arXiv:2603.17071v1 [quant-ph] 17 Mar 2026

利用模拟和数字量子模拟器中的短程相互作用生成多体贝尔关联

Marcin Płodzień*Qilimanjaro Quantum Tech，Carrer de Veneçuela 74，08019 巴塞罗那，西班牙

Jan Chwedeńczuk华沙大学物理学院，ulica Pasteura 5，02-093 华沙，波兰

量子资源（如多体纠缠或贝尔关联）的动力学生成可通过单轴扭曲（OAT）动力学实现，而这需要全连接耦合。然而，目前的数字和模拟量子模拟平台原生提供的是短程或幂律耦合，其衰减过快，无法满足这一目的。我们证明，将两种自旋-$\frac{1}{2}$ 链模型——交错最近邻 XXX 链和长程 XXZ 链——投影到对称扇区后，会产生有效的单轴扭转非线性。我们展示，这些动力学能够生成适用于精密测量的自旋压缩态和 Greenberger-Horne-Zeilinger 相干性，从而确保违反多体贝尔不等式。我们通过与精确动力学进行比较，验证了这种映射的准确性，并证明生成的关联可通过单个探针量子比特读出。由此产生的动力学可使用模拟和数字量子模拟器进行模拟。

引言。可编程量子模拟器如今能够对大型相互作用自旋系统进行精确控制，并实现高保真操作。然而，生成强纠缠态或贝尔关联态仍然颇具挑战，因为这些平台原生实现的是短程或幂律相互作用，而非集体全连接耦合。在此背景下，单轴扭转（OAT）模型 [1] 可作为参照。它被用于生成一系列纠缠态。早期，该模型会产生适用于量子计量的自旋压缩态，从而在干涉测量传感中实现量子增强精度 [1–3]。随后会形成过度压缩的非高斯态，最终在最优时刻产生格林伯格–霍恩–蔡林格（GHZ）态 [1, 4, 5]。

我们提出如下问题：现代架构所具有的短程相互作用，是否是阻碍宏观纠缠和非局域关联生成的根本缺陷？我们证明，通过原生自旋链动力学可实现的有效长程相互作用，能够在薛定谔–沃尔夫变换（SWT）将系统映射到对称 Dicke 流形时，触及整个纠缠态层级。我们确定了有限磁振子能隙隔离零动量集体模式所需的条件。跨越能隙的虚激发会产生有效的 Lipkin–Meshkov–Glick（LMG）相互作用 [6], ，与单轴扭转动力学所具有的相互作用等效。

更定量地，我们将短程或幂律相互作用所产生的资源和相关性，与理想单轴扭转动力学，特别是 GHZ态 [5, 7–18] 的结果进行比较。后者的特征是两个“宏观”不同组分之间具有最大的量子相干性，我们将其称为“GHZ相干性”。它是与任何局域实在模型 [19–22] 不相容的相关性的来源。

我们将这一技术应用于两种微观模型，这两种模型均可在基于门的（数字）量子处理器和模拟量子模拟器中实现，分别是具有最近邻相互作用的交错 XXX 链和幂律 XXZ 模型。在这两种情况下，我们证明有效的长程非线性会产生多体贝尔关联。经过较长时间后，系统会违反一个多体贝尔不等式 [23, 24]。此外，我们还表明，无需进行门优化，仅凭量子电路中的最近邻相互作用即可生成具有计量学用途的自旋压缩态，这与近期基于变分量子电路的方案 [25–28]不同。我们通过展示精确晶格动力学——连续时间模拟演化或 Trotter 化数字电路——何时能与有效的集体描述高度吻合，讨论了自旋波理论（SWT）的适用范围。此外，我们证明，通过将自旋链与单个探针量子比特集体耦合，可以在实验中验证由此产生的关联 [29]。

有效哈密顿量——我们从一个 N 粒子自旋 $\frac{1}{2}$ 链的一般哈密顿量开始

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j=1}^{N} J(r_{ij})\hat{\vec{S}}_i\hat{\vec{S}}_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\alpha} h_j^{\alpha}\hat{S}_j^{\alpha}, \qquad (1)$$

其中，第一个求和遍历所有配对 $i \neq j$ 和 $\alpha = x, y, z$。双体耦合依赖于距离，即 $r_{ij} = |i-j|$，而第 i 个自旋的算符 $\hat{}$ 为 S_i^{α}。为进行自旋波理论（SWT），我们首先引入量 f 的~离散傅里叶变换，$f_{\alpha}(q) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} f_j^{\alpha} e^{iqj}$。转换到动量空间很重要，因为 q 区分了 $\hat{}$ H_0 谱中低能（q =0）的完全对称部分与由能量表征的单磁振子激发

* marcin.plodzien@qilimanjaro.tech

$\varepsilon(q) = \frac{1}{2}[\tilde{J}(0) - \tilde{J}(q)]$, 其中 $\tilde{J}(q) = \sum_{r=1}^{N-1} J(r)\, e^{iqr}$。磁振子能隙为 $\Delta = \min_{q\neq 0} \varepsilon(q)$。如果耦合 h_j^α 较小，就可以应用自旋波理论，因为能隙以上的虚激发由算符 V 驱动。由此得到有效哈密顿量

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\alpha,\beta} \chi_{\alpha\beta}\, \hat{S}_\alpha \hat{S}_\beta, \tag{2}$$

其中集体自旋算符为 $\hat{S}_\alpha = \sum_i \hat{S}_i^\alpha$。只有耦合张量的对称部分有贡献 [30], 即,

$$\chi_{\alpha\beta} = \sum_q \frac{\tilde{h}_\alpha(q)\, \tilde{h}_\beta(-q)}{N(N-1)\varepsilon(q)}. \tag{3}$$

这一结果可直接应用于哈密顿量（1）中一些最著名的子类。

首先，我们聚焦于交错 XXX 模型

$$\hat{H} = -J_0 \sum_{i=1}^{N} \hat{\vec{S}}_i \hat{\vec{S}}_{i+1} - h_z \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \hat{S}_i^z, \tag{4}$$

其中我们始终假设采用周期性边界条件。$\hat{H}_0$ 的单磁振子色散关系为 $\varepsilon(q) = J_0(1-\cos q)$，相应的能隙为$\Delta = \varepsilon(\pi) = 2J_0$。交错场的傅里叶变换只有一个分量 $\tilde{h}_z(q) = -h_z\sqrt{N}\,\delta_{q,\,\pi}$，有效集体模型（式（2）亍化简为 OAT 哈密顿量 [30–33]

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \chi \hat{S}_z^2, \quad \chi = \frac{h_z^2}{2J_0(N-1)}. \tag{5}$$

另一个例子是典型的长程各向异性海森堡（XXZ）自旋-1/2 模型,

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i\neq j} J(r_{ij}) \left(\hat{\vec{S}}_i \hat{\vec{S}}_j + \delta \hat{S}_i^z \hat{S}_j^z \right), \tag{6}$$

其中 $J(r_{ij}) = J_0 |i-j|^{-\gamma}$ 设定微观耦合尺度（$J_0 > 0$），γ 控制幂律相互作用的作用范围，δ 则参数化易轴各向异性。对于$\gamma \leq 1$，总和 $J(0) = \sum_r J(r)$ 随着N广延增长，因此在热力学极限下每个自旋的能量发散。

解决这一问题的方法是采用 Kac 归一化 [34]: 将 $J(r_{ij}) \to J(r_{ij})/\mathrm{N}_{\gamma,N}$ 其中 $\mathrm{N}_{\gamma,N} = \sum_{j\neq i} J(r_{ij})/J_0$。这样，对于任意 γ，都有 $J(0) = J_0$，因此，式 (9) 中的有效非线性仅包含显式的 Kac 缩放 $\chi \propto 1/(N-1)$; 相互作用范围仅通过保护对称流形的磁振子能隙起作用。该模型在各向同性海森堡极限（$\delta = 0$）与强各向异性伊辛极限（$|\delta| \gg 1$）之间连续变化。

与交错 XXX 链不同，单轴扭转非线性在该模型中是由单体场产生的二阶微扰而 XXZ 模型的二体耦合中则存在破坏对称性的各向异性。因此，例如，可以通过将投影 Π 施加到对称 Dicke 流形上，得到有效的集体哈密顿量

$$\hat{\Pi}\hat{S}_i^z \hat{S}_j^z \hat{\Pi} = \frac{1}{N(N-1)} \left(\hat{S}_z^2 - \frac{N}{4} \right) \hat{\Pi}, \tag{7}$$

这对完全对称的$\hat{}$扇区中的任意一对 $i \neq j$ 均成立。所得哈密顿量 $H_{\text{eff}} = \Pi H \Pi$（略去一个加性常数）为

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -\frac{\sum_{i\neq j} J_{ij}}{2N(N-1)} \left(\hat{S}^2 + \delta \hat{S}_z^2 \right) \hat{\Pi} \tag{8}$$

由于在对称子空间中$\hat{S}^2 = S(S+1)\hat{1}$，我们得到以下表达式

$$\hat{H}_{\text{eff}} \simeq \chi \hat{S}_z^2, \qquad \chi = -\frac{\delta}{2} \frac{\tilde{J}(0)}{N-1}. \tag{9}$$

当磁振子能隙在时间尺度$t \sim 1/|\chi|$ [30]上微扰地抑制泄漏时，集体描述是适用的。由 χ控制的 δ的符号决定了压缩轴，但不影响贝尔关联的产生。公式（9）在对称流形内是精确的，且对 δ的任意取值都成立；然而，当 $\delta \neq 0$时，完整的 XXZ 演化会使系统离开这个子空间。在两个极限情形下，能隙有着不同的物理起源。

当各向异性较小（$|\delta| \ll 1$）时，哈密顿量（6）的主导部分是 SU(2) 不变的，并严格保持对称性。其单磁振子色散 $\varepsilon(q)$ 提供了一个有限能隙，该能隙随相互作用范围增大（γ减小）而增大，从而确保各向异性 $\|\hat{V}\| \propto \delta$ 较小。另一方面，当各向异性较大（$|\delta| \gg 1$）时，主导的伊辛耦合$\hat{H}_0 = -\frac{1+\delta}{2} \sum_{i\neq j} J_{ij} \hat{S}_i^z \hat{S}_j^z$会在铁磁基态之上打开能隙 $\Delta \sim (1+\delta)\tilde{J}(0)$。跨越此能隙的二阶虚自旋翻转过程会产生与公式（9）一致的有效单轴扭转非线性。补充材料中给出了完整推导，其中包括这两个极限情形以及 XXZ 色散关系。

