arXiv:2603.17113v1 [math.CO] 17 Mar 2026

最大局部边连通度为 k 的图的 k-可选择性 Brooks 型定理

SAM BASTIDA 和 NICK BRETTELL

摘要。对于至少有两个顶点的图 G， G 的最大局部边连通度是对 G 中所有不同顶点对 $(u,\ v)$，取边不相交的 $(u,\ v)$-路径数量的最大值。Stiebitz 和 Toft（2018年）证明了最大局部边连通度为 k 的图的 Brooks 型定理，指出最大局部边连通度为 k 的图不是 k-可着色，当且仅当它有一个属于$\mathcal{H}_k$ 的块；该类图可通过对 K_{k+1} 的副本以及在 $k=3$ 时的奇轮图进行 Haj´ós 合并得到。我们证明，最大局部边连通度为 k 的 2-连通图是 k-可选择着色，当且仅当它不属于$\mathcal{H}_k$。另一方面，对于最大局部边连通度为 k （可能不是 2-连通）的图，判定其 k-可选择性是 Π_2-完全的。为证明前一个结果，我们首先证明了度可选择性一个著名刻画的若干推广；这些推广本身也可能具有研究价值。

1. 引言

Brooks 定理指出，最大度为 k 的连通图是 k 可着色的[1]，除非它是奇圈或完全图；在这种情况下，需要 $k+1$ 种颜色 [8]。Vizing [21] 以及独立地由 Erd˝os、Rubin 和 Taylor [10] 给出了 Brooks 定理关于列表着色的扩展。设 G 为一个图。 G 的列表赋值是一个函数 L，它将 $V(G)$ 映射到正整数的子集。对于正整数 k， k-列表赋值是 G 的一个列表赋值 G，满足对所有$v \in V(G)$，均有 $|L(v)| = k$。对于 G 的列表赋值 L，若存在 G 的一个正常 k 着色 ϕ，使得对每个 $v \in V(G)$，都有 $\phi(v) \in L(v)$，则称 G 是 L 可着色的。如果图 G 对每个 G 的k-列表赋值 L 都是 L 可着色的，则称其为 k 可选择着色。使用贪心着色策略很容易看出，最大度为 k 的图是 $(k+1)$-可选择着色的。不过，和 Brooks 定理一样，当图不是奇圈或完全图时，我们还能得出更强的结论。

定理 1.1 (Vizing [21]; Erd˝os、Rubin 和 Taylor [10])。设 G 是一个最大度为 k的连通图。当且仅当它不是奇圈或完全图时，图 G 是 k-可选择着色的。

图中不同顶点 u和 v 之间的局部边连通度，是从 u 到 v的边不相交路径的最大条数。对于至少有两个顶点的图 G，其最大局部边连通度定义为图 G 所有不同顶点对之间局部边连通度的最大值；对于至多有一个顶点的图，我们将最大局部边连通度定义为零。由 Mader 的一项结果 [16] 可知，最大局部边连通度为 k 的图有一个度为 k的顶点。此外，图 G 的最大局部边连通度在其子图 G中只能减小。因此，对于最大局部边连通度为 k的图 G，其每个子图 G都含有一个度至多为 k的顶点；也就是说， G 是 k-退化的。通过选择适当的顶点排序，再采用贪心着色策略，很容易看出，这样的图是（$k+1$）-可着色的，事实上也是（$k+1$）-可选择着色的。

Stiebitz 和 Toft 证明了一个关于最大局部边连通度为 k [19] 的图的 Brooks 型定理。为陈述这一结果，我们需要一种称为 Haj´os 并接的操作。设 G_1 和 G_2 为两个边集不相交的图，且 $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v\}$，其中 uv 是 G_1的一条边， vw 是 G_2的一条边。我们对 G_1 和 G_2 在 (v,u) 和 (v,w) 上作 Haj´os 并接，记作 $(G_1,v,u) \triangle (G_2,v,w)$：从 G_1中删除边 uv，从 G_2中删除边 vw，然后通过识别

[1]这里，“k-可着色”是指该图具有一个适当的顶点 k-着色。对于其他未定义的术语，请参阅第 2 节。

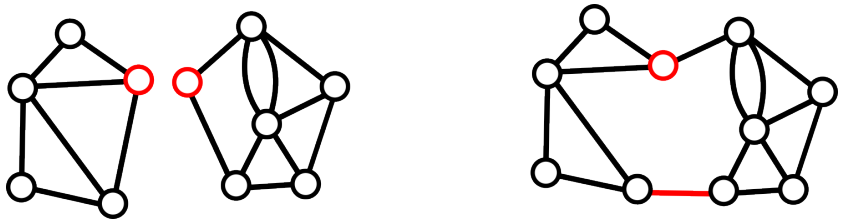


图 1. Haj´os 连接

v 在 G_1 和 G_2中，并添加一条边 uw （见图 1）[2]。现在，对于 $k \geq 4$，令 $\mathcal{H}_k$ 为这样一类图：由与 K_{k+1} 同构的图构成的类在 Haj´os 并接操作下闭包得到。我们还令 $\mathcal{H}_3$ 为由奇轮图构成的类在 Haj´os 并接操作下闭包得到。

定理 1.2 (Stiebitz 和 Toft [19])。设 G 是一个最大局部边连通度为 k 的图，其中$k \geq 3$。图 G 可 k着色，当且仅当 G 的任何块都不同构于 H_k 中的成员。

由于最大度为 k 的图的最大局部边连通度至多为 k，因此这一结果推广了 Brooks 定理。我们注意到，Aboulker 等人 [2] 首先证明了 $k = 3$ 的情形，以及图还具有 k连通性且满足 $k \geq 4$ 的特殊情形。此外，我们注意到，容易将定理 1.2 推广到 $k \leq 2$ （ [19] 中也有此观察）。这是因为，当 G 是一个连通图时，不难看出， G 的最大局部边连通度至多为 2，当且仅当它是仙人掌图（其中任意两个不同的圈没有公共边）；其局部边连通度至多为 1，当且仅当它是一棵树。

本文研究最大局部边连通度为 k 的图的 k可选择性 Brooks 型定理，试图推广定理 1.1 和定理 1.2。乐观地看，人们或许会仿照定理 1.1，希望唯一不可 k可选择着色的图，就是那些不可 k可着色的图。但事实并非如此：图 2 展示了一个最大

[2]我们允许在含有平行边的图上进行 Haj´os 联接。即使 u 与 v 之间和/或 v 与 w 之间存在平行边，我们仍使用记号 $(G_1, v, u) \triangle (G_2, v, w)$；由于我们只关注同构意义下的图，因此可以避免任何潜在的歧义。

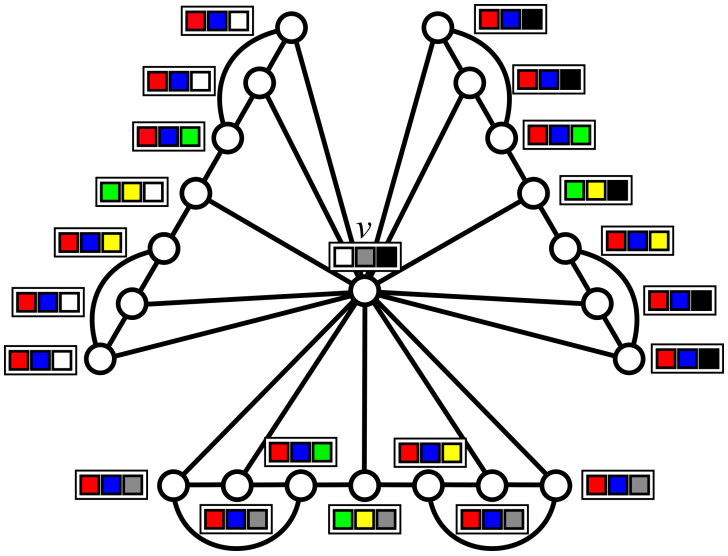


图 2. 一个 H 最大局部边连通度为 3 的图（图中通过特定的 3-列表赋值加以说明），它不是 3- 列表可着色的；尽管 H 它是 3- 可着色的，并且 H 的每个块都是 3- 列表可着色的。

局部边连通度为 3、3-可着色但并非 3-列表可着色的图。不过请注意，该图并不是 2-连通的。我们证明如下：

定理 1.3. 设 G 是一个最大局部边连通度为 k 的 2-连通图，其中 $k \geq 3$。图 G 是 k-可选择着色的，当且仅当 $G \notin H_k$。

此外，我们证明，只有当 L 将每个顶点都映射到同一个 k 颜色集合时，$\mathcal{H}_k$ 中的这类图才会在某个 k-列表赋值 L 下无法 L-着色（见定理 9.3）。

由于存在一种多项式时间算法，可以判定最大局部边连通度至多为 k 的图是否属于$\mathcal{H}_k$ （见 [19]），由此可得一个推论：对于最大局部边连通度为 k 的 2-连通图， k-可选择性问题——即判定一个图对于某个固定的 k 是否为 k-可选择着色的问题——是多项式时间可解的。

值得进一步说明定理 1.2 和 1.3 对连通度的不同要求。回顾一下，图的一个块 是一个极大连通子图 H，满足 $|V(H)| \geq 2$，且 H 没有割点。当且仅当 G 的每个块都是 k- 可着色的，图 G 才是 k-可着色的；这是因为必要时可以置换分配给某个块的颜色，从而得到 G 的一个着色。将这一事实与对最大局部连通度为 k 且无法 k-着色的 2-连通图的刻画结合起来，即可得到定理 1.2。然而，并非总是如此：即使一个图的每个块都是 k-可选择着色的，该图也未必是 k-可选择着色的；图 2 展示了这一点。

尽管如此，我们或许仍可期待定理 1.3 的某种版本：不再要求 G 是 2-连通的，而是允许一个更大的例外图类别，其中包括图 2 所示的图（例如）。遗憾的是，鉴于以下定理，任何合理形式的此类刻画似乎都难以实现。该结果的证明是对 Erd˝os、Rubin 和 Taylor [10] 的一个困难性证明所作的直接扩展。

定理 1.4。 对于每个整数 $k \geq 3$，当限制在满足
具有最大局部边缘连通度 k 的图的 k-可选择性
边连通度 k 的 Π_2-可选择着色问题是 Π_2-完全的。

尽管如此，对于最大局部边连通度为 k、且作为较大连通图中的一个块时可能导致 k-可选择着色问题出现困难的 2-连通图，我们仍能作出更多说明。再看图 2 所示的图。它由三个两两同构的块组成。将其中一个块记为 B。若图 G 中的顶点 u 满足：存在 k 的一个列表赋值 L，使得 G 且 $c \in L(u)$，并且 G 的每个 L-着色 ϕ 都有 $\phi(u) \neq c$，则称该顶点为 k-受限 顶点。在这个例子中，尽管 B 是 3-列表可着色的，标记为 v 的顶点却是 B 的一个 3-受限顶点。给定 k 个图，其中每个图都是 k-可选择着色的，且都有一个 k-受限顶点，我们可以将每个图中的 k-受限顶点识别起来，从而得到一个不可 k-可选择着色的新图。

我们证明了如下必要条件：最大局部边连通度为 k 的 2-连通图若要有一个 k-受限顶点，必须满足该条件。为描述这一条件，我们先给出一些定义。注意，以下允许图含有平行边。设图 G 的最大度不超过 k，且最小度严格小于 k。令 G_k^+ 为从 G 得到的图：添加一个顶点 h，并对每个顶点 $v \in V$（G），在 h 与 v之间添加 $k - d_G$（v）条平行边。注意，除 h外， G_k^+ 的每个顶点的度均为 k。我们称 G_k^+ 为 G 的几乎 k-正则扩展 。若图 G非空、连通，且 G 的每个块都同构于完全图或奇圈，则称 G为***Gallai*** 树 。对每个 $k \geq 3$，令$\mathcal{T}_k$ 为如下图类：它包含最大度不超过 k 且最小度严格小于 k的任意 Gallai 树的几乎 k-正则扩展，并且对 Haj´os 联接（及同构）封闭。注意，对任意 $k \geq 3$，都有$\mathcal{H}_k \subseteq \in \mathcal{T}_k$ 。

定理 1.5。 设 G 是一个最大局部边连通度为 k 的2-连通图，其中 $k \geq 3$。若 G 有一个 k-受限顶点，则 $G \in T_k$。

再来考虑这样一个问题：当图 G 的最大局部连通度为 k，且 G 不是 2-连通时，判断它是否 k-可选择着色。若 G 的任何块都不属于$\mathcal{T}_k$，那么 G 的任何块都没有 k-受限顶点，因此 G 是 k-可选择着色。然而，若 G 确实有这样的块，它可能是 k- 可选择着色，也可能不是；由于定理 1.4，要确定这一点似乎毫无希望。

1.1. **我们的策略**。为了证明定理 1.3，人们或许希望推广 Stiebitz 和 Toft [19] 用于证明定理 1.2 的策略。他们的方法高度依赖临界

图；也就是说，色数在任何真子图中都会降低的图。尽管列表临界图 [20] 和可选择临界图 [22]已有研究，但它们似乎缺乏证明 [19]中所用的临界图所具有的许多有用性质。

Aboulker 等人 [2] 采用了另一种方法。他们首先考察图同时也是 k-连通图这一特殊情形，并证明了定理 1.2 对这一类图的一个较弱版本。他们利用了这类图的一项结构性质（最大局部边连通度为 k 的 k-连通图可以分解为若干部分，每部分至多包含一个度大于 k 的顶点，这些部分由互不相交的 k-边割分隔 [2, 引理 3.2]），并结合了一个允许存在单个高度数顶点的 Brooks 定理版本 [2, 引理 3.1]。随后，在 $k = 3$ 的情形下，通过沿 2-分离进行分解并作分类讨论，可以得到更一般的结果。

采用类似方法并结合已知的度可选择性刻画（见第 2 节中的定理 2.4），不难得到同时也是 k-连通图的图所满足的定理 1.3 的一个较弱版本。然而，对于 k-可选择着色，处理 2-分离要复杂得多。为了说明其中的困难，考虑一个最大局部连通度为 3 的图 G，其中G是 Haj´os 联接 $(G_0, v, u) \triangle (G_1, v, w)$，且 G_0 和 G_1 是 3-连通图。如果 G_0 和 G_1 都是 3-可着色的，那么通过置换颜色，很容易得到 G 的一个 3-着色。假设 G_0 和G_1 都是 3-列表可着色的。令 L 是 G 的一个 3-列表赋值，并令 $L_0 = L|_{V(G_0)}$ 和 $L_1 = L|_{V(G_1)}$。可能存在这样的情况：对于 G_1 的任意 L_1- 着色 ϕ_1，若 $\phi_1(v) = 1$，则 $\phi_1(w) = 2$。在这种情况下，要断言 ϕ_1 可以扩展为 G 的一个 L-着色，仅知道 G_0 是 3-列表可着色还不够：我们需要 G_0 的一个L_0-着色 ϕ_0，使得若 $\phi_0(v) = 1$，则 $\phi_0(u) \neq 2$。

为解决这一问题，我们引入极性列表着色的概念（见第 3 节）。我们研究一类图，其中部分边是“极化”的。对于一条极化边，例如 $e = uv$，通常的约束是 u 和 v 必须着不同的颜色；而在这里，我们改为要求不能同时出现 u 着某种颜色 c_u 且 v 着某种颜色 c_v 的情况（也就是说，如果 u 着c_u，那么 v 就不能着 c_v，反之亦然）。随后，我们证明了关于度可选择性的一个著名刻画（见定理 2.4）的若干推广结果；这些结果本身也可能具有独立的意义。首先，我们证明了一个刻画带有极化边的图何时具有度可选择性的结果（见第 4 节中的定理 4.1）。接着，我们进一步推广这一结果，允许存在一个高次数顶点（见第 5 节中的定理 5.4），并给出具有一个高次数顶点的图拥有 k-受限顶点的一个必要性质（见第 6 节中的定理 6.1）。利用这些结果，我们证明定理 1.3 的策略是先证明定理 1.5，然后考虑 $\mathcal{T}_k$ 中不是k-可选择着色的图。

我们注意到，极性列表着色与 DP 着色（也称为对应着色）相关。Dvorak 和 Postle [9] 引入了这种着色，目的是证明不含长度为 4 至 8 的圈的平面图是 3-列表可着色的，其原因与前两段所述相似。极性列表着色可以视为一种 DP 着色，但 DP 着色的范围更广。Bernshteyn 等人 [5] 给出了 DP 着色图的度可选择性刻画（允许存在平行边），而 Kim 和 Ozeki [13] 则完整描述了例外情形；这些结果可以推出我们的定理 4.1，但还需要进行一些分析，因此为求完整，我们给出一个独立证明。尽管如此，我们认为极图是一种有用的抽象，对于无需采用 DP 着色完整一般性的一些情形（例如本文所讨论的情形），极图本身可能也值得单独研究。

