arXiv:2603.17013v1 [math.GT] 17 Mar 2026

具有无限二面体群基本群的4维流形上的奇异结构

SIMONE TAGLIENTE[1,2]

摘要。本文旨在构造无穷多个奇异结构，这些结构定义在基本群同构于无限二面体群的光滑闭合定向 4–流形上，假设b_2^+和 b_2^- 至少为12。

1. 引言

在闭4-流形上构造奇异结构是现代低维拓扑研究的主要目标之一。

我们称拓扑流形 M 容许无穷多个奇异结构，如果存在一个光滑流形族 $\{M_n\}$ ，它们与 M同胚，但两两不同胚。本文将聚焦于基本群同构于无限二面体群的流形；该群是 $\mathbb{Z}$ 与$\mathbb{Z}_2$的非平凡半直积。我们将采用近期关于这些流形在同胚意义下的分类结果 [HKPR25]。

从现在起，所有流形均假定为光滑流形。

定理 1.1. 固定正整数 a, b，满足 $a, b \geq 12$。那么存在一个无限族两两不同胚但彼此不同微分同胚的闭流形，其基本群同构于无限二面体群，$b_2^+ = a$ 和 $b_2^- = b$。

当 $a = b$ 时，这些族由不可约流形构成。

在证明过程中，我们还将找到新的例子：具有无限循环基本群且符号数为 0 的异乎寻常流形：

定理 1.2. 对于 $m \geq 13$，存在一族流形，它们与 $(S^1 \times S^3)\#(2m)(\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}^2})$ 同胚，但彼此不同微分同胚。

这将在定理 5.1中得到证明。

无限二面体群 D_∞ 是 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}_2$ 之间唯一的非平凡半直积，其表示为

$$D_\infty = \langle \sigma, \tau | \sigma^2 = 1, \sigma\tau\sigma = \tau^{-1} \rangle = \langle \sigma\tau, \tau | \sigma^2 = 1, (\sigma\tau)^2 = 1 \rangle,$$

因此也等于自由积 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$。注意，其阿贝尔化为 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$。特别地，基本群为 D_∞ 的流形满足 b_1 等于 0。

这意味着，在定理 4 中构造的 1.1 个流形实例中，有些实例的 Seiberg-Witten 不变量为零。事实上，具有非平凡不变量的流形满足 $1 - b_1 + b_2^+$ 为偶数；尤其是，如果 b_1 为零，那么 b_2^+ 必定为奇数。我们的实例中，b_2^+ 有奇偶两种情况，因此尤其值得关注。我们将利用其连通二重覆盖的 Seiberg-Witten 不变量来区分它们的微分同胚类型，参见注2.5。

首个奇异闭4维流形由 Donaldson 发现 [Don87]
此后，人们构造了许多其他实例，包括无穷多个与 $\overline{\mathbb{CP}^2 \# 2\mathbb{CP}^2}$ [AP10]同胚的奇异流形。这些是迄今已知的最小的单连通奇异流形。

关于非单连通流形，Torres 构造了大量实例 [Tor11，Tor14]。在 [LLP23], 中，首次给出了基本群阶为2 的负定奇异流形实例。随后，在 [BSS24], 中，循环基本群流形的类别得到扩展，其中包括具有 $b_2 = 1$的流形。这些是迄今最小的奇异流形实例。

定理1.1的证明思路。我们将使用单连通辛流形作为构造块，并以一种特定方式将它们粘合起来，从而得到一个辛流形 W，其基本群为无限循环群，并且带有一个自由对合。关于此对合的商空间是一个流形 Y，其 $\pi_1(Y) \cong D_\infty$。随后，我们可以通过结手术或环面手术构造一个由不同胚流形组成的无限族，并验证在这一过程中等变交叉形式保持不变。

然而，正如我们将看到的，具有 D_∞ 基本群的 4维流形的同胚分类，既涉及等变交叉形式，也涉及所谓的 k-Postnikov 不变量。我们可以在结手术过程中控制这一不变量，但在环面手术过程中则不能，因此只有在前一种情况下，我们才能得出这些流形彼此同胚的结论。

结构安排。在第2节中，我们讨论辛流形的基本操作，并陈述本文所依据的同胚分类结果。在第3节中，我们介绍构造中将用到的构造块

。在第4节中，我们讨论一般情形，并展示如何从一个满足某些假设的给定流形出发，构造基本群为 D_∞ 的奇异流形。最后，在第 5 节中，我们给出满足这些条件的例子。

致谢。 我谨感谢 Andras Stipsicz 和 Marco Marengon 在整个项目过程中给予我的持续支持。我也感谢 Mark Powell 与我进行有益的交流，并对本项目表现出兴趣。作者获得了 E
XCELLENCE-151337 资助。

2. 基础知识

本节回顾 4维流形的一些一般不变量和构造。

2.1. **Seiberg-Witten 不变量**。 4-流形 M 的 Seiberg-Witten 不变量是一个函数

$$SW : Spin^c(M) \to \mathbb{Z}.$$

我们还可以定义形式和

$$SW_M := \sum_{s \in Spin^c(M)} SW(s)e^s.$$

当 $H_2(M,\mathbb{Z})$中没有 2-挠元时，映射 $s \in Spin^c(M) \mapsto c_1(s) \in H^2(M,\mathbb{Z})$ 在 $Spin^c(M)$与 $H^2(M,\mathbb{Z})$的特征元集合之间给出一个双射。稍微滥用一下记号，我们将这两个集合（以及 $H_2(M,\mathbb{Z})$的特征元集合，通过庞加莱对偶）视为相同。
我们不会明确给出这个不变量的定义，但会用到它的一些重要性质，从而区分给定流形上的光滑结构。

具有 $b_2^+ > 1$的闭辛流形具有非零的 Seiberg-Witten 不变量 [Tau94], ，沿着法丛平凡的辛子流形粘合两个辛流形（此操作称为“正规连通和”），若粘合映射选择恰当，则会产生一个新的辛流形 [Gom95，定理 1。3]。某些操作允许我们以可控的方式改变 Seiberg-Witten 不变量。

2.2. 环面手术。 考虑 4-流形 M 中的环面 T，其法丛平凡；令 λ 为环面上的任意简单闭曲线。固定环面上的一个标架，它诱导出法丛与 $T \times D^2$ 的一个同一化，并用它定义 λ 在 $\partial(\nu T)$ 上的推开曲线。令 μ 表示 T 的子午线。

固定互素的 p, q。通过移除 νT，再利用一个边界微分同胚 ϕ 将 $T \times D^2$ 粘合回来（该微分同胚将 ∂D^2 映至 $p\mu + q\lambda$），我们构造流形 $M_{T,\lambda}(p/q)$；它是沿着 λ，相对于所选标架并采用 $\frac{p}{q}$ 系数进行环面手术得到的。（选择 $\phi(\partial D^2)$ 足以确定流形 $M_{T,\lambda}(p/q)$。）

若将基点固定在 $\partial(\nu T)$ 中，则有

$$\pi_1(M_{T,\lambda}(p/q)) = \pi_1(M - T)/ < \mu^p \lambda^q = 1 > . \tag{1}$$

我们可以控制 Seiberg-Witten 不变量在环面手术下如何变化。假设 2-挠元不存在于以下流形的第二同调群中：M, $M_{T,\lambda}(p/q)$，以及 $M_{T,\lambda}(0)$。在 [MMS97], 中证明了，给定一个特征类 $k \in H_2(M, \mathbb{Z})$ (另见 [FS06，讲座 2])

$$\sum_i SW_{M_{T,\lambda}(p/q)}(k_{p/q} + 2i[T_{p/q}]) = p \sum_i SW_M(k + 2i[T]) + q \sum_i SW_{M_{T,\lambda}(0)}(k_0 + 2i[T_0]), \tag{2}$$

其中，$T_{p/q}$ 表示手术的核心环面，$k_{p/q}$ 表示一个固定的类，它在环面 T 的补空间上与 k 一致（T_0 和 k_0 也类似）。此外，$M_{T,\lambda}(p/q)$ 上除 $k_{p/q}+2i[T_{p/q}]$ 以外不存在其他 Spin^c 结构；$k_{p/q}+2i[T_{p/q}]$ 在 $M_{T,\lambda}(p/q) - \nu T$ 上的限制与 k 一致。

上面的公式中我们稍微滥用了记号：求和是对延拓到 $M_{T,\lambda}(p/q) - \nu T$ 上的 Spin^c 结构进行的，其中这些结构延拓了 k（其他项也类似）；特别地，如果 $T_{p/q}$ 是零调的，求和就只有一项。

