arXiv:2603.16819v1 [math.GR] 17 Mar 2026

树自同构群的非容许表示

NICOLAS MONOD

摘要。证明了正则局部有限树的自同构群存在不可约巴拿赫表示，且这些表示并非容许表示。光滑向量的稠密子空间不含代数不可约分量。

1. 引言

1.1. 背景。 经典地，若群 G 在巴拿赫空间V 上的线性表示不存在 G-不变闭真子空间 $V_0 \subseteq V$，则称其为不可约；真表示 $V_0 \neq 0,\ V$。

在本文中，我们称其为**拓扑不可约**，以区别于以下概念。若不存在任何 G-不变真子空间 $V_0 \subseteq V$，则称该表示为**代数不可约**，其中 V仅被视为一个向量空间。

一个直接的贝尔范畴论证表明，当 V 是无限维巴拿赫空间且 G 可数，或者更一般地说，是全不连通局部紧第二可数空间且该表示连续时，代数不可约性不可能成立。

这一情形尤其包括 p-进代数群。

然而，代数不可约性在这类群极其丰富的表示理论中发挥着至关重要的作用，因为可以将巴拿赫空间 V替换为 **光滑**向量 $V_{\mathrm{sm}} \subseteq V$构成的子空间，即具有开稳定子的向量（在此情形下，这与“K-有限”向量相一致）。当若干代数不可约的光滑表示可以被分类时，这便能带来一些分类结果，尤其是在 V是希尔伯特空间且表示是酉表示时，参见例如 [BZ76，§4。21] 以及 [JL70，第 30]页。

在这一背景下，关键概念是**容许性**，即要求开子群 $U < G$ 的不动向量空间是有限维的 V^U。当分类成为可能时，容许性是通向分类的门户。研究约化 p-进群表示的一个基石，是证明不可约表示具有容许性，参见例如 [Ren10，VI.2。2]。

1.2. 树群。 早期人们就认识到，正则树 $G = \mathrm{Aut}(T)$ 的自同构群 T 具有有限度 ≥ 3，它为 p-进群提供了一种非常有趣的非线性类比。其中一个原因是，T 当度为 [BT67，BT72]时，它是秩一 p-进群的布鲁哈–蒂茨建筑；然而 $\mathrm{Aut}(T)$ 远比代数群大。关于 $\mathrm{Aut}(T)$ 的表示论由 Cartier 开创 [Car73a，Car73b]，而酉情形

已在 [FTN91]中得到深入研究。事实上，酉对偶已被完全确定；这源于 Olshanskii 对所有代数不可约光滑表示的完整描述 [Ol′77]。同样，这一点关键地依赖于它们全都是容许表示，而这早先由 Olshanskii 证明 [Ol′75]。

拓扑不可约性的情形则大不相同：

定理 A. 令 G 为有限度正则树的自同构群，其中度为 ≥ 3。

存在作用于巴拿赫空间 V 上的拓扑不可约连续 G表示，它们并不容许。

此外，光滑向量 V_{sm} 子空间不含任何非零的代数不可约子表示。

尤其是，代数不可约光滑表示的分类对 V毫无帮助。相比之下，所有拓扑不可约酉 G表示都是容许的，参见例如 [FTN91]。最近，Viola [Vio 26] 在更一般的情形下证明了相应结论：保持任意有限指标半双线性型的希尔伯特空间表示。

有两点需要说明。

第一点是，定理 A是 Soergel 的结果 [Soe88] 的非阿基米德类比，该结果表明 $\mathbf{SL}(2,\mathbf{R})$ 存在不可容许的拓扑不可约连续表示。尽管由于 $G = \mathrm{Aut}(T)$不会产生 Harish-Chandra 模，所用技巧有所不同，但策略是相似的：我们从不变子空间问题的反例出发进行“诱导”。

因此，第二点是 Soergel 本人的两点评论同样适用：Enflo 和 Read 提供这些反例，完成了最艰巨的工作；而将这些反例诱导出来的思路则归功于 Vogan。

鉴于这与不变子空间问题之间的联系，研究哪些巴拿赫空间 V 可能出现在定理 A中，令人十分感兴趣。借助 Read 的工作，我们得到：

定理 B。 在定理 *A*中，可以安排使得 V 与其自身的二次对偶空间等距同构。或者，也可以选择 $V = L^1$。

通常约定，L^1 表示经典的勒贝格空间，例如$L^1([0,1])$或 $L^1(\mathbf{R})$，它们作为巴拿赫空间彼此同构。

2. 证明

2.1. 树。 我们始终固定一个整数 $q \geq 2$，并考虑$(q+1)$-正则树 T及其自同构群 $G = \mathrm{Aut}(T)$，该群赋予逐点收敛的局部紧拓扑。我们将 T 视为其带有图距离 d的顶点集。