1.2. 相关类别及先前研究。 最大局部边连通度为 k 的图类（其中 k 为某个正整数）此前已有研究，此外还有若干相关类别。下面我们将介绍这些类别，并简要概述与之相关的先前研究。

点连通度也有最大局部边连通度的类似概念。设 G 是一个图，u 和 v 是 G中两个不同的顶点。u 与 v之间的局部连通度记为 $\kappa(u, v)$，即从 u到 v的内部不相交路径的最大条数。对于至少有两个顶点的图 G，其最大局部连通度是对 G中所有不同顶点 u、v取 $\kappa(u, v)$所得的最大值；对于至多只有一个顶点的图，我们将最大局部连通度定义为零。我们用 $\lambda(u, v)$表示 u与 v之间的局部边连通度。显然，$\kappa(u, v) \leq \lambda(u, v) \leq \min\{d(u)\ d(v)\}$，因此，最大度至多为 k 的图，其最大局部边连通度至多为 k，进而，这类图的最大局部连通度至多为 k。由于三次图类的树宽无界

因此，对于 $k \geq 3$，最大局部（边）连通度为 k的图类也具有无界树宽。确定最大局部（边）连通度为 k 的图中边数的最大值及其极值图这一问题，可追溯到20世纪60年代的Bollob´as和Erd˝os，并且已得到深入研究 [6, 14, 16, 18]。

对于任意整数 $k \geq 2$，若图 G 至少有 $k+1$ 个顶点，且对于所有不同的顶点 $u, v \in V$，均有 $\kappa(u, v) \geq k$，则称其为 k-连通图（根据 Menger 定理，这一定义等价于更标准的 k-连通定义）。若图 G 是 k-连通的，且删除任意一条边后所得图都不是 k-连通的，则称其为极小 k-连通图。根据引理 4.2], 一个 k-连通图是极小k-连通图，当且仅当对于每一对相邻顶点 u 和 v [6, , 都有 $\kappa(u, v) = k$ 。因此，极小 k-连通图类是最大局部连通度为 k 的 k-连通图类的超类。

如果对于图 G 中每一对不同顶点 u 和 v ，都有 $\kappa(u, v) = k$ ，则称图 G 为一致 k-连通图；而如果对于图 G 中每一对不同顶点 u 和 v ，都有 $\lambda(u, v) = k$ ，则称该图为一致 k-边连通图。注意，最大局部（边）连通度为 k 的图是一致 k-连通图（或一致 k-边连通图），当且仅当它是 k-连通图（或 k-边连通图）。此外，最大局部边连通度为 k 的 k-连通图是一致 k-边连通图。文献 [4, 11, 12, 23] 研究了一致 k-连通图。Aboulker 等人 [2] 以及 G¨oring 等人 [12], 独立证明，当 $k = 3$ 时，一致 k-连通图是一致 k-边连通图，但当 $k \geq 4$ 时则不成立。因此，根据定理 1.2，可以轻易得出：对于均匀3-连通图，判定其是否具有 3-可着色性（并找到一种 3-着色）的多项式时间算法是存在的（ [2] 最早指出了这一点）。然而，当 $k = 3$ [2, 时，判定最大局部连通度为 k 的图是否 k-可着色是 NP 完全的（命题 4.2], ）；采用这一方法的变体，还可以证明当 $k \geq 4$ 时，该问题同样是 NP 完全的（见附录 A）。这表明，对于最大局部连通度为 k 的图，似乎不可能将 Brooks 定理推广到 $k \geq 3$。据我们所知，当 $k \geq 4$ 时，判定一致 k-连通图是否 k-可着色的复杂度仍未解决（见 [2,问题 1.7]）。

最后，我们注意到 也已将定理 1.2 推广到超图 [17], 和有向图 [1].

2. 预备知识

除非另有说明，我们沿用 [7] 中的术语。我们将图视为一对 (V, E)，并附带一个隐式关联函数，该函数为 V中的每条边 $e \in E$指定一对不同的顶点；这两个顶点也称为 e的端点。本文中的图均无环，但可以有平行边[3]；由于我们通常关注图在同构意义下的等价类，因此仍将一条以 u 和 v 为端点的边 e 称为“uv”，而不会产生歧义。若图没有边，则称其为空边图；若没有顶点，则称其为空图。没有平行边的图称为简单图。平行类是相邻顶点之间所有边构成的集合。

设 G 是一个图。我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示 G 的顶点集和边集。对于图 H，我们用 $G \cong H$ 表示 G 与 H 同构。对于 $V' \subseteq V(G)$，令 $G[V']$ 表示 G 在顶点集 V' 上的子图，其边集由 $E(G)$ 中端点均属于 V' 的每条边组成。若对于某个 $V' \subseteq V(G)$，有 $G' \cong G[V']$，则称 G' 是 G 的导出子图。对于 $v \in V(G)$，我们用 $G - v$ 表示 $G[V(G) \setminus \{v\}]$。同样，对于 $X \subseteq V(G)$，我们用 $G - X$ 表示 $G[V(G) \setminus X]$。对于 $e \in E(G)$（或 $X \subseteq E(G)$），我们分别用 $G\backslash e$ （或 $G\backslash X$ ）表示顶点集为 $V(G)$、边集为 $E(G) \setminus \{e\}$（或 $E(G) \setminus X$）的图。顶点 $v \in V(G)$ 的度是与 v 关联的边数。对于顶点 $v \in V(G)$，我们用 $d_G(v)$ 表示 v 的度；当上下文明确时，也简写为 $d(v)$。 G 的最大度（或最小度）是遍历 G 的所有顶点后所得的最大（或最小）顶点度。若每个顶点的度均为 k，则称图为 k-正则图。图 G 中顶点 v 的邻域记为 $N_G(v)$，或简写为 $N(v)$，它是所有与 v 相邻的顶点组成的集合。若图 G 中的顶点 v 满足 $N(v) \cup \{v\} = V(G)$，则称其为支配顶点。对于 $X, Y \subseteq V(G)$，(X, Y)-路径是指一条从某个 $u \in X$ 到某个 $v \in Y$ 的路径。我们称其为 (x, y)-、(X, y)-和 (x, Y)-路径，而不称为 $(\{x\}, \{y\})$-、$(X, \{y\})$-和 $(\{x\}\ Y)$-路径。

[3]虽然在研究图着色问题时允许平行边并不常见，但这对于我们所说的极性列表着色很方便，也有助于定义在 Haj´os 联结下封闭的某些图类。

在方便时，我们将路径或圈视为子图。特别地，对于路径 P，我们用 $V(P)$ 和 $E(P)$ 分别表示该路径的顶点和边。路径 P 的长度为 $|E(P)|$。若两条 (u,v)-路径 P 和 P' 满足 $E(P)\cap E(P')=\emptyset$ 且 $V(P)\cap V(P')=\{u,v\}$，则称它们内部不相交。圈或路径的长度是其中边的数量；若圈（或路径）具有奇数长度，则称其为奇圈（或奇路径）。奇轮是一个简单图，它可由一个奇圈（长度至少为三）添加一个顶点得到；该顶点称为枢纽，且与圈上的每个顶点相邻。完全图记为 K_n，它是一个有 n 个顶点的简单图，其中每个顶点的度均为 $n-1$，其中 $n\geq 1$ 是某个数。图 G 中的团是一个集合 $X\subseteq V(G)$，使得 $G[X]$ 同构于一个完全图。我们用 I_k 表示由两个顶点以及它们之间的 k 条边组成的图。

对于 $v\in V(G)$，如果 $G-v$ 的连通分量多于 G，我们称 v 为**割点**；否则，v 为**内部**顶点。对于 $X\subseteq V(G)$，如果 $G-X$ 的连通分量多于 G，我们称 X 为**点割集**。对于不相交集合 A，X，$B\subseteq V(G)$，如果 G 中的每条 (A,B)-路径都包含 X 中的一个顶点，我们称 X 将 A 与 B **分离**。对于 $e\in E(G)$，如果 $G\backslash e$ 的连通分量多于 G，我们称 e 为**桥**。

对于具有不相交边集的图 G 和 G'，我们将 G 与 G'**的并** 记为 $G\cup G'$，定义为顶点集为 $V(G)\cup V(G')$、边集为 $E(G)\cup E(G')$ 的图。当 G 和 G' 是具有不相交边集的图，但 $|V(G)\cap V(G')|=1$时，我们称 $G\cup G'$ 为 G 与 G'**的1-粘合**。

图 G 的（顶点）**着色** 是一个函数 ϕ，其定义域为 $V(G)$，陪域为颜色集合 Z。若 ϕ 满足 $|Z|=k$，则称其为一个 k-**着色**。通常假设 $Z=\{1,2,\ldots\ldots,k\}$，这样会比较方便。若对于 G的每条边 uv，都有 $\phi(u)\neq\phi(v)$，则称图 G 是**正常的**。若一个图有正常的 k-着色，则称其为 k-**可着色**。图 G 的**色数** 是使 G 为 χ-可着色的最小正整数 χ。

我们用 $[t]$ 表示集合$\{1,2,\ldots\ldots,t\}$。对于集合 X和 Y，我们用 $X\triangle Y$表示集合差，即 $X\triangle Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$。当 ϕ是定义域为 X的函数且 $X'\subseteq X$时，我们用 $\phi|_{X'}$表示将 ϕ 限制在 X'上。当 ϕ 是陪域为 $\mathbb{N}$的函数时，若其每个像都小于或等于 k，则称其以k为界，其中 k为正整数。我们用 $\emptyset$ 同时表示空集以及定义域为空集的函数。

2.1. 连通度与块。 对于任意整数 $k\geq 2$，若图 G 有至少 $k+1$ 个顶点，且对于任意两个不同的顶点 u，$v\in V(G)$，从 u到 v都存在至少 k 条内部不相交路径，则称 G 是 k-**连通的**。注意，根据 Menger 定理，具有至少 $k+1$ 个顶点的连通图是 k-连通的，当且仅当它没有大小小于 k 的顶点割集。若图 G 有至少两个顶点，且对于任意两个不同的顶点 u，$v\in V(G)$，从 u到 v都存在至少 k 条边不相交路径，则称 G是 k-**边连通的**。还需回顾，图的块 是满足 $|V(H)|\geq 2$ 且没有割点的极大连通子图 H。

设 G 是一个图，设$\mathcal{B}_G$ 表示 G的块的集合，并设 X 是 G的割点集合。令 $B(G)$表示 G的**块割图**；也就是说，$B(G)$是顶点集为 $X\cup\mathcal{B}_G$的二分图，当且仅当 $x\in V(B)$时，$x\in X$ 与 $B\in\mathcal{B}_G$ 之间有一条边。以下事实广为人知（例如参见 [7] ）。

定理 2.1。 设 G 为一个图。以下结论成立：

(i) $B(G)$ 是一个森林，并且 $B(G)$ 的连通分量是 G的各连通分量的块割图。(ii) 对于 G中的不同块 B和B'，有 $|V(B)\cap V(B')|\leq 1$且 $E(B)\cap E(B')=\emptyset$。(iii) G 中存在两个不同的块 B 和 B'，它们都包含顶点 v，当且仅当 v 是 G的割点。

我们称 G 的一个块 B 为 K_2-**块**，如果 $B\cong K_2$。如果 G 中两个不同的块 B 和 B' 共享一个顶点，我们称它们为**相邻**。如果 G 的一个块 B 满足 B 是 $B(G)$的叶，那么 B 就是一个**叶块**；否则，我们称它为**非叶块**。一个叶块恰好包含 G的一个割点。容易看出，如果一个连通图 G 至少有两个块，那么它至少有两个叶块。我们需要以下初等结果。

引理 2.2。 设 G 是一个至少含有两个块的连通图。那么 G 含有一个叶块，该叶块至多与一个非叶块相邻。

我们还将用到以下著名引理，它可由 Menger 定理推出。

引理 2.3。设 G 是一个2-连通图，其顶点 u、 v 和 v' 互不相同。那么存在一条(u,v)-路径 P，以及一条(u,v')-路径 P'，使得 P 和 $P\prime$ 内部不相交。

2.2. **度可选择性**。图 G 的一个列表赋值 L 称为度列表赋值，如果对于所有 $v \in V$（G），都有 $|L$（v）$| \geq d$（v）。如果图 G 对每个度列表赋值 L 都是 L-可着色的，则称其为度可选。回顾一下，如果图 G 是连通的，且其每个块都同构于完全图或奇圈，则称其为***Gallai*** 树。

定理 2.4 (Vizing [21]; Erd˝os、Rubin 和 Taylor [10])。设 G 是一个连通图。那么， G 是度可选的，当且仅当 G 不是 ***Gallai*** 树。

设 G_1 和 G_2 是边集互不相交的图，分别具有列表赋值 L_1 和 L_2。我们为 $G_1 \cup G_2$ 构造一个列表赋值 L，称为列表赋值并，记作 $L_1 \cup L_2$，定义如下：

$$L(u) = \begin{cases} L_1(u) & \text{if } u \in V(G_1) \setminus V(G_2) \\ L_2(u) & \text{if } u \in V(G_2) \setminus V(G_1) \\ L_1(u) \cup L_2(u) & \text{if } u \in V(G_1) \cap V(G_2). \end{cases}$$

容易看出，列表赋值并是交换的且是结合的，因此我们可以无歧义地考虑一个列表赋值集合的并。

对于具有列表赋值 L_1 和 L_2 的图 G_1 和 G_2，如果对于每个 $v \in V(G_1) \cap V(G_2)$，都有 $L_1(v) \cap L_2(v) = \emptyset$，则称 L_1 和 L_2 不冲突；否则称它们冲突。图 G 的一个 k-列表赋值 L 若对所有 $u, v \in V(G)$ 都有 $L(u) = L(v)$，则称其为一致。

设 G 为一棵 Gallai 树。注意， G 的一个块 B 中的每个顶点在 B 中具有相同的度，记为 $d(B)$。Gallai 树 G 的一个度列表赋值 L 若可表示为对 G 的每个块 B 分别取一致的 $d(B)$-列表赋值之并，且这些列表赋值两两不冲突，则称其为 坏的。特别地，注意对于 G 的一个坏度列表赋值 L，对所有 $v \in V(G)$ 都有 $|L(v)| = d_G(v)$。

以下结论众所周知（例如参见 [15,问题 9.12(b)], ）。

命题 2.5。设 G 是一个带有度列表赋值 L的 ***Gallai*** 树。那么，当且仅当 L不是坏度列表赋值时， G 是 L-可着色的。

3. 极性列表着色

本节介绍极性列表着色。

极图是一个二元组 (G, F)，其中 G是一个图，而 $F \subseteq E(G)$。设 $Q = (G, F)$ 是一个极图。我们称 G 为底层图，称 F 为 Q的极化边，并分别记作 $G(Q)$和$F(Q)$。在没有歧义时，我们通常提及 Q，而非 $G(Q)$；特别地，我们分别写作 $V(Q)$ 和 $E(Q)$，而非 $V(G(Q))$ 和 $E(G(Q))$。若两个极图Q_0 和 Q_1 同构，则称它们同构，并记作$Q_0 \cong Q_1$；这意味着存在一对双射 $f_V\colon V(Q_0) \to V(Q_1)$ 和$f_E\colon E(Q_0) \to E(Q_1)$，它们保持关联，并且当且仅当 e 是极化边时， $f_E(e)$ 也是极化边。

Q 的极化是一个函数 R，定义在 Q 的极化边上，它为与该边关联的顶点指定一对（有序的）颜色。当 $e = uv$是一条极化边时，我们用 $R(e, u, v) = (c, d)$ 表示 R 为 u 指定颜色 c，为 v 指定颜色 d（为了使一种着色遵循此极化，我们要求：要么 u 的颜色不是 c，要么 v 的颜色不是 d）。请注意，此指定与边 e相关联，而其他极化边可能会为 u 和 v指定其他颜色。为简化记法，我们要求 R 的输出不受输入边端点顺序的影响。形式化地，对于一条边 $e = uv$，令 $Z(e) = \{(e, u, v), (e, v, u)\}$；对于 $E' \subseteq E(Q)$，令 $Z(E') = \bigcup_{e \in E'} Z(e)$。那么 $R\colon Z(F) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$，并满足以下性质：若$R(e, u, v) = (c_u, c_v)$，则 $R(e, v, u) = (c_v, c_u)$。

一个极赋值 Γ 是 Q 的一个二元组（L， R），其中 L 是 $G(Q)$的列表赋值，而 R 是 Q的极化。 Γ-着色 ϕ 是 Q 的一种着色 ϕ，即 $G(Q)$的着色满足

