arXiv:2603.17084v1 [math.GR] 17 Mar 2026

秩 2 自由因子复形的模型论

ZAHRA 穆罕默迪·坎赫什拉吉与卡特琳·T ENT

Abstract. 我们开始研究有限秩自由群的自由因子复形。对于秩 2 的情形，我们公理化其理论，并证明它是 ω-稳定的，且具有素模型 $\mathcal{AF}_2$。

1. Introduction

自由因子复形 $\mathcal{AF}_n$ 是与秩为 n 的自由群 $\mathcal{F}_n$ 自然关联的单纯复形。它的顶点是真自由因子 $\mathcal{F}_n$，边表示包含关系。该图中的团构成单形，从而使这张图成为一个秩为 $n-1$ 的单纯复形，在风格上与射影空间所关联的球面Tits建筑非常相似。Hatcher 和 Vogtmann 最初引入了自由因子复形 [2],，并证明（与由射影空间产生的球面建筑的情形一样），秩为 n 的自由群的自由因子复形同伦等价于维数为 $n-2$ 的球面的楔和。最近，Bestvina 和 Bridson [1] 将这一类比延伸到射影几何基本定理，证明对于 $n \geq 3$，有 Aut($\mathcal{AF}_n$) ≅ Aut($\mathcal{F}_n$)。在秩 2 的情形下，所有真自由因子的秩都是 1，因此不存在包含关系。在这种情形下，我们研究自由因子之间补关系的图；也就是说，当两个自由因子的自由积为该自由群时，就在它们之间连一条边。文献 [1] 已证明，在更高秩的自由因子复形中，这种补关系是可定义的。因此，要研究 $\mathcal{AF}_n$ 关于 $n \geq 3$ 的模型论，我们必然得从补关系下的 $\mathcal{AF}_2$ 模型论入手，这正是本文所做的工作。

2. 秩为 2 的自由因子复形

定义 2.1. 若存在子群 $K \leq \mathcal{F}_2$，使得子群 $H \leq \mathcal{F}_2$ 满足下式，则称其为 $\mathcal{F}_2$ 的一个自由因子

$$\mathcal{F}_2 = H * K,$$

其中 $*$ 表示群的自由积。在这种情况下，$\mathcal{F}_2$ 是H 与 K的自由积，而 H 和 K 本身都是自由群。

注 2.2. 元素 $g \in \mathcal{F}_2$ 称为本原元素，当且仅当存在 $\mathcal{F}_2$ 的一组基 $\{x, y\}$，使得 $g = \langle x \rangle$；当且仅当 $\langle g \rangle$ 是 $\mathcal{F}_2$ 的非平凡真自由因子。因此，$\mathcal{F}_2$ 的非平凡真自由因子恰好是由本原元素生成的无限循环子群。

Date: 2026年3月19日。

定义 2.3. 自由因子复形 $\mathcal{AF}_2$ 是单纯图，其顶点是 $\mathcal{F}_2$ 的非平凡真自由因子；两个不同的顶点 x、$y \in \mathcal{AF}_2$ 由一条边 E（x、y）相连，当且仅当它们生成 $\mathcal{F}_2$ 的一个自由积。

记号 2.4. 为简化记号，我们通常用 $x \in \mathcal{AF}_2$ 代替$\langle x\rangle \in \mathcal{AF}_2$ 来表示一个本原元素 $x \in \mathcal{F}_2$。

以下是一些简单但有用的观察：

注 2.5. 边在 $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_2)$作用下保持不变， $Aut(\mathcal{F}_2)$ 传递地作用于该图的边，而边 (x, y) 在 $Aut(\mathcal{F}_2)$ 中的稳定子与$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$同构。注意，如果 $E(x, y)$ 成立，那么 x 和 y 不共轭。

我们对 $\mathcal{AF}_2$中的边有如下刻画：

注 2.6. 令 $\mathcal{F}_2 = \langle a, b\rangle$。那么，对于 $x \in \mathcal{AF}_2$， $E(b, x)$ 成立，当且仅当$x = b^m a^\delta b^k$ 对于某些 m、$k \in \mathbb{Z}$ 和 $\delta \in \{\pm 1\}$成立。

我们将在公理化中使用特定子图 $\mathcal{AF}_2$ 的无量词图作为主要构件，见第 10 节。这些子图归纳定义如下：

定义 2.7. 设 $e = \{x, y\}$ 是 $\mathcal{AF}_2$ 中的一条边。恰好有四个顶点（称为 $[1]$，中的棍），它们同时与 x 和 y相邻，即分别由 xy、xy^{-1}、$x^{-1}y$ 和 $x^{-1}y^{-1}$ 生成的顶点。我们将由这六个顶点组成的图称为 e 的1-扩张$\mathrm{Ext}_1(e)$，并记作 $\mathrm{Ext}_0(e) = e$。

归纳地， k 的 e 扩张$\mathrm{Ext}_{k-1}(e)$ 是$\mathrm{Ext}_k(e)$，再加上该扩张中每条边的1-扩张。然后

$$\mathcal{AF}_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}_k(e).$$

若对某条边 e 有 $A =\mathrm{Ext}_k(e)$，我们称 A 为层级 k的块。

Farey 图 $\mathcal{OF}_2$ 是 $\mathcal{AF}_2$ 在 $\mathcal{F}_2$的共轭作用下的商。我们简要回顾其归纳定义：

定义 2.8. （例如参见 [3]）*Farey* 图 FG 是按如下方式归纳定义的平面图：令 FG_0 为由两个共用一条边的三角形组成的图。若 FG_i 已定义，则 FG_{i+1} 是通过在 FG_i的每条边界边上附加一个三角形得到的图。最后 $FG = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} FG_i$。

请注意，与 Farey 图不同，对于 $k \geq 2$，扩张 $\mathrm{Ext}_k(e)$ 并非自由的：在 $\mathrm{Ext}_k(e)$ 的 1-扩张中加入的一些新顶点，其度严格大于二；也就是说，存在连接到 $\mathrm{Ext}_{k-1}(e)$ 中顶点的边，而这些额外的边由注 2.6 控制，参见第 10 节。

R注 2.9. (1) 显然，对于任意一条边 $e = E(x, y)$，都有 $\mathrm{acl}(\{x, y\}) = \mathcal{AF}_2$，事实上 $\mathcal{AF}_2 \subset \mathrm{dcl}(Exp_1(e))$。(2) 每一层级的块都有唯一的初始边。可以通过归纳法看出：删除所有不恰好包含在四个三角形中的边即可。(3) 任意两个层级为 k 的块在 $\mathcal{AF}_2$ 的某个自同构下同构。

3. An additional graph structure on $\mathcal{AF}_2$

在另行通知之前，我们将使用图的语言 $L_0 = \{E\}$。

记号 3.1. 对于 $x, y \in \mathcal{AF}_2$，若 k 是极小的，使得存在一条长度为 k 的路径从 x 到 y，并且我们记作 $D_k(x, y)$

$$D_k(x) = \{y \in \mathcal{AF}_2 \colon D_k(x, y)\}.$$

我们将通过 L_0-可定义关系扩展语言，并从共轭元开始。我们利用注 2.6 描述$\mathcal{AF}_2$中一个顶点的共轭元集合。为此，我们在 $\mathcal{AF}_2$上定义一种额外的图结构:

定义 3.2. 对于 $x, y \in \mathcal{AF}_2$，我们连接一条边 $C(x, y)$，并称 x 是 y 的 *1*-共轭元，若存在 $\mathcal{F}_2$ 的一个基 $\{x, z\}$，使得 $y = x^z$。

为证明此边关系 C 在 L 中可定义，我们首先注意到:

引理 3.3. 若 $x, y, z \in \mathcal{AF}_2$ 是互不相同的共轭元，则

$$|D_1(x) \cap D_1(y) \cap D_1(z)| \leq 1.$$

证明。反设存在互不相同的共轭元 $x, y, z \in \mathcal{AF}_2$，且 $t_1 \neq t_2 \in D_1(x) \cap D_1(y) \cap D_1(z)$。由注 2.6，不妨设 $x = a, t_1 = b$。于是由注 2.6 可得 $y = \langle a^{b^m} \rangle$，且对某个 $m, k \in \mathbb{Z}$，有 $z = \langle a^{b^k} \rangle$。再次利用注 2.6，从 $E(a, t_2)$ 可得存在 $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$，使得 $t_2 = \langle a^{m_1} b a^{m_2} \rangle$；而由 $E(t_2, y)$ 可知 $y = a^{t_2^l} = a^{b^m}$。这意味着 $t_2 = a^{m_1} b$ 且 $m = l$。

将同样的论证应用于 z，我们现在看到 $z = a^{t_2^m} = a^{b^m} = y$，这与我们的假设矛盾。□

现在我们可以证明关系 C 是可定义的。

命题 3.4。设 $x, y \in \mathcal{AF}_2$。以下条件等价:

(1) x 是 y 的 *1*-共轭；(2) $D_1(x) \cap D_1(y)$ 是无限的；(3) $|D_1(x) \cap D_1(y)| \geq 5$;

若上述任一条件成立，我们称集合

$$\ell(x, y) := D_1(x) \cap D_1(x')$$

由 x 和 y 确定的直线 。

证明。(1) ⇒(2)：设 y 是相对于 t 的 x 的 1-共轭，因此我们可以假设 $y = txt^{-1}$。那么 $t \in D_1(x) \cap D_1(y)$，并且对每个 $k \in \mathbb{Z}$，$\langle tx^k \rangle \in D_1(\langle x \rangle) \cap D_1(txt^{-1})$，所以这个集合是无限的。

(2) ⇒ (3)：显然。

(3) ⇒ (1)：设 $x, y \in \mathcal{AF}_2$ 满足 $|D_1(x) \cap D_1(y)| \geq 5$。我们首先断言，$x$ 和 y 共轭。反设它们不共轭，并令 π 为从 $\mathcal{AF}_2$ 到 $\mathcal{OF}_2$ 的商映射，将每个顶点映到其共轭类。若 x 和 y 不共轭，则 $\pi(x) \neq \pi(y)$。由于 $\mathcal{OF}_2$ 同构于 Farey 图，且 Farey 图中的两个顶点至多有两个公共邻点，因此 $|D_1(\pi(x)) \cap D_1(\pi(y))| \leq 2$。由鸽巢原理，存在 $A \subset D_1(x) \cap D_1(y)$，使得 $|A| \geq 3$ 和$|\pi(A)| = 1$。因此，A 由至少有两个公共邻点的共轭元组成，这与引理 3.3 矛盾。故 x 和 y 共轭。