T 中的一条**测地射线** 是由顶点组成的序列 $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$，满足 $d(x_k,\ x_n) = |k-n|$ 对所有 $k,\ n \in \mathbf{N}$ 都成立；我们称这条射线**始于** x_0。测地线的定义类似，只需将 $k \in \mathbf{Z}$ 换成整数。T 的**理想边界** ∂T 指的是

所有测地射线的等价类集合；若存在 $m \in \mathbf{Z}$，使得对充分大的 k，$x_k = y_{k+m}$ 对所有 k 均成立，则 (x_k) 和 (y_k) 等价。

∂T 的一个等价定义如下：固定某个 x_0，并令 ∂T 为从 x_0出发的所有测地射线的集合。第二个模型的优点在于，它将 ∂T 与有限集的一个乘积相识别，

$$\partial T \cong \{1, \dots, q+1\} \times \{1, \dots, q\}^{\mathbf{N}},$$

该识别是通过记录 x_{k+1} 在x_k的邻居节点中所作的每一次连续选择而得到的。当 $k \geq 1$时，测地条件恰好排除了 $q+1$ 个选择中的一个，即 x_{k-1}。该识别赋予 ∂T一个紧致拓扑以及一个概率测度 μ_{x_0}，即分别为 $\{1, \dots, q+1\}$和 $\{1, \dots, q\}$上所有相应均匀测度的乘积。

拓扑和测度的一个等价定义来自如下观察：紧致（有限）群$\mathrm{Fix}_G(x_0)$在 ∂T上传递作用；特别地，$\mathrm{Fix}_G(x_0)$的归一化哈尔测度诱导出 ∂T上唯一的 $\mathrm{Fix}_G(x_0)$-不变概率测度。

这些描述的缺点在于它们取决于选择 x_0。不过显然，另选一个基点，例如 y_0，将定义相同的拓扑和相同的测度类。此外，这些测度的 Radon–Nikodým 导数可以直接计算为

$$\frac{\mathrm{d}\mu_{y_0}}{\mathrm{d}\mu_{x_0}}(\xi) = q^{B_\xi(x_0, y_0)} \quad \forall\, \xi \in \partial T,$$

其中，B_ξ 是由**Busemann 核** 定义的

(i) $$B_\xi(x_0, y_0) = \lim_{k \to \infty} \Big(d(x_0, z_k) - d(y_0, z_k) \Big) \in \mathbf{Z}$$

其中 (z_k) 是表示 ξ 的任意测地射线。特别地，$(\partial T, \mu_{x_0})$ 上的 G-作用是非奇异的，其 Radon–Nikodým 余循环为

$$\frac{\mathrm{d}g\mu_{x_0}}{\mathrm{d}\mu_{x_0}}(\xi) = q^{B_\xi(x_0, gx_0)} \quad \text{for} \quad g \in G, \xi \in \partial T.$$

2.2. 表示。 给定一个巴拿赫空间 W，我们需要作出两项选择，以定义巴拿赫空间 $V = L^p(\partial T, W)$。首先，我们选择一个基点x_0，并考虑如上所述的相应测度 $\mu = \mu_{x_0}$。其次，我们选择指数 $1 \leq p < \infty$。

在作出这些选择后，空间 $V = L^p(\partial T, W)$ 由 p-可求和的 W-值函数类构成，且当 ∂T 为可分时，它也是巴拿赫空间并且可分。关于这些 Bochner 空间的详细背景资料，可参阅专著 W。基本事实是，阶梯函数，即只取有限多个值的可测函数（类），在 [DU77]中构成一个稠密子空间，参见 V中的 §II.2，例如 [DU77]。关于 V 的对偶理论更加微妙，将在定理B的证明中讨论。

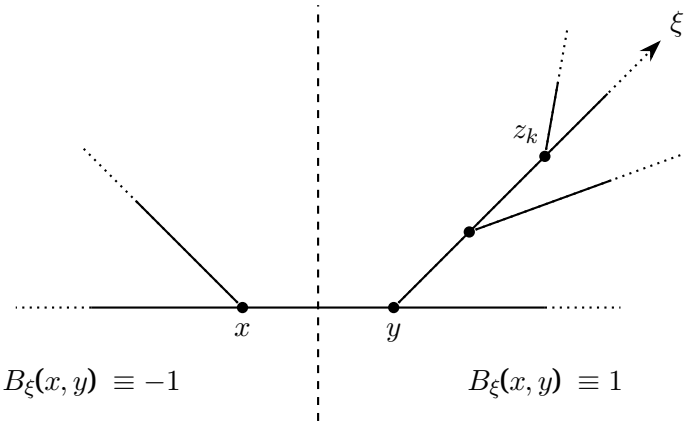

图1. Busemann 核的值随 ξ 的变化情况，其中相邻顶点为 x, y。图示为 $q = 2$。

给定巴拿赫空间 W 的一个可逆连续线性算子 $\tau\colon W \to W$，我们通过“诱导”公式在 V 上定义一个 G-表示 π

(ii) $$\big(\pi(g)v\big)(\xi) = \tau^{B_\xi(x_0,gx_0)}\, v(g^{-1}\xi) \quad \text{for} \quad g \in G, v \in V.$$