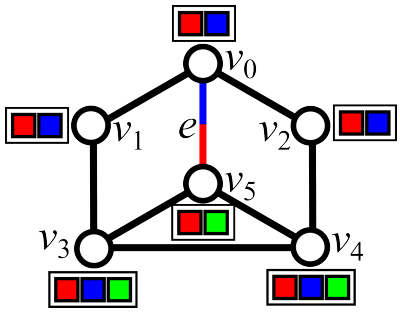
(P1) 对于所有 $v \in V(Q)$， $\phi(v) \in L(v)$，并且**(P2)** 对于每个 $e \in E(Q)$，若 $e = uv$ 未极化，则 $\phi(u) \neq \phi(v)$；否则，当 $e = uv$ 已极化时，我们有 $R(e, u, v) \neq (\phi(u)\ \phi(v))$。

注意， ϕ 不必是正常着色。下文中，我们用颜色（而不是整数）表示列表赋值；对于极化 $R(e,u,v) = (c_u, c_v)$，则将极化边靠近 u 的一半染成颜色 c_u，将靠近 v 的一半染成颜色 c_v；例如参见图 3(a)。

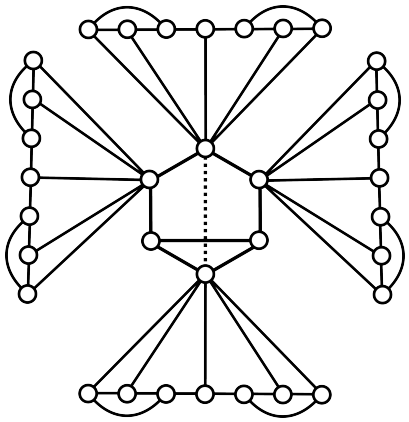
设 $\Gamma = (L, R)$ 是一个极赋值。若存在 Γ 的一个着色，则称 Q 是 Γ-可着色的。若对于某个整数 k，L 是一个 k-列表赋值，则称 Γ 是一个 k-极赋值。若对于某个整数 k，极图 Q 对每个 k-极赋值 Γ 都是 Γ- 可着色的，则称 Q 是 k- 可选择着色的。若 L 是一致的，则称 Γ 是一致的。设 $f : V(Q) \to \mathbb{N}$ 是一个函数。若对所有 $v \in V(Q)$，$|L(v)| = f(v)$，则称 Γ 是一个 f-极赋值。若 Q 对每个 f-极赋值 Γ 都是 Γ-可着色的，则称 Q 是 f-可选择着色的。

有时，将极图 Q 与其上的极赋值 Γ 一起作为一对 (Q, Γ) 来考察是有用的。在这种情况下，我们简称“(Q, Γ) 可着色”，意为“Q 是 Γ-可着色的”。

注意，如果 $F(Q) = \emptyset$，那么当且仅当 $G(Q)$ 是 L-可着色的时， Q 才是 Γ-可着色的。因此，极化列表染色是列表着色的一种推广。自然会问，是否存在某些不是 k-可选择着色的极图，但其底层图却是 k-可选择着色的。事实证明，这样的图确实存在。图 3(a) 展示了一个不是 f-可选择着色的极图，但其底层图是 f-可选择着色的；其中， f 将 v_3 和 v_4 映射为 3，并将其他每个顶点映射为 2。图 3(b) 展示了一个不是 3-列表可着色的极图，但其底层图是 3-列表可着色的。后一个极图不是 3-列表可着色这一事实，将在本节末尾变得显而易见（见定理 3.12）；届时我们将描述一种带有 k-极赋值的极图的构造，该构造模拟一个带有 f-极赋值的极图。



(a) 一个极图 Q_6，其中 e 是唯一的极化边。该极图不可 f可选择着色，但底层图是 f可选择着色的（其中 $f(v_3) = f(v_4) = 3$，且 $f(v_0) = f(v_1) = f(v_2) = f(v_5) = 2$）。图中展示了一个可证明这一点的 f-极赋值。



（b）一个不是 3-列表可着色的极图，但其底层图是 3-列表可着色的。单条极化边以虚线表示。

图3. 不可选择着色的极图，但其底层图可选择着色。

3.1. 子结构。设 $Q = (G, F)$ 是一个极图。若 G' 是 G 的子图且 $F' = F \cap E(G')$，则称 $Q' = (G', F')$ 是 Q 的极子图。若 $Q' \neq Q$，则称 Q' 是 Q 的真极子图。对于 G 的子图 G'，称 $(G', F \cap E(G'))$ 为由 G' 诱导的极子图。特别地，对于 $e \in E(Q)$，我们用 $Q\backslash e$ 表示由 $G\backslash e$ 诱导的极子图。 Q 的连通分支是 Q 的极子图，其底层图是 G 的连通分支； Q 的块是 Q 的极子图，其底层图是 G 的块。我们用 B^Q 表示 Q 的所有块组成的集合。

设 R 是 Q 的一种极化，且 Q' 是 Q 的一个极子图。将 R 限制到 Q'，记作 $R|Q'$，即将 R 限制到 $Z(F(Q'))$，也就是首个连通分量属于 $F(Q')$ 的三元组。现在设 $\Gamma = (L, R)$ 是 Q 的一个极赋值。将 Γ 限制到 Q'，记作 $\Gamma|Q'$，即极赋值

$(L|_{V(Q')}\ R|Q')$。注意，若 Q 是 Γ-可着色的，则 Q' 是 $\Gamma|Q'$-可着色的。为简便起见，我们将 Q' 的 $\Gamma|Q'$-着色称为 Q' 的 Γ-着色，并称 Q' 是 Γ-可着色的，而不称其为 $\Gamma|Q'$-可着色。

我们称 Q' 是 Q 的 **诱导极图子图**，如果存在某个 $V' \subseteq V(Q)$，使得 $Q' = (G[V'], F \cap E(G[V']))$；此时记 Q' 为 $Q[V']$。对于 $V'' \subseteq V(Q)$，我们也用 $Q - V''$ 表示导出子图 $Q[V(Q) \setminus V'']$。

3.2. 颜色删除与受限顶点。 有时我们希望给一小组顶点着色，并考察这种部分着色能否扩展到图的其余部分。现在，我们在极性列表着色的背景下形式化这些概念。

设 Q' 和 Q 是满足 $V(Q') \subseteq V(Q)$ 的极图，且 Γ' 和 Γ 分别是 Q' 和 Q 的极赋值。设 ϕ' 是 Γ'-着色的 Q'。对于 Q 的一个 Γ-着色 ϕ，我们称 ϕ' **扩展到** ϕ，如果 $\phi|_{V[Q']} = \phi'$。我们称 ϕ' **扩展到一个 Γ-着色** Q，如果存在 Q 的一个 Γ-着色 ϕ，使得 ϕ' 扩展到 ϕ。当 ϕ' 是 Q' 的一个 Γ-着色（即 $\Gamma' = \Gamma|Q'$），且 ϕ' 扩展到 Q 的一个 Γ-着色时，我们也简单地称 ϕ' **扩展到** Q。

定义 3.1（颜色删除）。设 Q 是一个带有极赋值 Γ 的极图，且 ϕ 是一个函数，使得对于某个 $V' \subseteq V(Q)$，$\phi|_{V'}$ 是 Γ 的 $Q[V']$ 着色。(V', ϕ)-**颜色删除**是从 (Q, Γ) 得到的有序对 (Q', Γ')，满足 $Q' = Q - V'$ 且 $\Gamma' = (L', R|Q')$；其中 L' 是定义在 $V(Q')$ 上的列表赋值，使得对于每个 $u \in V(Q')$，都有 $L'(u) = L(u) \setminus C_u$，其中

$$C_u = \{c \in L(u)\colon \text{存在 } e = uv \in E(Q), \text{ 使得 } v \in V', \text{ 且满足以下任一条件} \\ (e \notin F(Q) \text{ and } \phi(v) = c) \text{ or } (e \in F(Q) \text{ and } R(e, u, v) = (c, \phi(v)))\}.$$

图 4 给出了一个颜色删除的示例。

若对于某个 $u \in V(Q')$ 和 $v \in V'$，$e = uv \in E(Q)$ 满足以下任一条件：$(e \notin F(Q)$ 且 $\phi(v) = c)$，或 $(e \in F(Q)$ 且 $R(e, u, v) = (c, \phi(v))$，则称 e 从 $L(u)$ 中删除 c。注意，每条边 uv

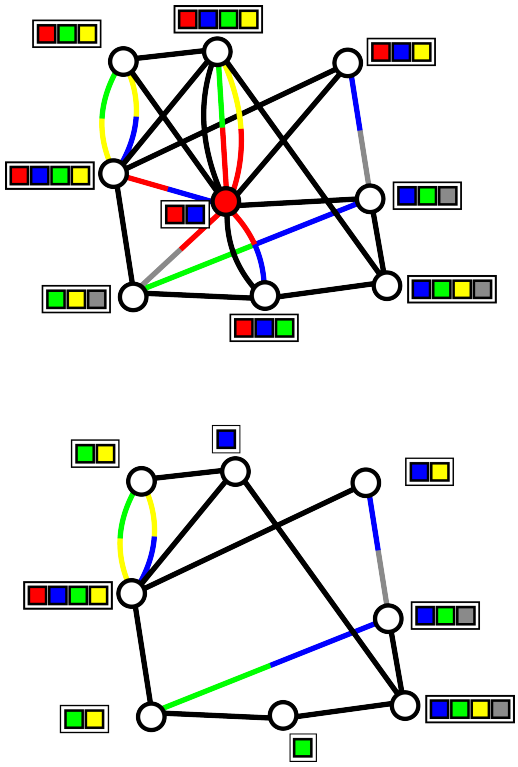


图 4. 颜色删除示例。上方是一个带有极赋值的极图，我们考虑一种着色 ϕ，其中中心顶点 v 被着成红色。下方是由此得到的 $(\{v\}\ \phi)$-颜色删除。

对于 $u \in V(Q')$ 和 $v \in V'$，最多只能从 $L(u)$ 中删除一种颜色。因此，进行颜色删除后，从顶点 $u \in V(Q')$ 的列表中删除的颜色数，至多等于 u 与 V' 中顶点之间的边数。

下一个 引理说明了为什么颜色删除很有用；在后文中将不加引用地自由使用它 e.

引理 3.2。设 Q 是一个带有极赋值 Γ 的极图。设 (V_1, V_2) 是 $V(Q)$ 的一个划分，并设 $\phi\colon V(Q) \to \mathbb{N}$ 是一个函数，使得 $\phi|_{V_1}$ 是 Γ- $Q[V_1]$ 的着色。设 (Q_2, Γ_2) 是从 (Q, Γ) 中删除 V_1、$\phi|_{V_1}$ 颜色所得的)-颜色删除。则，当且仅当 $\phi|_{V_2}$ 是 Γ_2- Q_2 的着色时，ϕ 才是 Γ- Q 的着色。

证明。设 $\Gamma = (L, R)$ 和 $\Gamma_2 = (L_2, R_2)$。首先假设 $\phi|_{V_2}$ 是 Γ_2- Q_2 的着色。对于任意 $v \in V_1$，有 $\phi(v) \in L(v)$；对于任意 $v \in V_2$，有 $\phi(v) \in L_2(v) \subseteq L(v)$。因此 ϕ 满足 (P1)。如果 e 是一条边，且其两个端点都在 V_1 中或都在 V_2 中，那么由于 $\phi|_{V_1}$ 是 Γ- $Q[V_1]$ 的着色，且 $\phi|_{V_2}$ 是 Γ_2 的着色，对于边 e，(P2) 将得到满足。设 $e = uv$，其中 $v \in V_1$ 且 $u \in V_2$。首先假设 e 不是极化的。在这种情况下，根据定理 3.1，$\phi(v) \notin L_2(u)$，但 $\phi(u) \in L_2(u)$，所以 $\phi(u) \neq \phi(v)$。因此，对于这样的非极化边，(P2) 得到满足。现在假设 e 是极化的，并令 $R(e, u, v) = (c, d)$。显然，如果 $\phi(v) \neq d$，则 e 满足 (P2)。另一方面，如果 $\phi(v) = d$，那么根据定理 3.1，$c \notin L_2(u)$，因此 $\phi(u) \neq c$，并且 e 满足 (P2)。因此 ϕ 是 Γ- Q 的着色。

接下来假设 ϕ 是 Γ的着色。显然，$\phi|_{V_2}$ 会满足 Q_2的每条边上的 (P2)。因此，我们只需验证 $\phi|_{V_2}$ 满足 (P1)，也就是说，对所有 $u \in V(Q_2)$，$\phi(u) \in L_2(u)$。假设对于某个 $u \in V(Q_2)$，有$\phi(u) \notin L_2(u)$。那么，根据定理 3.1，$\phi(u) \in C_u$，也就是说，存在 $e = uv \in E(Q)$，其中 $v \in V_1$，使得要么 $e \notin F(Q)$ 且 $\phi(v) = \phi(u)$，要么 $e \in F(Q)$且 $R(e, u, v) = (\phi(u)\ \phi(v))$。无论哪种情况，这都会违反 (P2)，与 ϕ 是 Q的着色矛盾。由此可得，对于所有 $u \in V(Q_2)$，$\phi(u) \in L_2(u)$，因此 $\phi|_{V_2}$ 是 Q_2的着色，符合要求。□

对单个顶点执行颜色删除时，我们用“从 (Q, Γ) 中进行 (v, c)-颜色删除”表示“从 (Q, Γ) 中进行 $(\{v\}\ \phi)$-颜色删除，其中 $\phi(v) = c$”。容易看出，$(V\prime\phi)$-颜色删除等价于对每个 $v \in V\prime$依次执行 $(v, \phi(v))$-颜色删除。

回顾引言中图里的 k-受限顶点这一概念。现在我们定义极性图中的 k-受限顶点。

定义 3.3（受限顶点）。设 Q 是一个极图，其极赋值为 $\Gamma = (L, R)$。令$v \in V(Q)$，并令 $c \in L(v)$，使得从 (Q, Γ) 中进行 (v, c)-颜色删除后不可着色。此时称 v 在 Q中对 c -受限。我们也称 v 为 Q的 Γ-受限顶点。

设 Q 为一个极图。若存在一个 k-极赋值（或 f-极赋值） Γ，使得 Q 具有一个 Γ-受限顶点 v，则称 Q 是 k-受限的（或分别为 f-受限的），并称 v 是 Q 中的一个k-受限顶点（或分别为 Q中的一个 f-受限顶点）。对于极赋值 Γ，如果 Q 具有一个 Γ-受限顶点，则称 Q 是 Γ-受限的。若对于每个 k-极赋值 Γ（分别为 f-极赋值 Γ），都有 Q 不是Γ-受限的，则称 Q 是 k-不受限的（分别为 f-不受限的）。若 G 是一个图，使得每个具有 $G(Q) = G$ 的极图 Q 都是 k-不受限的（分别为f-不受限的），则称 G是 k-极不受限的（分别为 f-极不受限的）。

设 Q 为一个极图，其极赋值为 $\Gamma =$ （L, R），并设 v 为 V（Q）中的一个顶点。我们定义 e

$$M_{Q,\Gamma}(v) = \{c \in L(v) : v \text{ is } \Gamma\text{-restricted on } c \text{ in } Q\}.$$

我们将顶点 v 的 k-限制指数定义为 $m_{Q,\ k}(v)$ 在针对 Q 的所有 k-极化指派 Γ 中所取得的最大值。我们将顶点 v 的 f-限制指数定义为 $m_{Q,\ f}(v)$ 在针对 Q 的所有 f-极化指派 Γ 中所取得的最大值。

操纵某些顶点所受限制的颜色会很有用。借助下一个定理，我们可以做到这一点。我们先引入一些术语。设 Q 是一个极图，设 $f\colon V(Q) \to \mathbb{N}$，并设 $\Gamma = (L, R)$ 是 Q 的一个 f-极赋值。若对于所有 $v \in V(Q)$，$c \in \mathbb{N}$ 都是 Γ 的新颜色，即 $c \notin L(v)$；并且对于所有 $e = uv \in F(Q)$，$c \notin R(e, u, v)$，则称 $c \in \mathbb{N}$ 对 Γ 是新的。假设 $c, c' \in \mathbb{N}$ 满足：c' 对 Γ 是新的，但 c 对 Γ 不是新的。当

$$L_c(v) = \begin{cases} L(v) \setminus \{c\} \cup \{c'\} & \text{if } c \in L(v), \\ L(v) & \text{otherwise, and} \end{cases}$$

$$R_c(e,u,v)=\begin{cases}(c',c') & \text{if } R(e,u,v)=(c,c),\\ (c',c_v) & \text{if } R(e,u,v)=(c,c_v) \text{ where } c_v\neq c,\\ (c_u,c') & \text{if } R(e,u,v)=(c_u,c) \text{ where } c_u\neq c,\\ R(e,u,v) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