结果。—现在我们将检验自旋波理论的准确性。对于每种情况，初始条件均为由 $\hat{S}_x^{(i)}$ 算符的 $+1/2$ 本征态构成的完全极化乘积态,

$$|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle_x^{\otimes N}. \tag{10}$$

该态将通过精确或近似的对称哈密顿量演化，得到 $|\psi(t)\rangle$。为进行定量比较，我们计算每种情形下 GHZ 相干性的强度，记为$\mathcal{E}_N^{(q)}$。它是密度矩阵 $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$中最远离对角线元素的模平方。该量可作为量子 N量子比特系统中贝尔关联的见证，因为$\mathcal{E}_N^{(q)} \leqslant 2^{-N}$ 是一个 N体贝尔不等式 [8–10, 30],

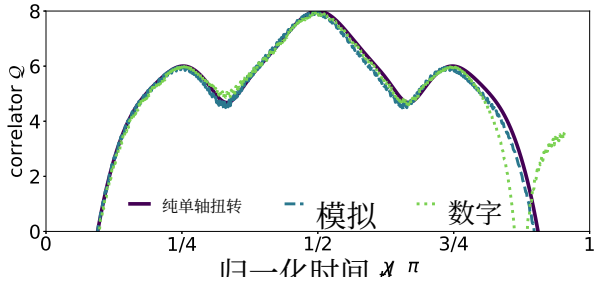

图 1. 交错 XXX 链中 $N = 10$ 个自旋且 $h_z = 0.15$ 时，贝尔关联器 $\mathcal{Q}(t)$ 的时间演化。实线表示集体单轴扭转的结果。虚线表示通过完全对角化得到的 XXX 哈密顿量下的精确模拟演化。点线表示由数字量子电路产生的特罗特化动力学。将时间按有效 OAT 耦合重新缩放后，三条曲线重合。交错场较弱时，所有实现的结果一致，且 $\mathcal{Q}(t)$ 中出现显著峰值，表明通过有效的 $\hat{S}_z^2$ 扭转产生了类 GHZ 关联。

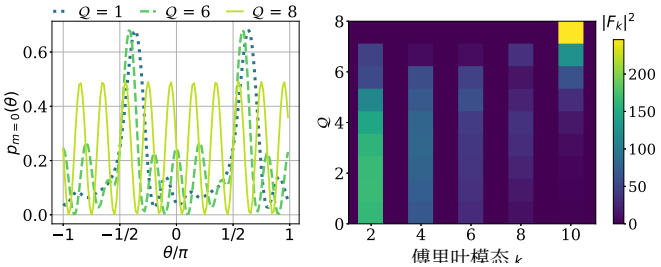

图 2. 交错 XXX 模型（方程式（4））中多体贝尔关联器的探针量子比特认证，其中 $N = 10$, $h_z = 0.1$，并采用周期性边界条件。左图：概率 $p_{m=0}(\theta)$ 随刻入相位 θ的变化，展示了贝尔关联子为 $\mathcal{Q} = 1$、6、8的态。右图：平方傅里叶振幅 $|F_k[p_0]|^2$ 随谐波指标 k的变化。与 Wigner d矩阵的宇称约束一致，只有偶次谐波有贡献。在 $k = N$ 处，GHZ 敏感模随 $\mathcal{Q}$系统性增大。

或者等价地，$\mathcal{Q} = N + \log_2 \mathcal{E}_N^{(q)} \leqslant 0$。因此，$\mathcal{Q} > 0$ 表明存在多体贝尔关联。对于 GHZ态，其值达到最大值 $\mathcal{Q}_{\max} = N - 2$ 。

此外，我们通过在输出态上印刻相位 θ ，估算上述系统的计量学效用，$|\psi_\theta(t)\rangle = e^{-i\theta S_y}|\psi(t)\rangle$。接下来，我们计算布居不平衡概率 p_m $m = \frac{1}{2} n_\uparrow - n_\downarrow$ (θ), 其中() 表示自旋向上态和自旋向下态的自旋数之差。通过测量每个自旋的构型即可得到这一概率。然而，正如我们近期的研究结果所示，[35], 一个与该 N自旋系统相互作用的外部探针量子比特，便能获取关于 $p_m(\theta)$的全部信息。

更具体地说，在我们将链与探针“连接”之前，我们会在以对称 Dicke 态为基底表示的 $|\psi(t)\rangle$ 各分量之间刻入相对相位 θ 。具体而言，我们实施一系列三次旋转

$$|\psi_\theta(t)\rangle = e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{S}_x} e^{-i\theta\hat{S}_z} e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{S}_y} |\psi(t)\rangle. \tag{11}$$

按时间顺序，第一次旋转将动力学协议输出端沿 y 轴排列的类 GHZ 相干性变换到沿 z 的方向，使其对刻入的相位 θ （第二次旋转）最为敏感。最后一次旋转混合各模式，产生依赖于 θ 的信号。随后，将探针量子比特初始化为

$$|\uparrow\rangle_x^{(p)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_z^{(p)} + |\downarrow\rangle_z^{(p)} \right), \tag{12}$$

其中，指标（p）表示探针的自由度。量子比特通过

$$\hat{H}_{\rm int} = \kappa \hat{S}_z \hat{S}_z^{(p)}. \tag{13}$$

复合态（链+探针）按如下方式演化：

$$|\Psi(t,\theta)\rangle = e^{-i\hat{H}_{\rm int}t} \left(|\psi(\theta)\rangle \otimes |\uparrow\rangle_x^{(p)} \right). \tag{14}$$

我们关注的量是探针约化密度矩阵的非对角项

$$a(t,\theta) = \langle\downarrow| \hat{\varrho}_p(t,\theta) |\uparrow\rangle, \tag{15}$$

其中，为简洁起见，我们使用了 $|\uparrow / \downarrow\rangle \equiv |\uparrow / \downarrow\rangle_z^{(p)}$。由于 $\hat{H}_{\rm int}$ 不会耦合 S_z 的不同本征值，因此探针相干性是链的总磁化强度 m 的傅里叶级数，

$$a(t,\theta) = \frac{1}{2} \sum_{m=-N/2}^{N/2} p_m(\theta)\, e^{-im\tau}, \tag{16}$$

其中 $\tau = \kappa t$, $J = N/2$ 是总自旋量子数，p_m （θ）是链处于状态 $|\psi$ （θ） $\rangle$ 时具有总磁化强度 $\hat{S}_z|m\rangle = m|m\rangle$ 的概率。在离散时间网格上对 a （t, θ）进行采样

$$\tau_k = \frac{2\pi k}{N+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{17}$$

可将此关系写成离散傅里叶变换的形式。对其求逆可得

$$p_m(\theta) = \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^{N} a(\tau_k, \theta) e^{i\frac{2\pi k}{N+1}(m+\frac{N}{2})}. \tag{18}$$

总而言之，上述方法利用单探针非对角矩阵元 a，即可获取完整集合 {p_m （θ） }。详细讨论请参见 [35]。

函数 $p_m(\theta)$提供了关于原始态的 Dicke 基矩阵元的信息。记作

$$|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \sum_{m,m'=-J}^{J} \varrho_{mm'} |m\rangle\langle m'|, \tag{19}$$

我们得到，式（18）中的概率等于

$$p_m(\theta) = \sum_{m',m''} d_{mm'} d^*_{mm''} \varrho_{m'm''} \, e^{-i(m''-m')\theta}, \qquad (20)$$

其中 $d_{nm} = d^J_{nm}(\pi/2)$ 是维格纳 d矩阵元，它们源自额外绕 x轴进行的旋转，该旋转出现在方程（14）中。

注意，方程（20）实际上是一个离散傅里叶变换，其系数由密度矩阵元给出。对该关系求逆，即计算$\mathcal{F}^{(-1)}[p_m(\theta)]$，针对某个 m （例如 $m = 0$，对于对称态，它会给出最强信号），并聚焦于对应最高频率的项（当 $m = -m' = N/2$时），即可得到

$$\varrho_{\frac{N}{2},-\frac{N}{2}} = \frac{\mathcal{F}^{-1}[p_0(\theta)]}{N_\theta d^2_{0,\frac{N}{2}}}, \qquad (21)$$

其中 N_θ 是对 θ 进行采样的点数。这样，对单量子比特探针进行测量，随后进行二重离散傅里叶变换（见方程（18）和（21））， 即可获取 GHZ 相干性，进而了解自旋链中贝尔关联的强度。特别是，随着单轴扭转动力学过程中纠缠增强，GHZ 分量开始主导态 $|\psi(t)\rangle$。对 $p_m(\theta)$进行傅里叶变换，可以推断出这种占比的增加；该变换给出以最高频率振荡的项的幅度： $N\theta$。

首先，我们考虑交错最近邻 XXX 模型。实现这类动力学的一种方式是通过连续时间模拟演化，其由式（4）中的哈密顿量生成。另一种方法是采用数字 Trotter 电路。首先，将ˆ拆分 $H_{\rm XXX}$ 为偶数和奇数最近邻层，ˆ ˆ$H_{e/o}$，以及一个交错场层， V。然后，应用二阶铃木–Trotter 分解 [36–38]ˆ$U(\delta t)$ =ˆ$U_V \left[\hat{U}_e \hat{U}_o\right]^2 \hat{U}_V$，其中ˆ $U_{e/o/V}$是相应的演化算符，而 $\delta t = t/n$ 是 Trotter 步长。当 $n \to \infty$时，可恢复精确动力学。

在图 1 中，我们绘出了 $\mathcal{Q}(t)$ 关于 $N = 10$的曲线：红色虚线表示完整模拟演化（4），黑色实线对应裸单轴扭转哈密顿量（5），蓝色点线则对应 Trotter 电路。三条曲线均显示出显著的峰值$\mathcal{Q}$ $\approx \mathcal{Q}_{\max}$，这表明尽管耦合是短程的，交错 XXX 链仍能通过涌现的单轴扭转非线性产生 GHZ 关联。图 2 左图展示了$p_0(\theta)$ 在具有不同$\mathcal{Q}(t)$的状态下的中心磁化扇区。显然，随着$\mathcal{Q}$ 增大，振荡会变得更快。右图展示了平方傅里叶振幅