该公式用于以下结果：

定理 2.1。 [FPS07，定理 1] 设 M 是一个闭定向光滑四维流形，T 是一个零同调环面，并固定其管状邻域 νT 的一个标架。设 $\lambda \in T$ 是一条简单闭曲线，其推开曲线在 $M - \nu T$ 中是零调的。如果四维流形 $M_{T,\lambda}(0)$ 具有非平凡的 *Seiberg-Witten* 不变量，也就是说，对某个基本类 k_0，$\sum_i SW_{M_{T,\lambda}(0)}(k_0 + 2i[T_0]) \neq 0$，那么集合 $\{M_{T,\lambda}(1/n)\}$ 中包含无穷多个两两不同胚的四维流形。

2.3. Luttinger 手术。 假设 4-流形 M 具有辛结构，并考虑嵌入其中的拉格朗日环面 T

于 M中。那么， T 具有一个规范标架（称为拉格朗日标架），因此 νT 可规范地识别为 $T \times D^2$。如果环面手术的参数形式为 $\frac{1}{q}$，其中 q，我们称该手术为“Luttinger 手术”。此时，新的流形也具有辛结构 [Lut95]。

2.4. **结手术**。 这包括删除 νT并重新粘合$(S^3 – \nu K) \times S^1$，其中 K 有一个结位于 S^3中。对粘合微分同胚的唯一限制是将该结的经线映射到T的子午线。随后，给定流形经过结手术后，其 Seiberg-Witten 不变量会乘以该结的亚历山大多项式 K [FS98]:

$$SW_{M_K} = SW_M \cdot \Delta_K(e^{2T}). \tag{3}$$

2.5. 的子群 D_∞。 以下引理表明，对于基本群同构于 D_∞ 的流形，存在一个首选的双重覆盖：

引理 2.2。 存在唯一的指数为2 的子群，该子群是 D_∞ 的子群且同构于$\mathbb{Z}$。

证明。 指数为 2 的子群对应于

$$D_\infty = \langle \sigma, \tau | \sigma^2 = 1, \sigma\tau\sigma = \tau^{-1} \rangle$$

满射 $D_\infty \to \mathbb{Z}_2$，因此与其阿贝尔化中的指数为 2 的子群一一对应，而其阿贝尔化为 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$。所以， D_∞中有三个指数为 2 的子群。然而，只有 $\langle \tau \rangle$ 同构于 $\mathbb{Z}$，而另外两个同构于 D_∞（它们是 $\langle \tau^2$、 $\sigma \rangle$ 和$\langle \tau^2$、 $\sigma\tau \rangle$）。
直观地说，可以这样来理解：在D_{2n} 边形的等距变换所构成的二面体群中，我们找到第一个由经过相对顶点的直线上的反射生成的 D_n 的副本，以及第二个由经过相对边中点的直线上的反射生成的副本。
□

因此，我们可以通过区分对应于 $\mathbb{Z} \triangleleft D_\infty$的唯一双重覆盖上的光滑结构，来区分基本群为 D_∞的流形上的光滑结构。

2.6. 同胚分类。 </style}证明我们将构造的流形彼此同胚是一个关键点。对于基本群同构于 D_∞ 的流形，Hillman、Kasprowski、Powell 和 Ray 最近建立了其拓扑分类。在陈述该结果之前，我们先引入一些记号：

- M 的等变交叉形式是函数

  $$\lambda_M : \pi_2(M) \times \pi_2(M) \to \mathbb{Z}[\pi_1(M)]$$

  定义为 $\lambda_M(\alpha, \beta) = \sum_{g \in \pi_1(M)} (\alpha \cdot g^{-1}\beta) g$。回顾一下识别 $\tilde{\ }(\pi_2) \cong H_2(M, \mathbb{Z})$，其中 M 是 M 的万有覆盖，而 $\pi_1(M)$ 通过甲板变换作用于 M。因此，在上述公式中，$\alpha \cdot g^{-1}\beta$ 表示 α 与 g^{-1} 作用下 β 的平移像（的代表元）之间的交集。另外请注意，这个和是有限的。

- M 的 n-Postnikov 逼近是复形 $P_n M$，连同映射 $p_n : M \to P_n M$，其特征性质是：p_n 诱导同构 $\pi_i(M) \cong \pi_i(P_n M)$，其中 $i \leq n$；而 $\pi_i(P_n M) = 0$，其中 $i > n$。

  - $P_2 M$ 由一个元素 $k_M \in H^3(D_\infty, \pi_2(M))$ 分类，称为 M 的 Postnikov k-不变量。

定理 2.3。 [HKPR25，定理 1。10]，设 M，N 是闭合、定向的光滑 4-流形，并配有同构 $\pi_1(M) \cong D_\infty$，$\pi_1(N) \cong D_\infty$。

假设等变交叉形式 λ_M 和 λ_N 是等距的，即存在一个 π_2 上的同构，该同构诱导出一个同构

$$H^3(D_\infty; \pi_2(M)) \to H^3(D_\infty; \pi_2(N))$$

发送 $k_M \mapsto k_N$。

那么 M 和 N 同伦等价；如果它们都是自旋流形，或者它们的万有覆盖都不是自旋流形，那么 M 和 N 同胚。

3. 构造块

我们的主要构造块将是 [BH23] 中由 Baykur 和 Hamada 构造的流形。这些是已知的最小例子，展示了符号数为零的单连通流形上的奇异结构。这里我们将回顾其构造及若干重要性质。

定理 3.1. [BH23] 对每个整数 $m \geq 4$，在 $\#^{2m+1}(\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}}^2)$ 的同胚类中，都存在一个由两两不同胚的 4 维流形构成的无限族。

Baykur 和 Hamada 以两种方式构造了该族。我们将这些族记为 $\{Z_{m,k}\}$ 和 $\{Z_{m,J}\}$，其中 J 指S^3中的一个结。我们还将流形 $Z_{m,1}$ 和 $Z_{m,U}$ 记为 Z_m。下面我们将简要回顾这些流形的构造，并陈述一些稍后会用到的重要性质。

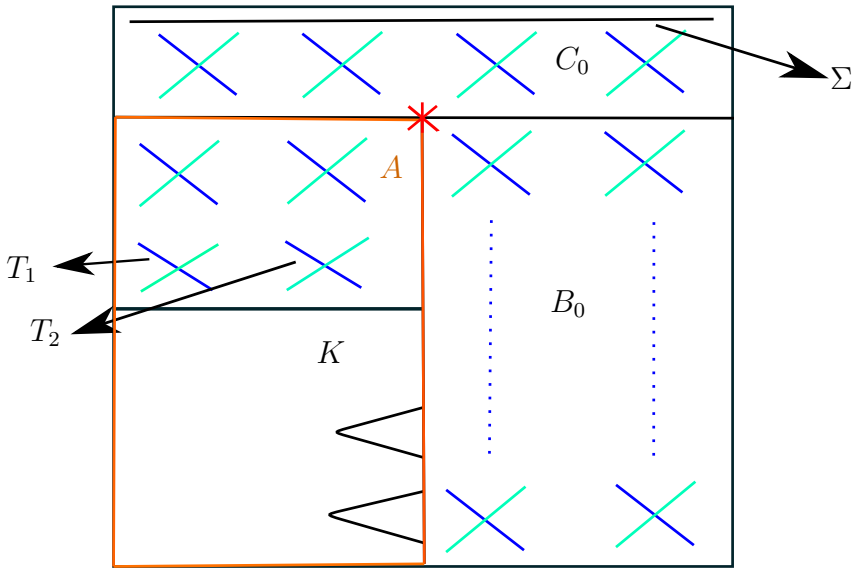

图 1. 纤维化整数群$_m$ 及其分解为块 A、 B_0、 C_0。红色星号表示所选基点（三个块的交集与 S^1微分同胚，我们选择该处为基点）。对 $C_0 \cup B_0$ 中深蓝色显示的拉格朗日环面链环进行手术，可得到单连通流形 Z_m，其具有类似的分解 $Z_m = A \cup B \cup C$。我们还定义Z_m 为 $K \cup B \cup$ （C —Σ）。

3.1. 纤维化 Z$_m$。 Baykur 和 Hamada 构造了一个闭的 Lefschetz 纤维化 Z$_m$ ，其底空间为二重曲面，一般纤维的亏格为 $m + 1$。

