019 ( ): –1688，2019年4月。[Wil20] Gareth Wilkes。pro-p PD^2 对及 pro-p 曲线复形的分类。 *Groups, Geometry, and Dynamics*，14 3 917 948，2020 ( ): – 10月。

[ZM90] P.A. Zalesskii 和 O. V. Mel’nikov。有限群图的基本群。 *Leningrad Math. J.*，1 4 921 940，1990年 ( ): – 。