对于任意给定的 g，核 $B_\xi(x_0,\ gx_0)$ 只取有限多个值，因为三角不等式将其绝对值限制在 $d(x_0,\ gx_0)$ 以内。因此，对于给定的 g，算子 $\tau^{B_\xi(x_0,\ gx_0)}$ 的范数有界。由此可知，$\pi(g)v$ 仍属于 $L^p(\partial T,\ W)$，且 $\pi(g)$ 在 V 上定义了一个连续线性算子。类似的论证表明，该表示 π 是连续的，即对于每个 $v \in V$，轨道映射 $g \mapsto \pi(g)v$ 作为映射 $G \to V$ 是范数连续的。

根据构造，对于 $K = \mathrm{Fix}_G(x_0)$，V 上的 K-表示就是一个平移表示，因此，K-不动向量 V^K 与作为常值映射的 W 等距同一。

2.3. 不动向量。 到目前为止，我们对巴拿赫空间W 以及算子 $\tau\colon W \to W$均未作任何假设，唯一的条件是 τ 可逆，因此$\tau^{B_\xi(x_0,\ gx_0)}$ 有定义。在这一一般情形下，我们可以证明以下结论，其中一如既往，$q+1 \geq 3$ 表示树的度数。

命题1。 设 $V_0 \subseteq V$ 是任意一个非零闭 G-不变子空间，并设x_0、x_1 是 T的两个相邻顶点。

那么，V_0 有一个非零向量被 $\mathrm{Fix}_G(\{x_0, x_1\})$固定。

此外，除非 q 或 $-q$ 是 τ的特征值，否则 V_0 有一个非零向量被 $\mathrm{Fix}_G(x_0)$ 固定。

我们说明，$\mathrm{Fix}_G(S)$表示子集 $S \subseteq T$的逐点 稳定子。

在上述表述中，x_0 是我们为测度 $\mu = \mu_{x_0}$ 所选择的顶点，这一点虽然很方便，但并非必不可少。事实上，任何将 x_0 映射到其他任意顶点的自同构都会使整个图景相互交织。

我们将反复使用以下事实：给定 $v \in V$ 和一个紧子群 $U < G$，积分

$$\int_U \pi(k)v \, \mathrm{d}k$$

相对于 U 上的归一化哈尔测度，给出 V 的一个 U-不变向量。关键在于，这是一个定义良好的博赫纳积分，因为该表示是轨道连续的。

命题*1* 的证明回顾一下，子树 S 属于 T，若其**完全**，则其中每个顶点 S 要么是边界顶点（即与一个不属于 S的顶点相邻），要么在 S中度为 $q+1$。

有限完备子树的例子包括仅由一个顶点或两个相邻顶点构成的树，以及任意有限子树的正则闭 r-邻域，其中 $r > 0$ 是一个整数，且度量为组合图距离。

由于 π 在 V_0 上的限制是在一个非零巴拿赫空间上的连续表示，众所周知，存在被某个紧开子群 $U < G$ （属于 G）固定的非零向量。我们回顾一下证明。任取一个非零向量 $v \in V_0$。由于紧开子群构成单位元的邻域基，我们可以选取这样的一个群 U，使得对所有 $k \in U$，都有 $\|\pi(k)v - v\| < \frac{1}{2}\|v\|$。$U$-不变向量 $\int_U \pi(k)v \, \mathrm{d}k$ 属于 V_0，且不可能为零，因为 v 的 U- 轨道的整个闭凸包都包含在以 v 为中心、半径为 $\frac{1}{2}\|v\|$ 的闭球内。

我们可以假设，对于某个有限子树 S，有 $U = \mathrm{Fix}_G(S)$。因为这些群仍构成一个邻域基。进一步地，我们可以将 S 替换为其闭 1-邻域，从而假设它是完全的。

在所有有限完备子树中，我们选择 S，使其顶点数最少，并满足以下性质：$\mathrm{Fix}_G(S)$在 V_0中具有非零不动向量。为了证明命题1的第一个结论，只需证明 S 仅由一个或两个顶点组成。事实上，由于 G 在相邻顶点对上具有传递性，我们可以对$\mathrm{Fix}_G(S)$ 进行共轭，使得 $S \subseteq \{x_0, x_1\}$，或等价地$\mathrm{Fix}_G(S) > \mathrm{Fix}_G(\{x_0, x_1\})$。