引理 3.4。设 Q 是一个极图，设 $f\colon V(Q)\to\mathbb{N}$，并设 $r\in V(Q)$。设 $C\subseteq\mathbb{N}$ 满足 $|C|=m_{Q,f}(r)$。那么存在一个 Q 的 f-极赋值 Γ_C，使得 $M_{Q,\Gamma_C}(r)=C$。

证明。设 $\Gamma=(L,R)$ 是一个 f-极赋值，使得 $|M_{Q,\Gamma}(r)|=m_{Q,f}(r)$。令 $\Gamma_c=(L_c,R_c)$ 由在 Γ 中对 c 和 c' 进行颜色交换得到。注意，由于对于任意 $v\in V(Q)$，都有 $c'\notin L(v)$，因此 Γ_c 是 Q 的一个 f-极赋值，而 c 对 Γ_c 来说是新的。还要注意，存在一个双射 σ，它将 Q 的 Γ-着色与 Q 的 Γ_c-着色对应起来，并将任意 c 交换为 c'。由此可得，$c'\in M_{Q,\Gamma_c}(v)$ 当且仅当 $c\in M_{Q,\Gamma}(v)$。

现在我们说明如何构造 Γ_C。首先，对于每个满足 c 对 Γ 来说不是新的 $c\in C$，选择某个新的 $c'\notin C$，并执行上述操作。完成后，我们得到 Q 的一个极赋值 Γ'，其中每个 $c\in C$ 对 Γ' 来说都是新的。这使我们可以再执行上述操作 $|C|$ 次，每次都将 C 中的一种颜色与 $M_{Q,\Gamma'}(r)\setminus C$ 中的一种颜色交换，直到得到 Γ_C，其中 $M_{Q,\Gamma_C}(r)=C$，如所需。□

接下来的两个引理很简单，但在处理极化边或平行边时一直都很有用。对于极图 Q 中的顶点 u 和 v，我们用 $e_Q(u,v)$ 表示连接 u 和 v 的边数，也就是 $e_Q(u,v)=|\{e\in E(Q)\colon e=uv\}|$。当上下文已明确 Q 时，我们写作 $e(u,v)$，而不写 $e_Q(u,v)$。

引理 *3.5.* 设 Q 是一个带有极赋值 $\Gamma=(L,R)$ 的极图，令 $v\in V(Q)$，且令 $e=uv\in F(Q)$。对于不同的 a、$b\in L(v)$，设 $(Q-v,\Gamma_a)$ 和 $(Q-v,\Gamma_b)$ 分别是从 (Q,Γ) 中删除 (v,a)-颜色和 (v,b)-颜色后得到的结果，其中 $\Gamma_a=(L_a,R_a)$ 且 $\Gamma_b=(L_b,R_b)$。那么，要么 $|L_a(u)|>|L(u)|-e(u,v)$，要么 $|L_b(u)|>|L(u)|-e(u,v)$。

证明。设 $R(e,u,v)=(c_u,c_v)$。根据定理 3.1，$|L_a(u)|\geq|L(u)|-e(u,v)$，且 $|L_b(u)|\geq|L(u)|-e(u,v)$，因为 u 与 v 之间的每条边至多从 $L(u)$ 中删除一种颜色。若 $c_v\neq a$，则在 (v,a)-颜色删除中，e 不会从 $L(u)$ 中删除任何颜色。同样地，若 $c_v\neq b$，则在 (v,b)-颜色删除中，e 不会从 $L(u)$ 中删除任何颜色。由于 a 与 b 不同，因此 $|L_a(u)|>|L(u)|-e(u,v)$ 或 $|L_b(u)|>|L(u)|-e(u,v)$，如所需。□

推论 *3.6*。设 Q 是一个具有极赋值 $\Gamma=(L,R)$ 的极图。设 u、$v\in V(Q)$ 满足 $e(u,v)\geq 2$。对于不同的 a、$b\in L(v)$，令 $(Q-v,\Gamma_a)$ 和 $(Q-v,\Gamma_b)$ 分别为从 (Q,Γ) 中删除 (v,a)-颜色和 (v,b)-颜色所得的颜色删除，其中 $\Gamma_a=(L_a,R_a)$ 且 $\Gamma_b=(L_b,R_b)$。则 $|L_a(u)|>|L(u)|-e(u,v)$ 或 $|L_b(u)|>|L(u)|-e(u,v)$。

证明。如果 u 与 v 之间有任何一条边是极性的，那么根据定理 3.5 即可得到所需结果。如果 u 与 v 之间没有极性边，那么 $L_a(u)=L(u)\setminus\{a\}$；但由于 $e(u,v)>1$，我们有 $|L_a(u)|>|L(u)|-e(u,v)$，如所需。□

3.3. 1-粘合与极赋值并。现在我们将图并和列表赋值并的概念推广到极图和极化指派。我们还将说明如何从受 k 限制的极图构造一个不可 k-可选择着色的极图，以及如何构造一个带有 k-极赋值的极图，使其模拟带有 f-赋值的极图，其中函数 f 有界于 k。

我们首先定义两个极图的并。就我们的目的而言，只需为没有公共边的极图定义这一运算。设 Q_0 和 Q_1 是两个极图，满足 $E(Q_0)\cap E(Q_1)=\emptyset$。$Q_0$ 与 Q_1 的并记作 $Q_0\cup Q_1$，是满足 $V(Q_0\cup Q_1)=V(Q_0)\cup V(Q_1)$、$E(Q_0\cup Q_1)=E(Q_0)\cup E(Q_1)$ 且 $F(Q_0\cup Q_1)=F(Q_0)\cup F(Q_1)$ 的极图。特别地，当 Q_0 和 Q_1 是极图，且满足 $E(Q_0)\cap E(Q_1)=\emptyset$ 和 $|V(Q_0)\cap V(Q_1)|=1$ 时，我们称 $Q_0\cup Q_1$ 是 Q_0 与 Q_1 的 1- 粘合。

下一个引理的直接证明从略。

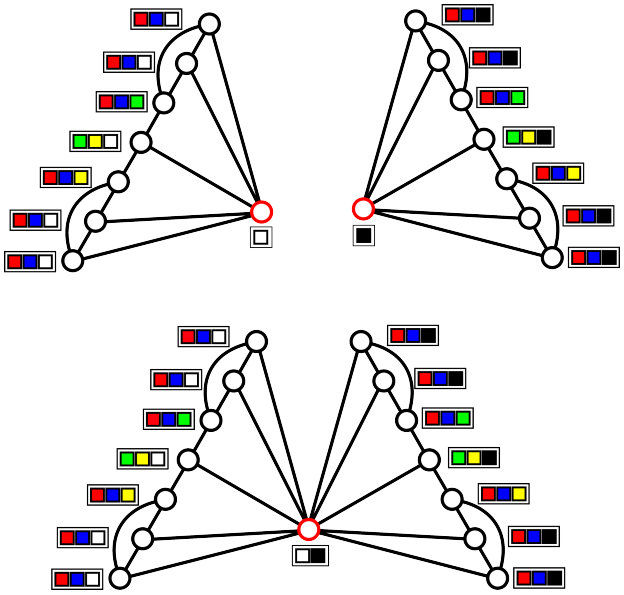


图5. 两个 T_3 （不含极化边）副本的极性赋值并示例；它们有一个公共顶点，以红色标出。

引理 3.7. 设 Q_0 和 Q_1 是 k-不受限的极图，且 $E(Q_0) \cap E(Q_1) = \emptyset$ 和 $|V(Q_0) \cap V(Q_1)| = 1$。那么 Q_0 和 Q_1 的1-联接是 k-不受限的。

引理 3.8. 设 Q 是一个 k-受限极图，且满足 $|V(Q)| \geq 3$。那么 Q 包含一个 k-受限的2-连通极子图。

证明。 假设结论不成立，并令 Q 为所有反例中顶点数最少的图。那么 Q不是2-连通的，因此要么不连通，要么是两个非空连通图的1-粘合。若 Q 不连通，则 Q 的某个连通分量是 k-受限的，但不是2-连通的，这与 Q 顶点数最少相矛盾。因此， Q 是两个非空连通图 Q_1 和 Q_2的1-粘合，且它们的顶点数都严格少于 Q。若对于某个 $i \in \{0,1\}$， Q_i 是 k-受限的，那么由于 Q 顶点数最少，它就是2-连通的，这与 Q 是反例相矛盾。因此， Q_0 和 Q_1 都是 k-不受限的，由定理 3.7 可知 Q 是 k-不受限的，矛盾。□

通常，我们讨论的是带有相关极化指派的极性图。将两个这样的极性图取并时，它们的并有一个自然的极化指派，现说明如下。

定义 3.9 （极性赋值并）。 设 Q_0 和 Q_1 是分别带有极化指派$\Gamma_0 = (L_0, R_0)$ 和 $\Gamma_1 = (L_1, R_1)$ 的极性图，且 $E(Q_0) \cap E(Q_1) = \emptyset$。设 $Q = Q_0 \cup Q_1$。我们得到一个适用于 Q 的极化指派 $\Gamma = (L, R)$，称之为极性赋值并，记作 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$，定义 L 为 L_0和 L_1的列表赋值并；若 $e \in E(Q_0)$，则 $R(e, u, v) = \begin{cases} R_0 \\ R_1 \end{cases}(e, u, v)$；若 $e \in E(Q_1)$，则 $e, u, v)$ 。

容易看出，极性图的并以及极化指派的并都满足交换律和结合律。因此，对于一组极性图$\mathcal{Q}$ （其边集两两不相交），或一组极化指派$\mathcal{L}$，我们可以无歧义地分别写作 $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$ 或 $\bigcup_{\Gamma \in \mathcal{L}} \Gamma$ 。

注意，如果$\mathcal{Q}$由极图 Q的连通分量或块组成，那么$\mathcal{Q}$中的极图两两具有不相交的边集，而 Q 是$\mathcal{Q}$的并。因此，获得极赋值的一种方法是先为连通分量或块赋予极赋值，再取它们的并（例如，图 2 中图的列表赋值可以通过这种方式获得，见图5）。

我们再次省略以下引理的直接证明。

引理 3.10。设 Q 是极性图 Q_0 和 Q_1 的 *1*-粘合。设 Γ_0 是 Q_0 的极赋值，且 Γ_1 是 Q_1 的极赋值，使得 (Q_0,Γ_0) 和 (Q_1,Γ_1) 均不可着色。则 Q 不可 $(\Gamma_0\cup\Gamma_1)$着色。

定理 3.10 与定理 3.4 结合，允许我们利用 1-粘合，从 k-受限且 k-可选择着色的极图构造出并非 k-可选择着色的极图。现在我们描述这一构造。设 Q 是一个 k-受限的极图，因此存在 $v\in V(Q)$，使得 $m_{Q,k}(v)>0$。为简单起见，我们假设 $m_{Q,k}(v)=1$。令 $\mathsf{Q}=\{Q_1,Q_2,\dots,Q_k\}$ 为一个由 k 个与 Q 同构的极图组成的集合，并且对于不同的 $i,j\in[k]$，有 $V(Q_i)\cap V(Q_j)=\{v\}$，且 $E(Q_i)\cap E(Q_j)=\emptyset$。对于每个 $i\in[k]$，存在一个针对 Q_i 的 k-极赋值 Γ_i^+，使得 $m_{Q_i,\Gamma_i^+}(v)=1$。根据定理 3.4，我们还可以假设，对于不同的 $i,j\in[k]$，有 $M_{Q_i,\Gamma_i^+}(v)\cap M_{Q_j,\Gamma_j^+}(v)=\emptyset$。对于每个 $i\in[k]$，令 $\Gamma_i^+=(L_i^+,R_i)$，并令 Γ_i为极赋值 (L_i,R_i)，其中若 $u\in V(Q_i)\setminus\{v\}$ $M_{Q_i,\Gamma_i^+}(u)$，则 $L_i(u)=\begin{cases}L_i^+(u);\text{ 若 } u=v,\text{ 则.....}\end{cases}$。

现在很容易看出，对于每个 $i\in[k]$，极图 Q_i 都不是 Γ_i-可着色的，且 $|L_i(v)|=1$。令 $Q'=\bigcup_{i\in[k]}Q_i$，并令 $\Gamma'=(L',R')$ 为极性赋值并 $\bigcup_{i\in[k]}\Gamma_t$。由定理 3.10 可知，$Q'$ 不是 Γ'-可着色的。此外，L' 是一个 k-列表赋值，因此 Γ' 证明了 Q' 不是 k-可选择着色的。

当 f 有上界 k时，可以采用类似的技巧构造带有 k-极赋值的极图，使其模拟带有 f-极赋值的极图。下面我们介绍这一构造，然后给出一个例子。

定义 3.11（(Q',f,Q,v,k)-补加操作）。设 Q 和 Q' 为极图，设 $v\in V(Q)$，设 $k\in\mathbb{N}$，并设 $f\colon V(Q')\to\mathbb{N}$ 为一个函数，使得对于所有 $u\in V(Q')$，$f(u)\le k$。对于每个 $u\in V(Q')$，令 Q_u 为一个由 $k-f(u)$ 个与 Q 同构的极图组成的集合，其中每个图的顶点 v 标记为 u，但除此之外，Q_u 中的各图彼此顶点不交，且均与 Q' 顶点不交。此外，每当 $V(Q')$ 中的 u 和 u' 是不同顶点时，对于任意 $Q_u\in\mathsf{Q}_u$ 和 $Q_{u'}\in\mathsf{Q}_{u'}$，Q_u 和 $Q_{u'}$ 均不相交。令

$$\mathcal{U}=\{Q'\}\cup\bigcup_{u\in V(Q')}\mathcal{Q}_u.$$

那么，(Q',f,Q,v,k)-补加操作 为$\bigcup_{U\in\mathcal{U}}U$。

请注意，尽管我们针对极图 Q 和 Q' 定义了这一操作，但如果 Q 和 Q' 均没有极化边，那么 (Q',f,Q,v,k)-补加操作就没有极化边。因此，我们也可以将针对图的补加操作视为一种特殊情形。

例如，图 3(b) 中的极图是一个$(Q_6,f,T_3,u,3)$-补加操作，其中 Q_6和 f见图 3(a)，而 T_3 见图 5（其中红色顶点为 u）。下一个引理表明，图 3(b) 中的极图不是3-列表可着色的。

引理*3.12*。设 $k\in\mathbb{N}$，设 Q 和Q' 为极图，其中 Q 具有 $v\in V(Q)$，使得$m_{Q,k}(v)=1$，并设 $f\colon V(Q')\to\mathbb{N}$是一个函数，使得对于所有 $u\in V(Q')$，$f(u)\le k$。则(Q',f,Q,v,k)-补加操作是 k-可选择着色的，当且仅当 Q' 是 f-可选择着色的。

证明。令 Q^+ 为(Q',f,Q,v,k)-补加操作。首先假设 Q'是 f-可选择着色的，并令 $\Gamma=(L,R)$为 Q^+的一个 k-极赋值。我们寻求 Q' 的一个 Γ-着色，使其能够扩展为 Q^+的一个 Γ-着色。令$u\in V(Q')$。由于对于每个包含 u的 Q 副本 Q_u，$m_{Q_u,k}(u)=1$，至多存在一个 $c\in L(u)$，使得 Q'的一个 Γ-着色（其中 $\phi(u)=c$）无法扩展为 $Q^+[V(Q')\cup V(Q_u)]$的一个 Γ-着色。当这样的 c 存在时，如果我们从 $L(u)$中移除 c，那么使用剩余极赋值的任何着色都将扩展到 $Q^+[V(Q')\cup V(Q_u)]$。因此，对于每个 $u\in V(Q')$，我们至多可以从 $L(u)$中移除 $k-f(u)$个颜色，并得到一个极赋值 $\Gamma_f=(L_f,R_f)$，使得 Q'的任何 Γ_f-着色都能扩展为 Q^+的一个 Γ-着色。现在，对于每个 u，$|L_f(u)|\ge k-(k-f(u))=f(u)$，因此，由于 Q'是f-可选择着色的，Q'是 Γ_f-可着色的，从而 Q^+是 Γ-可着色的。

接下来假设 Q'不是 f-可选择着色的，并令 $\Gamma_f=(L_f,R_f)$ 为 Q'的一个 f-极赋值，使得 Q' 不可 Γ_f-着色。我们将构造一个 k-极赋值 Γ^+，使得 Q^+ 不可 Γ^+-着色。首先，对于 Q中包含 $u\in V(Q')$ 且对应于 $i\in[k-f(u)]$,的每个副本 $Q_{u,i}$，令 $\Gamma'_{u,i}=(L'_{u,i},R_{u,i})$