整数群$_m$ 由三部分组成 A、 B_0、 C_0，如图1所示。在这些块中，每个纤维都有一个边界分支。 A由非平凡纤维化 K 在环面上的纤维亏格增大而得到，而 B_0 是平凡纤维化（同样在环面上），通过纤维和运算与 A 粘合。两个 A 和 B_0 的纤维亏格均为 m。C_0 也是平凡的，且与 $\Sigma_2 \times T_2$ 同构。我们将使用以下定义：

(1) K 包含 4 个结节纤维，其中一个是可约纤维。可约纤维的各个分支在整数群 Z$_m$和 Z_m 中产生具有奇数自交数的闭曲面。(2) 由于整数群 Z$_m$ 是一个 Lefschetz纤维化（具有截面），其基本群由环路生成，这些环路分别构成截面的基和纤维的基。具体而言，我们

可以选取截面的第一同调群的一组辛基 x_1，y_1，x_2，y_2，以及纤维的一组辛基 a_1，b_1，……，a_{m+1}，b_{m+1}，并将所有环路连接到选定的基点，从而得到整数群 $\pi_1(Z_m)$的一组生成元。这里 a_i，b_i 互为对偶，x_j，y_j也同样如此。

(3) 在 K 中考察时，曲线 a_2 和 $a_1a_2b_2^{-1}a_3[b_3,a_3]b_2$ 是消失圈。

3.2.**通过手术从** 整数群$_m$ **到** Z_m 。 在$B_0 \cup C_0$中存在一个环面链环，如图 1所示，对该链环进行 Luttinger 手术可得到单连通流形 Z_m，其分解为$Z_m = A \cup B \cup C$。

Z_m 的单连通性源于手术在基本群中引入的关系以及消失圈的存在；更多细节将在引理3.6中给出。关键的一步是以下结论（此处 Σ_g^k 表示具有 g 个 k 边界分支的曲面）：

命题 3.2 ([BH23], 命题 2)。 考虑 $X_0 = \Sigma_g^1 \times \Sigma_1^1$，其中 $g \geq 2$，配备乘积辛结构 ω_0。存在嵌入的拉格朗日环面的链环 L_i，位于 (X_0, ω_0) 中；沿这些环面进行 *Luttinger* 手术后，可得到辛四维流形 (X_i, ω_i)，其中 $i = 1, 2$，分别具有以下性质：

有一对曲线 $\{a, b\}$ 位于 $\Sigma = \Sigma_g^1 \times pt$ 上，由 $\{\alpha, \beta\}$ 中的某些 $\pi_1(X_i)$表示，使得 $\pi_1(X_i)$ 对 β 的正规闭包取商后得到一个循环群，该群由 α 在商映射下的像生成，其中

(a) 对于 $i = 1$，a 与 b 在 Σ中恰好横截相交一次；***(b)*** 对于 $i = 2$，a 与 b 不相交，且它们合在一起不会将 Σ分离。特别地，$\pi_1(X_i)$ 是 $\{\alpha, \beta\}$ 的正规闭包。

这个命题的证明基于对 Luttinger 手术所产生关系的仔细分析。这些关系具有如下形式：

$$\mu\lambda = 1, \tag{4}$$

其中，μ 是环面的子午线，而 λ 是手术斜率。

3.3. **流形的性质** Z_m。 流形 Z_m 与 $\#^{2m+1}(\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}^2})$同胚：事实上，根据第0 节，它具有符号数为零的奇交叉形式。3.1(1)，而且由于它是单连通的，这足以确定其同胚类型。然而，由于Z_m 是通过对辛流形进行 Luttinger 手术得到的，它具有辛结构，因此其 Seiberg-Witten 不变量非零。由此可知，Z_m 与……同胚，但

不同胚于 $\#_{2m+1}(\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}^2})$.

我们尤其关注 Z_m 的一些特殊子流形：

（1）存在一个嵌入的亏格 2曲面 Σ位于 Z_m （源自 整数群$_m$ 的一个截面）且具有 0 自交数和单连通补空间；（2）每当我们将整数群$_m$ 的纤维亏格增加一个时，就会在块 A（由 $x_1 \times a_l$、$x_1 \times b_l$、$y_1 \times a_l$、$y_1 \times b_l$，对于 $5 \leq l \leq m$；例如，$x_1 \times a_l$ 与 $y_1 \times b_l$ 对偶）中产生两对新的拉格朗日对偶环面，因此它们会下降为 Z_m 中的拉格朗日环面。如（[BH23], 附录 11）所述，这些新环面中的每一个在Z_m 中都具有单连通补空间，并且可用于手术操作。

3.4. **异 exotic 流形**。 有两种方法可以生成与 Z_m 相关的奇异流形：

定义 3.3。 设 Z_m 为图 *1*所示的流形，并设T 为对 $x_2 \times a_{m+1}$进行手术的核心环面，采用第 *3.1(2)* 节中的记号。我们将族 $\{Z_{m,k}\}$ 定义为对 T进行参数为 $\frac{1}{k}$ 的环面手术所得到的流形族。

在上述定义中， T 是零调的，因为对$x_2 \times a_{m+1}$ 进行手术会消去基本群中的一个环路，因此使 b_1 减少一，使 b_2 减少二。

定义 3.4。 设 Z_m 为图 *1*所示的流形。设$T \subset A - K$ 为通过增大纤维的亏格而得到的拉格朗日环面，如第 *3.3 (2)* 节所述。我们将族 $\{Z_{m,J_k}\}$定义为对 T 进行结手术所得的流形，其使用的结族为$\{J_k\}$，且这些结的亚历山大多项式各不相同。

在这些族中，每一族都包含一个由异态副本构成的无限子族 $\#_{2m+1}(\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}^2})$。第一种情形中，我们根据定理 2.1区分微分同胚类型；第二种情形中，我们使用结手术公式（3）。为方便记号，我们将第二个族简称为 $\{Z_{m,J}\}$。

3.5. **其他引理**。 基本群计算需要格外谨慎。我们将需要以下引理。首先，我们将加强命题 3.2 （请回想，在讨论基本群中环路的正规闭包时，可以忽略基点的选择）：

推论 3.5. 回忆一下， Σ_g^n 表示亏格为 g 的 n 孔曲面。考虑带有乘积辛结构 的 $X_0 = \Sigma_g^1 \times \Sigma_1^2$，其中 $g \geq 2$。令 为 Σ_g^n 的两条边界曲线之一。

结构 ω_0。令 δ 为 Σ_1^2 的两条边界曲线之一。对于 $\Sigma = \Sigma_g^1 \times pt$ 上的任意一对曲线 $\{a, b\}$，若它们互为对偶或互不相交且线性无关，则存在嵌入的拉格朗日环面链环 L_i，位于(X_0, ω_0) 中，并可沿其进行 *Luttinger* 手术，从而得到辛四维流形 (X, ω)，具有以下性质：

$\pi_1(X)$ 模去 $\{b, \delta\}$ 的正规闭包后，得到一个由 a 在商映射下的像生成的循环群。特别地，$\pi_1(X)$ 是 $\{a, b, \delta\}$的正规闭包。

证明。注意，我们可以通过附加一个裤子曲面 P，从 Σ_1^1 得到 Σ_1^2。我们在与 Σ_1^1粘合的 P的边界分支 δ_0 上固定一个基点，使得 $\pi_1(P)$ 由 δ_0 和 δ 自由生成（这里我们必须将 δ 连接到基点）。因此，根据范坎彭定理，

$$\pi_1(\Sigma_1^2) = \pi_1(\Sigma_1^1) * \langle \delta \rangle.$$

于是我们看到 $\pi_1(\Sigma_g^1 \times \Sigma_1^2) = \pi_1(\Sigma_g^1) \times(\pi_1(\Sigma_1^1) * \langle \delta \rangle)$。这意味着，如果将该群模去 δ的正规闭包，就得到 $\pi_1(\Sigma_g^1 \times \Sigma_1^1)$。

现在我们应用命题 3.2：如果我们在 $\Sigma_g^1 \times \Sigma_1^2 \subset \Sigma_g^1 \times \Sigma_1^1$中的同一个环面链环上实施所有指定的手术，就会发现基本群由曲线 a、b、δ 正规生成。此外，如果模去 δ 和 b的正规闭包，就得到一个由 a生成的循环群。□

现在我们可以证明以下结果：

引理 3.6。回忆一下，Z_m 可以表示为 $A \cup B \cup C$ 如图*1*所示，$K \subset A$，并且 $\Sigma \subset C$ 来源于一个截面（其精确定义见第*3.2* 节和*3.3* （*1*））。那么，$\pi_1(K \cup B \cup (C - \Sigma)) = 1$。