$|F_k[p_0]|^2$ 随模态指标 k 和$\mathcal{Q}$的变化。与 Wigner d-矩阵施加的宇称约束一致，只出现偶次谐波。 $k = N$处的 GHZ 敏感模随$\mathcal{Q}$单调增大，而所有其他模态的数值都相对较小。这一行为反映了

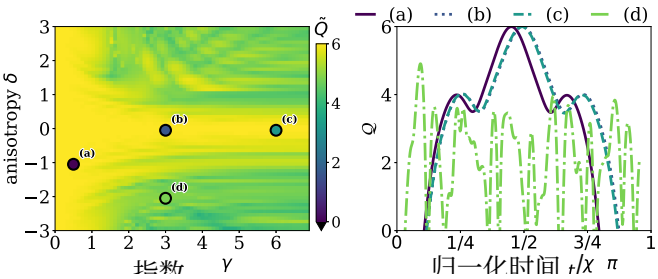

图 3. 方程（ˆ $H_{\rm XXZ}$ 6）所示具有周期性边界条件的长程 XXZ 模型中的贝尔关联。左图：最大贝尔关联器 Q ˜作为指数 和各向异性 γ 的函数。右图：相图中标记为 (a)–(d) 的所选参数对 δ(,t) 对应的 Q() 随时间变化的轨迹。较大的 ˜$\mathcal{Q}$ 表明，使用方程（χ 9）中的耦合将系统 SW 映射到单轴扭转是准确的。

极端 Dicke（即 GHZ）相干性的增长，表明基于探针的协议是一种灵敏且在实验上可行的贝尔关联读出方法。

现在我们转向方程（6）中的长程 XXZ 模型。图 3 概述了贝尔关联对微观参数 γ 和 δ的依赖关系。 ˜左图展示了 $\mathcal{Q}$ $\equiv \max_t \mathcal{Q}(t)$ 在宽广参数点范围 (γ, δ)内扫描的结果。对于标记为 (a)–(d) 的点，右图展示了 $\mathcal{Q}(t)$的完整时间动力学。

在类海森堡区间 $|\delta| \ll 1$ 中，且对于足够长程的相互作用（较小的 γ），对称 Dicke 流形与较高磁振子分支之间的能隙很大。因此，方程（9）中的有效哈密顿量能够准确描述动力学。在该区间内， ˜$\mathcal{Q}$ 在较宽的参数空间范围内都相当显著，并且$\mathcal{Q}(t)$呈现出一个清晰的单峰，类似于 OAT 哈密顿量（5）所产生的情形。随着 γ 增大，相互作用变得更短程，有效˜集体耦合减弱，因此 $\mathcal{Q}$下降。系统从真正的集体区间过渡到更局域的区间，在后者中非局域关联更难产生。对于较大的易轴各向异性 $|\delta| \gg 1$, 系统进入类 Ising 区间，其中有效非线性源于二阶虚过程，并且在扩展的参数窗口内可以再次产生显著的贝尔关联。因此，只要磁振子能隙足够大，能够保护对称流形，且 OAT 耦合 χ足够显著，长程 XXZ 链就会产生强贝尔关联。

多量子比特系统的另一种与超精密计量相关的量子资源，是样本的自旋压缩 [2]。在由集体非线性支配的对称系统中，通常通过单轴扭转动力学产生这种效应：从相干自旋态$|\uparrow\rangle_x^{\otimes N}$ 出发，非线性演化ˆ $H_{\rm eff} = \chi \hat{S}_z^2$ 会使量子不确定性椭圆在垂直于平均自旋的平面内发生剪切，从而将一个方向上的方差压缩至标准量子极限以下，代价是共轭方向上的方差增大 [1]。压缩程度由

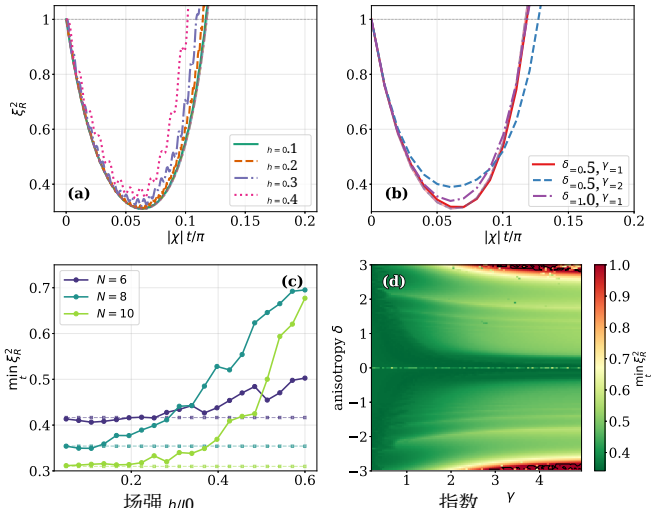

图 4. 微观自旋链的自旋压缩（实线）与有效单轴扭转预测（非实线）的比较。(a) 交错 XXX（$N = 10$）：多个场强 h 下的 $\xi_R^2(t)$。(b) 长程 XXZ（$N = 10$）：代表性参数对 $(\delta,\ \gamma)$ 对应的 $\xi_R^2(t)$。(c) 交错 XXX：不同 N 下的最优压缩 $\min_t \xi_R^2$ 与 h（圆点：自旋链；方块：单轴扭转）。(d) 长程 XXZ（$N = 8$）：$\min_t \xi_R^2$ 的 δ-γ 相图；黑色等高线标示 $\xi_R^2 = 1$。

自旋压缩参数来表征，

$$\xi_R^2 = \frac{N\,(\Delta S_\perp^2)_{\min}}{|\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle|^2}, \tag{22}$$

其中，最小化是在垂直于平均自旋 $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle$ [30]的所有方向上进行的。自旋压缩参数可作为纠缠见证和计量学性能指标，仅通过集体自旋测量即可获取 [4, 39, 40]。数值 $\xi_R^2 < 1$ 可证实纠缠 [41, 42]，并为拉姆齐干涉测量中可达到的相位灵敏度设定界限。

在数字量子处理器上生成自旋压缩态，通常需要对电路参数进行变分优化 [25–28]。然而，对于更大的系统，这种方法的成本会越来越高。另一种方式是通过精心设计的固定门序列实现自旋压缩， [43]。在这里，交错 XXX 链被直接映射为二阶 Trotter 电路。由此得到的确定性最近邻门序列无需变分训练即可产生单轴扭转压缩。对于长程 XXZ 模型，也可以通过模拟量子模拟器中的原生模拟动力学实现相同的物理过程。图 4证实了这一图景。面板 (a) 和 (b) 显示，在完整微观哈密顿量下，$\xi_R^2(t)$与单轴扭转预测（非实线）高度吻合，包括最佳压缩极小值的位置和深度。面板 (c) 显示，$\min_t \xi_R^2$ 在微扰区间内随 h 增大而加深，这与式 (5) 的标度关系一致。面板 (d) 展示了(δ, γ) 平面上的压缩分布：其中 $\xi_R^2 < 1$ 对应的区域与图 3中的贝尔关联相图高度相似，证实这两种特征均源自涌现的单轴扭转动力学。

讨论与结论——尽管缺少显式的全连接耦合，我们已经证明，具有短程相互作用和幂律相互作用的自旋-$\frac{1}{2}$ 链能够产生 GHZ 相干性和显著的多体贝尔关联。通过将系统投影到对称 Dicke 流形上，我们确定了虚磁振子过程在有限能隙两侧发生并产生 Lipkin-Meshkov-Glick 型有效集体扭转的条件。我们在两种情形下展示了这一机制：交错最近邻 XXX 链和长程 XXZ 模型（概要见补充材料中的表格）。在这两种情形下，精确动力学都与有效集体描述高度吻合，并产生最大的贝尔关联器。交错 XXX 方案可直接在数字量子硬件上实现。与此同时，第二种方案所需的长程 XXZ 耦合天然存在于模拟量子平台中，例如超导量子电路、囚禁离子链和里德伯缀饰原子系综。

我们还展示了，这些关联可以通过一个与链集体耦合的探针量子比特来验证。探针的相干性编码了旋转后的多体态的磁化分布。傅里叶分析能够分离出导致贝尔不等式违背的极值 Dicke 相干性。从探针中提取的最高模傅里叶权重，与直接计算得到的贝尔关联器相吻合。在广阔的参数空间范围内，相同的动力学还能产生具有 $\xi_R^2 < 1$ 的、在计量学上有用的自旋压缩。与变分量子电路 [25–28]，不同，这里的自旋压缩不需要经典反馈回路。它源于具有固定门序列或模拟协议的原生哈密顿量演化。

致谢。—M.P. 感谢巴塞罗那超级计算中心通过 Marenostrum 5 向 NNO-2025-3-0004 提供 RES 计算资源，以及 MI-CIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER（欧盟）的支持。本研究得到波兰国家科学中心在 QuantERA II 计划框架下的资助；该计划获得了欧盟地平线2020研究与创新计划的资助，资助协议编号为 101017733，项目编号2021/03/Y/ST2/00195。支持本研究结论的数据和数值代码可应合理请求向通讯作者索取。