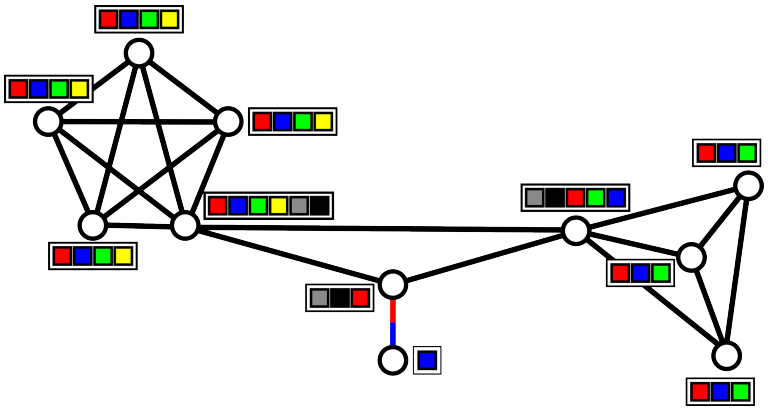


图 6。一个带有坏度数极化赋值的极化 Gallai 树。

为 $Q_{u,\ i}$ 的一个 k-极赋值，使得 $|M_{Q_{u,\ i},\ \Gamma'_{u,\ i}}(u)| = 1$，且其中的集合

$$\{M_{Q_{u,i},\Gamma'_{u,i}}(u) : u \in V(Q') \text{ and } i \in [k - f(u)]\} \cup \{L_f(u)\}$$

两两不相交；根据定理 3.4，这是可能的。然后，令 $\Gamma_{u,i} = (L_{u,i}, R_{u,i})$ 为 $Q_{u,i}$ 的极赋值，其中 $L_{u,i}$ 是从 $L'_{u,\ i}$ 中移除 $L'_{u,i}(u)$ 的所有颜色后，仅保留 $M_{Q_{u,i},\Gamma'_{u,i}}(u)$ 中的颜色而得到的。因此，对于每个 $u \in V(Q')$ 和 $i \in [k - f(u)],$，我们有 $L_{u,i}(u) = M_{Q_{u,i},\Gamma'_{u,i}}(u)$，其为单元素集，因为 $m_{Q_{u,i},k}(u) = 1$。然而，由于 u 在 $L_{u,i}(u)$ 中的颜色上是 $\Gamma'_{u,i}$- 受限的，我们看到 $Q_{u,i}$ 不是 $\Gamma_{u,i}$- 可着色的。现在，Q^+ 可以通过对 Q' 和各个 $Q_{u,i}$'s 进行一系列 1-粘合得到。令 $\Gamma^+ = (L^+, R^+)$ 为 Γ_f 与集合 $\{\Gamma_{u,i} : u \in V(Q')$ 和 $i \in [k - f(u)]\}$ 中每个成员的极性赋值并。则 Γ^+ 是一个 k-极化赋值，并且由定理 3.10 可知，Q^+ 不是 Γ^+-可着色的。因此，Q^+ 不是 k-可选择着色的。□

最后，对于具有极化赋值 $\Gamma_0 = (L_0, R_0)$ 和 $\Gamma_1 = (L_1, R_1)$ 的极图 Q_0 和 Q_1，我们称 Γ_0 和 Γ_1 为冲突（或不冲突），如果 L_0 和 L_1 分别冲突（或不冲突）。

4. 极图的度可选择性

回顾第 2.2 节中的度可选择性概念。极图 Q 的一个极赋值 (L, R) 若对所有 $u \in V(Q)$ 都有 $|L(u)| \geq d(u)$，则称为度极化赋值。如果极图 Q 对每个度极化赋值 Γ 都是 Γ-颜色可着色的，则称其为度可选择。定理 2.4 和 2.5 刻画了哪些图不是度可选择的，以及哪些度列表赋值使它们无法着色。本节将这些结果推广到极图。

设 Q 为一个极图。如果 Q 的底层图是 Gallai 树，且 Q 的每条极化边都属于一个 K_2-块，则称 Q 为极化 Gallai 树。我们称 Q 的一个 K_2-块为极 K_2-块，如果该块中的唯一一条边是极化边。对于一个极 K_2-块 B，如果对于 B 的 1-极化赋值 $\Gamma_B = (L_B, R_B)$，有 $R_B(e, u, v) = (c_u, c_v)$，其中 $L_B(u) = \{c_u\}$ 且 $L_B(v) = \{c_v\}$，则称该赋值为极化相容。

对于 Q，若度极化赋值 $\Gamma = (L, R)$ 满足以下条件，则称其为坏的：Q 是极化 Gallai 树，且 Γ 可表示为对 Q 的每个块 B 取并所得，其中，对于非极 K_2-块，取一致的 $d(B)$-极化赋值；否则取极化相容的 1-极化赋值；这些赋值两两不冲突。直观来说，坏度数极化赋值就是极化 Gallai 树的坏度列表赋值，只不过对于每条极化边（它必须位于一个 K_2-块中），颜色由 R 给出（而不是为该 K_2-块采用某种一致着色）。例如，见图 6。显然，每个极化 Gallai 树都有一个坏度数极化赋值。

本节的主要结果如下：

定理 4.1. 设 Q 是一个连通极图，其度极化赋值为 Γ。那么，当且仅当 Q 是一棵极化 *Gallai* 树且 Γ 是坏的时，Q 才不是 Γ-可着色的。

我们的证明方法总体上与 Erd˝os、Rubin 和 Taylor 用来证明定理 2.4 的方法相似。我们先给出一些简单的观察。

引理4.2. 设 Q 是一棵极化 *Gallai* 树。若 Γ 是 Q 的坏度数极化赋值，则 Q 不可 Γ-着色。

证明. 设 Γ 是 Q 的坏度数极化赋值。根据定义，Γ 是由 Q 的每个块 B 上的坏度数极化赋值 Γ_B 并成的。容易验证，对于任意这样的 B，B 都不可 Γ_B-着色。由此，定理 3.10 即可推出该引理。□

引理4.3. 设 Q 是一个非空极图，且其底层图是一棵树；再设 $\Gamma = (L, R)$ 是 Q 的度数极化赋值。若对于某个 $v \in V(Q)$，有 $|L(v)| > d(v)$，则 Q 是 Γ-可着色。

证明。令 $v_1 \in V(Q)$，使得 $|L(v_1)| > d(v_1)$，并令 $G = G(Q)$。我们取 $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ 为从 v_1 开始的 G 的搜索排序，也就是说，它是 $V(G)$ 的一个排序，满足对所有 $i \in [n]$，$G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ 连通。我们从 v_n 开始，依次贪心地构造一个 Γ-着色，使 Q 获得着色；随后处理 v_{n-1}，依此类推。对于每个 $i \geq 2$，由于 v_i 在 $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ 中有一个邻点，且 $|L(v_i)| \geq d_G(v_i) > d_{G[v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n]}(v_i)$，因此总能在 $L(v_i)$ 中选取至少一种颜色赋给 v_i，同时保持 $Q[\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\}]$ 的 Γ-着色。最后，我们也可以贪心地为 v_1 着色，因为 $|L(v_1)| > d(v_1)$，从而得到 Q 的一个 Γ-着色。□

引理4.4. 设 Q 是一个极图。如果 Q 具有一个度可选的诱导极图子图，那么Q 是度可选的。

证明. 假设 Q 具有一个度可选的诱导极图子图 Q'。我们对 $t = |V(Q)| - |V(Q')|$进行归纳证明。显然，当 $t = 0$时结论成立。假设 $t \geq 1$，并令 $\Gamma = (L, R)$是 Q的一个度列表赋值。则存在 $v \in V(Q) \setminus V(Q')$。我们任取一个 $c \in L(v)$。然后，考虑从 Q中进行(v, c)颜色删除，得到一个仍包含 Q' 作为诱导极图子图、且带有度极化赋值的极图。由归纳法即得引理。□

接下来我们考虑底层图为由单个块组成的 Gallai 树的情形 k.

引理4.5。 设 Q 是一个简单非零极图，带有一个不坏的度极化赋值 Γ 。若 Q 是圈或完全图，则 Q 是 Γ-可着色的

证明。令 $\Gamma = (L, R)$，并假设 Γ 不坏。首先，设 Q 是一个圈。若 $F(Q) = \emptyset$，则由定理 2.4 和 2.5 可得结论。因此，假设 Q 包含一条极化边 $e = uv$，满足$R(e, u, v) = (c_u, c_v)$。由于 $d(u) = 2$ 且 Γ 是度极化赋值，故 $|L(u)| \geq 2$，因此存在某个 $c'_u \in L(u) \setminus \{c_u\}$。令$(Q - u, \Gamma')$为从$(Q, \Gamma)$中进行$(u, c'_u)$-颜色删除所得的结果，并令 $\Gamma' = (L', R')$。注意，由于 $c'_u \neq c_u$，我们有 $L'(v) = L(v)$。因此，Γ' 是路径 $Q - u$的一个度极化赋值；但由于 $|L'(v)| > d_{Q-u}(v)$，由定理4.3可知 $Q - u$ 是 Γ'-可着色的，因此 Q 是 Γ-可着色的，证毕。

接下来，假设 $G(Q) \cong K_2$，并令 $V(Q) = \{u, v\}$。此时 $d(u) = d(v) = 1$，因此 $|L(u)| \geq 1$且 $|L(v)| \geq 1$。显然，如果 $|L(u)| > 1$ 或 $|L(v)| > 1$，则 Q 可 Γ-着色，因此我们可以假设$|L(u)| = |L(v)| = 1$。如果 $e = uv$ 未极化，那么 Γ 不一致（因为 Γ 不是坏的），因此 Q 可Γ-着色。另一方面，如果 $e = uv$ 已极化，那么对于极化的K_2-块 Q，Γ 不具极化相容性，因此 Q同样可 Γ-着色。

只需考虑 $Q \cong K_n$ for $n \geq 4$ 的情形。我们可以假设 Q 包含一条极化边 $e = uv$，否则结论由定理 2.4 和 2.5 得出。我们对 n 进行归纳，其中基例 $n = 3$ 由上述结果成立。因此，假设 $n \geq 4$，并令 $\Gamma = (L, R)$ 是 Q 的一个度极化赋值。存在一个顶点 $w \in V(Q) \setminus \{u, v\}$。令 $c_w \in L(w)$，并令 $(Q - w, \Gamma')$ 为从 (Q, Γ) 中删除 (w, c_w) 颜色所得的结果，其中 $\Gamma' = (L', R')$。注意，$G(Q - w) \cong K_{n-1}$，且对所有 $x \in V(G(Q - w))$，均有 $|L'(x)| \geq n - 2$，因此 Γ' 是 $Q - w$ 的度极化赋值，其中 $Q - w$ 包含一条极化边。结论由归纳法得出。□

θ 图是通过识别三条路径的端点得到的图，其中每条路径至少含一条边，且其中两条至少含两条边。我们将使用以下引理，该引理见于 [10]。

引理4.6。 设 G 是一个非奇圈或完全图的 2-连通图。那么 G包含一个与偶圈或 θ 图同构的导出子图。

前述引　理促使我们考虑底层图为 θ 图的情形　　.

引理4.7。 设 Q 是一个带有度极化赋值 Γ的极图。如果 $G(Q)$ 是一个 θ 图，那么 Q是 Γ-可着色的。

证明。假设 $G(Q)$是一个 θ 图，且设 $\Gamma = (L, R)$。令 u 和 v 为 Q中两个不同的顶点，它们之间有三条内部不相交路径。由于这些路径中至多一条长度为 1，因此存在一个与 u相邻的 $w \in V(Q) \setminus \{u, v\}$。若 $e = uw$ 未被极化，则由于 $|L(u)| \geq d(u) = 3$ 且$|L(w)| \geq d(v) = 2$，存在某个 $c_u \in L(u)$，使得 $|L(w) \setminus \{c_u\}| \geq 2$。类似地，若 e 被极化且$R(e, u, w) = (c'_u, c_w)$，则由于 $|L(u)| \geq 3$，存在某个 $c_u \in L(u)$，使得 $c'_u \neq c_u$。令$(Q - u, \Gamma')$为从(Q, Γ)中进行(u, c_u)-颜色删除所得，其中 $\Gamma' = (L', R')$。于是 $|L'(w)| \geq 2$，因为若 e 未被极化，则 $L'(w) = L(w) \setminus \{c_u\}$；若 e 被极化，则 $L'(w) = L(w)$。因此 $Q - u$ 是一棵树，且$|L'(w)| > d_{Q-u}(w) = 1$，所以根据定理4.3， $Q - u$ 是 Γ′-可着色的，从而 Q 是 Γ-可着色的。□

我们还需要一个引理，用来处理 Q 不是简单图的情况。

引理4.8. 设 Q是一个带有度极化赋值 Γ的极图。如果 Q 不是简单图，那么 Q 是Γ-可着色的。

证明. 由定理 4.4，只需考虑 $|V(Q)| = 2$的情形。令 $V(Q) = \{u, v\}$，其中$e(u, v) > 1$。于是 $d(u) \geq 2$，因此由定理 3.6，存在某个 $c \in L(v)$，使得从 Q中删除(v, c)-颜色后， u剩下多于 $|L(u)| - e(u, v)$种颜色。也就是说，至少还剩一种颜色可用于给 u 着色，因此 Q是 Γ-可着色的。□

现在我们证明本节的主要结果。

定理 *4.1* 的证明. 一个方向由定理 4.2 给出。对于另一个方向，我们假设 Q 不是极化 Gallai 树，或者 Γ 不是坏的，并将证明 Q是 Γ-可着色的。如果 Q不是简单图，那么由定理 4.8，它是 Γ-可着色的。因此，我们可以假设 Q 是简单图。如果 $G(Q)$不是 Gallai 树，那么它包含一个不是完全图或奇圈的块。因此，由定理 4.6，$G(Q)$包含一个偶圈或 θ 图作为导出子图。由定理 4.4、4.5 和 4.7 可知， Q是 Γ-可着色的，证毕。

现在只需证明：如果 $G(Q)$ 是 Gallai 树且 Γ 不是坏的，那么 Q 是 Γ-可着色的。我们对 Q 中块的数量进行归纳来证明这一点。如果 Q 只有一个块，则由定理 4.5 可得结论。因此，假设 Q 至少有两个块。

令 $\Gamma = (L, R)$，并令 B 为 $G(Q)$ 的一个叶块。则 B 包含 Q 的唯一割点 v。如果 B 不包含极化边，$\Gamma|(B - v)$ 是一致的，并且对于所有 $u \in V(B)$， $L(u) \subseteq L(v) \setminus \{v\}$，我们称叶块 B 是含糊的（相对于 Γ）。如果叶块不是含糊的，我们称其为 含糊。注意，当 Q 相对于 Γ 有一个含糊的叶块时， Γ 不是坏的。

首先，假设 B 是一个含糊的叶块。令 $Q' = Q - (V(B) \setminus \{v\})$，于是 Q 是 B 和 Q' 的 1-粘合。则存在分别属于 B 和 Q' 的度极化赋值 Γ_B 和 $\Gamma_{Q'}$，使得 $\Gamma = \Gamma_B \cup \Gamma_{Q'}$ 和 Γ_B 是一致的。注意， $\Gamma_{Q'}$ 不是坏的，因为 Γ_B 是坏的，而 Γ 不是坏的。现在， B 或者是一个奇圈，或者是一个完全图，并且 $|L(v)| > d_B(v)$，因此根据定理 4.5， B 是 $\Gamma|B$-可着色的。令 ϕ 为 B 的一个 $\Gamma|B$-着色。由此可知，从 (Q, Γ) 中删除 $(B - v, \phi|_{V(B-v)})$ 颜色后得到 $(Q', \Gamma_{Q'})$。由于 Q' 是 $\Gamma_{Q'}$-可着色的，根据归纳法，我们看到 Q 是 Γ-可着色的，正如所要求的。

现在我们可以假设 Q 没有含糊的叶块。与之前一样，令 $G(Q)$的一个叶块为 B，令 B中 Q 的割点为 v，令 $Q' = Q - (V(B) \setminus \{v\})$，于是 Q 是 B 与 Q'的 1-粘合，并令$\Gamma = (L, R)$。现在 B 要么是奇圈，要么是完全图，并且 $|L(v)| > d_B(v)$，因此根据定理 4.5， B 是 $\Gamma|B$-可着色的。令 ϕ 为 B的一个 $\Gamma|B$-着色。令(Q', Γ')为从(Q, Γ)进行$(B - v, \phi|_{V(B-v)})$-颜色删除所得，其中 $\Gamma' = (L', R')$。那么 Γ' 是 Q'的度极化赋值。令 Q的一个叶块为 B'，且它不同于 B。如果 Q只有 B 和 B' 这两个块，那么，由于 B' 相对于.....是含糊的