现在令 $t \neq t' \in D_1(x) \cap D_1(y)$。不失一般性，可假设 $x = b$ 和 $t = a$，于是由注 2.6 可知，对于 $k \in \mathbb{Z}$，有 $y = a^{-k}ba^k$ 。由于 $t' \in D_1(b)$，由注 2.6 可知，存在某个 k_1，使得 $t' = \langle b^{k_1}ab^{k_2}\rangle$, $k_2 \in \mathbb{Z}$，且二者不全为零；又由于 $t' \in D_1(y)$，对于某个 m_1，我们也有 $t' = y^{m_1}ay^{m_2} = (a^{-k}ba^k)^{m_1}a(a^{-k}ba^k)^{m_1}, m_2 \in \mathbb{Z}$。由于 t' 的约化字以字母 $b^{\pm 1}$ 开头或结尾，因此可得 $k = 0$ ，从而得到所述的 $y = b^a$ 。

□

我们需要以下引理:

引理 3.5。 设 $\mathcal{F}_2 = \langle a, b\rangle, g \in \mathcal{F}_2$。则当且仅当存在某个 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $\delta \in \{\pm 1\}$使得 $y = b^{a^\delta b^k g}$时， $C(b^g, y)$ 成立。

证明。 首先考虑 $g = 1$ 的情形。若 $C(b, y)$ 成立，则由注 2.6 可知 $y = b^x$ ，其中对于某个 $m, k \in \mathbb{Z}$ ，有 $x = b^m ab^k$ ，从而 $y = b^{ab^k}$。逆命题显然。

通过对前述论证取共轭，我们现在看到，若 $C(b^g, y)$ 成立，则$y = (b^g)^x$ ，其中 x 具有形式 $x = (b^g)^m a^g (b^g)^k$ ，对于某个 $m, k \in \mathbb{Z}$。因此，如所声称的，$y = (b^g)^{a^g (b^g)^k} = b^{ab^k g}$ 。逆命题同样显然。□

推论 3.6。 (1) $Aut(\mathcal{AF}_2)$在 C-边上传递地作用。(2) $\mathrm{Aut}(\mathcal{AF}_2)$ 在满足 $C(x, y)$ 和 $z \in \ell(x, y)$的三元组 (x, y, z) 上传递地作用。

证明。对于第一部分，考虑 $\mathcal{F}_2$ 的 $C(b, b^{a^{\delta_1}b^m})$ 和 $C(d, d^{c^{\delta_2}d^k})$ $k, m \in \mathbb{Z}, \delta_1, \delta_2 \in \{\pm 1\}$ 边的基 $\{a, b\}$ 和 $\{c, d\}$。若 $\delta_1 = \delta_2$，取满足$\sigma(a, b) = (c, d)$ 的 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{F}_2)$。否则，取 $\sigma(a, b) = (c^{-1}, d)$。令 κ 为由 d^{k-m} 给出的共轭。于是 $\sigma(b, b^{a^{\delta_1}b^m}) = (d, d^{c^{\delta_2}d^m})$，因此 σ 与 κ 的复合将 $(b, b^{a^{\delta_1}b^m})$ 映至 $(d, d^{c^{\delta_2}d^m})$。

（2）：由（1）可知，只需证明 $x = b$ and$y = \langle aba^{-1}\rangle$ 的稳定子在 $\ell(x, y) = \{ab^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 上传递。令 $z = ab^k \in \ell(x, y)$，并注意到 $\{b, ba\}$ and $\{b, b^k a\}$ 是基。取 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{F}_2)$，使得 $\sigma(b, ba) = (b, b^k a)$。于是 $\sigma(a) = b^{k-1}a$ ，因此 σ 固定 b and b^a ，并将 ba 映到 $b^k a$ ，如所需。□

供以后参考，我们还记录如下:

注记 3.7。 取 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{F}_2)$ 使得 $\sigma(a, b) = (b^{k-1}a, b)$ 如上所述。于是 σ 固定 b, b^a ，因此对任意 $k \in \mathbb{Z}$，都有 b^{ab^k} 。

记号 3.8。 给定约化形式中的 g

$$g = a^{k_1}b^{m_1} \dots a^{k_s}b^{m_s}, k_i, m_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq s$$

我们将 $k = \Sigma_{i=1}^{s}|k_i|$ 称为 g 的 a-长度。

我们将 $a^{\pm 1}$ 的两次出现之间的每个 b^k、$k \in Z$ 称为一个 b-区块（注意， b-区块可以为空）。因此，如果 g 具有 a-长度 k，那么共有 $k+1$ 个 b-区块，其中包括 $a^{\pm 1}$ 第一次出现之前和最后一次出现之后的区块。

对于 $x, y \in \mathcal{AF}_2$，我们称 x 是 y 的 k-共轭（记作 $C_k(x, y)$），当且仅当 k 是满足以下条件的极小值：存在一条从 x 到 y、长度为 k 的约化 C-路径。我们记

$$C_k(x) = \{y \in \mathcal{AF}_2 \colon C_k(x, y)\} \ and \ \ C(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k(x).$$

命题 3.9。 假设 $x \in \mathcal{F}_2 = \langle a, b\rangle$ 与 b 共轭，即 $x = b^g$，其中我们将 g 写成约化形式如下

$$g = a^{k_1} b^{m_1} \dots a^{k_s} b^{m_s}, k_i, m_i \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le s$$

于是，从 x 到 $\langle b\rangle$ 存在唯一一条长度为 $k = \Sigma_{i=1}^{s} |k_i|$的 C-路径。因此，在边关系 C下， $\mathcal{AF}_2$ 中一个顶点的共轭类是一棵树。

证明。 证明采用关于 $k \ge 1$的归纳法。首先假设 $k = 1$，于是对于某个 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $\delta \in \{\pm 1\}$，有 $g = a^\delta b^m$ 。那么，根据引理 3.5， $C(b, b^g)$成立。

现在假设我们已证明 $k \ge 1$ 的情形，并假设 g 的 a-长度为$k + 1$。写作 $g = a^\delta h$，其中 h 的 a-长度为 k，且 $\delta \in \{\pm 1\}$。根据归纳假设，存在一条长度为 k 、从 b到 b^h 的 C-路径；由引理 3.5可知， $C(b^h, b^g)$成立。因此，我们得到一条长度为 $k+1$、从 b到 b^g的 C-路径。该路径的唯一性源于这些表达式的唯一性。□

注 3.10. 注意，由命题 *3.3* 可知，直线 $\ell(x, y_1)$和 $\ell(x, y_2)$ 至多有一个公共元素，因为 $\ell(x, y_1) \cap \ell(x, y_2) = D_1(x) \cap D_1(y_1) \cap D_1(y_2)$和 x, y_1, y_2 共轭。

定义 3.11. 如果直线 $\ell(x, y_1)$ $\ell(x, y_2)$ 不相交，我们称它们为平行；如果它们恰好在一个顶点相交，则称它们为正交。我们称该顶点为正交性的见证。

类似地，若 $y_1 \in C_2(y_1)$，如果 $l(x, x_1)$和 $l(x, x_2)$ 平行（分别正交），我们就称 y_1 和 y_2 平行（分别正交），其中 x 是 $C_1(y_1) \cap C_1(y_2)$ 中唯一的顶点。

注 3.12. 注意到，根据推论 *3.6 (2)*， $z \in \ell(x, y)$ 与包含 z 的唯一直线 $\ell(y, w)$ 之间存在一一对应。因此可知，$\mathrm{Aut}(\mathcal{AF}_2)$ 在满足 $x, w \in C_1(y)$ 且 x 与 y 正交的三元组 (x, y, w) 上传递地作用。

对于 $x \in \mathcal{AF}_2$，平行是 $C_1(x)$ 上的一个等价关系：

引理 3.13. 记作 $C_1(b) = B_1 \dot\cup B_2$ 其中

$$B_1 = \left\{ \langle b^{ab^m} \rangle \mid m \in \mathbb{Z} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \langle b^{a^{-1}b^m} \rangle \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

那么， $x, y \in C_1(b)$ 平行，当且仅当 x, y 属于同一个 $B_i, i = 1, 2$。

证明。 设 $x \in B_1$，根据引理 3.5，存在某个 $m \in \mathbb{Z}$ ，使得 $x = \langle b^{ab^m} \rangle$ 。只需证明，若 $y \in C_1(b)$ 与 x 正交，则 $x \in B_2$。因此，设 $t \in \ell(b, x)$。根据注 2.6，存在某个 $s \in \mathbb{Z}$ ，使得 $t = \langle b^s a^{-1} b^m \rangle = \langle b^{-m} a b^{-s} \rangle$ 。同样根据该注，若 $y \in C_1(b)$ 满足 $t \in \ell(b, y)$，则有 $E(t, y)$，从而 $y = \langle b^{ab^{-s}} \rangle \in B_2$，这就证明了所述结论。□

定义 3.14. 如果对于每个顶点 $y_1 \in \ell(x, x_1)$，都存在某个 $y_2 \in \ell(x, x_2)$ 使得 $E(y_1, y_2)$，则称平行直线 $\ell(x, x_1)$ 和 $\ell(x, x_2)$ 互为邻线。

引理 3.15. 每条直线 ℓ 恰有四条邻线。更确切地说， $\ell(b, b^{ab^k})$是 $\ell = \ell(b, b^a)$ 的邻线，当且仅当 $k \in \{1, -1\}$。

证明. 由推论 3.6 和引理 3.13，只需证明第二个陈述。

根据推论 3.6 和注记 3.7， $b^{ab^k}, k \in \mathbb{Z}$ 的稳定子在每条直线 $\ell(b, b^{ab^k})$ $k \in \mathbb{Z}$ 的点上都是传递的（因而是正则的）。因此它