令 $D = \mathrm{diam}(S)$ 表示 S 的直径，即当 x、y 遍历 S 的所有顶点时，$d(x, y)$ 的最大距离。根据上述讨论，要证明的第一个结论是 $D \leq 1$。反设 $D \geq 2$，并在 S 中选取一条长度为 D 的测地线段。对 $\mathrm{Fix}_G(S)$ 进行共轭后，我们可以假设这条线段以 x_0、x_1 开始；再将其延伸为 T 中的一条测地线 $(x_k)_{k\in\mathbf{Z}}$，使得对所有 $0 \leq k \leq D$，都有 $x_k \in S$。

我们通过从 S 中移除x_{D-1} 的所有邻居节点（x_{D-2}除外），定义 T 的一个子树 $S' \subseteq S$，并回顾我们的假设 $D \geq 2$。根据构造，S' 仍然是完全的。因此，S 的极小性意味着群 $\mathrm{Fix}_G(S')$ 在 V中没有非零不动向量。换言之，我们有

(iii) $$\int_{\mathrm{Fix}_G(S')} \pi(k)v \, \mathrm{d}k = 0 \quad \forall v \in V$$

其中积分是相对于 $\mathrm{Fix}_G(S')$ 上的归一化哈尔测度取的。我们将此应用于如下情形： v 是一个被 $\mathrm{Fix}_G(S)$ 固定的非零向量。由于 $\mathrm{Fix}_G(S) < \mathrm{Fix}_G(x_0)$，它在 V 上的表示正是对 $L^p(\partial T,\ W)$的正则平移作用。换言之， v 具有如下形式

$$v = w_1 \mathbf{1}_{A_1} + \cdots + w_n \mathbf{1}_{A_n} \quad (w_i \in W)$$

其中， $\partial T = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$ 是 ∂T中 $\mathrm{Fix}_G(S)$ 轨道的一个枚举，且 w_i 中至少有一个非零。

∂T 中的 $\mathrm{Fix}_G(S)$ 轨道具有简单的几何解释：每个 A_i与 S的一个边界顶点双射对应。具体而言， A_i 是由从该边界顶点发出、且不包含 S中任何其他顶点的测地射线所表示的边界点集合。

考虑 $\mathrm{Fix}_G(S')$ 轨道的相应描述。现在， x_{D-1} 是 S' 的一个边界顶点，但不是 S的边界顶点。此外，其在 S中的 q 个邻居节点，包括x_D，是 S 的边界顶点，但不属于 S'。 S 和 S' 其余的边界顶点相同。

因此，我们可以对 $\mathrm{Fix}_G(S)$ 轨道 A_i 进行编号，使得 $\mathrm{Fix}_G(S')$ 轨道恰好为

$$(A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_q), A_{q+1}, \ldots, A_n,$$

参见图2。

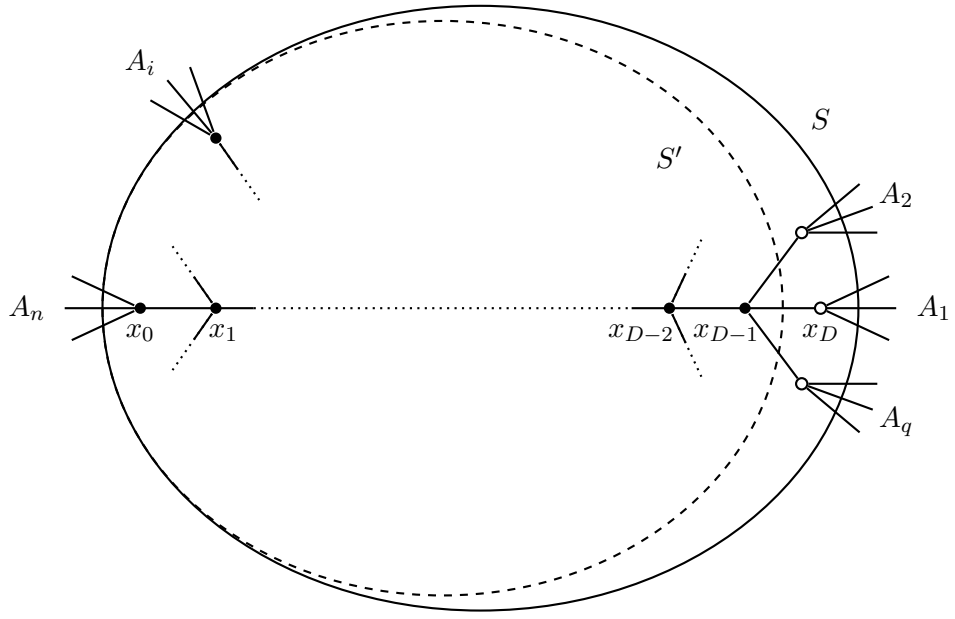

图2. 完全树 S 和 S'，以及边界轨道A_1，……， A_n，其中有 $q = 3$。每个 $q < i < n$只画出了一个 A_i。

现在我们可以计算归一化积分（iii）；即它等于

$$\frac{w_1 + \cdots + w_q}{q} \mathbf{1}_{(A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_q)} + w_{q+1} \mathbf{1}_{A_{q+1}} + \cdots + w_n \mathbf{1}_{A_n}.$$