证明。注意到，$C_0 - \Sigma = \Sigma_2^1 \times \Sigma_1^2$。我们将沿用 [BH23], 中的论证，但用推论3.5 代替命题3.2。取 δ作为Σ_1^2 上与Σ_g^1粘合的边界曲线。

然后，如 [BH23], 中所做的那样，我们对 C_0 和 B_0 中的环面链环进行 Luttinger 手术（系数为 1），并将手术后的结果分别记为 C 和 B。根据推论 3.5，我们可以安排使得 $\pi_1(C - \Sigma)$ 由 x_2、y_2 和 δ 正规生成。根据命题 3.2，我们可以安排使得 $\pi_1(B)$ 由 a_2 和 $a_1 a_3$ 正规生成，并且 $\pi_1(B)$ 对 a_2 的正规闭包取商后是由 $a_1 a_3$ 生成的自由群。我们可以通过范坎彭定理（两次）计算 Z_m 的基本群：$= K \cup B \cup (C - \Sigma)$；粘合 B 和 C 时，曲线 x_2、y_2 和 δ 都包含在 $\{a_2, a_1 a_3\}$ 的正规闭包中。此外，如第 3.1 节 (3) 所示，a_2 是一个消失圈，因此，当我们加入

这一关系到 K 中时，可得 Z_m 的基本群是由 a_1a_3 生成的循环群（因而是阿贝尔群）。然而，第二个消失圈所引入关系的阿贝尔化恰为 $a_1a_3 = 1$，因此我们推得 Z_m 是单连通的。□

推论 *3.7*。沿用引理 *3.6* 的记号，并令 a_i、b_i、x_j、y_j 如第 *3.1* 节 *(2)* 中所述。令 $T_1 = x_1 \times a_5$、$T_2 = y_1 \times a_5'$ 为 $A - K \subset Z_m$ 中的拉格朗日环面，其中 a_5' 是 a_5 的一个不相交平移副本，且 $T_3 = x_1 \times a_6$ 也是 $A - K \subset Z_m$ 中的拉格朗日环面。那么，对于 $m \geq 5$，$\pi_1(Z_m - (\Sigma \cup T_1 \cup T_2)) = 1$；而对于 $m \geq 6$，$\pi_1(Z_m - (T_1 \cup T_2 \cup T_3)) = 1$。

证明。注意，我们需要对 m 作出这些假设，以确保能够找到环面 T_1、T_2、T_3，它们位于 $A - K$ 中，并且每个环面都有一个对偶环面，如第 3.3(2) 节所述。还要注意，Σ 也具有一个对偶曲面，该曲面由 $\mathfrak{Z}_m$ 中的纤维下降而来。

关键在于，移除环面或曲面 Σ 时，我们会将这些曲面的子午线作为基本群中可能新增的生成元引入，但结果证明它们是零伦的。这是因为存在对偶曲面：例如，由于 Σ 与整数群 $_m$ 的纤维对偶，Σ 的子午线可以表示为换位子 $[a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_{m+1}, b_{m+1}]$ 的乘积。然而，由于 $\pi_1(Z_m - \Sigma) = 1$，这些元素在 Σ 的补空间中均为零伦，因此子午线也同样是零伦的。

因此，$Z_m - (\Sigma \cup T_1 \cup T_2)$ 和 $Z_m - (T_1 \cup T_2 \cup T_3)$ 的基本群仍由 x_j、y_j、a_i、b_i 生成。根据引理 3.6，这些圈在 $Z_m = K \cup B_0 \cup (C_0 - \Sigma)$ 中是零伦的；又由于 $Z_m \subset Z_m - (\Sigma \cup T_1 \cup T_2)$（对 $\overline{Z}_m - (T_1 \cup T_2 \cup T_3)$ 也同样如此），我们得出结论。□

根据上述推论，由于环面 T_1、T_2 和 T_3 彼此不相交，我们可以对其中一个进行结手术，从而得到 $Z_{m,\ J}$ 的异态副本 Z_m（见第 3.4 节），而另外两个环面将在 $Z_{m,\ J}$ 中保留下来。

还要记住，通过对一个与推论 $Z_{m,\ k}$ 中的环面 T_1 和 T_2 不相交的环面进行环面手术，我们也能得到异态副本3.7，见第 3.4 节。

推论 3.8。沿用引理 *3.6*和推论*3.7*中的记号，并令 $T_1 = x_1 \times a_5$、$T_2 = y_1 \times a_5'$。令 $Z_{m,\ k}$ 和 $Z_{m,\ J}$ 如第*3.4*节所述。那么，对于 $m \geq 5$、$\pi_1(Z_{m,\ k} - (\Sigma \cup T_1)) = 1$ 以及 $\pi_1(Z_{m,\ k} - (T_1 \cup T_2)) = 1$。

此外，对于 $m \geq 5$，$\pi_1(Z_{m,J} - (\Sigma \cup T_1)) = 1$；而对于 $m \geq 6$，$\pi_1(Z_{m,\ J} - (T_1 \cup T_2)) = 1$。

证明。至于 $Z_{m,\ k}$，我们采用与引理3.6中相同的论证。唯一的区别是，在 Z_m 中进行了非 Luttinger 手术：

这意味着，在基本群中引入的某个关系变成了 $(\mu^k)\lambda = 1$ 这种形式，而不是方程（4）中的形式。事实上， k 既是手术系数（理解为 $\frac{k}{1}$ ），也是族的参数。不过，论证仍以完全相同的方式成立。这是标准做法，Baykur 和 Hamada 在其证明中使用过，之前也多次使用过，例如参见 [FPS07]。（关键在于，子午线 μ 是零伦的，这是由基本群中的其他关系导致的。因此，非 Luttinger 手术引入的关系等价于 Luttinger 手术引入的关系。）

关于 $Z_{m,J}$，利用关于 m 的假设，我们可以在删除 Σ 和 T_1 后对 T_2 进行结手术（或者在删除 T_1 和 T_2 后对 $T_3 = x_1 \times a_6$ 进行结手术）。然后，我们利用推论 3.7 中证明的事实： $\pi_1(Z_m - (\Sigma \cup T_1 \cup T_2)) = 1$ （或者 $\pi_1(Z_m - (T_1 \cup T_2 \cup T_3)) = 1$），从而推得沿 T_2 （或者 T_3）进行结手术后，我们仍然得到单连通流形。□

4. 一个更一般的定理

本节将证明以下定理，由此我们将推导出定理1.1。

定理 4.1. 设 Z 是一个单连通辛流形，具有 $b_2^+(Z) > 1$，并含有互不相交嵌入的辛连通曲面 S_1 和 S_2，二者的自交数均为零。假设以下两种情形之一成立：

(1) 存在一个零调嵌入环面 T，位于 $Z - (S_1 \cup S_2)$ 中，其中包含一条在 $Z - T$ 中零调的曲线 λ。假设流形 $Z_{T,\lambda}$ *(0)* 是辛的，且手术 T_0 的核心环面存在一个自交数为零的对偶环面。若 $\{Z_k\}$ 表示按定理 *2.1* 所述构造的、与 Z 同胚且具有 $Z_1 = Z$ 的奇异流形族，则假设 $\pi_1(Z_k - (S_1 \cup S_2)) = 1$。*(2)* 存在一个嵌入于 $Z - (S_1 \cup S_2)$ 中的环面 T，具有 $T \cdot T = 0$，并带有一个对偶曲面 T^*。假设对于 S_1 或 S_2 中的每条简单曲线 γ，都存在一个曲面 $F_\gamma \subset Z - (T \cup T^*)$，具有 $\partial F_\gamma = \gamma$，且仅在边界上与 S_1 和 S_2 相交。最后，若 Z_J 表示在 $T \subset Z$ 上沿结 J 进行的结手术，则假设 $\pi_1(Z_J - (S_1 \cup S_2)) = 1$。

那么存在一个无限族 $\{Y_k\}$ （分别为 $\{Y_J\}$）的两两不同胚的流形，它们与 Z 相关，并且基本群

同构于 D_∞，且具有相同的等变交叉形式。在(2)的情况下，这些流形同胚，但两两不同胚。

注记 4.2。 在定理 (1)的情形 4.1中，由于 Seiberg-Witten 不变量非平凡这一假设成立，我们可以利用定理 $\{Z_k\}$ 2.1构造奇异流形族。这是因为存在 T_0的对偶环面；参见 [FPS07，推论 2]。