只需考虑 $a \in \ell(b, b^a)$，并证明对于 $k \in \mathbb{Z}$，$z \in D_1(a) \cap \ell(b, b^{ab^k})$ 中恰有两个顶点，且在此情形下 $k \in \{1, -1\}$。

注意，如果 $z \in D_1(a) \cap D_1(b)$，那么根据定义 2.7，我们有 $z = a^\delta b^\epsilon$ 其中ϵ，$\delta \in \{-1, 1\}$。此外，如果 $z \in D_1(b^{ab^k})$，那么

$$z^{b^{-k}a^{-1}} = (a^\delta b^\epsilon)^{b^{-k}a^{-1}} = ab^k a^\delta b^\epsilon b^{-k} a^{-1} \in D_1(b) = \{b^m a b^n : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

根据注 2.6。因此我们必有 $\delta = 1$ 和 $k = \epsilon$。这就证明了该断言。 □

定义 3.16. 我们称 X 的子集 $\mathcal{AF}_2$ 为邻域闭合的，若对于任意直线 $\ell(x, y)$，满足 x，$y \in X$，且邻点为 $\ell(x, y_1)$ $\ell(x, y_2)$，都有 $y_1, y_2 \in X$。

对于包含 x, y 且满足 $C(x, y)$ 的最小邻域闭合集，我们记作 $\mathrm{cl}(x, y)$（若 $\ell = \ell(x, y)$，则记作 $\mathrm{cl}(\ell)$）。

如果 $|\mathrm{cl}(\ell) \cap \mathrm{cl}(\ell')| = 1$，且存在 $x_1 \in \mathrm{cl}(\ell)$ 和 $x_2 \in \mathrm{cl}(\ell')$，使得 x_1 和 x_2 正交，则称$\mathrm{cl}(\ell)$与$\mathrm{cl}(\ell')$ 为正交族。

如果某条 C-路径包含于$\mathrm{cl}(x, y)$ 中，其中 x, y满足 $C(x, y)$，则称这条路径为直的 。

以下观察将会有用。

注记 *3.17. (1)* 由对称性可知，$l(x, y)$ 的四个邻点都属于 X，并且采用引理 *3.13* 的记号，对任意 $x \in B_i, i = 1, 2$，我们有 $B_i \subseteq \mathbf{acl}(b, x)$。*(2)* 如果 $y_1, y_2 \in \mathbf{cl}(x, y)$ 且 $C(y_1, y_2)$，那么根据定义可得 $\mathbf{cl}(x, y) = \mathbf{cl}(y_1, y_2)$。*(3)* 根据定义，$\mathbf{cl}(x, y)$ 是 C-连通的，且 $\mathbf{cl}(x, y) \subseteq \mathbf{acl}(x, y)$。因此，对任意 $x', y' \in \mathbf{cl}(x, y)$，都有 $\mathbf{cl}(x, y) \subseteq \mathbf{acl}(x', y')$。*(4)* 设 $\ell = \ell(x, y)$，设 $z \in C(x) = C(y)$，并设 $p = (z = x_0, \ldots, x_k = x, x_{k+1} = y)$ 是一条从 z 到 y 的 C-路径。那么，当且仅当对所有 $i = 0, \ldots k-1$，x_i 与 x_{i+2} 平行时，p 才是直的。*(5)* 根据注记前一部分，对于满足 $\mathbf{cl}(\ell) \neq \mathbf{cl}(\ell')$ 的直线 ℓ, ℓ'，我们有$|\mathbf{cl}(\ell) \cap \mathbf{cl}(\ell')| \leq 1$。

4. Paths avoiding conjugacy classes

我们称路径（x_0，……，x_k）避开集合 X，如果对所有 $i = 0$，……，k，都有 $x_i \notin X$。我们首先注意到：

引理 4.1. 设 $A = \mathrm{Ext}_k(e)$，其中 $e \in \mathcal{AF}_2$ 是一条边，且 $x \in A$。那么任意 v_1、$v_2 \in A \setminus C(x)$ 均可由一条避开 $C(x)$ 的 E-路径连接，且该路径长度至多为 $2k$。

证明。我们对 k 使用归纳法证明。由于 $\mathbf{Ext_0}(e) = \{e\}$，结论对 $k = 0$ 显然成立。现在假设结论对 $k-1$ 成立，并设 $A' = \mathbf{Ext}_{k-1}(e) \subset A$。根据构造（见第 10 节），$A \setminus A'$ 中的任意顶点都是 A' 中某条边的悬挂点，也就是说，它与 A' 中至少两个顶点相连，且这三个顶点构成一个三角形。显然，这两个顶点不可能都属于 B。因此，对任意 v_1，$v_2 \in A \setminus B$，都存在 E-邻点u_1，$u_2 \in A' \setminus B$；由归纳假设，在 $A' \setminus (B \cap A')$ 中，u_1 和 u_2 之间存在一条长度至多为 $2(k-1)$ 的路径，从而得到一条从 v_1 到 v_2、长度至多为 $2k$ 的路径。□

下一个引理是证明引理 4.9 和推论 4.10 的一项技术工具。参见上文 2.8 中 Farey 图的定义：

引理 4.2. 令 P_{ab} 为由 $\mathcal{F}_2 = \langle a、 b\rangle$ 中以 a 开头的循环约化本原词构成的集合。存在一个映射

$$f : \mathcal{OF}_2 \setminus \{[b]\} \longrightarrow P_{ab}$$

将 $\mathcal{OF}_2 \setminus \{[b]\}$ 的顶点标记为 P_{ab} 中的元素，使其满足以下条件：

- f（$[x]$）是 $[x] \in \mathcal{OF}_2$ 的一个代表元的生成元，即 $[x] = [\langle f$（$[x]$）$\rangle]$;
- f（$[a]$）$= a$和 f（$[x]$）以 a 开头，不包含任何 a^{-1}，并以b 或 b^{-1} 结尾；
- 对于满足 $E(x, y)$ 的 $x, y \in \mathcal{AF}_2$，存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$if\ x = \langle f([x])\rangle \quad then \quad y = \langle f([y])^{x^k}\rangle.$$

最后，我们令 $f(b) = b$。

证明。我们在 Farey 图中不同于 $[b]$ 的顶点上归纳定义一个标签，并对边赋予定向。我们将一条边的定向写为其起始顶点和终止顶点的标签所构成的有序对。后续层级中出现的边以唯一的方式定向，使得将两条新边复合后得到一条从该边的起始顶点到其终止顶点的路径。

更准确地说，我们从层级 1 的图上开始归纳定义，并将有向 Farey 图的起始顶点分别标记为 a 和 b，将层级 1 的两个顶点分别标记为 ab 和 ab^{-1}。我们将相应的边定向为 (a, b),(a, ab),(ab, b), (a, ab^{-1}) 和 (ab^{-1}, b^{-1})。[1]

我们按如下方式归纳地扩展这个标记：若 f 已在 A_k 上定义，且 $z \in A_{k+1}$ 是由有向边 $(x,\ y)$ 得到的，则令 $f(z) = f(x)f(y) \in \mathcal{F}_2$，从而在所有 $\mathcal{OF}_2$ 上定义它。

归纳可知，性质 (2) 成立，并且 f 的像包含于 P_{ab}。

为证明 (3) 成立，我们注意到构造有如下直接推论：若标记为 $z = uv$ 的顶点是由有向边 $(u,\ v)$ 得到的，那么从 z 出发的边恰好是那些终点顶点形如 $z^k v$, $k \geq 0$ 的边，而终止于 z 的边恰好是那些起点顶点形如 $uz^k,\ k \geq 0$ 的边。

现在考虑 $x,\ y \in \mathcal{AF}_2$，其中 $E(x,\ y)$。通过共轭，我们不妨设 $f([x]) = x$，且 x 是由有向边 $(u,\ v)$ 得到的。于是，根据前面的讨论，$f([y])$ 要么是 $x^k v$，要么是某个 $k \geq 0$ 所对应的 ux^k，因此 y 与相应的元素共轭。由对称性，不妨设对于某个 $h \in \mathcal{F}_2,\ y = (ux^k)^h$。由注 2.6 应用于 $\{u, x\}$ 和 $\{y, x\}$，可知对于某个 m, $e \in \mathbb{Z}$，有 $y = x^m ux^l = (ux^k)^h$，因此 $y = f([y])^{f([x])^{-m}}$，如所需。□

显然，通过归纳法即可得到以下结果：

推论 4.3. 设 $x,\ y \in \mathcal{AF}_2$ 和

$$p = (x = t_0, \ldots, t_k = y)$$

是一条从 x 到 y 的 $\mathcal{AF}_2$ 中的路径。若 $x = \langle f(x)\rangle$，则存在整数 $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{Z}$，使得 $y = \langle f(y)^\lambda\rangle$，其中

$$\lambda = f(t_k)^{s_k} \ldots f(t_0)^{s_0}.$$

我们将用到以下事实（可由 f 的定义直接得出）：

[1]注意，这样一来，$[b]$ 上的标签并非唯一确定。

事实 4.4. [8] 设 $x \neq a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ 是 $\mathcal{F}_2 = \langle a, b \rangle$ 中的循环约化本原元。那么存在 $k > 0$ 和 $\epsilon \in \{\pm 1\}$，使得 x 或 x^{-1} 之一有一个循环置换，其形式为

$$a^{m_1} b^{n_1} \dots a^{m_s} b^{n_s}$$

其中一者

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_s = \epsilon,$$
$$\{n_1, \dots, n_s\} = \{k, k+1\}$$

或者，交换 a 和 b 的角色，

$$n_1 = n_2 = \cdots = n_s = \epsilon,$$
$$\{m_1, \dots, m_s\} = \{k, k+1\}.$$

我们称 x 的瓦片长度为 k，并在 $m_i \in \{k, k+1\}$、$i = 1$、.....、q 时记作 $\textit{tile}_b(x) = k$。

利用前述事实和映射 f 的构造，我们得出：

推论 4.5. 如果 $[x], [y] \neq [b]$ *in* $\mathcal{OF}_2$ 构成一条边，那么 $|\textit{tile}_b(f[x]) - \textit{tile}_b(f([y])| \leq 1$. 如果对于 $x, y \in \mathcal{AF}_2$，存在一条长度为 k 、从 x 到 y 且避开 $C(b)$的路径，那么$|\textit{tile}_b(x) - \textit{tile}_b(y)| \leq k$.