[1] M. Kitagawa 和 M. Ueda，《物理评论A》 **47**，5138（1993）。

[2] D. J. Wineland、J. J. Bollinger、W. M. Itano、F. L. Moore，

以及 D. J. Heinzen, 《Physical Review A》46, R6797–R6800（1992）。[3] D. J. Wineland、J. J. Bollinger、W. M. Itano 和 D. J. Heinzen, 《Physical Review A》50, 67–88（1994）。[4] L. Pezzè、A. Smerzi、M. K. Oberthaler、R. Schmied 和 P. Treutlein, 《Reviews of Modern Physics》90, 035005（2018）。[5] M. Płodzień、M. Lewenstein、E. Witkowska 和 J. Chwedeńczuk, 《Physical Review Letters》129, 10 1103 129 250402 2022 . /physrevlett. . ( )。[6] H. J. Lipkin、N. Meshkov 和 A. J. Glick, 《Nuclear Physics》62, 188（1965）。[7] D. Cavalcanti、M. F. Pusey、L. Aolita 和 V. Scarani, 《物理评论A》100, 022121（2019）。[8] E. G. Cavalcanti、C. J. Foster、M. D. Reid 和 P. D. Drummond, 《Phys. Rev. Lett.》99, 210405（2007）。[9] E. G. Cavalcanti、Q. Y. He、M. D. Reid 和 H. M. Wise-man, 《物理评论A》84, 032115（2011）。[10] Q. Y. He、P. D. Drummond 和 M. D. Reid, 《物理评论A》83, 032120（2011）。[11] A. Niezgoda、M. Panfil 和 J. Chwedeńczuk, 《Physical Review A》102, 10.1103/physreva.102.042206（2020）。[12] A. Niezgoda 和 J. Chwedeńczuk, 《Physical Review Let-ters》126, 10.1103/physrevlett.126.210506（2021）。[13] J. Chwedeńczuk, 《SciPost Physics Core》5, 10.21468/sci-postphyscore.5.2.025（2022）。[14] M. Płodzień、J. Chwedeńczuk、M. Lewenstein 和 G. Rajchel-Mieldzioć, 《Physical Review A》110, 10 1103 110 032428 2024 . /physreva. . ( )。[15] M. Płodzień、T. Wasak、E. Witkowska、M. Lewen-stein 和 J. Chwedeńczuk, 《Physical Review Research》6, 10 1103 6 023050 2024 . /physrevresearch. . ( )。[16] M. Płodzień、M. Lewenstein 和 J. Chwedeńczuk, 《Reports on Progress in Physics》88, 077601（2025）。[17] M. Płodzień、J. Chwedeńczuk 和 M. Lewenstein, 《Physical Review A》111, 10.1103/physreva.111.012417（2025）。[18] T. Hernández Yanes、Y. Bamaara、A. Sinatra 和 E. Witkowska, 《Physical Review A》111, 10.1103/phys-reva.111.023312（2025）。[19] J. S. Bell, 《Physics Physique Fizika》1, 195（1964）。[20] J. F. Clauser、M. A. Horne、A. Shimony 和 R. A. Holt, 《Phys. Rev. Lett.》23, 880（1969）。[21] N. D. Mermin, 《Phys. Rev. Lett.》65, 1838（1990）。[22] N. Brunner、D. Cavalcanti、S. Pironio、V. Scarani 和 S. Wehner, 《现代物理评论》86, 419（2014）。[23] J. Tura、R. Augusiak、A. B. Sainz、T. Vértesi、M. Lewen-stein 和 A. Acín, 《Science》344, 1256（2014）。[24] J. Tura、R. Augusiak、A. B. Sainz、T. Vértesi、M. Lewen-stein 和 A. Acín, 《物理学年鉴》362, 370（2015）。[25] R. Kaubruegger、P. Silvi、C. Kokail、R. van Bijnen、A. M. Rey、J. Ye、A. M. Kaufman 和 P. Zoller, Physical Re- view Letters 123, 260505 (2019)。[26] Z.-H. Sun、Y.-Y. Wang、Y.-R. Zhang、F. Nori 和 H. Fan, Physical Revie w Research 5, 043285 (2023)。[27] C. Lyu、X. G. Tang、J. Li、X. Xu、M.-H. Yung 和 A. Bayat, 《新物理学杂志》25, 053022 (2023)。[28] Y. Song、N. Hasan 和 S. Takahashi, 《物理评论应用》24, 054037 (2025)。[29] M. Płodzień 和 J. Chwedeńczuk, 《物理评论快报》136, 100204 (2026)。[30] 更多详细讨论请参见补充材料。[31] K. Gietka、A. Usui、J. Deng 和 T. Busch, 《物理评论快报》126, 160402 (2021)。[32] T. Hernández Yanes、M. Płodzień、M. Mackoit Sinke-vičien˙e、G. Žlabys、G. Juzeli¯unas 和 E. Witkowska, Physical Review Letters 129, 10.1103/phys-revlett.129.090403 (2022)。[33] T. Hernández Yanes、G. Žlabys、M. Płodzień、D. Burba、M. M. Sinkevičien˙e、E. Witkowska 和 G. Juzeli¯unas, 《物理评论B辑》108, 104301 (2023)。[34] M. Kac、G. E. Uhlenbeck 和 P. C. Hemmer, J. Math. Phys. 4, 216 (1963)。[35] M. Płodzień 和 J. Chwedeńczuk, 《物理评论快报》136, 100204 (2026)。[36] H. F. Trotter, 《美国数学会会刊》10, 545–551 (1959)。[37] M. Suzuki, 《数学物理通讯》51, 183–190 (1976)。[38] S. Lloyd, Science 273, 1073–1078 (1996)。[39] J. Estève、C. Gross、A. Weller、S. Giovanazzi 和 M. K. Oberthaler, 《自然》455, 1216 (2008)。[40] C. Gross、T. Zibold、E. Nicklas、J. Estève 和 M. K. Oberthaler, 《自然》464, 1165 (2010)。[41] A. S. Sørensen 和 K. Mølmer, Physical Review Letters 86, 4431–4434 (2001)。[42] G. Tóth、W. Wieczorek、D. Gross、R. Krischek、C. Schwemmer 和 H. Weinfurter, Physical Review Let-ters 105, 10.1103/physrevlett.105.250403 (2010)。[43] S. C. Carrasco、M. H. Goerz、Z. Li、S. Colombo、V. Vuletić 和 V. S. Malinovsky, Physical Review Ap-plied 17, 064050 (2022)。[44] J. R. Schrieffer 和 P. A. Wolff, Phys. Rev. 149, 491 (1966)。[45] 参见文末内容。[46] D. A. Hamza 和 J. Chwedeńczuk, 《物理评论A》110, 012210 (2024)。[47] T. Hernández Yanes、A. Niezgoda 和 E. Witkowska, 《物理评论B辑》109, 10.1103/physrevb.109.214310 (2024)。

补充材料

I. 施里弗–沃尔夫投影到狄克流形

自旋波理论 [44] 适用于具有能隙 Δ 的系统，该能隙将谱的低能部分与高能部分分隔开来。它能够系统地推导出有效的低能（L）哈密顿量，并将虚激发（E）视为微扰。完整哈密顿量由两部分组成

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}. \tag{SM.1}$$

表 I. 本文研究的两个模型中，从微观自旋链到单轴扭转动力学的施里弗-沃尔夫映射总结。

		交错 XXX	长程 XXZ
未微扰	$\hat{H}_0$	最近邻海森堡模型（J_0）	各向同性长程模型（$\delta=0$）或伊辛模型（$\lvert\delta\rvert\gg 1$）
微扰		交错场 h_z	各向异性 δ
施里弗-沃尔夫阶数		第二	一阶（投影）
磁振子能隙	Δ	$2J_0$	$\frac{1}{2}[(1+\delta)\tilde{J}(0)-\tilde{J}(q_{\min})]$
OAT 耦合	χ	$h_z^2/[2J_0(N-1)]$	$-\delta J(0)/[2(N-1)]$
实现		数字 Trotter 电路	原生模拟动力学
平台		超导量子比特、中性原子阵列	囚禁离子、里德堡光镊、偶极系统

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ H_0 分别独立作用于两个子空间，而 V 提供耦合。自旋波理论将 H 变换为块对角 H^*，即，

$$\hat{H}=\left(\begin{array}{c|c}\hat{H}_L & \lambda\hat{V}_{LE}\\ \hline \lambda\hat{V}_{LE}^{\dagger} & \hat{H}_E\end{array}\right)\xrightarrow{\text{SWT}}\left(\begin{array}{c|c}\hat{H}_L^* & 0\\ \hline 0 & \hat{H}_E^*\end{array}\right) \tag{SM.2}$$

有效低能哈密顿量的二阶修正为 [45]

$$\hat{H}_L^*\equiv\hat{\Pi}^{(L)}\hat{H}^*\hat{\Pi}^{(L)}=-\sum_{nn'm}\frac{\hat{\Pi}_n^{(L)}\hat{V}\hat{\Pi}_m^{(E)}\hat{V}\hat{\Pi}_{n'}^{(L)}}{E_n^{(L)}-E_m^{(E)}}, \tag{SM.3}$$

其中 $\hat{}\Pi_n^{(L/E)}=|\psi_n^{(L/E)}\rangle\langle\psi_n^{(L/E)}|$投影到$\hat{}$ H_0 的 $E_n^{(L/E)}$本征态上，且它们是相应的本征能量。式（SM.3）的推导见第II节。

II. 单体微扰下的施里弗–沃尔夫有效哈密顿量

我们考虑一般的各向同性铁磁哈密顿量 $\hat{}$ H_0，并施加单体场 $\hat{}V=\sum_{j,\ \alpha}h_j^{\alpha}\hat{}S_j^{\alpha}$作为微扰。由于置换对称性意味着 $\hat{}\Pi\hat{}S_j^{\alpha}\hat{}\Pi=\frac{1}{N}\hat{}S_{\alpha}\hat{}\Pi$，任何非均匀场分量都满足 $\hat{}\Pi\hat{}V_{\text{inh}}\hat{}\Pi=0$，因此有效集体非线性通过跨越能隙的虚磁振子激发，在施里弗-沃尔夫（SW）展开的二阶产生。

希尔伯特空间为低能子空间 L，其投影算符为 $\hat{}P$，我们将 $\hat{}H_0$ 及其补空间将 $\hat{}V=\hat{}V_{\text{d}}+\hat{}V_{\text{od}}$ 分解为块对角部分和块非对角部分。确定一个反厄米生成元 $\hat{}S=\lambda\hat{}S_1+\lambda^2\hat{}S_2+\cdots$，使得 $\hat{}H^*=\mathrm{e}^{\hat{}S}\hat{}H\mathrm{e}^{-\hat{S}}$逐阶成为块对角形式。利用贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式展开，

$$\hat{H}^*=\hat{H}+[\hat{S},\hat{H}]+\tfrac{1}{2}[\hat{S},[\hat{S},\hat{H}]]+\cdots, \tag{SM.4}$$