证明将按以下步骤进行（图 3示意性地展示了所涉及的流形）：

(1) 考虑流形 Z 及其另一个拷贝 Z'，并去掉 S_1 及其拷贝的管状邻域 S_1'。然后按照图 2 所示的映射粘合边界（在 $g(S_1) = 2$情形下）。由此得到一个带有自由保定向对合的单连通流形 X。(2) 去掉 S_2 和 S_2'的邻域，并以类似方式粘合边界。我们得到一个基本群同构于 W 的流形 $\mathbb{Z}$，且仍带有自由对合。(3) 关于该对合取商后，所得商空间的基本群同构于 D_∞。(4) 环面手术和结手术会改变微分同胚类型，但不改变等变交叉形式；在结手术的情形下，我们将得到流形上无穷多个奇异结构。

定理*4.1*的证明。**步骤（1）**。

考虑两份 Z，并分别从中去除 S_1的一个邻域。我们使用图2所示的映射粘合边界分支，得到一个记作 X 的定向流形（因此， X 是通过沿辛子流形 Z 对两份 S_1进行正规连通和得到的）。于是， X 是单连通的（这可由范坎彭定理以及 $Z - \nu S_1$是单连通这一事实轻易推出），并且具有一个保持定向的自由对合 σ，该对合由两个 Z 块的识别给出。这一构造的思路受（[BSS24，第 2.2]节）的启发。注意，该对合是自由的，因为所选的粘合映射是一个自由对合。

步骤（2）。现在，移除 S_2 和S_2'的邻域，得到一个具有两个微分同胚边界分支的单连通流形（其单连通性由两个曲面的补空间满足的假设可知）。将它们粘合时（再次使用映射

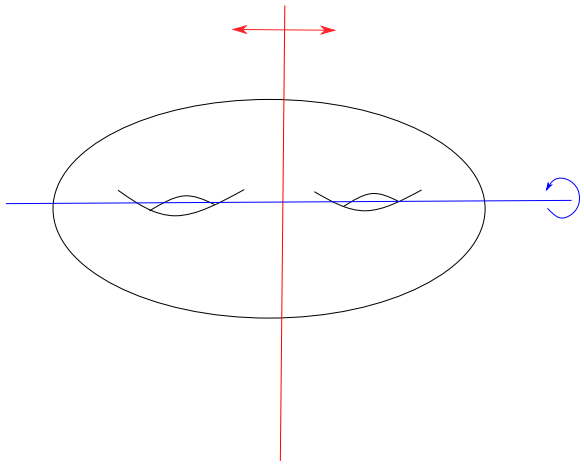

图 2. 粘合由 $S \times S^1$ 参数化边界的两个流形时，其中 S 是一个曲面，我们始终使用如下映射：先沿红色平面反射，再绕 S 上的蓝色轴旋转 π 度，并在 S^1 上取恒等映射。

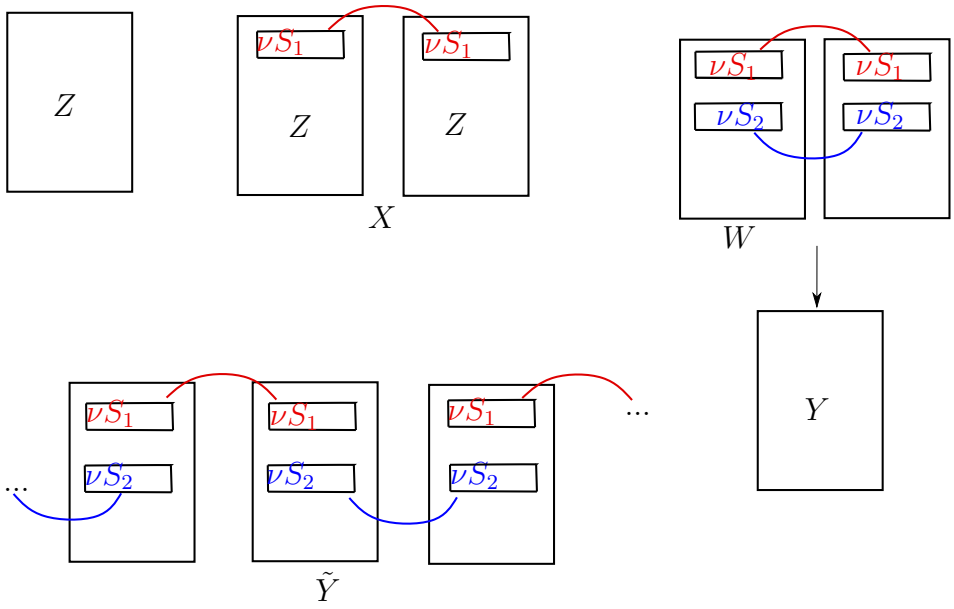

图 3. 流形 Z、 X、 W、 Y 和 Y 的示意图。

见图 2），将得到一个流形 W，其基本群同构于 $\mathbb{Z}$:

引理 4.3。 设 X 是一个具有两个边界分支 M_1 和 M_2的单连通流形，并设 $\phi: M_1 \to M_2$ 是一个反定向微分同胚，其中每个 M_i 都继承自X的定向。通过 ϕ 粘合边界分支，将得到一个闭的定向流形 W，其基本群为无限循环群。生成元是环路 s，它提升为一条曲线 $\tilde{s}$，连接 M_1 中的一点与 M_2中的一点。

证明。 在 W中，M_1 与 M_2 被识别，因此我们将它们的像称为 $M \subset W$。我们对一个部分应用范坎彭定理，该部分 $A \subset W$由 s 的一个邻域与 M的一个闭领圈之并给出；另一个部分 B则由该领圈补空间的闭包给出。于是 B 是单连通的，而 A 与 $M \vee S^1$同伦等价。特别地，$\pi_1(A) \cong \mathbb{Z} * \pi_1(M)$。交集 $A \cap B$ 由 M 的两条推开曲线组成，它们由 s（的一段子路径）连接；其基本群将消去 $\pi_1(A)$中 $\pi_1(M)$的贡献 $* \pi_1(B)$。□

这个引理还告诉我们，$\pi_1(W)$的一个生成元是一条环路，它在第一个块中连接 S_1 和 S_2，在第二个块中连接 S_1' 和 S_2'。

之前描述的对合 σ 在粘合后仍可延拓，因此 W也承认一个保定向自由对合，我们仍记作 σ。

注记 4.4。 流形 W 具有辛结构，因为它由 Z构造而成；后者具有辛结构 ω，其构造方式是沿辛子流形进行正规连通和。注意，粘合映射必须由曲面 S_1 和 S_1'之间的辛同胚诱导，正如 [Gom95]中所述。现在，图 2 所示的映射是 S_1 与 $-S_1'$ 之间的微分同胚（因为它反转定向），因此，为了使 $-S_1'$ 成为 Z'中的辛曲面，我们必须赋予 Z' 辛结构 $-\omega$。

由于 W 是辛的，当 $b_2^+(W) > 1$时，W 的 Seiberg-Witten 不变量非零。注意，根据构造，并且由于$b_1(W) = 1$，我们有

$$\chi(W) = b_2^+(W) + b_2^-(W) \geq 2\chi(Z) = 2(2 + b_2^+(Z) + b_2^-(Z)),$$

（在不等式中，我们利用了 S_1 和 S_2 不可能是球面，因为它们的自交数为零且 $b_2^+(Z) > 1$），并且由

$$\sigma(W) = b_2^+(W) - b_2^-(W) = 2\sigma(Z) = 2(b_2^+(Z) - b_2^-(Z)),$$

容易推得，$b_2^+(W) > 1$ 始终成立。

步骤（3）。令 Y 表示 W 关于对合 σ的商空间。下面将说明，其基本群同构于无限二面体群。

引理 *4.5. </style}*流形 $Y = W/\sigma$ 的基本群同构于无限二面体群。

证明。只需证明，在 W的万有覆盖上存在一个自由且保持定向的 D_∞作用，使得关于此作用的商空间是流形 Y。

图4是其示意图：的万有覆盖由无穷多个块对 组成，并且我们按照红线和蓝线所示，沿每个块中的曲面进行正规连通和。注意，每一步我们都取两个互不相交的单连通流形，并粘合它们的连通边界，因此所得结果将是单连通的。

我们有一个由平移两个块给出的自由 $\mathbb{Z}$ 作用（将此平移记为 τ），以及一个自由 $\mathbb{Z}_2$ 作用，它是步骤 (1) 中所考虑的对合 σ 的扩张（当然，它是否自由取决于曲面的粘合映射的选择）。
于是我们看到关系 $\sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$成立，因此由这两个作用生成的群是 D_∞。
□