总之，该积分为零意味着当 $i > q$ 时， $w_1 + \cdots + w_q = 0$ 和$w_i = 0$。

现在我们选择一个元素 $g \in G$，使得对所有 k都有 $gx_k = x_{k-1}$。回想一下，x_D 是 S 的边界顶点之一，对应于最初的 q 个轨道A_1、.....、 A_q之一；不妨设它是 A_1。特别地，

$$gA_1 = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_q.$$

这一次，我们将条件（iii）应用于 π（g）v，而不是 v。利用（ii），可得对每个，条件

(iv) $$0 = \int_{\mathrm{Fix}_G(S')} (\pi(kg)v)(\xi)\,\mathrm{d}k = \int_{\mathrm{Fix}_G(S')} \tau^{B_\xi(x_0,kgx_0)}\, v(g^{-1}k^{-1}\xi)\,\mathrm{d}k.$$

根据 g的选取，对所有 $\xi \in A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_q$都有 $g^{-1}k^{-1}\xi \in A_1$。对于这些 ξ，我们还可以得到

$$B_\xi(x_0, kgx_0) = B_{k^{-1}\xi}(x_0, gx_0) = B_{k^{-1}\xi}(x_0, x_1) = -1$$

根据布塞曼余循环（i）的定义。因此（iv）推出 $\tau^{-1}w_1 = 0$，因此 $w_1 = 0$。

最后，我们利用 $S \smallsetminus S'$ 中所有 q 顶点之间的对称性，论证如下。我们可以选取 g，使其平移一条经过 x_0 以及这些顶点中任意一个（而非 x_D）的测地线；随后完全相同的论证表明，对于任意一个 $i = 1$（而非 $1 \le i \le q$），都有 $w_i = 0$。由此完成证明： $v = 0$，而这一矛盾说明 $D = \mathsf{diam}(S) \ge 2$ 不可能成立。

现在我们转向命题1 的第二个陈述，并写作 $K = $固定$_G(x_0)$。假设 V_0 没有非零的 K-不变向量。那么每个 $v \in V_0$ 都满足$\int_K \pi(k)v\mathrm{d}k = 0$，这可以写成

(v) $$\int_{\partial T} v(\xi)\,\mathrm{d}\mu(\xi) = 0.$$

根据第一个陈述，我们知道 V_0 含有一个非零元素 $v = w_1\mathbf{1}_{A_1} + w_2\mathbf{1}_{A_2}$，其中 A_1 表示以（x_0，x_1）开头的射线集合，而 A_2 表示以（x_1，x_0）开头的射线集合。或者，也可以将其表述为

(vi) $$\xi \in A_1 \iff B_\xi(x_0, x_1) = 1, \quad \xi \in A_2 \iff B_\xi(x_0, x_1) = -1.$$

由于 $\mu(A_2) = q\mu(A_1)$，条件 (v) 表示为 $w_1 + qw_2 = 0$。特别地， $w_2 \neq 0$。现在考虑一个元素 $h \in G$ 交换 x_0和 x_1。根据 vi) 在 π 的定义中的应用，可得

(vii) $$\pi(h)v = \tau(w_2)\,\mathbf{1}_{A_1} + \tau^{-1}(w_1)\,\mathbf{1}_{A_2}.$$

再次应用 (v) 可得 $\tau(w_2) + q\tau^{-1}(w_1)${v19'>，于是得到 $\tau^2(w_2) = q^2 w_2$。由于 $w_2 \neq 0$，我们得出结论： W 的特征值为 q 或 $-q$。□

注释2。上述证明中只有一处用到了 V_0 在巴拿赫空间中是闭的这一点，即通过积分论证 V_0 包含一个被某个紧开子群 $U < G$固定的非零向量。证明中的其他积分都具有以下形式：给定两个紧开子群

U，$U' < G$，我们对 $\int_{U'} \pi(k) v \, \mathrm{d}k$ 进行积分，其中 v 是 U 不变的。因此，这个积分只是由有限集 $U'/(U' \cap U)$ 索引的有限线性组合，在 V 的任意向量子空间中都有意义。