收集 λ 的各次幂，并施加一阶解耦条件

$$\hat{V}_{\text{od}}+[\hat{S}_1,\hat{H}_0]=0 \tag{SM.5}$$

（其中 $\hat{}$ S_1 纯为非对角项）可消去 O阶（λ）的所有块非对角项。利用 $[\hat{}S_1,[\hat{}S_1,\hat{}H_0]]=-[\hat{}S_1,\hat{}V_{\text{od}}]$，块对角的$O$（$\lambda^2$）块 LL 分量可化简为 $\frac{1}{2}\hat{}P[\hat{}S_1,\hat{}V_{\text{od}}]\hat{}P$，因为 $\hat{}$ $P[\hat{}S_1,\hat{}V_{\text{d}}]\hat{}P$和 $\hat{}$ $P[\hat{}S_2,\hat{}H_0]\hat{}P$均为零（前者是因为非对角算符与对角算符的对易子为非对角算符，后者则源于对 $\hat{}$ S_2采用规范规范选择）。因此

$$\hat{H}_{\text{eff}}=\hat{P}\hat{H}_0\hat{P}+\lambda\hat{P}\hat{V}\hat{P}+\frac{\lambda^2}{2}\hat{P}[\hat{S}_1,\hat{V}_{\text{od}}]\hat{P}+O(\lambda^3). \tag{SM.6}$$

取方程（SM.5）在 $|n\rangle\in L$ 和 $|m\rangle\in E$之间的矩阵元：

$$(\hat{S}_1)_{nm}=\frac{V_{nm}}{E_n^{(L)}-E_m^{(E)}},\qquad(\hat{S}_1)_{mn}=-\frac{V_{mn}^*}{E_n^{(L)}-E_m^{(E)}}, \tag{SM.7}$$

其中，第二个关系式由 $\hat{S}_1^\dagger = -\hat{S}_1$ 得出。通过插入完备集$\sum_{m\in E}|m\rangle\langle m|$，计算 $\langle n|[\hat{S}_1, \hat{V}_{\rm od}]|n'\rangle$：

$$(H_{\rm eff}^{(2)})_{nn'} = \frac{\lambda^2}{2}\sum_{m\in E} V_{nm}V_{mn'} \times \left(\frac{1}{E_n^{(L)} - E_m^{(E)}} + \frac{1}{E_{n'}^{(L)} - E_m^{(E)}}\right). \tag{SM.8}$$

当低能流形简并时（$E_n^{(L)} = E_0$ 对所有 n均成立），可得到预解式形式

$$\hat{H}_{\rm eff} = E_0\hat{P} + \lambda\hat{P}\hat{V}\hat{P} - \lambda^2\hat{P}\hat{V}\hat{Q}\frac{1}{\hat{Q}\hat{H}_0\hat{Q} - E_0}\hat{Q}\hat{V}\hat{P} + O(\lambda^3). \tag{SM.9}$$

A. 交错 XXX 链的应用

考虑一个各向同性铁磁 $\hat{H}_0$，其具有简并的对称 Dicke 流形（$S = N/2$，投影算符 $\hat{\Pi}$），并受到单体场 $\hat{V} = \sum_{j,\alpha} h_j^\alpha \hat{S}_j^\alpha$的微扰。将 $h_j^\alpha = h_0^\alpha + \delta h_j^\alpha$分解为 $h_0^\alpha = \frac{1}{N}\sum_j h_j^\alpha$和 $\sum_j \delta h_j^\alpha = 0$后，均匀部分给出一阶集体塞曼项 $\hat{V}_0 = \sum_\alpha h_0^\alpha \hat{S}_\alpha$。非均匀部分满足

$$\hat{\Pi}\hat{V}_{\rm inh}\hat{\Pi} = \sum_{j,\alpha}\delta h_j^\alpha\,\hat{\Pi}\hat{S}_j^\alpha\hat{\Pi} \overset{\text{(SM.26)}}{=} \frac{1}{N}\sum_\alpha\underbrace{\Big(\sum_j \delta h_j^\alpha\Big)}_{=0}\hat{S}_\alpha\hat{\Pi} = 0, \tag{SM.10}$$

因此，$V_{\rm inh}$ 带来的最低阶修正为二阶。

将预解式限制在单磁振子扇区，取平面波态 $|q\rangle$ 及能量 $\varepsilon(q)$（多磁振子态的贡献受到 h/Δ 的额外因子抑制，并且仅在 Schrieffer–Wolff 展开的四阶才出现；见下文的收敛性讨论），我们定义傅里叶模 $\tilde{h}_\alpha(q) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j \delta h_j^\alpha \mathrm{e}^{iqj}$ 以及 $\hat{S}_\alpha(q) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j \hat{S}_j^\alpha \mathrm{e}^{iqj}$，从而有 $\hat{V}_{\rm inh} = \sum_\alpha\sum_k \tilde{h}_\alpha(k)\hat{S}_\alpha(-k)$。代入预解式：

$$\hat{H}_{\rm eff}^{(2)} = -\sum_{q\neq 0}\frac{1}{\varepsilon(q)}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{k,k'}\tilde{h}_\alpha(k)\tilde{h}_\beta(k') \times \hat{\Pi}\hat{S}_\alpha(-k)|q\rangle\langle q|\hat{S}_\beta(-k')\hat{\Pi}. \tag{SM.11}$$

平移不变性约束了式（(k,k')（SM.11）中的动量。在晶格平移 $\hat{T}_a$下，傅里叶自旋算符的变换为

$$\hat{T}_a\hat{S}_\alpha(k)\hat{T}_a^\dagger = \mathrm{e}^{ika}\hat{S}_\alpha(k), \tag{SM.12}$$

且动量本征态满足 $\hat{T}_a|q\rangle = \mathrm{e}^{iqa}|q\rangle$。由于 $\hat{\Pi}$ 投影到完全对称（零动量）的 $\hat{\ }\hat{\ }\hat{\ }\hat{\ }$ 流形上，它与所有平移算符对易：$T_a\Pi = \Pi T_a$。

令 $T_a|v\rangle = \hat{\Pi}\hat{S}_\alpha(-k)|q\rangle$。直接计算得到 $\hat{\Pi}$的值域，因此是平移不变的，

$$\hat{T}_a|v\rangle = \hat{\Pi}(\mathrm{e}^{-ika}\hat{S}_\alpha(-k))(\mathrm{e}^{iqa}|q\rangle) = \mathrm{e}^{i(q-k)a}|v\rangle. \tag{SM.13}$$

对于 $|v\neq 0$，一致性要求所有 a 都满足 $\mathrm{e}^{i(q-k)a} = 1$，因此 $k = q$。类似地，定义 $w| = q|\hat{S}_\beta(-k')\hat{\Pi}$，并从右侧作用 $\hat{T}_a^\dagger$，得到相位 $\mathrm{e}^{-i(q+k')a}$，从而要求 $k' = -q$。在式（SM.11）中，只有项 $(k,k') = (q,-q)$ 保留下来：

$$\hat{H}_{\rm eff}^{(2)} = -\sum_{q\neq 0}\frac{1}{\varepsilon(q)}\sum_{\alpha,\beta}\tilde{h}_\alpha(q)\tilde{h}_\beta(-q)\,\hat{\Pi}\hat{S}_\alpha(-q)\hat{S}_\beta(q)\hat{\Pi}. \tag{SM.14}$$

在实空间展开乘积：

$$\hat{S}_\alpha(-q)\hat{S}_\beta(q) = \frac{1}{N}\sum_i \hat{S}_i^\alpha\hat{S}_i^\beta + \frac{1}{N}\sum_{i\neq j}\mathrm{e}^{iq(i-j)}\hat{S}_i^\alpha\hat{S}_j^\beta. \tag{SM.15}$$

用 $\hat{\Pi}(\cdot)\hat{\Pi}$ 投影。根据置换对称性，对于 $i \neq j$，$\hat{\Pi}\hat{S}_i^{\alpha}\hat{S}_j^{\beta}\hat{\Pi} \equiv \hat{A}_{\alpha\beta}\hat{\Pi}$ 与配对 (i,j) 无关（见式 (SM.27)）。现场项与格点无关，贡献为 $\hat{\Pi}\hat{S}_i^{\alpha}\hat{S}_i^{\beta}\hat{\Pi}$。对于 $q \neq 0$，晶格求和恒等式 $\sum_{i\neq j} e^{iq(i-j)} = |\sum_j e^{iqj}|^2 - N = -N$ 给出

$$\hat{\Pi}\hat{S}_{\alpha}(-q)\hat{S}_{\beta}(q)\hat{\Pi} = \hat{\Pi}\hat{S}_i^{\alpha}\hat{S}_i^{\beta}\hat{\Pi} - \hat{A}_{\alpha\beta}\hat{\Pi}. \tag{SM.16}$$

代入二体恒等式（SM.27）：

$$\hat{\Pi}\hat{S}_{\alpha}(-q)\hat{S}_{\beta}(q)\hat{\Pi} = \hat{\Pi}\hat{S}_i^{\alpha}\hat{S}_i^{\beta}\hat{\Pi} - \frac{1}{N(N-1)}\big(\hat{S}_{\alpha}\hat{S}_{\beta} - N\hat{\Pi}\hat{S}_i^{\alpha}\hat{S}_i^{\beta}\hat{\Pi}\big)\hat{\Pi} = \frac{N}{N-1}\hat{\Pi}\hat{S}_i^{\alpha}\hat{S}_i^{\beta}\hat{\Pi} - \frac{1}{N(N-1)}\hat{S}_{\alpha}\hat{S}_{\beta}\hat{\Pi}. \tag{SM.17}$$

对于自旋 1/2，代数关系 $\hat{\sigma}^{\alpha}\hat{\sigma}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta} + i\sum_{\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}^{\gamma}$ 给出 $\hat{S}_i^{\alpha}\hat{S}_i^{\beta} = \frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta} + \frac{i}{2}\sum_{\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{S}_i^{\gamma}$。利用方程（SM.26）进行投影：

$$\hat{\Pi}\hat{S}_i^{\alpha}\hat{S}_i^{\beta}\hat{\Pi} = \frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta}\hat{\Pi} + \frac{i}{2N}\sum_{\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{S}_{\gamma}\hat{\Pi}. \tag{SM.18}$$