备注 4.6。为了构造带有对合 σ 的流形 W，使得 $\pi_1(W/\sigma) = D_\infty$，我们仅使用了以下事实：$\pi_1(Z - (S_1 \cup S_2)) = 1$。稍后，我们将对 Z 的异态副本 Z_k 和 Z_J 进行相同的构造；根据假设，它们都满足关于曲面补集的相同条件。因此，以同样的方式，我们得到分别与它们相关联的流形 Y_k 和 Y_J，其基本群同构于 D_∞。

步骤（4）。本节将讨论如何构造一族具有与 Y 相同等变交叉形式的两两不同胚的流形。如定理 4.1 所述，我们将根据用于生成 Z 的异态副本的手术类型，区分两种情况。

环面手术（使用定理 1）的假设4.1）。假设我们可以通过在零同调环面 $T \subset Z - (S_1 \cup S_2)$ 上进行环面手术，构造出 Z 的异态副本 Z_k，并且对于某条曲线 λ，流形 $Z_{T,\ \lambda}(0)$ 的 Seiberg-Witten 不变量非零。于是，我们可以在双重覆盖 W 的两个块中分别（等变地）进行相同的环面手术，其中 Y（回想一下，W 的 Seiberg-Witten 不变量非零）。将手术后的双重覆盖记作 W_k，并注意到它们仍具有无限循环基本群，

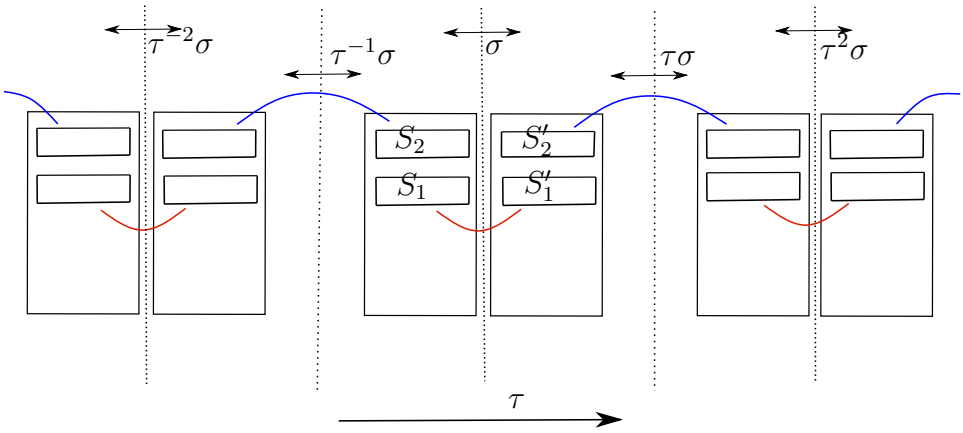

图 4. Y的万有覆盖。我们移除每个块中曲面的邻域，并按照红线和蓝线识别边界。每个群元素都通过恒等映射将 $Z-(\nu S_1\cup\nu S_2)$的一份映射到另一份，并根据 D_∞ 作用对它们进行置换。因此，二阶元素在示意图中沿虚线作“反射”，而$\mathbb{Z}$子群通过平移作用。

再次根据定理 4.1 的假设以及引理 4.3。
每个 W_k 都有一个对合，其商空间是流形 Y_k，根据引理 D_∞ 4.5 和备注4.6，其基本群同构于。

现在我们说明这一过程会改变 W_k的 Seiberg-Witten 不变量。注意， W_k 是通过对 $Z\#_{S_1,S_2}Z_k$中的零调和环面 T 进行 $1/k$-手术得到的，并且通过在 $W=Z\#_{S_1,S_2}Z$中进行两次环面手术得到。
令 s 为与 W上的辛结构相关联的基本类。然后，应用等式（2），

$$SW_{W_k}(s_{1/k})=SW_{Z\#_{S_1,S_2}Z_k}(s)+k\sum_i SW_{Z_{T,\lambda}(0)\#_{S_1,S_2}Z_k}(s_0+2i[T_0]).$$

注意，在公式中我们用到了 T 是零调的这一事实，以及 $T_{1/k}$。
我们还可以进一步简化这个公式：根据定理4.1的假设， T_0 存在一个自交数为零的对偶环面，因此我们可以使用 [FPS07的推论 2]来推知，族 $\{s_0+2i[T_0]\}$ 中至多有一个基本类。再次使用等式（2），得到（我们从记号中省略 T、 λ和 S_1、 S_2）

$SW_{W_k}(s_{1/k}) = SW_{Z\#Z}(s)+kSW_{Z(0)\#Z}(s_0)+kSW_{Z\#Z(0)}(s'_0)+k^2SW_{Z(0)\#Z(0)}(s_{0,0})$,

且首项$SW_{Z(0)\#_{s_1,\ s_2}Z(0)}(s_{0,\ 0})$不为零，因为 $Z(0)\#_{s_1,\ s_2}Z(0)$是辛的（根据假设， $Z(0)$是辛的，而$s_{0,\ 0}$ 是典范类）。这足以得出结论：族 $\{W_k\}$包含无穷多个不同胚的流形。

由此可知，流形 Y_k 将彼此不同胚，可通过其双重覆盖加以区分 W_k （由引理 4.5， $\pi_1(W_k) = \mathbb{Z}$，因此 W_k是与唯一的 $\mathbb{Z} \triangleleft D_\infty$ 指数为 2的子群对应的双重覆盖，见第 2.5节）。现在我们将验证等变交叉形式保持不变。

我们已在图 Y 4中描述了 的万有覆盖。注意，在万有覆盖上对 Y （以获得 Y_k）进行非 Luttinger 环面手术的效果，是将每个带有 Z 块替换为一个 Z_k 。

显然，只要进行手术的零同调环面不与 Y的基˜中其他代表相交，此操作就不会改变 H_2（Y）的等变交叉形式。我们总能通过手术过程实现这一点。记 T 为该零同调环面，记 Σ为任意其他曲面。代数上有$\Sigma \cdot T = 0$ ，我们希望在几何上实现这一点。给定一对正、负交点 p_+ 和 p_-，用一条路径连接它们，该路径位于 T中，且除端点外与 Σ 不相交。我们可以切除包含 p_+ 和 p_-的小圆盘，并沿着该路径将一个圆柱粘到 Σ 上。这个过程成对消去交点，所得结果是一个与 Σ 属于同一同调类的可定向流形。

这就完成了定理第一部分的证明4.1。

注 4.7. 我们证明了通过环面手术构造的流形 Y_k 具有相同的等变交叉形式；然而，我们无法断言 Postnikov k-不变量保持不变。这将意味着这些流形 Y_k 同胚，但彼此不微分同胚。如果等变交叉形式为 $H(I\pi) \oplus \lambda$，则无需考虑 k-不变量，正如 [HKPR25，推论 1.12] 中所述。值得注意的是，基本群为 D_∞ 的流形的 π_2 总是稳定同构于 $I\pi$ 与一个自由 π_1-模的直和，见 [Ham09，定理 4.2]（注意 $H_4(D_\infty;\mathbb{Z}) = 0$）。

结手术（使用定理 2 中的假设 4.1）这里我们假设存在一个嵌入环面 $T \subset Z-(S_1 \cup S_2)$，使得$\pi_1(Z-(S_1 \cup S_2 \cup T))=1$。注意，假设 $\pi_1(Z-T)=1$蕴含存在一个曲面 T^*与 T对偶。所谓对偶曲面，是指它们相交于一点，且与 $H_2(Z)$的一组基中的其他元素不相交。回想一下，根据假设， T 的自交数为零。

因此，我们可以对 T 进行结手术，以改变流形 Z的 Seiberg-Witten 不变量，并得到一族奇异流形 Z_J，其中 J 表示手术中使用的结。注意， Z_J 仍然是单连通的。采用与环面手术情形类似的构造，我们得到流形 W_J ，它们具有不同的 Seiberg-Witten 不变量和无限循环基本群，并且带有一个对合。对该对合取商，得到具有 D_∞ 基本群的流形 Y_J。

注记 4.8。 如果手术中使用的结 J 是纤维化的，且环面 T 是辛嵌入的，那么 W_J 也具有辛结构[FS98]。

手术对 Z 同调的影响是将 T^* 替换为另一曲面，该曲面由穿孔后的 T^* 与结 J 的 Seifert 曲面粘合而成，其中 J 是手术中使用的结。将这个新曲面记为 T_J^*。此外，注意到 T的一个平移副本在 Z_J中仍然存在，我们仍将其记为 T。于是， T与 T_J^*在 Z_J中互为对偶。此外，Y的万有覆盖受到的影响是，在每个块中用 T_J^*替换 T^*。