..... Γ而言，我们知道 Γ' 对 Q'不是坏的。否则， B' 也是 Q' 中的一个叶块，且它相对于 Γ' 是含糊的，因此同样有 Γ' 对 Q'不是坏的。由归纳法可知， Q' 是 $\Gamma_{Q'}$-可着色的，因此 Q 是 Γ-可着色的，证毕。□

5. 一个高次数顶点：可选择性

我们已经看到，Gallai 树是唯一不能度可选的连通图（见定理 2.4），而极化 Gallai 树是唯一不能度可选的连通极图（见定理 4.1）。本节中，我们将证明极图的一个类似结论，其中允许一个顶点的列表比其度小。

我们首先描述例外结构，它们分别类似于连通图中的 Gallai 树和连通极图中的极化 Gallai 树。有根极化图是一对 (Q, h)，其中 Q 是一个极图，而 $h \in V(Q)$ 是一个指定顶点，称为根。对于每个 $k \geq 2$，我们将定义一类有根极图 ${}_k\mathcal{N}$。在这种情形下，例外结构是 ${}_k\mathcal{N}$ 中的成员，其中根 h 对应于唯一一个列表大小为 k 、且可能小于 $d(h)$ 的顶点。对于一个有根极化图 (Q, h)，若它对任何适当的极赋值都不可着色，那么删除顶点 h 的颜色，并使用其列表中的任意颜色，将得到一个对 $Q - h$ 的度极化赋值，而 $Q - h$ 不可着色。因此，$Q - h$ 是一棵极化 Gallai 树。即将给出的“ 平衡 Gallai 树 ”定义将进一步刻画 $Q - h$ 的性质。

对于极图 Q，回顾一下，$\mathcal{B}_Q$ 表示 Q的块集合。本节中，当$v \in V(Q)$时，我们用$\mathcal{B}_Q(v)$（或者在上下文明确 Q 时，简写为$\mathcal{B}(v)$）表示 Q中包含 v的块集合。对于块 $B \in \mathcal{B}_Q$，我们也用 $I(B)$表示 $G(Q)$中包含在 $V(B)$内的内部顶点。

定义 5.1（平衡 Gallai 树）。设 Q 为一棵极化 Gallai 树，且 $U \subseteq V(Q)$。若函数 $f\colon \mathcal{B}_Q \to \{-1, 0, 1\}$ 满足以下条件，则称其为(Q, U)的平衡函数：

(G1) 对于每个满足 $I(B) \neq \emptyset$的 $B \in \mathcal{B}_Q$，以下条件之一成立：

- $f(B) = -1$且 $I(B) \subseteq U$，或者
- $f(B) = 0$ 且 $I(B) \cap U = \emptyset$；**(G2)** 对于 Q的每个割点 v，以下条件之一成立：
  - $f(B)$ 对每个 $B \in \mathcal{B}(v)$，且 $v \notin U$；
  - 存在 $B^- \in \mathcal{B}(v)$，使得 $f(B^-) = -1$，并且对每个 $B \in \mathcal{B}(v) \setminus \{B^-\}$， $f(B) = 0$；或者
  - 存在 $B^-, B^+ \in \mathcal{B}(v)$，使得 $f(B^-) = -1$且 $f(B^+) = 1$，并且对每个$B \in \mathcal{B}(v) \setminus \{B^-, B^+\}$， $f(B) = 0$；并且

(G3) 若对某个 $B \in \mathcal{B}_Q$， $F(B) \neq \emptyset$，则 $f(B) = 0$。

若 (Q, U) 存在平衡函数，则称其为一棵平衡 *Gallai* 树 。

我们将看到（在定理 5.5 中），对于一棵平衡 Gallai 树，平衡函数是唯一的。设 (Q, U) 是一棵平衡 Gallai 树，设 f 是 (Q, U) 的平衡函数，并设 B是Q的一个块。若 $f(B) = 0$，则称 B为正常；若 $f(B) = -1$，则称 B为轻；若 $f(B) = 1$，则称 B为重 。

令 $k \geq 2$ 为一个整数。现在我们将 $\mathcal{N}_k$ 定义为由所有满足以下条件的有根极化图 (Q, h) 组成的类：

(N1) $(Q - h, N_Q(h))$ 是一棵平衡 Gallai 树，**(N2)** 如果 B 是 $(Q - h, N_Q(h))$ 的一个轻块，那么对于所有 $v \in V(B)$， $d_B(v) \geq k - 1$；并且**(N3)** Q 是简单的，且 Q的极化边均不与 h关联。

为了对 N_k 中的有根极图有一些直观认识，我们描述如何构造这样的有根极图。设 Q 是一棵极化 Gallai 树。首先，将 Q 的某个子集 S^+ 中的块指定为重块，其中 S^+ 中任意两个块都不相邻，并且对每个 $B \in \mathrm{S}^+$， B 中没有内部顶点，且 B 没有极化边。然后，我们以这样的方式向 S^- 添加块：对于每个块 $B \in \mathrm{S}^+$ 和每个 B 中的割点 v，顶点 v 恰好属于 S^- 中的一个块；S^- 中任意两个块都不相邻；且 S^- 中没有块含有极化边。我们定义平衡函数，使 S^- 中的块为轻块，而 $\mathrm{B}^Q \setminus (\mathrm{S}^- \cup \mathrm{S}^+)$ 中的块为正常块。现在，设 Q' 是由 Q 添加单个顶点 h 得到的极图，其中 h 与属于 S^- 中某个块的每个顶点

相连，但不属于任何$\mathcal{S}^+$中的块，且通过一条未极化的单边连接。我们还要求 $\min_{B\in\mathcal{S}^-} d(B) \geq k-1$。那么，很容易验证 $(Q', h) \in \mathcal{N}_k$。

最后，我们描述有根极化图在$\mathcal{N}_k$中的“坏的”极赋值的性质。

定义 5.2 (h-坏极赋值)。 设 (Q, h) 是$\mathcal{N}_k$中的有根极化图。令 H 为顶点集为$\{h\} \cup N_Q(h)$且边集由 Q 中所有与 h 关联的边组成的极图。令$\mathcal{B}^{(Q,h)} = \mathcal{B}_{Q-h} \cup \{H\}$。根据**(N1)**， $Q-h$ 的每个块都是普通块、轻块或重块。若极赋值 Γ 是通过将 Q 的每个 $B \in \mathcal{B}^{(Q,h)}$ 的极赋值 Γ_B 合并而得到，其中这些Γ_B两两不冲突，且每个 Γ_B 都满足以下条件，则称 Γ 是 Q 的-坏 极赋值：

(i) 若 $B = H$，则 $\Gamma_B = (L_B, \emptyset)$，其中 $|L_B(h)| = k$，且对于所有其他 $u \in V(H)$， $L_B(u) = \emptyset$。(ii) 若 B 是 $Q-h$ 的普通块，则 Γ_B 是 B 的坏度数极化赋值。(iii) 若 B 是 $Q-h$ 的重块，则 $\Gamma_B = (L_B, \emptyset)$，其中 L_B 是均匀列表赋值，且对于所有 $v \in V(B)$，$|L_B(u)| = d_B(u) - 1$。(iv) 若 B 是 $Q-h$ 的轻块，则 $\Gamma_B = (L_B, \emptyset)$，其中 L_B 是均匀列表赋值，且对于所有 $u \in V(B)$，$|L_B(u)| = d_B(u) + 1$，并且 $L_H(h) \subseteq L_B(u)$。

注意，根据**(G3)** 和**(N3)**， B 在情形 (i)、(iii) 和 (iv) 中不含任何极化边。此外，(iv) 的最后一个性质可由**(N2)**得到。

图 7 给出了一个属于$\mathcal{N}_4$, 的有根极化图（Q， h），以及一个针对 Q的 h-坏极赋值。以下结论不难看出：

引理 5.3。 假设对于某个整数 $k \geq 3$，有根极化图 (Q, h) 属于 N_k。那么存在一个适用于 Q的 h-坏极赋值。

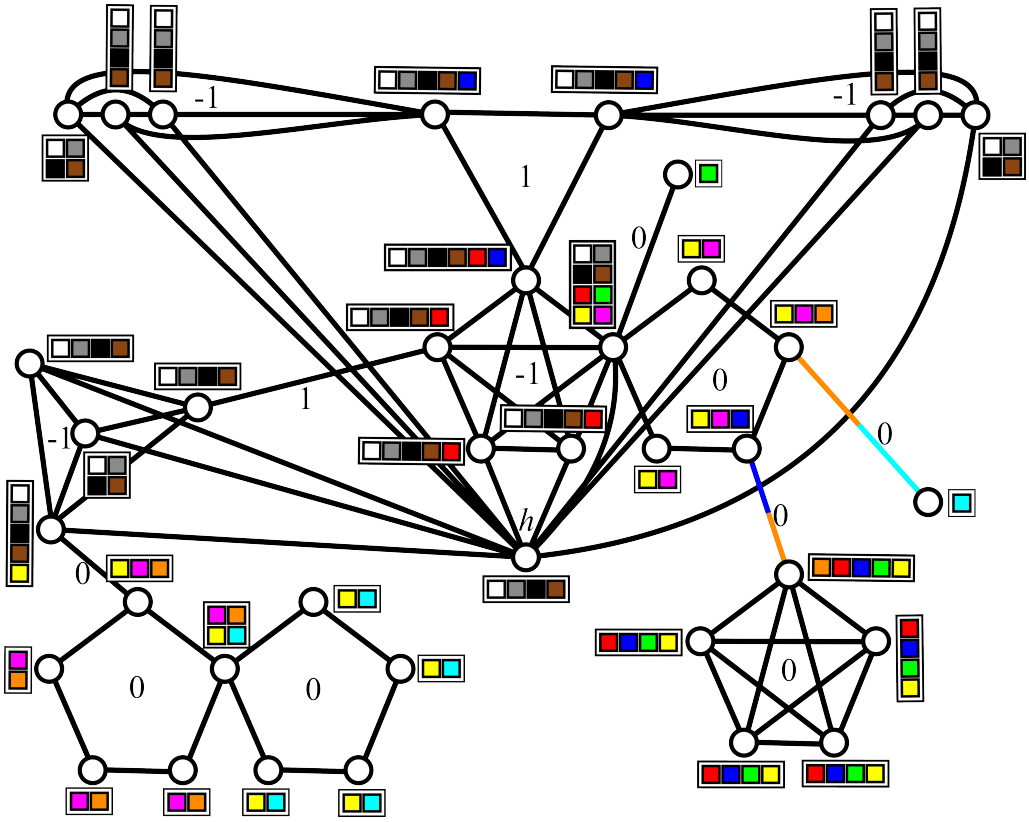


图 7. 一个属于$\mathcal{N}_4$, 的有根极化图（Q， h），以及一个坏极赋值 Γ。其中有四个轻块和两个重块，分别标记为 -1和 1，其余普通块均标记为 0。

本节的主要结果如下：

定理 5.4. 设 Q 是一个极图，其极赋值为 $\Gamma=(L,R)$。设 $h\in V(Q)$ 满足： $Q-h$ 是连通的， $|L(h)|\geq 2$，并且对于所有 $v\in V(Q)\setminus\{h\}$， $|L(v)|\geq d(v)$ 。那么，当且仅当 $(Q,h)\in\mathcal{N}^{L(h)|}$ 且 Γ 是 h-坏的时， Q 不可 Γ-着色。

注意，定理 5.4 并不要求 $|L(h)|<d(h)$（此时定理 4.1 也适用），但要求 h 不是割点。对于任意极化 Gallai 树 Q，对于 Q 的每个内部顶点 h ，都有 $(Q,\ h)\in\mathcal{N}^{d(h)}$ 。

我们首先证明，平衡 Gallai 树有唯一的平衡函数。

引理 5.5. 设 (Q,U) 是一个平衡 *Gallai* 树，且 f_0 和 f_1 是 (Q,U) 的平衡函数。那么 $f_0=f_1$。

证明。 我们先证明以下断言：

断言 5.5.1. 设 v 是 Q 的一个割点， B 是 $B(v)$ 中的一个块，并且对于所有 $B'\in B(v)\setminus\{B\}$，都有 $f_0(B')=f_1(B')$。那么 $f_0(B)=f_1(B)$。

子证明。设 $i\in\{0,1\}$。我们将证明， $f_i(B)$ 由 f_i 在 $\mathrm{B}(v)\setminus\{B\}$ 上的取值所确定。首先假设 $v\in U$。那么根据 (G2)，若存在 $B'\in\mathrm{B}(v)\setminus\{B\}$ 使得 $f_i(B')=-1$ ，则 $f_i(B)=0$；若不存在这样的块，则 $f_i(B)=-1$。接下来假设 $v\notin U$。根据 (G2)，需要考虑两种情况。若对所有 $B'\in\mathrm{B}(v)\setminus\{B\}$，都有 $f_i(B')=0$ ，则属于第一种情况，因此 $f_i(B)=0$。否则，存在某个块 $B_1\in\mathrm{B}(v)\setminus\{B\}$，使得 $f_i(B_1)\in\{-1,1\}$，此时属于第二种情况。因此，要么存在一个块 $B_2\in\mathrm{B}(v)\setminus\{B_1,B\}$，使得 $\{f_i(B_1)\ f_i(B_2)\}=\{-1,1\}$，此时 $f_i(B)=0$；要么对于每个块 $B'\in\mathrm{B}(v)\setminus\{B_1,B\}$，都有 $f_i(B')=0$，此时我们选择 $f_i(B)\in\{-1,1\}$，使得 $\{f_i(B_1)\ f_i(B)\}=\{-1,1\}$。◁

设 B 是 Q 中包含内部顶点 v 的一个块。根据 (G1)，若 $v\in U$，则 $f_0(B)=f_1(B)=-1$；若 $v\notin U$，则 $f_0(B)=f_1(B)=0$。因此，对于 Q 中任意包含内部顶点的块 B ，都有 $f_0(B)=f_1(B)$。特别地，对于 Q 中任意叶块 B ，都有 $f_0(B)=f_1(B)$。

为导出矛盾，假设 $f_0\neq f_1$。令

$$\mathcal{B}'=\{B\in\mathcal{B}_Q:f_0(B)\neq f_1(B)\}.$$

设 H 是 $Q\big[\bigcup_{B'\in\mathcal{B}'}V(B')\big]$ 的一个连通分支，且设 B'' 是 H 的一个叶块。根据构造， $f_0(B'')\neq f_1(B'')$，因此 B'' 不是 Q 的叶块。设 $v\in V(B'')$，其中 v 是 Q 中的一个割点，但 v 不是 H 中的割点。那么，对于满足 $f_0(B)\neq f_1(B)$ 的块而言， B 是 $\mathcal{B}(v)$ 中唯一的块。但这与断言 5.5.1 矛盾。□

我们现在陈述平衡 Gallai 树的一些性质，这些性质很容易由定理 5.1 推得 .