证明. 第一个结论由 f 的构造直接得出，因为根据事实 4.4， P_{ab} 中任一元素里的 b-瓷砖的长度至多相差 1。第二个结论由第一个结论通过归纳法得出。□

注意，对于任意 $k \in \mathbb{Z}$， $[b]$ 在 $\mathcal{OF}_2$ 中都与 $[ab^k]$ 有边相连，因此前一个推论中的假设是必要的。

注 4.6. 回想一下， P_{ab} 中的元素以 a开头，不包含任何 a^{-1}，并且以 b或 b^{-1}结尾。以下观察可直接由这些性质得出。设 $w \in \mathcal{F}_2$。

(1) 设 w 有一个约化表达式 $w = ya^{\pm 1}b^k$，其中 $y \in \mathcal{F}_2$、$k \in \mathbb{Z}$，且 $t \in P_{ab} \cup P_{ab}^{-1}$ 满足 $|\textit{tile}_b(t) - k| \geq 2$。那么在 wt 中，所有 b-*tiles of* y 均保持不变。(2) 设 w 有一个约化表达式 $w = y_0 a^{\pm 1} b^{\pm k} a b^{k+m}$， $m \geq 2$ 且 $t \in P_{ab}^{-1}$ 。那么 wt 有一个约化表达式 $wt = y_0 y_1$，其中某个字 y_1。此外，如果 y_0之后的第一个 b-*tile* 发生改变，则 $\textit{tile}_b(t) \in \{k+m, k+m-1\}$，因此 y_0 之后新的 b-*tile* 的长度至多为 $2k + m + 1$。

推论 4.7。 设 $p = (t_0 = a, t_1, \dots, t_k)$ 是一条避开 $C(b)$ 的路径。那么对于任意 $s_0, \dots, s_k \in \mathbb{Z}$， $\lambda = t_0^{s_0} \dots t_k^{s_k}$中的 b-*tiles* 的长度均有上界 $\sum_{i=1}^{k+1} i \leq k^2$。

证明。 这可直接由推论 4.5 和注 4.6 (1) 得出。 □

定义 4.8。 对于 $y \in \mathcal{AF}_2$，我们称路径 $p = (x_0, \dots, x_k)$ 避开 $C_m(y)$，如果对于 $0 < i < k$， $x_i \notin \bigcup_{j \leq m} C_j(y)$ 。

引理 4.9. 设 $p = (a = t_0, \dots, t_k = z)$ 是一条长度为 k、避开 $C_m(b)$且满足 $m \geq k$ 的路径。设 $s_0, \dots, s_k \in \mathbb{Z}$，使得对于 $\lambda = f(t_0)^{s_0} \cdots f(t_k)^{s_k}$，有 $z = \langle f(z)^{\lambda^{-1}} \rangle$。那么， λ 中前$(m + 2 - k)$个 b-瓦片的长度有界于

$$m_k = \sum_{i=0}^{k} 2^i.$$

证明. 我们对 k 使用归纳法证明该引理。记

$$\lambda_i = f(t_0)^{s_0} \cdots f(t_i)^{s_i}.$$

对于 $k = 0$，该陈述显然成立。因此，假设 $0 < k \leq m$，并假设该结论对所有 $k' < k$ 都成立。于是，根据 $k-1$ 的归纳假设，$t_{k-1} = \langle f(t_{k-1}^{\lambda_{k-1}}) \rangle$ 中最初的 $(m+3-k)$ 个 b 瓦片都由 m_{i-1} 界定。

如果 $t_k \in C(b)$，那么 $f(t_i) = b$，并且由于 p 避开了 $C_m(b)$，由引理 3.5 可知，λ_{k-1} 的长度至少为 $m+1$，因此包含至少 $m+1$ 个 b 瓦片。根据注 4.6，λ_{k-1} 的最后一个 b 瓦片是唯一可能在 λ_k 中发生变化的部分，因此 λ 中最初的 $(m+2-k)$ 个 b 瓦片仍由 $m_{k-1} < m_k$ 界定，正如所声称的那样。

现在假设 $t_k \notin C(b)$。如果 λ_{k-1} 的 a-长度至少为 $m+1-k$，那么根据注 4.6 (2) 和归纳假设，λ_k 中最前面的 $(m+2-k)$ 个 b-瓦片有界于 $m_{k-1} + m_{k-1} + 2 = 2m_{k-1} + 2 = m_k$。然而，如果 λ_{k-1} 的 a-长度小于 $m+1-k$，那么根据上一段可知 $t_{k-1} \notin C(b)$。如果 p 避开 $C(b)$，那么根据推论 4.7，λ 中所有 b-瓦片都有界于 $2 \cdot \sum_{i=1}^{k} i$。否则，令 $s < k$ 为满足 $t_s \in C(b)$ 的极大者。则 λ_{s-1} 的 a- 长度至少为 $m+1$。如果 λ_{k-1} 的 a- 长度小于 $(m+i-k)$，根据注 4.6 (2)，存在 $j < k$使得瓦片$_b(t_j) \leq m_{j-1}$。根据推论 4.5，有瓦片$(f(t_k)) \leq m_{k-2}+1$，因此在这种情况下，λ 中所有 b-瓦片都有界于 $m_{k-2}+1 \leq m_k$。证明至此完成。□

前面的准备工作推出如下结论：

推论 4.10。若 $x, y \in D_1(\langle b \rangle)$，且存在一条从 x 到 y 的路径，其长度至多为 k，并且避开 $C_k(b)$，那么对于某个仅依赖于 k的 k'，有 $y \in \mathrm{Ext}_{k'}(x, \langle b \rangle)$。

证明。对于 (1)，我们可以假设 $x = a$。于是，对 $m, m' \in \mathbb{Z}$，有 $y = \langle b^m a b^{m'} \rangle$，只需证明 m, m' 有一个仅依赖于 k的上界。假设 $p = (a = t_0, \ldots, t_l = y)$ 是一条从 a 到 y的路径，其中 $l \leq k$ 为某个值。由推论 4.3，存在 $s_0, \ldots, s_l \in \mathbb{Z}$，使得 $y = f(y)^{\lambda^{-1}}$，其中 $\lambda = f(t_0)^{s_0} \ldots f(t_l)^{s_l}$。由于 $f(\langle b^m a b^{m'} \rangle) = a b^{m'+m}$，我们有

$$\lambda = b^{m'}(a b^{m'+m})^n \quad \text{for some} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

因此，只需证明：如果 p 避开 $C_k(b)$，那么 λ 中前两个 b-块的长度有一个上界；这由引理 4.9 得出。□

5. Some bounds on blocks

回顾注 2.9.3 中以下简单事实：

(1) 任意两个层级为 $k \geq 0$ 的块都同构，并且存在 $\mathcal{AF}_2$ 的一个自同构将其中一个映到另一个；(2) 对任意边 $e \in \mathcal{AF}_2$，都有 $\mathcal{AF}_2 \subseteq \mathrm{dcl}(\mathrm{Ext}_1(e))$。

由这些事实以及第 10 节中的描述，我们立即得到以下推论：

P命题 *5.1.* *(1)* 对每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在某个 $k' = g_1(k)$，使得对于任意 $e' \in \mathit{Ext}_k(e)$，都有 $e \in \mathit{Ext}_{k'}(e')$。*(2)* 假设 B_1、$B_2 \subset \mathcal{AF}_2$ 分别是层级为 k_1 和 k_2 的块，且 $B_1 \cap B_2$ 包含一条边 e。那么 $B_1 \cup B_2 \subseteq \mathit{Ext}_m(e)$，其中 $m = g_1(\max\{k_1, k_2\})$。*(3)* 任意满足 x 且 y 正交的 x、$y \in \mathcal{AF}_2$ 都包含在一个层级为 *2* 的块中。

证明。 性质 (1) 可由前面的事实推出，(2) 是 (1) 的推论，而性质 (3) 用到了注 3.12。
□

利用上一节的结果，我们还可以得到以下推论：

命题 *5.2*。*(1)* 设 B_1、$B_2 \subset \mathcal{AF}_2$ 分别是层级为 k_1 和 k_2 的块，且满足 x、$y \in B_1 \cap B_2$ 和 $x \notin C(y)$。存在一个仅依赖于 k_1、k_2 的 k'，使得对于任意 $y_2 \in D_1(x)$，$\cap B_2$，扩张 $Ext_{k'}(x, y_2)$ 包含 B_1 和 B_2。*(2)* 设 B_1、$B_2 \subset \mathcal{AF}_2$ 分别是层级为 k_1 和 k_2 的块，且满足 x、$y \in B_1 \cap B_2$。如果 $C(x) = C(y)$，并且从 x 到 y 的 C-路径不是直的，则存在一个层级为 $k' = g_{1(\max\{k_1,k_2\}}$ 的块 B_3，使得 B_3 包含 B_1、B_2。

证明。（1）：设 $x, y \in B_1 \cap B_2$ 满足 $x \notin C(y)$。若 $B_1 \cap B_2$ 包含一条边，则由引理 2 可得结论。否则，取 $y_1 \in D_1(x) \cap B_1$ 和 $y_2 \in D_1(x) \cap B_2$。由引理 4.1，对于 $i = 1, 2$，存在从 y 到 y_i、长度至多为 $2k_i$、包含于 B_i 且避开 $C(x)$ 的路径 p_i。p_1^{-1}与 p_2 的复合是一条从y_1 到 y_2、长度至多为 $2(k_1 + k_2)$且避开 $C(x)$ 的路径。由推论 4.10，我们有 $y_2 \in B' = \text{Ext}_m(x, y_1)$，其中 m 仅依赖于 $2(k_1 + k_2)$。由于 $B' \cap B_1$ 包含边 (x, y_1)，由命题 5.1（2），我们找到一个层级为 $m' = g_1(m)$、包含 B_1 和 B' 的块 B_1'。对 $B_1' \cap B_2$ 中的边 (x, y_2) 应用相同论证，可知对于 $k' = g_1(m')$，块 $\text{Ext}_{k'}(x, y_2)$ 包含 B_1' 和 B_2。