为了验证这一过程不会改变等变交形式，我们将说明：沿 S_1 或 S_2 作正规连通和，将这些块彼此粘合时，我们只会在同调中产生仍不与 T 和 T^* 相交的曲面，因此它们在 Y 的万有覆盖中仍然互为对偶。
记 $Z^k_{S_1,S_2}:=Z\#_S \ldots \#_S Z$ 为沿 S_1 和 S_2 交替粘合 k 块所得的流形（如图 4 中的弧所示），其中 S 表示两个曲面中的任意一个。考虑分解 $Z^{k+1}_{S_1,S_2}=Z^k_{S_1,S_2}\cup_S Z$ 对应的梅耶–维托里斯列：

$$0 \to H_2(S\times\mu) \to H_2(Z^k_{S_1,S_2}-\nu(S)) \oplus H_2(Z-\nu(S)) \xrightarrow{f} \tag{5}$$

$$\to H_2(Z^k_{S_1,S_2}\#_S Z) \xrightarrow{g} H_1(S\times\mu) \to 0,$$

其中 μ 是曲面 S 的子午线，我们沿其将两个块粘合起来。这里我们用到了 $H_3(Z^k_{S_1,S_2}\#_S Z)=0$ （这由下式推出

$H_1(Z^k_{S_1,\ S_2}\#_S Z) = 0$）以及 $H_1(Z^k_{S_1,\ S_2} - \nu S) = 0$。还要记住，根据假设，$[S]^2 = 0$，因此 $\nu(S)$ 与 $S \times D^2$ 等同。再次运用 Mayer–Vietoris 论证，我们可以看到

$$H_2(Z^k_{S_1,S_2} - \nu(S)) = (H_2(Z^k_{S_1,S_2})/\langle S^* \rangle) \bigoplus_i (\gamma_i \times \mu),$$

其中 γ_i 是 $H_1(S)$的生成元。

由方程（From Equation (5)）可知，当将第（$k+1$）个 Z 块粘合到 $Z^k_{S_1,\ S_2}$时，我们在同调中引入了新的元素，具体如下：

- 形如 $\gamma_i \times \mu$ 的曲面，其中 γ_i 是 $H_1(S)$的生成元（由映射 f 在（5）中给出），
- 形如 $F_{\gamma_i} \cup_{\gamma_i} F'_{\gamma_i}$ 的曲面，其中 γ_i是 $H_1(S)$的生成元，并且 $\partial F_{\gamma_i} = \gamma_i$ （这些曲面经映射 $H_1(S \times \mu)$映到 g 在（5）中给出的生成元）。根据定理 F_{γ_i} 4.1陈述中的假设，我们可以选择与结手术环面及其对偶不相交。。

由此我们推得，T 和 T^*_J 在 Y的万有覆盖中仍互为对偶；对于它们在 D_∞-作用下的平移副本，情况也相同。因此，T 和 T^*_J 在Y_J的万有覆盖中也互为对偶，所以我们可以在 Y和 Y_J的等变交形式之间找到一个同构，将有序对（T，T^*）映为（T，T^*_J）（其在 D_∞ 作用下的像也同样如此），并保持其他所有内容不变。

根据定理 2.3，流形 Y_J 将与 Y 同胚，如果手术后保留了 Postnikov k-不变量。

给定任意结 J，存在一个从 $(S^3 - J)$到$(S^3 - U)$ (其中 U 表示平凡结)的度为一的映射，该映射将 J 的 Seifert 曲面压缩成一个圆盘 [BBRW16]。此映射可延拓为一个映射 F，从 Y_J 到Y。如果此映射在相应的 Postnikov 2-逼近之间诱导出同伦等价，那么 k 不变量便得以保留。为此，我们只需验证 F 在 Y_J 与 Y的前两个同伦群之间诱导出同构。这是因为：

- 我们可以找到 Y的基本群生成元，使其与经过手术的环面不相交，并且
- 通过将 $\pi_2(Y)$与其万有覆盖的第二同调群等同起来，我们看到 F将 T^*_J映射到 T^*（对其在 D_∞ 作用下的像也同样如此），而其他部分保持不变，因此 F 在 $\pi_2(Y_J)$ 与$\pi_2(Y)$之间诱导出同构（相应的等变交叉形式也同构）。

这就完成了定理4.1的证明。 □

5. 定理 1.1 的证明

现在我们来证明定理1.1。我们在此将其重新表述如下，同时也包括定理1.2。

定理 5.1. 存在无穷多个族的不可约、彼此同胚但两两不微分同胚的非自旋流形 $\{Y_{m,J}\}$，其具有 $m \geq 6$，且 $\{Y'_{m,J}\}$，具有 $m \geq 5$，基本群同构于 D_∞。此外，$b_2^+(Y_{m,J}) = b_2^-(Y_{m,J}) = 2m+1$，而 $b_2^+(Y'_{m,J}) = b_2^-(Y'_{m,J}) = 2m+2$。

与 $\mathbb{Z} \lhd D_\infty$ 相关的双重覆盖分别是不可约流形 $\{W_{m,J}\}$，它们与 $(S^1 \times S^3)\#(4m+4)(\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2)$ 同胚但两两不微分同胚；以及 $\{W'_{m,J}\}$，它们与 $(S^1 \times S^3)\#(4m+6)(\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2)$ 同胚但两两不微分同胚。

证明。 我们将 Baykur-Hamada 流形作为输入，应用定理 4.1 (2) Z_m 中定理 3.1所述的构造。
我们可以通过两种方式进行构造：

(1) 当 $m \geq 6$时，我们选取互不相交地嵌入的拉格朗日环面 T_1，T_2，T_3 如推论 3.7所述。令 $S_1 = T_1$，$S_2 = T_2$，并使用 T_3进行结手术。(2) 当 $m \geq 5$ 时，我们使用第 2 节 Σ中定义的亏格为 3.3的曲面 S_1，令 $S_2 = T_1$，并使用 T_2 进行结手术，其中 T_1 和 T_2 如推论 3.7所述。

上述所有曲面自交数均为零，并且都有对偶曲面。例如，所有环面的自交数均为零，因为它们是拉格朗日的；其对偶曲面见第 3.3(2) 节，而 Σ 的对偶曲面由纤维化 整数群$_m$的纤维给出。此外，我们可以对辛结构作微扰，使这些环面成为辛曲面。

我们验证定理 4.1 (2) 的假设均得到满足：根据推论 3.8，Z_m、$_J$ 中 S_1 和 S_2 曲面的补集是单连通的。此外，根据引理 3.6，我们有 $K \cup B \cup (C - \Sigma)$ 是单连通的；由于 T_1、T_2 和 T_2^* 包含于其补空间中，因此可推得，Σ 和 T_1 中的每条曲线都围成一个与 T_2 和 T_2^* 不相交、且仅沿边界与 $\Sigma \cup T_1$ 相交的曲面（同样地，T_1 和 T_2 中的曲线围成与 T_3 和 T_3^* 不相交的曲面）。

因此，我们可以应用定理 4.1。在第一种情况下，我们将奇异族记为 $Y_{m,\ J}$，其双重覆盖记为 $W_{m,\ J}$；在第二种情况下，则将它们记为 $Y'_{m,\ J}$和 $W'_{m,\ J}$。注意，$Y_{m,\ J}$的奇异性以及

$Y'_{m,\ J}$可由 $W_{m,\ J}$和 $W'_{m,\ J}$的 Seiberg-Witten 不变量检测。

接下来，我们可以轻松计算这些流形的拓扑不变量。对于 Y_m：由于去除环面并沿三维流形粘合不会改变欧拉示性数，我们首先看到 $\chi(W_m)$ $=2\chi(Z_m) = 2(4m+4)$（回想一下， Z_m 与 $(2m+1)(\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2)$ 同胚，详见第 3.3 节）。由于 $b_1(W_m) = 1$ 且 $\sigma(W_m) = 0$（事实上，W_m 与两个 Z_m 的无交并余边界等价），我们得到$b_2^+(W_m) = b_2^-(W_m) = 4m + 4.$