引理 5.6。 设 (Q,U) 是一棵平衡 *Gallai* 树，并设 $v\in V(Q)$。

(i) 若 $v\in U$，则 v 不属于任何重块，而 v 恰好属于一个轻块。(ii) 若 $v\notin U$ 且属于至少一个轻块或重块，则 v 恰好属于一个轻块和一个重块。(iii) 若 v 属于一个重块，则 v 是割点，且也属于一个轻块。(iv) 若 v 属于不同的块 B 和 B'，则 B 和 B' 中至多一个是轻块，且 B和 B' 中至多一个是重块。(v) 若没有轻块，则所有块都是正常的。

利用定理 5.2 和 5.6 以及$\mathcal{N}_k$的定义，不难（但有些繁琐地）证明以下结论。证明从略。

引理 5.7。 设(Q,h) 是 $\boldsymbol{N}_k$ 中的一个有根极化图，其中 $k\geq 2$，且 $\Gamma=(L,R)$ 是 Q 的一个 h-坏极赋值。那么对于每个 $v\in V(Q)\setminus\{h\}$，都有 $|L(v)|=d(v)$。

现在我们证明本节的主要结果。

定理 *5.4* 的证明。令 $k = |L(h)|$。我们首先假设 $(Q,\ h)$ 属于 $\mathcal{N}_k$，且 Γ 是 h-坏的，并证明 Q 不可 Γ-着色。由 **(N1)**，$Q-h$ 是一棵极化 Gallai 树。对于 $i \in [k]$，令 $(Q-h,\ \Gamma_i)$ 为从 $(Q,\ \Gamma)$ 中删除 $(h,\ c_i)$ 颜色所得的结果。只需证明对于每个 $i \in [k]$，Γ_i 都是 $Q-h$ 的坏极化赋值。

令 $\{B_1, B_2, \dots, B_t\}$ 为 $Q-h$ 的块集合。回顾一下，Γ，即 Q 的 h-坏极赋值，可由符合定理 5.2 的、针对 $s \in [t]$ 的极赋值 Γ_{B_s} 的并得到。固定一个$i \in [k]$。对于每个 $s \in [t]$，我们将构造一个针对 B_s 的坏极赋值 $\Gamma_{i,s}$，使得 $\Gamma_i = \bigcup_{s\in[t]} \Gamma_{i,s}$。我们分别用 $\mathcal{F}$、$\mathcal{S}^-$ 和 $\mathcal{S}^+$ 表示 $Q-h$ 中所有正常块、轻块和重块的集合。

令 $s \in [t]$。若 $B_s \in \mathsf{F}$，则 Γ_{B_s} 是 B_s 的坏度极化赋值，此时令 $\Gamma_{i,s} = \Gamma_{B_s}$。假设 $B_s \in \mathsf{S}^+ \cup \mathsf{S}^-$。由 (G3)，$F(B_s) = \emptyset$。于是令 $\Gamma_{i,s} = (L_{i,s}, \emptyset)$；若 $B_s \in \mathsf{S}^+$，则对所有 $u \in V(B_s)$，$L_{i,s}(u) = L_{B_s}(u) \cup \{c_i\}$；而若 B_s 属于 S^-，则对所有 $u \in V(B_s)$，$L_{i,s}(u) = L_{B_s}(u) \setminus \{c_i\}$。当 u 属于重块 B_s 时，由定理 5.2(iii)，$|L_{B_s}(u)| = d_B(u) - 1$。由定理 5.6(ii)，$u$ 也属于轻块 B'，因此由定理 5.2(iv)，$c_i \in L(h) \subseteq L_{B'}(u)$。由于 L_{B_s} 和 $L_{B'}$ 不冲突，$c_i \notin L_{B_s}(u)$。因此，$|L_{i,s}(u)| = |L_{B_s}(u)| + 1 = d_B(u)$。当 u 属于轻块 B_s 时，由定理 5.2(iv)，$|L_{B_s}(u)| = d_B(u)+1$，并且由定理 5.2(iv)，$c_i \in L(h) \subseteq L_{B_s}(u)$。于是$|L_{i,s}(u)| = |L_{B_s}(u)| - 1 = d_B(u)$。无论哪种情况，由于 L_{B_s} 是均匀列表赋值（根据定理 5.2），$L_{i,s}$ 都是针对 B_s的坏度列表赋值。由于极赋值 Γ_{B_s} 对于 $s \in [t]$ 不冲突，且根据定理 5.6(iv)，极赋值 $\Gamma_{i,s}$ 对于 $s \in [t]$ 不冲突。因此，$\bigcup_{s\in[t]} \Gamma_{i,s}$ 是针对 $Q-h$ 的坏极赋值，并且容易验证该极赋值与 Γ_i 相同。这就证明了一个方向。

现在假设 Q 不是 Γ-可着色的，并证明 $(Q,\ h) \in \mathcal{N}_k$ 且 Γ 是 h-坏的。

断言 5.3.1。如果 $c \in L(h)$ 和 $(Q-h, \Gamma_c)$ 是从 (Q,Γ) 中进行的 (h,c)-颜色删除，那么 $Q-h$ 是一棵极化 *Gallai* 树，且 Γ_c 是坏的。

子证明。由于 Q 不是 Γ-可着色的，因此 $Q-h$ 不是 Γ_c-可着色的。由于对于每个 $v \in V(Q)$，都有 $|L(v)| \geq d(v) \setminus \{h\}$，可知 Γ_c 是 $Q-h$ 的度极化赋值。由于 $Q-h$ 连通，根据定理 4.1，$Q-h$ 是一棵极化 Gallai 树，且 Γ_c 是坏的，正如所要求的。◁

根据断言 5.3.1，$Q-h$ 是简单的。为满足 **(N3)**，我们要求如下：

断言 *5.3.2. </style}*不存在与 h 关联的极化边，也不存在与 h 关联的一对平行边。

子证明。首先，设 $e = hv$ 是与 h 关联的一条极化边。根据定理 3.5，存在某个 $c \in L(h)$，使得从 (Q, Γ) 中删除 (h,c)-颜色 $(Q-h, \Gamma_c)$ 后，v 的列表大小大于 $|L(v)| - e(h,v) \geq d_{Q-h}(v)$，因此 Γ_c 不是坏的，这与断言 5.3.1 矛盾。类似地，假设 h 有一个邻点 v，使得 $e(h,v) > 1$。根据定理 3.6，存在某个 $c \in L(h)$，使得删除 (h,c)-颜色后，v 的列表大小大于 $|L(v)| - e(h,v)$，再次与断言 5.3.1 矛盾。◁

由断言 5.3.1 和断言 5.3.2，**(N3)** 对 (Q,h) 成立。接下来我们证明 **(N1)** 成立，即证明 $(Q-h, N_Q(h))$ 是一棵平衡 Gallai 树。

断言 5.3.3。设 $v \in N_Q(h)$。则 $L(h) \subseteq L(v)$。

子证明。设 $c \in L(h)$，并设 $(Q-h, \Gamma_c)$ 是从 (Q,Γ) 中进行的 (h,c)-颜色删除，其中 $\Gamma_c = (L_c, R_c)$。由断言 5.3.2，hv 不是极化的。若 $c \notin L(v)$，则 $L_c(v) = L(v)$，从而 $|L_c(v)| > d_{Q-h}(v)$，因此L_c 不是坏的，这与断言 5.3.1 矛盾。故 $c \in L(v)$。◁

设 $L(h) = \{c_1, \dots, c_k\}$。对每个 $i \in [k]$，设 $(Q-h, \Gamma_i)$ 是从 (Q,Γ) 中进行的 (h,c_i)-颜色删除，其中 $\Gamma_i = (L_i, R_i)$。由断言 5.3.1，$Q-h$ 是一棵极化 Gallai 树，且 Γ_i 是$Q-h$的一个坏极化赋值，因此它是 $Q-h$的每个块上的坏极化赋值的并。令 $\{B_1, B_2, \dots, B_t\}$ 为 $Q-h$ 的块的集合，并且对每个 $s \in [t]$，令 $\Gamma_{i,s} = (L_{i,s}, R_{i,s})$ 是 B_s 的一个坏极化赋值，使得$\Gamma_i = \bigcup_{s\in[t]} \Gamma_{i,s}$。

设 $s \in [t]$。如果存在某个 $C_s \subseteq \mathbb{N}$，满足 $L(h) \subseteq C_s$，使得对于所有 $v \in V(B_s)$ 和所有 $i \in [k]$，都有 $L_{i,s}(v) = C_s \setminus \{c_i\}$，则称 B_s 为轻型。如果存在某个 $C_s \subseteq \mathbb{N}$，满足 $L(h) \cap C_s = \emptyset$，使得对于所有 $v \in V(B_s)$ 和所有 $i \in [k]$，都有 $L_{i,s}(v) = C_s \cup \{c_i\}$，则称 B_s 为重型。如果对于所有 $i,j \in k$，都有 $L_{i,s} = L_{j,s}$，则称 B_s 为标准。注意，$Q-h$ 的一个块至多具有轻型、重型或标准这三种性质中的一种。

（$Q-h$ 的轻型、重型和标准块这些概念，最终将分别与平衡 Gallai 树中轻、重和正常块的概念对应（$Q-h$, $N_Q(h)$）。）

下一个断言是颜色删除定义的直接推论，我们将经常使用它。然后我们证明一系列断言，描述 $Q-h$ 的轻型块、标准块和重块的性质。

断言 5.3.4。如果 $u \in V(Q-h) \setminus N_Q(h)$，那么对于所有 $i,j \in [k]$，$L_i(u) = L_j(u)$。

引理 5.3.5。设 $u \in I(B_s)$，其中 $s \in [t]$。那么 B_s 是轻型的，当且仅当 $u \in N_Q(h)$。

子证明。假设 $u \in N_Q(h)$。由断言 5.3.3，$L(h) \subseteq L(u)$，且对于所有$i \in [k]$，$L_i(u) = L(u) \setminus \{c_i\}$。由于 u 不是割点，$Q-h$ 中包含 u 的块只有 B_s，因此 $L_{i,s}(u) = L_i(u)$。现在 $L_{i,s}(u) = L(u) \setminus \{c_i\}$，并且 $L_{i,s}$ 是 B_s 的坏度列表赋值，因此它是一致的。于是，令$C_s = L(u)$，我们有对于所有 $v \in V(B_s)$ 以及所有 $i \in [k]$，$L_{i,s}(v) = C_s \setminus \{c_i\}$，所以 B_s 是轻型的。

反过来，假设 B_s 是轻型的。令 $i \in [k]$。那么存在某个 $C_s \subseteq \mathbb{N}$，使得 $L(h) \subseteq C_s$，并且对于所有 $v \in V(B_s)$，都有 $L_{i,s}(v) = C_s \setminus \{c_i\}$。由于 u 只属于 $Q-h$的一个块，因此我们有 $L_i(u) = L_{i,s}(u)$。由于对于所有 $i \in [k]$，都有 $L_{i,s}(u) = C_s \setminus \{c_i\}$，因此对任意 $j \in [k] \setminus \{i\}$，都有 $L_i(u) \neq L_j(u)$。于是，由断言 5.3.4 可得 $u \in N_Q(h)$。◁

引理 5.3.6。若对于某个 $s \in [t]$，$F(B_s) \neq \emptyset$，则 B_s 是标准的。

子证明。假设 B_s 包含一条极化边 $e = uv$，其中某个 $s \in [t]$。由于 $Q-h$ 是极化 Gallai 树，B_s 是 $Q-h$的一个 K_2-块。令 $i, j \in [k]$。由于$\Gamma_{i,s}$和$\Gamma_{j,s}$是关于B_s的坏极化赋值，并且 $R_i(e, u, v) = R_j(e, u, v)$，我们有 $L_{i,s} = L_{j,s}$，这意味着 B_s 是标准的。◁

断言 5.3。 7. 假设对于某个 $s \in [t]$，B_s 是重型的，则 v 是割点。

子证明。反证，假设 v 是 B_s 的内部顶点。由于 B_s 是重型的，断言 5.3.5 蕴含 $v \notin N_Q(h)$。因此，根据断言 5.3.4，对于所有 $i,j \in [k]$，$L_i(v) = L_j(v)$。由于 v 是内部顶点，$L_{i,s}(v) = L_i(v) = L_j(v) = L_{j,s}(v)$，所以 B_s 不是重型的，矛盾。由此可得，v 是割点，证毕。◁

断言 5.3.8。$Q-h$ 的每个块要么是轻型的，要么是重型的，要么是标准的。

子证明。如果 $Q-h$ 的一个块不是轻型的、重型的或标准的，我们称其为零星的。只需证明 $Q-h$ 中不存在零星块。假设 $Q-h$ 至少有一个零星块。首先，我们注意到，存在某个 $s \in [t]$ 以及某个 $u \in V(B_s)$，使得 B_s 是包含 u 的唯一零星块。（为了解释这一点，考虑将 $Q-h$ 限制在零星块中的顶点上所得到的极图中任意连通分量的一个叶块。）

由于 B_s 不是标准的，存在一个顶点 $v \in V(B_s)$，使得对某些 $i,j \in [k]$，有 $L_{i,s}(v) \neq L_{j,s}(v)$。根据引理 5.3.6，$B_s$ 没有极化边，因此 B_s 的任何坏极化赋值都是一致的。于是，对任意 $v' \in V(B_s)$，都有 $L_{i,s}(v') \neq L_{j,s}(v')$。特别地，$L_{i,s}(u) \neq L_{j,s}(u)$。如果 u 是$Q-h$的一个内部顶点，那么 $L_i(u) \neq L_j(u)$，因此根据断言 5.3.4，$u \in N_Q(h)$，这意味着根据引理 5.3.5，B_s 是轻型的，矛盾。因此，u 是 $Q-h$的一个割点。

令 $i,j \in [k]$ 满足 $L_{i,s}(u) \neq L_{j,s}(u)$。现在 $|L_{i,s}(u)| = |L_{j,s}(u)|$，因此存在 $c \in L_{i,s}(u) \setminus L_{j,s}(u)$ 以及 $c' \in L_{j,s}(u) \setminus L_{i,s}(u)$。假设 c或 c'中至少有一个不在 $\{c_i, c_j\}$ 中。不失一般性，$c \notin \{c_i, c_j\}$。有两种情形。如果 $u \notin N_Q(h)$，那么对于所有 $i,j \in [k]$，都有 $L_i(u) = L_j(u)$，因此

$$\bigcup_{B_t \in \mathcal{B}_{Q-h}(u)} L_{i,t}(u) = L_i(u) = L_j(u) = \bigcup_{B_t \in \mathcal{B}_{Q-h}(u)} L_{j,t}(u).$$

另一方面，若 $u \in N_Q(h)$，那么根据断言 5.3.2 和 5.3.3，对于所有 $i, j \in [k]$，我们有$L_i(u) \setminus \{c_j\} \cup \{c_i\} = L_j(u)$，因此

$$\left(\bigcup_{B_t \in \mathcal{B}_{Q-h}(u)} L_{i,t}(u) \right) \setminus \{c_j\} \cup \{c_i\} = \bigcup_{B_t \in \mathcal{B}_{Q-h}(u)} L_{j,t}(u).$$

在这两种情况下，由于 $c \in L_{i,s}(u) \setminus L_{j,s}(u)$，且（对于后一种情况）由于 $c \neq c_j$，存在某个 $B_t \in \mathcal{B}_{Q-h}(u) \setminus \{B_s\}$，使得 $c \in L_{j,t}(u) \setminus L_{i,t}(u)$。然而，这样的 B_t 并非标准，而且，由于

$c \notin \{c_i, c_j\}$，我们有 B_t 也既不是轻型也不是重型。因此， B_t 是零星的，这与 B_s 是唯一包含 u的零星块这一事实矛盾。

现在我们可以假设，对于任意 $i, j \in [k]$，只要 $L_{i,s}(u) \neq L_{j,s}(u)$，就有 $L_{i,s}(u) \triangle L_{j,s}(u) = \{c_i, c_j\}$。设对于所有互异的 $i, j \in [k]$，都有 $L_{i,s}(u) \neq L_{j,s}(u)$。在这种情况下，我们断言 B_s 要么是轻型，要么是重型。为导出矛盾，设互异的 $i, j, j' \in [k]$ 满足 $c_i \in L_{i,s}(u)$ 和 $c_j \in L_{j,s}(u)$，但 $c_{j'} \in L_{i,s}(u)$ 和 $c_i \in L_{j',s}(u)$。由于 $L_{i,s}(u) \triangle L_{j',s}(u) = \{c_i, c_{j'}\}$，我们还得到 $c_i \notin L_{i,s}(u)$，矛盾。因此，对于所有互异的 $i, j \in [k]$，要么 $c_i \in L_{i,s}(u)$ 和 $c_j \in L_{j,s}(u)$，此时 B_s 是重型；要么 $c_j \in L_{i,s}(u)$ 和 $c_i \in L_{j,s}(u)$，此时 B_s 是轻型。

最后，假设存在互不相同的 i、j、$j' \in [k]$，使得 $L_{i,s}(u) \neq L_{j,s}(u)$，但 $L_{j,s}(u) = L_{j',s}(u)$。那么 $L_{i,s}(u) \triangle L_{j,s}(u) = L_{i,s}(u) \triangle L_{j',s}(u)$。但是 $L_{i,s}(u) \triangle L_{j,s}(u) = \{c_i, c_j\}$，且 $L_{i,s}(u) \triangle L_{j',s}(u) = \{c_i, c_{j'}\}$，其中 $c_j \neq c_{j'}$，因为 $j \neq j'$。矛盾由此完成了该断言的证明。◁

断言 5.3.9. 设 $v \in V(Q-h)$。那么 v 至多属于一个轻块，而 v 至多属于一个重块。

子证明。假设 v 属于 $Q-h$ 的两个不同轻块 B_s 和 $B_{s'}$，其中 $s, s' \in [t]$。根据轻型的定义，$c_2 \in L_{1,s}(v) \cap L_{1,s'}(v)$。那么 $L_{1,s}$ 和 $L_{1,s'}$ 相冲突，因此 L_1 不是坏的，矛盾。同理，若 v 属于 $Q-h$ 的两个不同重块 B_s 和 $B_{s'}$，其中 $s, s' \in [t]$，那么 $c_1 \in L_{1,s}(v) \cap L_{1,s'}(v)$，因此 L_1 不是坏的，矛盾。◁