总之，只要 命题 1 就成立：$V_0 \subseteq V$ 是一个 G 不变向量子空间，且包含一个非零光滑向量。

2.4. 不变子空间。 现在我们将上述构造专门用于可逆算子 τ，其构造如下。选择平方根的一个全纯分支 $\sqrt{\cdot}$，定义在（不寻常的）割域 $\mathbf{C} \smallsetminus \mathbf{R}_{\geq 0}$ 上，并考虑

$$\varphi(z) = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4q}}{2} \qquad \text{(where defined)}.$$

特别地，φ 在以零为中心、半径为 $\mathbf{D}_{2q^{1/2}}$ 的开圆盘上有定义且全纯，$2q^{1/2}$ 参见图 3。这里我们记 $q^{1/2}$ 为（通常意义下的）实数平方根。

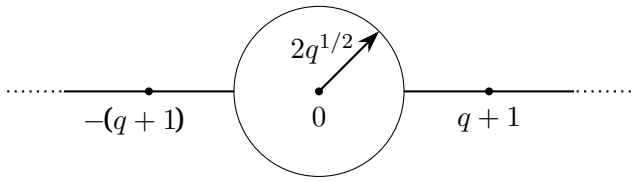

图 3. φ 的定义域有两条水平割线；它包含 $\mathbf{D}_{2q^{1/2}}$，但不包含 $\pm(q+1)$。

给定任意范数为 $\|\alpha\| < 2q^{1/2}$ 的连续线性算子 $\alpha\colon\ W \to W$，我们因此可由全纯泛函演算得到一个算子 $\tau = \varphi(\alpha)$。此外，τ 可逆；明确地说，我们有 $\tau^{-1} = \varphi(\alpha)^{-1}$，其中 $\varphi(z)^{-1} = \frac{1}{2q}(z - \sqrt{z^2 - 4q})$。由构造可知，

$$\tau + q\tau^{-1} = \alpha$$

因为 $\varphi(z) + q\varphi(z)^{-1} = z$。

在 $V = L^p(\partial T,\ W)$ 上构造 G-表示 π 的主要动机是，我们可以如下根据 W 的 α-不变子空间来控制 V 的 G-不变子空间。

命题3。 设 $V_0 \subseteq V$ 为任意非零闭 G-不变子空间，并令 $K = \mathrm{Fix}_G(x_0)$。

则在恒等对应 $V^K \cong W$ 下，V_0^K 的像 $W_0 \subseteq W$ 是一个非零闭 α-不变子空间。

证明。 谱映射定理表明 $\pm q$ 不是 τ 的特征值，因为 $\pm q$ 位于 $\varphi(\mathbf{D}_{2q^{1/2}})$ 之外，因为 $\pm(q+1)$ 不属于 $\mathbf{D}_{2q^{1/2}}$。因此，命题 1 表明 W_0 非零。我们需要证明 $\alpha(w) \in W_0$ 对所有 $w \in W_0$ 都成立。

考虑 $v = w\mathbf{1}_{\partial T}$ 中的 V_0^K 以及一个将 x_0 交换为 x_1 的元素 $h \in G$，如命题证明末尾所述。1。对于（vii）的计算得到

$$\pi(h)v = \tau(w)\,\mathbf{1}_{A_1} + \tau^{-1}(w)\,\mathbf{1}_{A_2}.$$

另一方面，$\int_K \pi(k)\pi(h)v\,\mathrm{d}k$ 仍属于 V_0^K，因此它具有如下形式 $w'\mathbf{1}_{\partial T}$，其中 $w' \in W_0$。将此积分计算为 $\int_{\partial T}(\pi(h)v)(\xi)\,\mathrm{d}\mu(\xi)$，并利用 $\mu(A_1) = 1/(q+1)$、$\mu(A_2) = q/(q+1)$，我们推得

$$w' = \frac{1}{q+1}\tau(w) + \frac{q}{q+1}\tau^{-1}(w) = \frac{1}{q+1}\alpha(w).$$

这证实了 $\alpha(w) \in W_0$。 □

现在我们已经收集了足够多的 V 的性质，可以推断：若 α 没有不变子空间，则它是不可约的。

定理 4. 设 W 是一个巴拿赫空间，存在一个线性算子 α，它没有非平凡的闭不变子空间，且范数为 $\|\alpha\| < 2q^{1/2}$。

那么，对于每个 $1 \le p < \infty$，上文构造的 G-表示在 $V = L^p(\partial T, W)$ 上都是拓扑不可约的。

定理 4的证明。设 $V_0 \subseteq V$ 是一个非零闭的 G-不变子空间。由阶梯函数的稠密性，只需证明 V_0 包含所有形如 $w\mathbf{1}_C$ 的向量，其中 $w \in W$ 且 $C \subseteq \partial T$ 遍历 ∂T 的一个拓扑基。这样的拓扑基由所有“半树”组成

$$C = \Big\{\xi \in \partial T : B_\xi(x,y) = 1\Big\} \quad \text{where} \quad x, y \in T \text{ with } d(x,y) = 1.$$