(2)：若 $x, y \in B_1 \cap B_2$ 满足 $x \in C(y)$，则由推论 10.2，连接 x与 y的 C-路径 $p = (x = t_0, \ldots, t_m = z)$ 包含于 $B_1 \cap B_2$ 中。若 p不是直的，令 $0 \leq i < m-1$满足 x_i 与 x_{i+2} 正交。由推论 10.2，作为正交性见证的 z 也属于 B_1 和 B_2。因此，$B_1 \cap B_2$ 包含一条边 e，从而 B_1, B_2 包含于 $\text{Ext}_{k'}(e)$ 中，其中 $k' = g_1(\max\{k_1, k_2\})$。
□

前两个命题可以概括如下：

推论 5.3. 设 $B_1, B_2 \subseteq \mathcal{AF}_2$ 分别是层级为 k_1 和 k_2的块，且 $X = B_1 \cap B_2$ 不包含于形如 $\text{cl}(\ell)$ 的集合中，其中 ℓ是某条直线。则存在仅依赖于 k_1, k_2 的 k'，以及一个层级为 k' 且包含B_1, B_2的块 B_3。

6. The Theory of the Free Factor Complex of rank 2

从现在起，我们将在一个包含以下二元谓词符号的无限语言 L 中进行讨论：

- 关系 E 和 C,
- 关系 D_n，$n \in \mathbb{N}$,
- 关系 C_n，$n \in \mathbb{N}$,
- 关系 par 和 orth,
- 关系 N_k，$k \in N$,
- 关系 B_k，$k \in \mathbb{N}$。

注 6.1. 这些谓词的预期含义如下：当且仅当 $x \in D_n(y)$ 和 $x \in C_n(y)$成立时，关系$D_n(x, y)$ $C_n(x, y)$ 成立，二者分别如上所定义。关系 *par*、*orth* 和 N_k 表示如下

(1) 若存在某个 x，使得 $\ell(x_1,x)$与 $\ell(x_2,x)$平行，则$par(x_1,x_2)$成立；*(2)* 若存在某个 x，使得 $\ell(x_1,x)$与 $\ell(x_2,x)$正交，也就是说 $x_1,x_2 \in C_1(x)$，并且存在某个 $z \in D_1(x_1) \cap D_1(x) \cap D_1(x_2)$，则$orth(x_1,x_2)$成立；*(3)* 若 $C_2(x,y)$成立，并且对于 $z \in C_1(x) \cap C_1(y)$，直线 $\ell(z,x)$与 $\ell(z,y)$是邻线，则 $N_1(x,y)$成立。于是，若存在直线 $\ell_0 = \ell(x,z) \ldots, \ell_k(y,z')$，使得 ℓ_{i-1}与 ℓ_i是邻线，$i = 1,\ldots,k$，则 $N_k(x,y)$ 成立。*(4)* 若存在一条边 e，使得 $x,y \in Ext_k(e)$，则 $B_k(x,y)$ 成立。

这样，我们可以将 $\mathcal{AF}_2$ 视为一个 L-结构。请注意，L 中的所有谓词都可以在 L_0 中定义（需要使用量词！）。

令 T_L 为定义前几节所述 L关系的 L-理论。

引理 6.2。设 $e \in \mathcal{AF}_2$ 是一条边，且 $k \in \mathbb{N}$。那么存在某个仅取决于 k 的 k'，使得$\mathrm{Ext}_k(e)$ 的（无量词） L-图由$\mathrm{Ext}_{k'}(e)$的无量词 L_0-图确定。

证明。这是命题 5.1 的直接推论。 □

定义 6.3。令 T 为由以下公理模式公理化的 L-理论扩张 T_L：

(1) 每个顶点都包含在一条 E-边中；*(2)* 对于每条边 $e = E(x,y)$ 和 $k \in N$，都存在唯一的 k-扩张 $Ext_k(e)$；*(3)* 不存在长度为 $k, k \in \mathbb{N}$ 的 C-圈；*(4)* 如果 $C_2(x_1,x_2)$ 成立，那么 $orth(x_1,x_2)$ 和 $par(x_1,x_2)$ 中恰有一个成立。*(5)* 如果 $par(x_1,x_2)$ 成立，那么存在 z，使得 $orth(x_1,z)$ 且 $orth(z,x_2)$；*(6)* 如果 $x_1,x_2,y \in C_1(z)$，且 $par(x_1,x_2)$ 并且 $orth(y,x_1)$，那么 $orth(y,x_2)$；*(7)* 如果 $x, y \in D_1(z)$，且存在一条长度至多为 k 、从 x 到 y 并避开 $C_k(z)$ 的 E-路径，那么 $y \in Ext_{k'}(x,y)$，其中 k' 仅取决于 k。*(8)* 对每个满足 $C(x,y)$ 的 x,y，恰有两个顶点 z 满足 $N_1(x,z)$ 和 $C(z,y)$；*(9)* 假设 B_1,B_2 分别是层级为 k_1，k_2 的块，并且存在 $x,y \in B_1 \cap B_2$，对于某个仅取决于 k_1 和 k_2 的 k，它们对任何 $m \leq k$ 都不满足 $N_m(x,y)$，那么存在一个层级为 $g(k_1,k_2)$ 且包含 $B_1 \cup B_2$的块 B_3 。*(10)* 如果 $orth(x,y)$ $C(x,y)$ 或 $N_m(x,y)$ $m \geq 1$ 成立，那么 x,y 包含在一个层级为 k 的块中，其中 k 仅取决于关系 $orth$ C_1, N_m，分别如此。

注释 6.4. 注意，根据第 *2–5* 节中的结果，我们有 $T \subseteq Th(\mathcal{AF}_2)$。

定义 6.5. 设 M 是 T 的一个模型，且 p 是 M中的一条路径。根据公理 *2*，p 的每条边都包含在 $\mathcal{AF}_2$ 的唯一一个副本中，因此 M 中有有限多个不同的 $\mathcal{AF}_2$ 副本 B_0、.....、B_k，使得 p 按给定顺序经过这些块。我们称 $(B_0$、.....、$B_k)$ 为 p的块覆盖。

如果对于所有 $i \leq k$，p 与 B_i 的交集都是连通的，我们就称 p 是不返回的。

根据公理 2，路径 p 的块覆盖是唯一确定的。

注意，如果 $\mathcal{AF}_2$ 中的两条直路径在某个顶点相交，那么它们属于正交族；如果一条 C-路径包含在两个不同的 $\mathcal{AF}_2$ 副本中，那么根据公理（9），这条路径是直的。

命题 6.6. 设 M 是 T 的一个模型，设 $p = (x_0, \dots, x_n = x_0)$ 是 M 中一个带有块覆盖 $(B_0, \dots, B_k)$ 的简单圈，并假设 p 是不返回的。令 $a_i \in p \cap B_{i-1} \cap B_i$，$i = 0, \dots, k$，其指标模 k 取值。那么，对于所有 $1 \leq i \neq j \leq k$，有 $C(a_i) = C(a_j)$ 且 $B_i \cap B_j \subset C(a_i)$；并且对于某个 $i \in \{1, \dots, k\}$，存在正交族 $cl(x, x_1)$，$cl(x, x_2) \in B_i \cap C(a_i)$，使得对于所有 $j \neq i$，$B_i \cap B_j \subseteq cl(x, x_1) \cup cl(x, x_2)$。

证明。证明采用关于 k 的归纳法；当 $k = 1$ 时，命题是空的。现在考虑 $k > 1$，并令 $i \in \{1, \dots, k\}$。令 $u_i, v_i \in D_1(a_i)$ 满足 $u_i \in p \cap B_{i-1}, v_i \in p \cap B_i$。那么，$p$ 的一个循环移位 p_i 是一条从 v_i 到 u_i 的路径；由于 u_i, v_i 不包含在同一个块中，根据公理 7，p_i 必经过某个 $w \in p \cap C(a_i)$。令满足此性质且离 a_i 最近的为 $w \in p$。由引理 4.1 可知，我们可以假设对于某个 j，有 $w \in p \cap B_{j-1} \cap B_j$。因此，我们可以假设 $w = a_j \in C(a_i)$。由于从 a_i 到 w 的路径避开了 $C(a_i)$，根据公理 7，存在某个 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $w \in \mathrm{Ext}_m(v_i, a_i) \subseteq B_i$；又由于 p 是不返回的，我们必有 $w = a_{i+1}$。因此，对所有 $i \leq k$，都有 $C(a_i) = C(a_{i+1})$，这就证明了第一个断言。

现在假设第二个断言不成立。必要时通过改变 a_i，我们可以假设唯一的最短 C-路径 $q_i \subset B_i$ 从 a_i 到 a_{i+1} 有 $s_i \geq 3$条直线段。必要时重新排序后，我们还可以假设 s_0 在 s_i中是极小的。由于 $C(a_i)$在边关系 C下是一棵树，路径 $q_0 \subset B_0$等于 q_i、$i = 1$、$\dots k$的复合。注意，$q_1 \circ q_2$ 至少有$(s_0 + 2)$条直线段，因为根据公理 9，q_1 至多只有最后一段会与 q_2的第一段抵消。归纳可知，q_i、$i = 1$、$\dots k$的复合至少有 $s_0 + (k - 1)$条线段。由于这个复合等于 q_0，因此可得 $k = 1$，这就产生了矛盾。□