代入方程（SM.17）的第一项：

$$\frac{N}{N-1}\hat{\Pi}\hat{S}_i^{\alpha}\hat{S}_i^{\beta}\hat{\Pi} = \frac{N}{4(N-1)}\delta_{\alpha\beta}\hat{\Pi} + \frac{i}{2(N-1)}\sum_{\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{S}_{\gamma}\hat{\Pi}. \tag{SM.19}$$

对于第二项，将 $\hat{S}_{\alpha}\hat{S}_{\beta} = \frac{1}{2}\{\hat{S}_{\alpha}, \hat{S}_{\beta}\} + \frac{i}{2}\sum_{\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{S}_{\gamma}$ 分解为对称部分和反对称部分。合并两项中关于 S_{γ} 的线性贡献：

$$\frac{i}{2(N-1)}\sum_{\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{S}_{\gamma} - \frac{i}{2N(N-1)}\sum_{\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{S}_{\gamma} = \frac{i}{2N}\sum_{\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{S}_{\gamma}. \tag{SM.20}$$

汇总所有贡献，得到关于 $q \neq 0$ 的恒等式：

$$\hat{\Pi}\hat{S}_{\alpha}(-q)\hat{S}_{\beta}(q)\hat{\Pi} = \frac{N}{4(N-1)}\delta_{\alpha\beta}\hat{\Pi} - \frac{1}{2N(N-1)}\{\hat{S}_{\alpha}, \hat{S}_{\beta}\}\hat{\Pi} + \frac{i}{2N}\sum_{\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{S}_{\gamma}\hat{\Pi}. \tag{SM.21}$$

将方程（SM.21）代入方程（SM.14），并定义

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \sum_{q\neq 0}\frac{\tilde{h}_{\alpha}(q)\tilde{h}_{\beta}(-q)}{\varepsilon(q)}, \tag{SM.22}$$

二阶有效哈密顿量分解为三个具有不同集体结构的项。(i) 二次（单轴扭转）项。反对易子贡献为

$$\hat{H}_{\mathrm{eff}}^{(2)}\big|_{\mathrm{quad}} = \sum_{\alpha,\beta}\chi_{\alpha\beta}\,\tfrac{1}{2}\{\hat{S}_{\alpha}, \hat{S}_{\beta}\}\,\hat{\Pi}, \qquad \chi_{\alpha\beta} = \frac{\Lambda_{\alpha\beta}}{N(N-1)}. \tag{SM.23}$$

只有 $\chi_{\alpha\beta}$ 的对称部分有贡献，因为 $\{\hat{S}_{\alpha}, \hat{S}_{\beta}\}$ 在 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 下是对称的。(ii) 线性项。$\hat{S}_{\gamma}$ 贡献为

$$\hat{H}_{\mathrm{eff}}^{(2)}\big|_{\mathrm{lin}} = \sum_{\gamma}B_{\gamma}\hat{S}_{\gamma}\hat{\Pi}, \qquad B_{\gamma} = -\frac{i}{2N}\sum_{\alpha,\beta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\Lambda_{\alpha\beta}. \tag{SM.24}$$

由于 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 是反对称的，因此只有 $\Lambda_{\alpha\beta}$ 的反对称部分对 B_{γ} 有贡献。只要仅存在单个场分量（如交错 XXX 模型中），$\Lambda_{\alpha\beta}$ 就是对角的，线性项便恒为零。

(iii) 常数平移。单位算符贡献产生 $\hat{H}^{(2)}_{\mathrm{eff}}\big|_{\mathrm{const}} = -\frac{N}{4(N-1)}(\sum_{\alpha}\Lambda_{\alpha\alpha})\,\hat{\Pi}$，它会重整化 $\hat{S}$ 基态能量，但不会影响 $\hat{\Pi}$ 内的动力学。

对于 $\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}J(r_{ij})\hat{\mathbf{S}}_i\cdot\hat{\mathbf{S}}_j$ 在周期环上，定义 $|F\rangle = |\uparrow\rangle^{\otimes N}$ 和单自旋翻转态 $|j\rangle = \hat{S}_j^{-}|F\rangle$。利用 $\hat{\mathbf{S}}_i\cdot\hat{\mathbf{S}}_j = \hat{S}_i^{z}\hat{S}_j^{z} + \frac{1}{2}(\hat{S}_i^{+}\hat{S}_j^{-} + \hat{S}_i^{-}\hat{S}_j^{+})$，可得 $\hat{H}_0|j\rangle = E_0|j\rangle + \frac{1}{2}\sum_{l\neq j}J_{jl}(|j\rangle - |l\rangle)$，其中 $E_0 = -\frac{1}{8}\sum_{i\neq j}J(r_{ij})$。转到平面波 $|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j e^{iqj}|j\rangle$：

$$\hat{H}_0|q\rangle = \big(E_0 + \varepsilon(q)\big)|q\rangle, \qquad \varepsilon(q) = \tfrac{1}{2}\big[\tilde{J}(0) - \tilde{J}(q)\big], \tag{SM.25}$$

其中 $\tilde{J}(q) = \sum_r J(r)\,e^{iqr}$。对于 r 最近邻耦合：$\varepsilon(q) = J_0(1-\cos q)$，产生磁振子能隙 $\Delta = \varepsilon(\pi) = 2J_0$。

B. 投影到对称流形

令 $\hat{\Pi}$ 投影到完全对称的 Dicke 流形（$S = N/2$）。

a. 单体。根据置换对称性，$\Pi S_i^\alpha \Pi$ 与格点无关。对 i 求和：$N\Pi S_i^\alpha \Pi = S_\alpha \Pi$，因此

$$\hat{\Pi}\hat{S}_i^\alpha\hat{\Pi} = \frac{1}{N}\hat{S}_\alpha\hat{\Pi}. \tag{SM.26}$$

b. 双体（$i \neq j$）。同样，$\hat{\Pi}\hat{S}_i^\alpha\hat{S}_j^\beta\hat{\Pi} \equiv \hat{A}_{\alpha\beta}\hat{\Pi}$ 与配对无关。由 $\hat{S}_\alpha\hat{S}_\beta = \sum_i \hat{S}_i^\alpha\hat{S}_i^\beta + \sum_{i\neq j}\hat{S}_i^\alpha\hat{S}_j^\beta$，进行投影，并分别计数 N 个在位项和 $N(N-1)$ 个非在位项：

$$\hat{A}_{\alpha\beta}\hat{\Pi} = \frac{1}{N(N-1)}\big(\hat{S}_\alpha\hat{S}_\beta - N\hat{\Pi}\hat{S}_i^\alpha\hat{S}_i^\beta\hat{\Pi}\big)\hat{\Pi}. \tag{SM.27}$$

c. 在位自旋-1/2。由 $(\hat{S}_i^z)^2 = \frac{1}{4}$，在位投影项为 $\hat{\Pi}\hat{S}_i^z\hat{S}_i^z\hat{\Pi} = \frac{1}{4}\hat{\Pi}$。代入式（SM.27），其中 $\alpha = \beta = z$：

$$\hat{A}_{zz}\hat{\Pi} = \frac{1}{N(N-1)}\left(\hat{S}_z^2 - \frac{N}{4}\right)\hat{\Pi}, \tag{SM.28}$$

也就是说，

$$\hat{\Pi}\hat{S}_i^z\hat{S}_j^z\hat{\Pi} = \frac{1}{N(N-1)}\left(\hat{S}_z^2 - \frac{N}{4}\right)\hat{\Pi}, \qquad i \neq j. \tag{SM.29}$$

这是 XXZ 投影（第III节）中用到的关键恒等式。对于 x 和 y 分量也有类似结果，只需将 $\hat{S}_z^2$ 分别替换为 $\hat{S}_x^2$ 或 $\hat{S}_y^2$ 即可。

对于偶数 N 的环上交错模型，$J(r) = J_0$ 对于 $r = 1$ 和 $r = N-1$，得到 $J(q) = 2J_0\cos q$ 和 $\tilde{J}(0) = 2J_0$。交错分布 $\delta h_j^z = -h_z(-1)^j$ 的傅里叶变换为 $\tilde{h}_z(q) = -h_z\sqrt{N}\,\delta_{q,\pi}$（因为 $\sum_j(-1)^j e^{-iqj} = N\delta_{q,\pi}$）且 $h_x = h_y = 0$。代入式（SM.23）：

$$\chi_{zz}^{(\mathrm{XXX})} = \frac{1}{N(N-1)}\frac{|\tilde{h}_z(\pi)|^2}{\varepsilon(\pi)} = \frac{1}{N(N-1)}\frac{h_z^2 N}{2J_0} = \frac{h_z^2}{2J_0(N-1)}, \tag{SM.30}$$

重现了正文中的结果，并证实了一般形式体系。

二阶结果由无量纲参数 h/Δ 控制。当交错场振幅接近磁振子能隙时，$h \sim \Delta$ 微扰层级便会失效：多磁振子过程开始变得重要，有效单轴扭转描述也不再准确。图6（b）明确展示了这一交叉：对于弱场（$h \ll \Delta$），数值提取的 χ 遵循解析的 $\chi \propto h^2$ 标度关系，而当 $h \gtrsim \Delta$ 时则会出现系统偏差。实际上，当 $h/\Delta \lesssim 0.3$ 时，Schrieffer–Wolff 展开在定量上仍然可靠；当前实验平台很容易满足这一条件，因为交换耦合 J_0 超过了可实现的交错场振幅。

III. 长程 XXZ 模型的有效哈密顿量

在长程 XXZ 模型中，各向异性是一种二体相互作用，$\hat{V}_\delta \propto \sum_{i\neq j} J(r_{ij})\hat{S}_i^z\hat{S}_j^z$。不同于第II B节中的单体交错场，这种微扰在对称流形上的投影并不为零，$\Pi V_\delta \Pi \neq 0$ 因此有效的单轴扭转非线性在一阶就已出现。

完整的 XXZ 哈密顿量为

$$\hat{H}_{\mathrm{XXZ}} = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} J(r_{ij})\left(\hat{S}_i^x\hat{S}_j^x + \hat{S}_i^y\hat{S}_j^y + (1+\delta)\hat{S}_i^z\hat{S}_j^z\right). \tag{SM.31}$$