注意，另一个“半边” $C' = \partial T \smallsetminus C$ 对应于另一个也是唯一的取值 $B_\xi(x,\ y) = -1$；参见图 1。由 G-不变性可知，只需在 V_0 的特殊情形下证明这一点，此时 $x = x_0$。

取 $g \in G$ 使得 $gx_0 = y$。给定 $w' \in W$，定义（ii）给出

$$\pi(g)\left(w'\,\mathbf{1}_{\partial T}\right) = \tau(w')\,\mathbf{1}_C + \tau^{-1}(w')\,\mathbf{1}_{C'}$$

因此

$$\pi(g)\left(w'\,\mathbf{1}_{\partial T}\right) - \tau^{-1}(w')\,\mathbf{1}_{\partial T} = \left(\tau(w') - \tau^{-1}(w')\right)\mathbf{1}_C. \tag{viii}$$

命题3意味着，V_0 包含所有形如 $w''\,\mathbf{1}_{\partial T}$ 且满足 $w'' \in W$ 的元素。特别地，V_0 同时包含 $w'\,\mathbf{1}_{\partial T}$ 和 $\tau^{-1}(w')\ \mathbf{1}_{\partial T}$。由 G-不变性可知，它还包含 $\pi(g)\,(w'\,\mathbf{1}_{\partial T})$，因此我们由（viii）得出，对于任意 $w' \in W$，V_0 包含元素 $\left(\tau(w') - \tau^{-1}(w')\right)\mathbf{1}_C$。

因此，只需证明任意 $w \in W$ 都可写成 $\tau(w') - \tau^{-1}(w')$ 的形式；也就是说，只需证明 $\tau - \tau^{-1}$ 是满射。事实上，该映射甚至可逆：由谱映射定理可知，这是因为函数 $\varphi - \varphi^{-1}$ 在 $\mathbf{D}^{2q^{1/2}}$ 上不为零。事实上，它处处不为零，因为其定义域不包含 $\pm(q+1)$。□

此时，定理 A由不变子空间问题的否定解推出。

定理 A的证明。 Enflo [Enf76、 Enf87] 和 Read [Rea84]证明了存在一个无限维巴拿赫空间 W 以及一个连续线性算子α： $W \to W$ 其没有任何不变闭真子空间。如有需要，我们对α 进行重新缩放，以确保 $\|\alpha\| < 2q^{1/2}$。

那么， G-表示 π 在 $V = L^p(\partial T, W)$ 由定理 4 可知在拓扑意义下不可约；由命题3可知是不可容许的。

对于附加结论，考虑 V_{sm} 光滑向量子空间，并假设其中包含一个非零的代数不可约子表示$V_1 \subseteq V_{\mathrm{sm}}$。根据注释 2，我们仍可应用命题 1 并推出 $V_1^K \neq 0$。另一方面，Olshanskii 证明（见 [Ol′75]中的定理 1），代数不可约的 G-表示是容许的，因此 V_1^K是有限维的。（在当前情形下，也可以利用(G, K) 是盖尔范德对这一事实推出，因为 V_1 必定具有可数的代数维数。事实上，这一论证相当于Ol′75]中 Olshanskii引理3 的一个特例。）现在，命题3 的论证表明， α 在 W中保留一个有限维子空间，这显然荒谬。
□

我们可以根据 Read 大量研究所提供的关于W 的信息，获得更多关于 V的巴拿赫空间理论信息。

定理 B 的证明。 James 发现的拟自反巴拿赫空间 W [Jam51]与其二次对偶空间 W^{**}等距同构。Read 在 [Rea89] 中证明，该空间存在一个没有不变闭真子空间的连续线性算子。我们将定理 A 应用于这一情形，并附加限制条件 $p > 1$。我们只需证明 $V = L^p(\partial T, W)$ 也与其自身的二次对偶空间等距同构（但要指出的是，它不是拟自反的）。

记 p' 为霍尔德共轭指数 $p' = p/(p-1)$。对 ∂T 积分，可得到一个从 $L^{p'}(\partial T, W^*)$ 到 V^*的典范等距嵌入，其中 * 表示巴拿赫对偶。当且仅当 W^* 具有拉东-尼科迪姆性质时，该嵌入是等距同构；参见 [DU77]中§IV.1的定理1。另一方面，每个可分对偶都具有拉东-尼科迪姆性质；参见 [DU77]中§III.3的定理1。对偶空间 W^* 是可分的；任何对偶空间可分的空间都具有这一性质：参见 Banach，《Ban32]》中§XI.9的定理12。这里， W^{**} 是可分的，因为根据定义， W 本身就是可分的。