定义 6.7。如果某个 L-结构 A 是可容许的，且其连通分支为 A_i、$i \in J$（对于某个集合 J），那么以下条件成立：

(1) $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ 其中每个 A_i 都作为一种 L-结构与 $\mathcal{AF}_2$ 或某个层级为 k_i 的块同构，其中 $k_i \geq 1$为某个对象；*(2)* 如果对于某个 $k \in \mathbb{N}$，$C(x, y)$ $E(x, y)$ $B_k(x, y)$，或 $N_k(x, y)$成立，那么对于某个 $i \leq m$，$x, y \in A_i$。*(3)* 当且仅当存在 $x_0 = x, \dots, x_m = y$，使得对于 $i = 0, \dots m-1$，x_i, x_{i+1} 属于同一个连通分支，并且对于某个满足 $k = \sum_{i=0}^{m-1} k_i$的 k_i，$C_{k_i}(x_i, x_{i+1})$成立时，$C_k(x, y)$ $k \geq 2$成立；*(4)* 如果对于 x_1，$C_2(x_1, x_2)$成立，而 $x_2 \in C_1(z)$不在同一个连通分支中，并且存在某个 $y \in A$ 满足 $orth(x_1, y)$和 $orth(x_2, y)$，那么 $par(x_1, x_2)$；*(5)* 如果对于 x_1，$C_2(x_1, x_2)$成立，而 $x_2 \in C_1(z)$不在同一个连通分支中，并且存在某个 $y \in A$ 满足 $par(x_1, y)$和 $par(x_2, y)$，那么 $par(x_1, x_2)$；*(6)* 如果 $x \neq y \in A_i \cap A_j$，那么对于某个 k，$N_k(x, y)$成立；*(7)* 对于任意有限子集 $J_0 \subset J$，L-结构 $A_{J_0} = \bigcup_{j \in J_0} A_j$ 具有一个可移除的连通分支，即存在某个 $k \in J_0$，使得对于某个 $b \in A_k$ 以及 $orth(x_1, x_2)$，$A_k \cap A_{J_0 \setminus \{k\}}$ 包含于 $cl(b, x_1) \cup cl(b, x_2)$ 中。

注 6.8。假设 $A = \bigcup_{j \in J} A_j$ 是可容许的。

(1) 这些连通分支是唯一的。(2) 如果对于 $j \in J$，块 B_j 包含 A_j，那么 $\bigcup_{j\in j} B_j$ 也以一种自然的方式成为可容许的L-结构。(3) 如果对于所有 $j \in J$，$A = \bigcup_{j\in J} A_j$ 关于 $A_j \cong \mathcal{AF}_2$ 都是可容许的，那么根据条件*(7)*，我们看到，对于 $i \neq j \in J$，集合 $X = A_i \cap A_j$ 要么为空，要么是单个顶点，要么具有如下形式：对于某条直线 ℓ，$X = \mathrm{cl}(\ell)$，或者对于正交族 $\mathrm{cl}(\ell)$,$\mathrm{cl}(\ell')$，$X = \mathrm{cl}(\ell) \cup \mathrm{cl}(\ell')$。

定理 6.9。 L-结构 M 是 T 的模型，当且仅当 M 是可容许的，所有分支都与 $\mathcal{AF}_2$ 同构，并且对于任意满足正交(x_1, x_2)的 x_1、$x_2 \in M$，存在一个包含 x_1 和 x_2的连通分支。

证明。 首先假设 M 是可容许的，所有分支都与$\mathcal{AF}_2$ 同构，并且对于任意 x_1、$x_2 \in M$，若 orth(x_1、x_2)，则存在一个包含 x_1 和 x_2的连通分支。那么显然，M 是 T的模型。

现在反过来假设 M 是 T的模型。根据公理 2，每条 E-边 e 都包含于唯一的一个连通分支中，即 $\mathcal{AF}_2$的一个副本。对于 M中的任意两个连通分支$A \neq B$，根据公理 9和公理 2，存在某条直线 ℓ，使得 $A \cap B \subseteq$ cl(ℓ)。

根据命题 6.6，(b) 部分成立：假设 B_0、$\ldots B_n$ 构成一个极小反例，并按某种方式排列，使我们可以选取 $a_i \in B_{i-1} \cap B_i$。于是我们可以构造一条连接这些 a_i、$i = 0$、$\ldots n$ 的简单圈，从而与命题 6.6 矛盾。□

我们记录以下内容以供后文参考：

注 6.10。 假设 M 是可容许的，并令 A 为一个层级为 $k \geq 1$ 的块。假设以下条件之一成立：

- 存在 x_1、$x \in M$ 和 $A \cap M \subset \mathrm{cl}(x_1$、$x)$；或
- 存在 x_1、$x_2 \in M$，它们不包含在与 *orth*$(x_1$、$x_2)$ 共同的块中，并且存在 x_1、x_2 和 $A \cap M \subset \mathrm{cl}(x$、$x_1) \cup \mathrm{cl}(x$、$x_2)$。

令 $M \cup A$ 为如下定义的 L-结构：

(1) 对于 $x \in M \setminus A, y \in A \setminus M$，我们令 $\neg C(x, y)$ $\neg E(x, y)$ $\neg B_k(x, y)$，并令$\neg N_k(x, y)$表示 $k \in \mathbb{N}$；*(2)* 当且仅当从 x到 y存在一条长度为 k 的唯一最短 C-路径时，$C_k(x, y)$ $k \geq 2$成立；*(3)* 若 $C_2(x_1, x_2)$ 对于不在同一连通分支中的 $x_1, x_2 \in C_1(z)$ 成立，且存在某个 $y \in A$，使得 *par*(x_1, y) 且 *par*(x_2, y)，则 *par*(x_1, x_2)；*(4)* 若 $C_2(x_1, x_2)$ 对于不在同一连通分支中的 $x_1, x_2 \in C_1(z)$ 成立，且存在某个 $y \in A$，使得 *par*(x_1, y) 且 *orth*(x_2, y)，则 *orth*(x_1, x_2)；*(5)* 若 $B_k(x, y)$ 成立，则 $x, y \in M$ 或 $x, y \in A$。

那么 $M \cup A$ 是可容许的。

定义 6.11。 对于可容许结构 $A = \bigcup_{i\in J} A_i$、$B = \bigcup_{j\in J'} B_j$、$J \subseteq J'$，我们记作 $A \leq B$，并称 A 在 B 中是强的（或强嵌入的），如果 $A \subset B$ 且

(1) 对于 $j \in J$，有 $A_j = B_j \cap A$；(2) 并且对于每个有限子集 $J_0 \subset J'$、$J_0 \not\subseteq J$，可容许集合 $B_{J_0} = \bigcup_{j\in J_0} B_j$ 都有一个可移除连通分支 B_k，满足 $k \in J_0 \setminus J$。

令 $(\mathcal{K}$、$\leq)$ 为具有偏序 $\leq$的有限可容许结构类。

注 6.12。 (1) 注意，在 $\mathcal{AF}_2$ 中，$B \subseteq \mathcal{AF}_2$ 的任意 $k \geq 1$ 层级块都是可容许结构，并且 $B \leq \mathcal{AF}_2$。

(2) 显然，若 $A = \bigcup_J A_j$，则每个 A_j 在 A 中都是强的。

定义 6.13。设 $A = \bigcup_{j\in J} A_j, B = \bigcup_{j\in J'} B_j \in \mathcal{K}$ 满足 $A \leq B$。若下列条件之一恰好成立，我们称 B 为极小强扩张：

(1) A 和 B 具有相同数量的分支，且 B 中至多有一个分支真包含对应的 A 分支；(2) B 恰有一个分支 B_0，使得 $B_0 \cap A$ 不是A 的分支，且 $A = \bigcup_{j\neq 0} B_j$。

注 6.14。显然，对于 A, B 是具有有限多个极大块的可容许结构，且满足 $A \leq B$的情形，我们可以找到一个有限序列 $A = B_0 \leq B_1 \leq \ldots \leq B_s = B$，其中每个扩张 $B_i \leq B_{i+1}$，$i = 1, \ldots s-1$ 都是极小的。

以下内容对我们的方法至关重要：

命题 6.15。有限可容许结构类$(\mathcal{K}, \leq)$ 相对于 $\leq$具有 *amalgamation* 性质和联合嵌入性质。

证明。设 $A, B, C \in \mathcal{K}$ 满足 $A \leq B, C$。只需考虑 C 是 A 的极小强扩张的情形。

首先，假设 $A, B, C \subset \mathcal{AF}_2$ 是满足 $A \subset B, C$ 的块，并且 $\mathrm{Ext}_k(e)$ 的层级为 $k \geq 1$。令 k' 为满足 $B, C \subseteq D = \mathrm{Ext}_{k'}(e)$ 的极小对象。于是我们称 D 为 B, C 在 A 上的典范 amalgam。根据注 2.7， $\mathcal{AF}_2 \subset \mathrm{dcl}(A)$，因此这一定义是良定的。

接下来，假设 $C = A \cup C_0$，其中 C_0 扩张块 $A_0 \subset A$。令 $B_0 \subset$为 B 中对应的块，并令 D_0 为 B_0 与C_0 在 A_0上的典范 amalgam。于是根据注 6.10 (2)， L-结构 $D = B \cup D_0$ 是可容许的，并且是 B 和 C 的强扩张。

现在假设 $C = A \cup C'$，其中 $C' \cap A \subset \mathrm{cl}(x_1, x) \cup \mathrm{cl}(x_2, x)$，且 $x_1, x_2 \in A$ 是某个正交对。那么我们区分两种情况：

首先，假设存在 $z \in C' \setminus A$， $z' \in B_j \setminus A$，其中某个 $j \in J$ 满足 z，$z' \in D_1(x_1) \cap D_1(x_2)$。那么我们将 z 与 z' 视为相同，并令 D_j 为包含 B_j 和 C' 的最小块。 L-结构 $D = B \cup D_j$ 是可容许的，并且是 B 和 C 的强扩张。

如果情况并非如此，那么我们处于注 6.10 所述的某种情形中，并且再次可以得出结论： $D = B \cup C$ 是 B 和 C 的可容许强扩张。□

定理 6.16. 令 $(\mathcal{K}, \leq)$ 为由有限可容许结构及强嵌入构成的类。模型 M 是 T 的 $\mathcal{K}$-饱和模型，当且仅当它是 ω-饱和模型。因此，T 是完备的，也是 $\mathcal{AF}_2$ 的理论。

证明。只需证明：如果 M 是 ω-饱和模型 T，那么 M 就是 $\mathcal{K}$-饱和的。由此，我们可以用标准方法得出结论（例如参见 [4], 定理 10.4.9）：如果 N 是 T 的一个模型，我们不妨假设 N 是 ω-饱和的，因此也是 $\mathcal{K}$-饱和的。任意两个 K-饱和结构都是部分同构的，因而初等等价（例如参见 [4] 习题 4.4.1 和 1.3.5）。由此可知，T 是完备的。