由欧拉示性数和符号数的乘法性，$\chi(Y_m) = \frac{1}{2}\chi(W_m) = \chi(Z_m)$，且 $\sigma(Y_m)$ $= \frac{1}{2}\sigma(W_m) = 0$。由于基本群为 D_∞ 的流形具有 $b_1 = 0$，我们得到

$$b_2^+(Y_m) = b_2^-(Y_m) = 2m + 1.$$

对于 W'_m 和 Y'_m，唯一的区别是，移除一个截面时，欧拉示性数增加 2。因此，类似的计算表明 $b_2^+(W'_m) = b_2^-(W'_m) = 4m + 6$，并且

$$b_2^+(Y'_m) = b_2^-(Y'_m) = 2m + 2.$$

由于条件 $b_2 - |\sigma| \geq 6$ 在 $W_{m,\ J}$ 和 $W'_{m,\ J}$ 中成立，它们的等变交叉形式由整数系数扩张而来（[HT97],定理 2）。根据无限循环基本群流形的同胚分类 [FQ14], ，我们推知它们同胚于 $S^1 \times S^3$ 与一个具有奇交叉形式的单连通流形的连通和（事实上，根据第 3.1 节（1），我们可以在 $W_{m,\ J}$ 中找到一个自交数为奇数的曲面），这足以确定这些流形的同胚类型。

最后，我们论证这些例子是不可约的。事实上， Z_m 是不可约辛流形，$Z_{m也是如此,\ J}$只要结手术所用的结是纤维化的，如第3.4节所示。因此，将两个$Z_{m副本J}$ 通过正规连通和粘合后，根据 [Ush06]，我们得到一个极小辛流形。由于它也是单连通的，根据 [HK06]，它是不可约的。归纳可知，只要所得流形是单连通的，将有限个Z_m 副本通过正规连通和粘合，就会得到一个不可约流形。

因此，一个嵌入的 S^3 于 $Y_{m,\ J}$ 或 $W_{m,\ J}$ 提升到万有覆盖 $\tilde{Y}_{m,\ J}$如图4所示。由紧致性可知，该提升包含在有限个（粘合的） Z_m副本中；我们已经证明它是不可约的。证明至此完成。 □

定理*1.1*的证明。 定理 5.1 描述了定理 1.1中符号数为零的例子。通过吹起和改变定向，我们可以得到所有其他例子。通过对流形 $W_{m,\ J}$ 吹起并改变定向，可以区分它们的微分同胚类型。 □

6. 具有等距等变交叉形式的流形

下面简要说明如何应用定理 4.1 情形（1）来构造一个具有相同等变交叉形式的不同胚 4-流形无限族。正如前文所述，在这种情况下，我们无法断言这些流形同胚；不过，我们有如下结论：

定理 6.1. 存在无限多个两两不同胚的非自旋流形族 $\{Y_{5,k}\}$ ，其具有 $\pi_1(Y_{5,k}) \cong D_\infty$，且其等变交叉形式等距，并且$b_2^+(Y_{5,k}) = b_2^-(Y_{5,k}) = 11$。

证明。我们以 Baykur-Hamada 流形 Z_5 为输入，应用定理 4.1 的情形（1），并取 $S_1 = T_1$ 和 $S_2 = T_2$ 如推论 3.7 所示，另见图 1。零同调环面 T 在定义 3.3 中定义，而流形 $(Z_5)_T(0)$ 是辛流形，因为 Z_5 是通过对其进行 Luttinger 手术得到的。此外， $T_0 \subset (Z_5)_T(0)$ 具有一个自交数为零的对偶环面。于是，由推论 3.8 可知，定理 4.1 的假设均得到满足，因此我们得到一个由$Y_{5、k}$ 组成的不同胚流形族，它们具有相同的等变交叉形式。与第 5 节中相同的拓扑计算表明

$$b_2^+(Y_{5,k}) = b_2^-(Y_{5,k}) = 11. \qquad \square$$

这一构造的优点是，我们只需要两个具有单连通补空间的环面。因此，无需增大 Z_m 的纤维的亏格来得到第三个环面；参见第5节。由此，我们得到的例子比定理1.1中的例子更小。

当然，你可以进行 blow-up 并改变定向，以得到具有 $b_2^+ \neq b_2^-$ 的族。

参考文献

[Akh07] Anar Akhmedov. 奇异光滑结构的构造。*Topologyand its Applications*, 154(6):1134–1140, 2007.[AP10] Anar Akhmedov and B Doug Park. 带奇数符号数的小型 4-流形上的奇异光滑结构。《数学新进展》, 181(3):577– 603, 2010.[BBRW16] Michel Boileau, Steven Boyer, Dale Rolfsen, and Shicheng C Wang. 纽结的一重支配。*Illinois Journal of Mathematics*, 60(1):117– 139, 2016.

[BH23] R Inanc Baykur and Noriyuki Hamada. 符号数为零的奇异 4-流形。arXiv 预印本 arXiv:2305.10908, 2023.[BK08] Scott Baldridge and Paul A Kirk. 一个与 $CP^2\#3CP^2$ 同胚但不同胚的辛流形。《Geometry & Topology》, 12(2):919– 940, 2008.[BSS24] R Inanc Baykur, Andras I Stipsicz, and Zoltan Szabo. 有限循环基本群的四维流形上的光滑结构。arXiv 预印本 arXiv:2406.09007, 2024.[Don87] Simon K Donaldson. 无理性与 h-配边猜想。《微分几何杂志》, 26(1):141–168, 1987.[FPS07] Ronald Fintushel, B Doug Park, and Ronald J Stern. 小型 4-流形的逆向工程。《代数与几何拓扑》, 7(4):2103– 2116, 2007.[FQ14] Michael H Freedman and Frank Quinn. 四维流形拓扑，第39卷。普林斯顿大学出版社，2014.[FS98] Ronald Fintushel and Ronald J Stern. 纽结、链环与四维流形。《数学新进展》, 134(2):363, 1998.[FS06] Ronald Fintushel and Ronald J Stern. 关于四维流形的六讲。arXiv 预印本 math/0610700, 2006.[Gom95] Robert E Gompf. 辛流形的一种新构造。《数学年刊》, 页码 527–595, 1995.[GS99] Robert E Gompf and András Stipsicz. 4-流形与 Kirby 微积分。数学研究生教材第20卷。American Mathematical Soc., 1999.[Ham09] Ian Hambleton. 交叉形式、基本群与4-流形。sign (M), 11:8, 2009.[HK93] Ian Hambleton and Matthias Kreck. 消去、椭圆曲面与某些四维流形的拓扑。《Journal für die reine und angewandte Mathematik》, 444:79–100, 1993.[HK06] MJD Hamilton and D Kotschick. 辛四维流形的极小性与不可约性。《国际数学研究通知》, 2006(9):35032–35032, 2006.[HKPR25] Jonathan Hillman, Daniel Kasprowski, Mark Powell, and Arunima Ray. 具有三维流形基本群的4-流形的同伦分类。arXiv 预印本 arXiv:2508.07504, 2025.[HT97] Ian Hambleton and Peter Teichner. 关于 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ 的一个非扩张厄米形式。《数学手稿》, 93(4):435–442, 1997.[LLP23] Adam Simon Levine, Tye Lidman, and Lisa Piccirillo. 闭的奇异四维流形的新构造与不变量。arXiv 预印本 arXiv:2307.08130, 2023.[Lut95] Karl Murad Luttinger. $\mathbb{R}^4$ 中的拉格朗日环面。《微分几何杂志》, 42(2):220–228, 1995.[MMS97] John W Morgan, Tomasz S Mrowka, and Zoltán Szabó. 沿 T^3 的 Seiberg-Witten 不变量乘积公式。《数学研究快报》, 4(6):915–929, 1997.[SSa] András I. Stipsicz and Zoltán Szabó. 具有奇异光滑结构的定号四维流形。arXiv:2310.16156。

[SSb] András I. Stipsicz 和 Zoltán Szabó。具有非平凡基本群的奇异定号四维流形。arXiv:2308.08388。[Tau94] Clifford Henry Taubes。Seiberg-Witten 不变量与辛形式。《数学研究快报》，1(6):809–822，1994。[Tor11] Rafael Torres。具有阿贝尔基本群的自旋辛四维流形的地理学。《澳大利亚数学会杂志》，91(2):207–218，2011。[Tor14] Rafael Torres。具有阿贝尔基本群的不可约非自旋辛4-流形的地理学与植物学。《格拉斯哥数学杂志》，56(2):261–281，2014。[Ush06] Michael Usher。极小性与辛和。《国际数学研究通知》，2006:49857，2006。[Wit94] Edward Witten。单极子与四维流形。《数学研究快报》，1(6):769–796，1994。

电子邮箱地址：simo@renyi.hu

[1]厄特沃什·罗兰大学，布达佩斯，匈牙利[2]HUN-REN 阿尔弗雷德·雷尼数学研究所，布达佩斯，匈牙利