总之， V^* 可以与 $L^{p'}(\partial T, W^*)$ 等距对应。由于 $p' < \infty$ 和 $p'' = p$，我们可以完全重复相同的拉东–尼科迪姆论证，将 V^{**} 与 $L^p(\partial T, W^{**})$ 对应起来。根据詹姆斯定理，这意味着 V^{**} 与 V等距同构。

关于 $V = L^1$，我们可以借助 Read 的另一项结果得到它。Read 证明了 [Rea85]，即 $W = \ell^1(\mathbf{N})$ 也存在一个没有不变闭真子空间的连续线性算子。这一次，我们将定理 A 应用于 $p = 1$；富比尼定理表明， $V = L^1(\partial T, \ell^1(\mathbf{N}))$ 可以与 $L^1(\partial T \times \mathbf{N})$进行典范识别。由于 $\partial T \times \mathbf{N}$ 是一个可数生成的无原子测度空间，我们确实得到标准勒贝格空间 L^1。□

当然，如果 $p = 2$ 本身是希尔伯特空间，那么我们得到希尔伯特空间 $V = L^2(\partial T,\ W)$；原始的不变子空间问题正是针对这种情形提出的，但至今仍以难以解决而闻名。

参考文献

[Ban32] Stefan Banach，线性运算理论。数学专著丛书，华沙，第1卷，PWN，华沙，1932年。[BT67] François Bruhat和Jacques Tits，《局部域上的单代数群》，《局部域会议论文集》（德里伯根，1966），Springer，柏林—纽约，1967年，第23–36页。[BT72] François Bruhat和Jacques Tits，《局部域上的约化群：I.赋值根数据》，《高等科学研究所数学出版物》（1972），第41期，5–251页。[BZ76] Joseph N. Bernštein和Andrey V. Zelevinskii，《群 $GL(n, F)$的表示》，其中 F是局部非阿基米德域，《数学科学进展》31（1976），第3期（189），5–70页。[Car73a] Pierre Cartier，树上的几何与分析，布尔巴基研讨会，第24年（1971/1972），《数学讲义》，第317卷，Springer，柏林—纽约，1973年，第407号报告，第123–140页。[Car73b] Pierre Cartier，树上的调和分析，《齐次空间上的调和分析》（纯数学研讨会论文集，第XXVI卷，威廉姆斯学院，威廉斯敦，马萨诸塞州，1972），美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1973年，第419–424页。[DU77] Joseph Diestel和J. Jerry Uhl, Jr.，《向量测度》，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1977年，B. J. Pettis作序，数学调查丛书，第15号。[Enf76] Per Enflo，巴拿赫空间上的不变子空间问题，《莫雷—施瓦茨研讨会（1975–1976）：空间 L^p、可和化应用与巴拿赫空间几何》，综合理工学院，帕莱索，1976年，第14–15号报告，第7页。[Enf87] Per Enflo，巴拿赫空间的不变子空间问题，《数学学报》158（1987），第3–4期，213–313页。[FTN91] Alessandro Figà-Talamanca和Claudio Nebbia，《齐次树上作用群的调和分析与表示论》，伦敦数学学会讲义丛书，第162卷，剑桥大学出版社，剑桥，1991年。[Jam51] Robert Clarke James，一个与其二次共轭空间等距的非自反巴拿赫空间，《美国国家科学院院刊》37（1951），174–177页。[JL70] Hervé Jacquet和Robert Phelan Langlands，《GL(2)上的自守形式》，《数学讲义》，第114卷，Springer，1970年。[Ol′75] Grigori Iosifovich Ol′šanskiĭ，树自同构群的表示（俄文），《数学科学进展》30（1975），第3期（183），169–170页。[Ol′77] Grigori Iosifovich Ol′šanskiĭ，Bruhat–Tits树自同构群的不可约表示分类，《泛函分析及其应用》11（1977），第1期，26–34页。[Rea84] Charles John Read，不变子空间问题的一个解，《伦敦数学学会会报》16（1984），第4期，337–401页。[Rea85] Charles John Read，空间 ℓ_1上的不变子空间问题的一个解，《伦敦数学学会会报》17（1985），第4期，305–317页。[Rea89] Charles John Read，具有可分对偶的某些巴拿赫空间上的不变子空间问题，《伦敦数学学会会刊》（第3辑）58（1989），第3期，583–607页。[Ren10] David Renard，p进约化群的表示，《法国数学学会专题课程》，第17卷，法国数学学会，巴黎，2010年。[Soe88] Wolfgang Soergel，SL(2, R)的一个不可约非容许Banach表示，《美国数学学会会刊》104（1988），第4期，1322–1324页。[Vio26] Federico Viola，树自同构群在Pontryagin空间中的不可约表示，预印本，arXiv:2508.02367v2，2026年。