现在假设 M 是 ω-饱和模型 T。为了证明 M 是 $\mathcal{K}$-饱和的，我们必须证明以下内容：

- 每个只有单个连通分支的可容许结构都可以强嵌入到 M 中；

• 对于每一对 A，$B \in K$ 满足 $A \leq B$ 的对象，以及 A 到 M 的每个强嵌入，我们都可以在 M 中找到 A 上方的 B 的一个强副本。

这也意味着每个可容许结构都强嵌入到 M 中。对于第一点，设 $A \in \mathcal{K}$ 是一个具有单个连通分支的可容许结构，因此 A 同构于某个层级为 $k \geq 1$ 的块，且作为一个 L-结构。由于 M 是 T 的模型，M 中的每条 E-边 e 都包含在唯一的扩张 $\mathrm{Ext}_k(e)$ 中。现在，由命题 6.6 可知，A 强嵌入到 M 中。

对于第二点，假设我们有 A，$B \in \mathcal{K}$，其中 $A \leq B$ 和 A 强嵌入到 M 中。根据注 6.14，我们可以假设 B 是 A 的一个极小强扩张，因此 B 要么扩张 A 的唯一一个连通分支，要么包含一个新的连通分支。

如果 B 扩张 A 的唯一一个连通分支 A_0，那么根据公理 2，我们可以在 M 中扩张这个连通分支，并且这个扩张显然是强嵌入的。

现在假设，对于某个满足 $A \leq B$ 的 B 的连通分支 B_0，有 $B = A \cup B_0$。那么 B_0 在 B 中是可移除的，因此，对于某些正交族，$B_0 \cap A$ 包含于 $\mathrm{cl}(x_1,\ x) \cup \mathrm{cl}(x,\ x_2)$ 中。由于 M 是 ω-饱和的，因此在 M 中存在一个 $\mathcal{AF}_2$ 的副本，以指定的方式与 A 相交；根据命题 6.6，这个扩张是强嵌入的。注意，如果 $B_0 \cap A$ 包含于形如 $\mathrm{cl}(x_1,\ x)$ 的集合中，那么 M 包含无穷多个位于（A 的像）之上的 B_0 的副本，且具有指定的交集。否则，根据公理 9 和 10，M 包含唯一一个块，它与 $\mathrm{cl}(x_1,\ x) \cup \mathrm{cl}(x,\ x_2)$ 中 A 的像相交。□

下面的结论可直接推出：

推论 6.17。设 M 是 $\mathrm{Th}(\mathcal{AF}_2)$ 的一个饱和模型。那么，每个顶点 x 以及每个集合 $\mathrm{cl}(\ell)$ 都包含于 $\mathcal{AF}_2$ 的无穷多个副本中；这些副本分别在 x 或 $\mathrm{cl}(\ell)$ 上共轭。

定理 6.16 的证明还表明了以下有用的推论：

推论 6.18。设 M 是 $\mathrm{Th}(\mathcal{AF}_2)$ 的一个模型，且含有子模型 M_0。那么，当且仅当对于 M 的每个连通分支 M_1，模型 $M_1 \cap M_0$ 是连通的，M_0 才是 M 的强子模型。特别地，M 的任意路径连通子模型都是强嵌入的。

7. Stability

定理 7.1。秩 *2* 的自由因子复形的理论 $\mathrm{Th}(\mathcal{AF}_2)$ 是 ω-稳定的，而 $\mathcal{AF}_2$ 是其素模型。

证明如下引理即可：

引理 7.2。设 M 是一个饱和模型，M_0 是一个可数强嵌入子模型。设 $c \in M$ 和 $a_1 \in M_0$ 满足 $d(c, a_1)$ 是极小的。设 $p = (c = t_0, \ldots\ldots, t_l = a_1, t_{l+1} = a_2)$ 是一条路径，其块覆盖为 $(B_0, \ldots\ldots, B_n)$，其中对于某个 $a_2 \in M_0$，$B_{i-1} \cap B_i = \mathrm{cl}(\ell_i)$ 对某条直线 ℓ_i、$i = 1$、……、n 成立。

令 $C_i \subset B_i, i = 0, \ldots n$ 为层级 k_i 的块，使得 $p \subset \bigcup C_i$ 且令 $z_i \in p \cap B_{i-1} \cap B_i$，$i = 1, \ldots n$，并假设 $D_{n_i}(z_i, z_{i+1})$ 成立。令 $q(x) \subset \mathrm{tp}(c/A)$ 为由下列公式构成的部分类型：

• 存在 $x_1, \ldots, x_{l-1}$，构成从 c 到 a_1 的路径，且 $z_1, \ldots, z_n \in \{x_1, \ldots, x_{l-1}\}$ 满足 $D_{n_i}(z_i, z_{i+1})$、$D_{n_0}(x, z_1)$ 以及 $D_{n_n}(z_n, a)$；
• $B_{k_i}(z_i, z_{i+1})$ $i = 1$、$\ldots n$，以及 $B_{k_0}(x, z_1)$ 和 $B_{k_n}(z_n, a_2)$；

- 描述 p 的无量词公式，其中 p 包含于 C_i 的层级为 k_i的块中的图表内；

- $\neg B_n(x_i, x_{i+2})$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$;
- 对于任意一对 x_i, x_j，若 $C_2(x_i, x_j)$ 指定正交(x_i, x_j) 或平行(x_i, x_j)。

如果 $d \in M$ 实现了 $q(x)$，那么存在一个 M 的自同构，固定 M_0 并将c 映射到 d。

证明。如果 d 实现了 $q(x)$，那么存在一条从 d 到 a_1 的路径 p'，其块覆盖 $(D_0, \dots, D_n)$ 与 $(B_0, \dots, B_n)$ 同构。将 p 映射到 p' 并固定 M_0 的映射可扩展为从 $M_0 \cup \bigcup_{i=0}^{n} B_i$ 到 $M_0 \cup \bigcup_{i=0}^{n} D_i$ 的同构。□

定理 *7.1* 的证明。在可数的 M_0 上，a_1 和路径 p 的类型显然只有可数种可能。因此，Th($\mathcal{AF}_2$) 是 ω-稳定的。由于 Aut($\mathcal{F}_2$) 在 $\mathcal{AF}_2$ 的边上传递地作用，且 $\mathcal{AF}_2$ 在任意一条边中都是代数的，因此 $\mathcal{AF}_2$ 恰好实现孤立类型，故它是 Th($\mathcal{AF}_2$) 的素模型。

□

8. 代数闭包

我们只描述 $\mathcal{AF}_2$ 的副本的子集的代数闭包。一般情形可利用定理 6.16 较容易地由此推出。为简洁起见，我们省略细节。

引理 8.1. 设 $M \models Th(\mathcal{AF}_2)$，并设 $A \cong \mathcal{AF}_2$ 是 M 的一个连通分支。

(1) 对任意 $X \subset A$，有 *acl(X)* $\subseteq A$; *(2)* 若 x、$y \in A$ 且 $x \notin C(y)$，则 *acl(x, y)* $= A$；特别地，对任意 E- 边 $e = (x, y)$，有 *acl(e)* $= A$；*(3)* 若 x、$y \in A$ 且 *orth(x, y)*，则 *acl(x, y)* $= A$; *(4)* 若 x、$y \in A$ 且 $C(x, y)$，则 $y \notin$ *acl(x)* 且 $z \notin$ *acl(x, y)*，其中 $z \in \ell(x, y)$; *(5)* 若 $X \subset$ *cl(ℓ)* $|X| \geq 2$，对 M 中的某条直线 ℓ 而言，则 *acl(X)* $=$ *cl(ℓ)*。*(6)* 若 $x \in C(b)$，且对任意直线 ℓ，x、$y \not\subset$ 都属于 *cl(ℓ)*，则 *acl(x, y)* $= A$。*(7)* 若 $x \in M$ 是一个顶点，则 *acl(x)* $= \{x\}$。

证明。(1)：由推论 6.17 可得。

(2)：首先假设 $x \in D_1(y)$。那么根据事实 2.9，我们有 acl$(x, y) = A$。

现在考虑一般情形，设 B 是一个包含 x 和 y 的层级为 k 的块，并设 $y_2 \in B \cap D_1(x)$。由命题 5.2.1 可知，Ext$_{k'}(x, y_2)$ 包含所有包含 x 和 y 的层级为 k 的块，其中 k' 按该证明中的计算确定。因此，这样的块只有有限多个，从而 $B \subset$ acl(x, y)。由于 B 包含一条边，由第一部分可得 acl$(x, y) = A$。

(3)：若 orth(x, y)，则 $z \in C_1(x) \cap C_1(y)$ 在 x, y 中是代数的，因此 $z_0 \in \ell(z, x) \cap \ell(z, y)$ 在 x, y 中是代数的，且不与 x 共轭。因此，该结论由 (2) 得出。

(4) 这是推论 3.6 的直接结果。

(5) 根据注记 3.17，我们有 cl$(\ell) \subseteq$acl(X)。现在反设存在某个 $z \in$ acl$(X) \setminus$cl(ℓ)，且 cl$(\ell) \subseteq C(x)$。那么根据 (2) 和 (3)，必有 $z \in C(x)$，并且从 z到 x的唯一 C-路径 $(z = z_0, \dots\dots, z_k = x)$ 包含于 acl(X) 中。由于 $z \notin$ cl(ℓ)，存在一对 z_{i-1}，z_{i+1}，使得 orth(z_{i-1}, z_{i+1})，因此根据第 (3) 部分，我们有 acl$(X) = A$，这与注记 3.7 矛盾。

(6) 如果对任意 ℓ， $x \in C(y)$ 且 x， $y \not\subset \mathrm{cl}(\ell)$，那么根据引理 3.5，从 x 到 y 的唯一 C-路径 ($x = z_0$，……，$z_n = y$) 包含 z_{i-1}，z_{i+1}，其中 $\mathrm{orth}(z_{i-1}, z_{i+1})$，因此根据第 (3) 部分，$\mathrm{acl}(x, y) = A$。