我们投影到对称流形，$\hat{H}_{\mathrm{coll}} = \hat{\Pi}\hat{H}_{\mathrm{XXZ}}\hat{\Pi}$。将双体恒等式 $\hat{\Pi}\hat{S}_i^\alpha\hat{S}_j^\alpha\hat{\Pi} = \frac{1}{N(N-1)}(\hat{S}_\alpha^2 - \frac{N}{4})\hat{\Pi}$ 应用于 $i \neq j$（第II B节）中的各个分量 $\alpha = x,\ y,\ z$：

$$\hat{H}_{\mathrm{coll}} = -\frac{\sum_{i\neq j} J(r_{ij})}{2N(N-1)}\big(\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + (1+\delta)\hat{S}_z^2\big)\hat{\Pi} + \mathrm{const.} \tag{SM.32}$$

由于 $\hat{\mathbf{S}}^2 = S(S+1)$ 在 $S = N/2$ 中为常数，各向同性部分 $\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$ 不会产生动力学。将其减去后，非平凡项为

$$\hat{H}_{\rm coll} \simeq \chi_{zz}^{(\rm XXZ)} \hat{S}_z^2, \qquad \chi_{zz}^{(\rm XXZ)} = -\frac{\delta}{2}\frac{\tilde{J}(0)}{N-1}, \tag{SM.33}$$

其中 $\tilde{J}(0) = \sum_{r=1}^{N-1} J(r)$（利用平移不变性，$\sum_{i\neq j} J(r_{ij}) = N\tilde{J}(0)$）。这是$\hat{\Pi}$ 内的一个精确算符恒等式，对 δ的任意取值均成立。采用 Kac 归一化（见正文）后，$\tilde{J}(0) = J_0$，耦合简化为 $\chi_{zz}^{(\rm XXZ)} = -\delta J_0/[2(N-1)]$。

为求得色散关系，我们将$\hat{H}_{\rm XXZ} = \hat{H}_{zz} + \hat{H}_{xy}$写成$\hat{H}_{zz} = -\frac{1+\delta}{2}\sum_{i\neq j} J(r_{ij})\hat{S}_i^z\hat{S}_j^z$和$\hat{H}_{xy} = -\frac{1}{4}\sum_{i\neq j} J(r_{ij})(\hat{S}_i^+\hat{S}_j^- +$厄米共轭)，单自旋翻转态 $|j\rangle$受到$\hat{H}_{zz}$产生的对角位移：每一对(j,l)相对于 $|F\rangle$贡献$+\frac{1+\delta}{4}J_{jl}$（因为$\hat{S}_j^z\hat{S}_l^z$从$+\frac{1}{4}$变为$-\frac{1}{4}$）。对两种排列求和：$\hat{H}_{zz}|j\rangle = E_F|j\rangle + \frac{1+\delta}{2}\tilde{J}(0)|j\rangle$。翻转交换部分给出$\hat{H}_{xy}|j\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{l\neq j} J_{jl}|l\rangle$，与各向同性情形相同。合并后，$\hat{H}_{\rm XXZ}|j\rangle = E_F|j\rangle + \frac{1+\delta}{2}\tilde{J}(0)|j\rangle - \frac{1}{2}\sum_{l\neq j} J_{jl}|l\rangle$。像之前一样进行傅里叶变换，得到

$$\varepsilon_{\rm XXZ}(q) = \tfrac{1}{2}\big[(1+\delta)\tilde{J}(0) - \tilde{J}(q)\big]. \tag{SM.34}$$

对于 $\delta > 0$ 该 能隙随各向异性增大而增大，从而增强对称流形的保护 d.

A. Weak anisotropy ($|\delta| \ll 1$): SW with isotropic $\hat{H}_0$.

我们将 $\hat{H}_{\rm XXZ} = \hat{H}_0 + \hat{V}_\delta$ 写为 $\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} J(r_{ij})\hat{\mathbf{S}}_i\cdot\hat{\mathbf{S}}_j$（SU(2) 不变，简并度精确为 $S = N/2$）和 $\hat{V}_\delta = -\frac{\delta}{2}\sum_{i\neq j} J(r_{ij})\hat{S}_i^z\hat{S}_j^z$。由于 $\hat{V}_\delta$是双体的，$\hat{\Pi}\hat{V}_\delta\hat{\Pi} \neq 0$（与单体情形形成对比，在单体情形中 $\hat{\Pi}\hat{V}_{\rm inh}\hat{\Pi} = 0$）。因此，领先的集体非线性在 Schrieffer–Wolff 展开的一阶就出现：

$$\hat{\Pi}\hat{V}_\delta\hat{\Pi} = -\frac{\delta}{2}\frac{\sum_{i\neq j} J(r_{ij})}{N(N-1)}\left(\hat{S}_z^2 - \frac{N}{4}\right)\hat{\Pi}, \tag{SM.35}$$

重现方程（SM.33）。各向同性色散 $\varepsilon(q) = \frac{1}{2}[\tilde{J}(0) - \tilde{J}(q)]$ 提供了保护对称流形的磁振子能隙。高阶自旋波修正涉及两次插入 $\hat{V}_\delta$，并产生阶为 δ^2的项。

B. Strong anisotropy ($|\delta| \gg 1$): SW with Ising $\hat{H}_0$.

$\hat{H}_{\rm XXZ} = \hat{H}_{0,\rm Ising} + \hat{V}_{\rm xy}$，其中

$$\hat{H}_{0,\rm Ising} = -\frac{1+\delta}{2}\sum_{i\neq j} J(r_{ij})\hat{S}_i^z\hat{S}_j^z, \quad \hat{V}_{\rm xy} = -\frac{1}{4}\sum_{i\neq j} J(r_{ij})(\hat{S}_i^+\hat{S}_j^- + \text{h.c.}). \tag{SM.36}$$

伊辛部分在 $\Delta \sim (1+\delta)J(0)$ 处打开能隙，高于铁磁基态。跨越该能隙的二阶虚自旋翻转过程会产生有效的单轴扭转非线性，这与方程（SM.33）一致。

集体泄漏准确性取决于动力学时间尺度上是否可以忽略。对于 $\delta = 0$，哈密顿量具有 SU(2) 不变性，并且与任意平移不变 $J(r_{ij})$ 下的 $\hat{\mathbf{S}}^2$ 对易；因此，每个总自旋扇区都是严格不变的。对于 $\delta \neq 0$，SU(2) 对称性被破坏，通常有 $[\hat{H}_{\rm XXZ}, \hat{\mathbf{S}}^2] \neq 0$，因此 $\hat{\Pi}$在完整动力学下并非不变。一个值得注意的例外是置换对称（全连接）情形，此时对所有 $i \neq j$，$J(r_{ij}) = \text{const}$，且 $\hat{H}_{\rm XXZ}$ 化为集体算符的多项式，与任意 δ下的 $\hat{\mathbf{S}}^2$ 对易。对于有限程耦合和中等程度的 δ，有限磁振子能隙会抑制泄漏率，确保投影描述在由 $1/\chi$ 决定的动力学时间尺度内保持准确。

C. 交错 XXX 模型与长程 XXZ 模型的比较

本工作所揭示的两种产生有效单轴扭转非线性的途径，具有不同的微扰结构。在交错 XXX 模型（第 II节）中，非线性源于单体微扰的二阶效应，并且

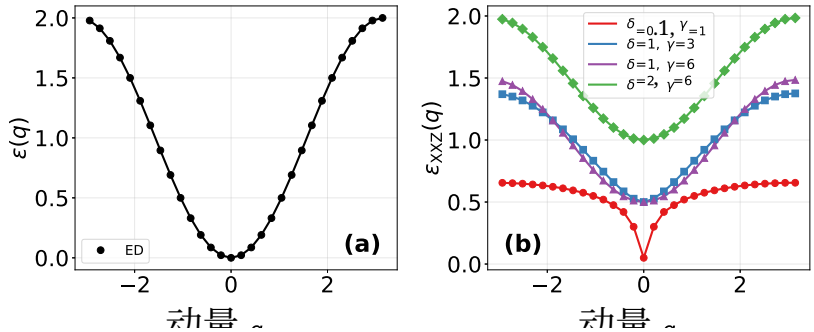

图 5. 单磁振子色散关系：解析结果（实线）与单翻转基中的精确对角化结果（圆圈），$N = 30$。(a) 最近邻各向同性海森堡模型，$h_z = 0$。(b) 长程 XXZ，所示为代表性的 (δ, γ) 参数对，涵盖从各向同性长程模型到强各向异性短程区域的范围。

按 $\chi^{(\mathrm{field})} \sim h^2/[\Delta(N-1)]$, 缩放，其中 Δ 为磁振子能隙。耦合张量 $\chi^{(\mathrm{field})}_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta}/[N(N-1)]$ 包含来自虚磁振子激发的显式能量分母。在 XXZ 模型中，各向异性是一种二体相互作用，在一阶时便会非平凡地投影到 $\hat{\Pi}$ 上：$\chi^{(\mathrm{XXZ})} = -\frac{\delta}{2}\tilde{J}(0)/(N-1)$，且不含能量分母。两种情形都需要能隙，但原因不同：在场诱导机制中，能隙决定微扰展开参数 h/Δ；而在 XXZ 情形中，能隙控制从对称流形泄漏的速率。

IV. 通过精确对角化进行数值验证

为验证第II 和 III节推导出的解析色散关系和有效非线性，我们对有限自旋链进行精确对角化（ED）。

在由 N 个自旋组成的周期环上，全极化态 $|F\rangle = |\uparrow\rangle^{\otimes N}$ 是铁磁基态。单磁振子扇区由 N 个单自旋翻转态 $|j\rangle = \hat{S}_j^-|F\rangle$ 张成。该扇区中哈密顿量的矩阵元 $H_{jl} = \langle l|\hat{H}|j\rangle$ 根据微观耦合构造（对角元：$(1+\delta)\tilde{J}(0)/2$；非对角元：$-J_{jl}/2$）。我们不直接对 H 进行对角化，而是投影到行波基

$$|q_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{iq_k j}|j\rangle, \qquad q_k = \frac{2\pi k}{N}, \tag{SM.37}$$

并计算 $\varepsilon_{\mathrm{num}}(q_k) = q_k|\hat{H}|q_k - E_F$。图 5 将这一数值色散关系与解析预测 $\varepsilon(q) = \frac{1}{2}[\tilde{J}(0) - \tilde{J}(q)]$（各向同性）以及 $\varepsilon_{\mathrm{XXZ}}(q) = \frac{1}{2}[(1+\delta)\tilde{J}(0) - \tilde{J}(q)]$, 进行了比较，证实了二者完全一致。