(7) 设 $x \in A$，并假设 $y \in$ 代数闭包(x)。那么由 (2) 和 (3) 可知，我们必有$z \in \mathcal{C}(x)$，因此从 x 到 z 的唯一 C-路径包含于代数闭包(x)中，这再次与第 (3) 部分矛盾。

□

注 8.2. 注意，代数闭集 $A \subset \mathcal{AF}_2$ 要么是单个顶点，要么形如 闭包(ℓ)，其中 ℓ 是一条直线；也可能是所有的 $\mathcal{AF}_2$。特别地， $A =$ 代数闭包(x, y)至多包含两个元素 $x, y \in \mathcal{AF}_2$。

与直角建筑的情形一样（见 [5]），可以证明，对于任意模型 M，若其满足 理论($\mathcal{AF}_2$) 且 $X \subset M$，则有

$$\mathrm{acl}(X) = \bigcup_{x,y \in X} \mathrm{acl}(x, y).$$

9. From models of $Th(\mathcal{AF}_2)$ to models of $Th(\mathcal{OF}_2)$

我们以一段关于 Th($\mathcal{AF}_2$) 的模型与 Farey 图理论的模型之间关系的评论结束本文。

定义 9.1。 给定一个 $Th(\mathcal{AF}_2)$ 的模型 M，我们定义图 M^c 如下：

- M^c 的顶点是 M 中顶点的 C-连通分支。
- 若存在分别取自两个类的代表元，使它们在 M 中相对于 E 相邻，则这两个顶点在 M^c 中相邻。

存在一个自然映射

$$\pi : M \longrightarrow M^c, \quad x \mapsto [x],$$

将 M 中的每个元素映射到其 C 连通分支。

我们将 M^c 的 共轭商 称为 M。

我们注意到，模型 Th($\mathcal{AF}_2$) 中一个顶点的 C 连通分支是 $\bigvee$ 可定义的。

备注 9.2。 根据将 $\mathcal{OF}_2$ 定义为 $\mathcal{AF}_2$ 在共轭下的商，显然，如果 M 是 $\mathcal{AF}_2$ 的一个模型，那么 M^c 是 $\mathcal{OF}_2$ 的若干副本的并集，并且根据定理 *6.9*，这些副本只能在一个顶点处相交。

命题 9.3。 对于每个 $M \models Th(\mathcal{AF}_2)$， M^c 都是 $\mathcal{OF}_2$ 的理论的一个模型。

证明。 给定 M^c，考虑如 [3] 中所述的关联图 Γ： Γ 的顶点对应于 M^c 中 $\mathcal{OF}_2$ 的副本；如果两个相应的 $\mathcal{OF}_2$ 副本具有公共顶点，则这两个顶点之间存在一条边。根据 [3], 定理 2.23，只需证明 Γ 没有环，而这直接由命题 6.6 得出。□

10. Appendix

在本附录中，我们描述块 $\mathrm{Ext}_k(e)$ 的无量词图，其中 $e = E(x, y)$。

设 $X_1 = \mathrm{Ext}_1(x, y)$。那么， x， y 的四个公共邻点——按照 [1], 的说法，我们称其为悬挂点——是顶点 xy， $x^{-1}y$， xy^{-1}， $x^{-1}y^{-1}$，并且还满足以下附加关系：

- $C(xy, x^{-1}y^{-1})$;

- $C(x^{-1}y, xy^{-1})$.

然后， $X_2 = \mathsf{Ext}_2(x,\ y)$还包含以下额外顶点，它们分别对应于 $\mathsf{Ext}_1(x,\ y) \setminus \{(x,\ y)\}$的八条边。 X_2的新顶点分为三种不同类型。对于 $X_1 \setminus \{(x,\ y)\}$ 中的八条边，每条边都对应一个唯一的新顶点，并满足以下额外关系：

(1) x^2y 是 $\{x, xy\}$的一个悬挂点，与 $y^{-1}xy$ 有一条 E边，与 xyx有一条 C边；(2) $x^{-2}y$ 是 $\{x, x^{-1}y\}$的一个悬挂点，与 $y^{-1}xy$ 有一条 E边，与$xy^{-1}x$有一条 C边；(3) x^2y^{-1} 是 $\{x, xy^{-1}\}$的一个悬挂点，与 yxy^{-1} 有一条 E边，与 $xy^{-1}x$有一条 C边；(4) $x^{-2}y^{-1}$ 是 $\{x, x^{-1}y^{-1}\}$ 的一个悬挂点，与 $y^{-1}xy$ 有一条 E边，与 xyx有一条 C边；(5) $x^{-1}y^{-2}$ 是 $\{y, x^{-1}y^{-1}\}$的一个悬挂点，与 yxy^{-1} 有一条 E边，与 yxy有一条 C边；(6) $x^{-1}y^2$ 是 $\{y, x^{-1}y\}$的一个悬挂点，与 $x \in y^{-1}x$ 有一条 E边，与 $yx^{-1}y$有一条 C边；(7) xy^{-2} 是 $\{y, xy^{-1}\}$的一个悬挂点，与 xyx^{-1} 有一条 E边，与$yx^{-1}y$有一条 C边；(8) xy^2 是 $\{y, xy\}$的一个悬挂点，与 $x^{-1}yx$ 有一条 E边，与 yxy有一条 C边。

下一组顶点由这样的顶点组成：它们是共享一个顶点的两条边的公共扩展；前四个分别是 x、 y 的 1-共轭元，后四个没有 C-边。

(1) xyx^{-1} 是 $\{x, xy\}$、$\{x, xy^{-1}\}$ 的悬挂点，并且与 y 之间有一条 C-边；(2) $x^{-1}yx$ 是 $\{x, x^{-1}y\}$、$\{x, x^{-1}y^{-1}\}$ 的悬挂点，并且与 y 之间有一条 C-边；(3) yxy^{-1} 是 $\{y, x^{-1}y^{-1}\}$、$\{y, xy^{-1}\}$ 的悬挂点，并且与 x 之间有一条 C-边；(4) $y^{-1}xy$ 是 $\{y, x^{-1}y\}$、$\{y, xy\}$ 的悬挂点，并且与 x 之间有一条 C-边；(5) xyx 是 $\{x, xy\}$ 和 $\{x, x^{-1}y^{-1}\}$ 的悬挂点。(6) $xy^{-1}x$ 是 $\{x, xy^{-1}\}$ 和 $\{x, x^{-1}y\}$ 的悬挂点。(7) yxy 是 $\{y, x^{-1}y^{-1}\}$ 和 $\{y, xy\}$ 的悬挂点。(8) $yx^{-1}y$ 是 $\{y, x^{-1}y\}$ 和 $\{y, xy^{-1}\}$ 的悬挂点。

为了完整描述 L在 X_2 上的结构，我们还指出，以下顶点对以 x为见证正交：

- xyx^{-1} 和 $x^{-1}yx$;
- x^2y^{-1} 和 $x^{-2}y$;
- x^2y 和 $x^{-2}y^{-1}$;

以下顶点对以 y为见证正交：

- yxy^{-1} 和 $y^{-1}xy$;
- y^2x^{-1} 与 $y^{-2}x$; 以及
- y^2x与 $y^{-2}x^{-1}$。

所有其他满足 $u \in C_2(v)$ 的顶点对 $u, v \in X_2$ 均相互平行。

现在， $X_{k+1} = \mathsf{Ext}_{k+1}(x, y)$ 按如下方式由 X_k 构造：

取出 X_k 中每一条满足 $\mathsf{Ext}_1(e) \subset X_k$ 但不满足 $(e) \not\subset X_k$ 的边 e，并添加 $\mathsf{Ext}_1(e)$ 中尚未包含在 X_k 内的所有边的悬挂点，如上所述。

注释 10.1. 注意，新的 E边不会缩短顶点之间的距离；如果一个新顶点至少有三条 E边，那么其中两个邻点之间就有一条边。此外，每个新顶点至多有一条 C边。

推论 10.2. $x, y \in X_k = \mathrm{Ext}_k(e)$ 成立：

(1) 若 $x \in C(y)$，则从 x 到 y 的唯一 C-路径属于 X_k。(2) 若 $x, y \in X_{k-1}$，则 x 和 y 在 X_k 中的 E-距离不会减小。(3) 若 x, y 正交，则正交见证点位于 X_k中。

证明。对于 (1)，假设存在 $x, y \in X_k$，使得从 x 到 y的 C-路径位于 X_{k+1} 中，且其长度 d 在 d 下极小。那么这条路径包含 $d-1$ 个新顶点和 d 条新的 C-边，这是不可能的，因为每个新顶点至多有一条 C-边。

对于 (2)，我们已经指出，新的 E-边不会缩短距离；对于 (3)，我们指出，任何度至少为 3 的新顶点都有两个邻点构成一条边。因此，它们不正交，所以新顶点不是先前顶点的正交见证点。□

References

[1] M. Bestvina、M. R Bridson, *Rigidity of the free factor complex*。 *arXiv:2306.05941*, 2023年。[2] A. Hatcher、K. Vogtmann, *The complex of free factors of a free group*, 《数学季刊》第49卷第4期，1998年12月，第459–468页。[3] Z. Mohammadi、K. Tent, *On the model theory of the Farey graph*, 预印本：https://arxiv.org/pdf/ 2503 02121 。K. Tent、M. Ziegler, *A course in model theory*。[4]《逻辑讲义》第40卷。符号逻辑协会，拉霍亚，加利福尼亚州；剑桥大学出版社，剑桥，[5] *The free pseudospace is n-ample but not (n + 1)-ample* 2012 K. Tent, ，。《符号逻辑杂志》第79卷第2期，第410–428页，2014年。[6] A. Ammer、K. Tent, *On the Model Theory of Open Generalized Polygons*。《模型论》第3卷第2期，第433–448页，2024年。[7] V. Disarlo、T. Koberda、J. de la Nuez Gonz´alez, *The model theory of the curve graph*。*arXiv:2008.10490*, 2023年。[8] M. Cohen、W. Metzler 和 A. Zimmermann, *What does a basis of F a b look like? Math-*（，）。，*ematische Annalen* 257, 4, 435 445, 1981《》第卷第期，第–页。