对于有效单轴扭转哈密顿量 $\hat{H}_{\mathrm{eff}} = \chi\hat{S}_z^2$，最高的两个$M$Dicke 态之间的能隙满足$\Delta E = E_F - E_W = \chi(N-1)$, 其中 $E_F = F|\hat{H}|F$，且 E_W是单激发扇区中的最低本征值。因此 $\chi_{\mathrm{num}} = \Delta E/(N-1)$。图 6 将这一数值提取结果与三种情形下的解析预测进行了比较。面板 (a) 验证了 $\chi_{zz}^{(\mathrm{XXX})}$的 $1/(N-1)$标度在多种链长下均成立；对于所有测试的 N，相对偏差 $|\chi_{\mathrm{num}} - \chi_{\mathrm{th}}|/\chi_{\mathrm{th}}$ 均低于 10^{-12}（受机器精度限制），证实了该恒等式的精确性。面板 (b) 展示了从微扰区间（$\chi \propto h^2$）到非微扰区间的交叉过程，此时场强 h 接近磁振子能隙 $\Delta = 2J_0$，直接以数值结果验证了第二节讨论的收敛条件。面板 (c) 显示，XXZ耦合 $\chi_{zz}^{(\mathrm{XXZ})}$如正文所预测，随各向异性 δ 线性变化；在 Kac 归一化下，它与 γ 无关，因为 $\tilde{J}(0) = J_0$。

V. 对称扇区保真度

Schrieffer–Wolff变换将微观哈密顿量映射到一个完全作用于对称迪克扇区 $S = N/2$ 内的有效集体模型。为检验动力学在多大程度上保持局限于该扇区，我们跟踪

$$F_{\mathrm{sym}}(t) = \langle\psi(t)|\,\hat{\Pi}\,|\psi(t)\rangle \tag{SM.38}$$

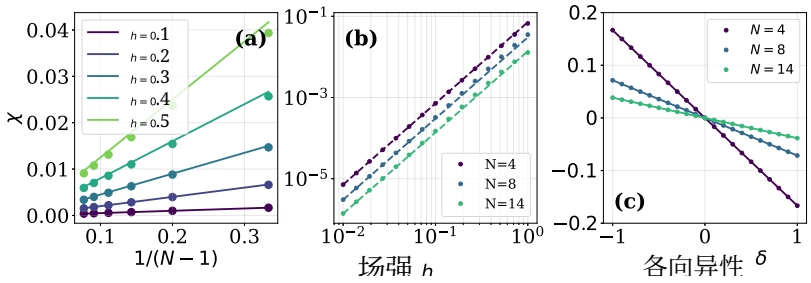

图 6. ED 得到的有效非线性与解析预测的比较。(a) 交错 XXX：$\chi_{zz}^{(\mathrm{XXX})}$与 $1/(N-1)$ 的比较，涵盖多种场强，证实了完整哈密顿量计算所得结果，精度达到机器精度。(b) χ 与场强的比较（双对数坐标），显示在微扰区间内的 $\chi \propto h^2$，以及当 h 接近磁振子能隙 $\Delta = 2J_0$时出现的偏差。(c) 长程 XXZ：在固定相互作用范围指数 γ 下，$\chi_{zz}^{(\mathrm{XXZ})}$与各向异性 δ 的比较，证实了精确的线性预测。曲线：理论；标记点：精确对角化。

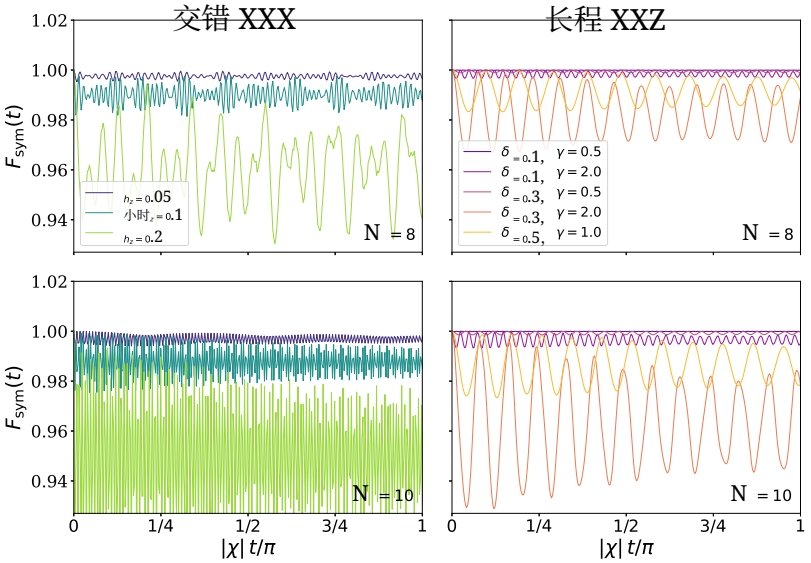

图 7. 交错 XXX（左）和长程 XXZ（右）模型在 $N = 8$ （上）和 $N = 10$ （下）时的对称扇区保真度 $F_{\mathrm{sym}}(t)$。不同曲线对应不同的微扰强度 h_z （左）以及各向异性–范围指数配对（δ, γ）（右）。

精确时间演化态 $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|+x\rangle^{\otimes N}$ 与投影算符 $\hat{\Pi}$ 到 $S = N/2$ 的重叠。我们通过对 $\hat{\mathbf{S}}^2$进行精确对角化，并保留本征值为 $\frac{N}{2}(\frac{N}{2}+1)$的（$N+1$）维本征空间，得到 $\hat{\Pi}$。

由于 $|+x\rangle^{\otimes N}$ 属于对称扇区，$F_{\mathrm{sym}}(0) = 1$。此后的任何衰减都由微扰 $\hat{V}$（交错场 h_z 或各向异性 δ）驱动，它将 $S = N/2$ 耦合到自旋较低的子空间。在 SW图像中，这些耦合受到 $\hat{V}/\Delta$的抑制，因此只要满足微扰条件，F_{sym} 就应保持接近 1。

图 7 展示了 $F_{\mathrm{sym}}(t)$ 随重标度时间 $|\chi|\, t/\pi$ 的变化，适用于 $N = 8$ 和 10。在交错 XXX 模型（左列）中，保真度在适中的 ∼0.95下保持在 h_z 之上，只有当 h_z 接近磁振子能隙 Δ时，才会出现明显振荡。在长程 XXZ 模型（右列）中，弱各向异性的长程耦合（$\delta \lesssim 0.3$，较小的 γ）使$F_{\mathrm{sym}} \approx 1$保持不变；更大的 δ 或 γ 会缩小能隙并加剧泄漏。

VI. 分析工具：多体贝尔关联器

在假设对两个量 $\sigma_{x/y}^{(k)} = \pm 1$ 的测量具有二元测量结果的前提下，构造了一个多体贝尔不等式，其中 $k \in \{1 \ldots N\}$标记粒子 [5, 8–18, 46]。如果 N 体关联函数

$\mathcal{E}_N \equiv |\langle \prod_{k=1}^{N} S_+^{(k)} \rangle|^2$ 符合局域实在论的公设，则它满足

$$\mathcal{E}_N = |\int d\lambda\, p(\lambda) \prod_{k=1}^{N} S_+^{(k)}(\lambda)|^2 \leqslant \int d\lambda\, p(\lambda) \prod_{k=1}^{N} |S_+^{(k)}(\lambda)|^2 = 2^{-N}, \tag{SM.39}$$

其中， $p(\lambda)$ 是隐变量 $S_+^{(k)} = \frac{1}{2}(\sigma_x^{(k)} + i\sigma_y^{(k)})$ 的概率密度；在最后一步中，我们使用了柯西–施瓦茨不等式以及以下事实：对于预定二元结果， $|S_+^{(k)}(\lambda)|^2 = 1/2$ 。这就是多体贝尔不等式，因为违反该不等式将违背局域实在论的假设。对于量子比特，经典结果由量子算符 $\hat{S}_+^{(k)} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x^{(k)} + i\hat{\sigma}_y^{(k)})$ 替代（全文中我们使用 $\hat{S}^{\alpha} = \hat{\sigma}^{\alpha}/2$ ），于是贝尔不等式为

$$\mathcal{E}_N^{(q)}[\hat{\varrho}_N] = |\mathrm{Tr}\left[\hat{\varrho}_N \bigotimes_{k=1}^{N} \hat{S}_+^{(k)}\right]|^2 \leqslant 2^{-N}. \tag{SM.40}$$

上述 N 个升算符的乘积仅当其作用于 $|\uparrow\rangle^{\otimes N}$ 时才不为零，从而得到 $|\downarrow\rangle^{\otimes N}$。因此， $\mathcal{E}_N^{(q)}$ 是这两者之间相干性的度量；对于 GHZ 态， $\mathcal{E}_N^{(q)} = \frac{1}{4}$ 达到最大值，

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle^{\otimes N} + |\uparrow\rangle^{\otimes N}), \tag{SM.41}$$

并且可表示如下

$$\mathcal{E}_N^{(q)}[\hat{\varrho}_N] = |\varrho_{\frac{N}{2},-\frac{N}{2}}|^2. \tag{SM.42}$$

这里， $|\varrho_{\frac{N}{2},-\frac{N}{2}}|^2$ 表示 了算符 $\hat{\varrho}_N$ 乘以 $|\downarrow\rangle\langle\uparrow|^{\otimes N}$的矩阵元。引入 $\mathcal{Q}$ 作为

$$\mathcal{Q}(t) = N + \log_2 \mathcal{E}_N^{(q)}[\hat{\varrho}_N(t)], \tag{SM.43}$$

因为此时贝尔不等式等价于$\mathcal{Q} \leqslant 0$。当它被违反时， $\mathcal{Q} > 0$，关联量$\mathcal{Q}$便可证明贝尔关联的存在。其最大值在GHZ态下达到，为 $\mathcal{Q}_{\max} = N + \log_2 \frac{1}{4} = N - 2$。

单轴扭转协议是一种用途广泛的方法，可用于生成呈现任意深度贝尔关联的态 [5, 8–18, 46, 47]。因此，我们关注如何将短程自旋系统映射到有效OAT动力学。