断言 5.3.10。设 u 是 $Q-h$的一个割点。

- 若 $u \in N_Q(h)$，则 $\mathcal{B}^{Q-h}(u)$ 中恰有一个块是轻型的，其余均为标准的。
- 若 $u \notin N_Q(h)$，则 $\mathcal{B}^{Q-h}(u)$ 中的每个块都是标准的；或者恰有一个块是轻型的，恰有一个块是重型的，其余均为标准的。

子证明。设 $u \in N_Q(h)$。由断言 5.3.2 和 5.3.3， $L_1(u) = L(u) \setminus \{c_1\}$，且 $L_2(u) = L(u) \setminus \{c_2\}$。因此，对于 $s \in [t]$，存在某个 B_s 属于 $\mathcal{B}^{Q-h}(u)$，使得$c_2 \in L_{1,s}(u) \setminus L_{2,s}(u)$。显然， B_s 不是标准的。此外，对于 $s' \in [t]$，$\mathcal{B}^{Q-h}(u)$中的每个 $B_{s'}$ 都不是重型的，因为 $c_1 \notin L_1(u)$，所以$c_1 \notin L_{1,s'}(u)$。因此， B_s 是轻型的；根据断言 5.3.8 和 5.3.9，$\mathcal{B}^{Q-h}(u)$中的所有其他块都是标准的。

现在假设 $u \notin N_Q(h)$。那么根据断言 5.3.4，对于所有 $i, j \in [k]$，都有 $L_i(u) = L_j(u)$。如果 u 不属于 $Q-h$的任何轻型块或重型块，那么根据断言 5.3.8，该断言成立，因此我们假设对于某个 $s \in [t]$， u 属于 $Q-h$ 的一个块 B_s，该块要么是轻型的，要么是重型的。如果 B_s 是轻型的，那么对于所有不同的 $i, j \in [k]$，都有 $c_j \in L_{i,s}(u) \setminus L_{j,s}(u)$。另一方面，如果 B_s 是重型的，那么对于所有不同的 $i, j \in [k]$，都有$c_i \in L_{i,s}(u) \setminus L_{j,s}(u)$。无论哪种情况，由于 $L_i(u) = L_j(u)$，我们有

$$\bigcup_{B_{s'} \in \mathcal{B}_{Q-h}(u)} L_{i,s'}(u) = \bigcup_{B_{s'} \in \mathcal{B}_{Q-h}(u)} L_{j,s'}(u).$$

由于存在 $c \in \{c_i, c_j\}$ 使得 $c \in L_{i,s}(u) \setminus L_{j,s}(u)$，因此存在某个 $B_{s'} \in \mathcal{B}^{Q-h}(u) \setminus \{B_s\}$ 使得 $c \in L_{j,s'}(u) \setminus L_{i,s'}(u)$，其中 $s' \in [t]$。于是 $B_{s'}$ 不是标准的，因此要么是轻型的，要么是重型的。由此根据断言 5.3.8 和 5.3.9 可知，B_s 和 $B_{s'}$ 中一个是轻型的，另一个是重型的，而 $Q-h$ 的所有其他块都是标准的，正如所需。◁

现在我们证明 $(Q-h, N_Q(h))$ 是一棵平衡 Gallai 树，符合定理 5.1。令$f\colon \mathcal{B}_Q \to \{-1, 0, 1\}$为函数，其中若 B 是轻型，则 $f(B) = -1$；若 B 是标准，则 $f(B) = 0$；若 B 是重型，则$f(B) = 1$（根据断言 5.3.8，该定义是良定义的）。令$\mathcal{S}^-$ 为$Q-h$的轻块集合，令$\mathcal{S}^+$ 为 $Q-h$ 的重块集合，并令$\mathcal{F}$ 为$Q-h$的标准块集合。

由断言 5.3.7， $Q-h$ 在 S^+ 中没有块包含任何内部顶点。因此，若 u 是 $Q-h$的某个块 B 的内部顶点，则 B 属于 S^- 或 F。由引理 5.3.5，若 u 是 $N_Q(h)$中的内部顶点，则 B 属于 S^-；否则 B 属于 F。因此，$(Q-h, N_Q(h))$ 满足 (G1)。由引理 5.3.10，$(Q-h, N_Q(h))$ 满足 (G2)；最后，由引理 5.3.6，$(Q-h, N_Q(h))$ 满足 (G3)。于是， f是 $(Q-h, N_Q(h))$ 的平衡函数，因此 $(Q-h, N_Q(h))$ 是一棵平衡 Gallai 树，且 (Q, h) 满足 (N1)。由定理 5.5， $Q-h$ 的轻型、标准和重型块分别与 $Q-h$的轻、正常和重块一致。此后，我们将 $Q-h$ 的轻、正常和重块分别视为满足 $Q-h$的轻型、标准和重型块的定义性质。

接下来考虑 (N2)。设 u 是轻块 B_s的一个顶点，其中 $s \in [t]$。那么存在某个 $C_s \subseteq \mathbb{N}$，使得 $L(h) \subseteq C_s$，且对所有 $v \in V(B_s)$ 和所有 $i \in [k]$，都有 $L_{i,s}(v) = C_s \setminus \{c_i\}$。由于 $L(h) \subseteq C_s$，我们有 $|C_s| \geq |L(h)| = k$，因此对所有 $i \in [k]$，都有 $|C_s \setminus \{c_i\}| \geq k-1$。由于 $L_{i,s}(u) = C_s \setminus \{c_i\}$，我们有对所有 $i \in [k]$，$|L_{i,s}(u)| \geq k-1$。由于 $L_{i,s}$ 是 B_s的坏度列表赋值，我们有 $|L_{i,s}(u)| = d_{B_s}(u)$，因此 $d_{B_s}(u) \geq k-1$。于是，(Q,h) 满足 (N2)。这就完成了 $(Q,h) \in \mathsf{N}_k$ 的证明。

还需证明，Γ 是 Q的一个 h坏极赋值。为此，我们证明 $\Gamma = \bigcup_{B \in \mathsf{B}_{(Q,h)}} \Gamma_B$，其中每个 Γ_B 都是满足定理 5.2(i)–(iv)的 B 的极赋值，并且各个 Γ_B两两不冲突。若对某个 $s \in [t]$，B_s 是正常的，那么由于对所有 i 都有$L_{i,s} = L_{j,s}$, $j \in [k]$，我们令任意 $i \in [k]$对应$\Gamma_{B_s} = \Gamma_{i,s}$，这便是 B_s的一个坏度极化赋值。根据断言 5.3.2 和 5.3.6，其他每个子图 $B \in \mathsf{B}^{(Q,h)}$ 都没有极化边，因此只需为 B找到一个列表赋值L_B。对于 H，我们只需令对所有 $u \in V$，$L_H(h) = L(h)$，且 $L_H(u) = \emptyset$。现在考虑某个 $s \in [t]$对应的B_s。若 B_s 是轻的或重的，则存在某个 $C_s \subseteq \mathbb{N}$，使得以下两种情况之一成立：对所有 $v \in V(B_s)$和所有 $i \in [k]$，有 $L(h) \subseteq C_s$ 且$L_{i,s}(v) = C_s \setminus \{c_i\}$；或者对所有 $v \in V(B_s)$和所有 $i \in [k]$，有 $L(h) \cap C_s = \emptyset$ 且$L_{i,s}(v) = C_s \cup \{c_i\}$。无论哪种情况，都令 L_{B_s} 为均匀列表赋值，并将 C_s 赋给 B_s的每个顶点。若 B_s 是重的，那么由于$L_{i,s}$ 是 B_s 关于$i \in [k]$的一个坏度列表赋值，我们有对所有 $u \in V(B_s)$，$|C_s| = d_{B_s}(u) + 1$。类似地，若 B_s 是轻的，那么由于$L_{i,s}$ 是 B_s 关于 $i \in [k]$的一个坏度列表赋值，我们有对所有 $u \in V(B_s)$，$|C_s| = d_{B_s}(u) - 1$。现在，每个 $B \in \mathsf{B}^{(Q,h)}$ 都满足定理 5.2 的(i)–(iv)。

只剩下证明这些 Γ_{B_s} 两两不冲突。由于对所有 $u \in V(H) - h$，$L_H(u) = \emptyset$，显然对每个 $s \in [t]$，Γ_H 和 Γ_{B_s} 都不冲突。因此，设 B_s 和 $B_{s'}$ 是 $Q-h$ 中相邻的块，L_s 和 $L_{s'}$ 分别是它们的列表赋值，并且对某个 $u \in V(B_s) \cap V(B_{s'})$，有 $L_s(u) \cap L_{s'}(u) \neq \emptyset$。若 B_s 和 $B_{s'}$ 都是正常的，那么，由于对任意 $i \in [k]$，$L_{i,s}(u) = L_s(u)$ 且 $L_{i,s'}(u) = L_{s'}(u)$，我们有 $L_{i,s}(u) \cap L_{i,s'}(u) \neq \emptyset$，这与 Γ_i 是 $Q-h$ 的坏极化赋值矛盾。若 B_s 是重的而 $B_{s'}$ 是正常的，那么对任意 $i \in [k]$，有 $L_{i,s'}(u) \cap C_s \neq \emptyset$，其中 $L_{i,s}(u) = C_s \cup \{c_i\}$，因此 $L_{i,s}(u) \cap L_{i,s'}(u) \neq \emptyset$，矛盾。由于 B_s 和 $B_{s'}$ 不可能都为重的，根据定理 5.6(iv)，不妨设 B_s 是轻的。存在 $c_i \in L_s(u) \cap L_{s'}(u)$，其中 $i \in [k]$。令 $j \in [k] \setminus \{i\}$。由于 B_s 是轻的，$c_i \in L_{j,s}(u)$。根据定理 5.6(iv)，$B_{s'}$ 是重的或正常的，因此 $L_{s'}(u) \subseteq L_{j,s'}(u)$，从而 $c_i \in L_{j,s'}(u)$。因此，$L_{j,s}(u) \cap L_{j,s'}(u) \neq \emptyset$，矛盾。由此可得，$\{\Gamma_B : B \in \mathsf{B}^{(Q,h)}\}$ 的元素两两不冲突，证毕。□

6. 一个高次数顶点：k-受限顶点

上一节讨论了带有极赋值的极图，该赋值“接近”度极化赋值，也就是说，至多有一个顶点的度大于其列表的大小。本节我们聚焦于“接近”度极化赋值的 k-极化指派；具体而言，该 k-极化指派对应的极图恰有一个顶点，其度大于 k。利用上一节的定理 5.4，我们可以刻画这类极图何时是k-可选择着色的。本节将证明这类极图至少有一个 k-受限顶点所必须满足的性质（见定理 6.1）。由此可刻画该类中的图何时具有 k-受限顶点（见定理 6.2）。证明定理 1.5 并不需要定理 6.1 的全部一般性；只需考虑 Q为 2-连通的特殊情形即可（见定理 6.3）。我们证明更一般的结果，因为它本身可能也具有研究价值。

对于图 G，若 H 是 G 的连通分量，且它是 Gallai 树，则称 H 为 G 的***Gallai*** 树分支。设 Q 为极图。若极子图 Q' 是 Q 的子图，且 $G(Q')$ 是 $G(Q)$ 的 Gallai 树分支，则称 Q' 为 Q 的 ***Gallai*** 树分支。注意，当 Q' 是 Q 的 Gallai 树分支时，极子图 Q' 未必是极性 Gallai 树，因为它可能含有不属于 K_2-块的极化边。若极子图 Q' 是 Q 的子图，且 Q' 是 Q 的 Gallai 树分支，并且 Q' 是极性 Gallai 树，则称 Q' 为 Q 的极性 ***Gallai*** 树分支。我们还称 Q 包含一个（极性） ***Gallai*** 树分支，若 Q 存在一个极子图，且该子图分别是一个（极性）Gallai 树分支。为简化记号，如果 $G(Q)$ 是 Gallai 树（其中 Q 可能是，也可能不是极性 Gallai 树），我们也称 Q 是 Gallai 树。

定理 6.1。 设 Q 为极图， k 为满足 $k \geq 3$ 的整数。设 $h \in V(Q)$ 满足 $d(h) > k$，但对于所有 $u \in V(Q) \setminus \{h\}$，均有 $d(u) \leq k$。若 Q 是 k-受限的，则存在某个 $w \in V(Q)$，使得 $Q - w$ 包含一个 *Gallai* 树分支 Q'，并且对所有 $v \in V(Q')$，均有 $d_Q(v) = k$。

证明。假设 Q 是 k-受限的。设 $\Gamma = (L, R)$ 是 Q 的一个 k-极赋值，其中 Q 是 Γ-受限的。则 Q 有一个 Γ-受限顶点 r，也就是说，存在 $r \in V(Q)$，使得 $c \in L(r)$；令 $(Q - r, \Gamma')$ 为从 (Q, Γ) 中删除 (r, c) 颜色后的结果，则 $Q - r$ 不可 Γ'-着色。令 $V_k = \{v \in V(Q) \colon d_Q(v) = k\}$。为导出矛盾，假设不存在 $w \in V(Q)$ 使得 $Q - w$ 包含一个顶点集包含于 V_k 的 Gallai 树分支。在此假设下，我们证明以下一系列断言。

断言 6.1.1。 我们有 $h \neq r$。

子证明。对于每个 $u \in V(Q) \setminus \{h\}$，有 $|L(u)| = k \geq d_Q(u)$。令 $(Q - h, \Gamma'')$ 为从 (Q, Γ) 中删除 h 颜色后的结果，其中 $\Gamma'' = (L'', R'')$。那么，对于所有 $u \in V(Q) \setminus \{h\}$，都有 $|L''(u)| \geq d_{Q-h}(u)$；由于 $d_Q(u) \leq k = |L(u)|$，只有在 $u \in V_k$ 时才有 $|L''(u)| = d_{Q-h}(u)$。因此， Γ'' 是 $Q - h$ 的一个度极化赋值。为导出矛盾，假设 $h = r$。那么，根据定理 4.1， $Q - h$ 包含一个极化 Gallai 树分支 T，且 Γ'' 是 T 的一个坏度数极化赋值。因此，对于所有 $u \in V(T)$，都有 $|L''(u)| = d_{Q-h}(u)$。所以 $V(T) \subseteq V_k$，矛盾。由此可得 $h \neq r$，证毕。◁

根据断言 6.1.1， $h \neq r$。令 $Q' = Q - \{r, h\}$，并令 $\Gamma' = (L', R')$。对于每个 $a \in L'(h)$，令 (Q', Γ_a) 为从 $(Q - r, \Gamma')$ 中删除 (h, a) 颜色所得的图。注意，对于每个 $a \in L'(h)$， Γ_a 是 Q' 的度极化赋值。若 Q' 是 Γ_a-可着色的，则 $Q - r$ 就是 Γ'-可着色的，这与假设矛盾。因此，根据定理 4.1，对于每个 $a \in L'(h)$， Q' 中都存在一个极性 Gallai 树分支 T_a，使得 Γ_a 是 T_a 的坏度数极化赋值。于是，任何这样的 T_a 都满足 $V(T_a) \subseteq V_k$。

断言 6.1.2。 存在不同的 a、$b \in L'(h)$，使得 Q' 中存在一个极性 *Gallai* 树分支 T，其中 Γ_a 和 Γ_b 都是 T 的坏度数极化赋值。

子证明。 反设不存在这样的 T。那么，对于每个 $a \in L'(h)$，都存在一个 Q' 的极化 Gallai 树分支 T_a，以及一个适用于 T_a的坏度数极化赋值 Γ_a，其中$\{T_a \colon a \in L'(h)\}$ 中的元素两两不同。因此， Q' 至少有 $|L'(h)|$ 个极化 Gallai 树分支。根据假设， $Q - h$ 不包含顶点集包含于 V_k的 Gallai 树分支。对每个 T_a，都有 $V(T_a) \subseteq V_k$，所以 T_a 不是 $Q - h$的一个连通分量。也就是说，每个 T_a 都至少包含一个属于 $N_Q(r)$的顶点。

若 $h \notin N_Q(r)$，则 $|L'(h)| = k$，因此有 k 个这样的 T_a 连通分量；而若 $h \in N_Q(r)$，则$|L'(h)| \in \{k - 1, k\}$，因此至少有 $k - 1$ 个这样的 T_a 连通分量。无论哪种情况，由于 $d_Q(r) \leq k$，且每个 T_a 都包含一个属于 $N_Q(r)$的顶点，顶点 r 在每个 T_a 中恰有一个邻点（后一种情况下，其中一个邻点是 h），并且 $r \in V_k$。于是， $Q[V(T_a) \cup \{r\}$ 是一棵 Gallai 树，其中 r 与 T_a 之间的边构成一个 K_2-块。由此可知， $Q[\{r\} \cup \bigcup_{a \in L'(h)} V(T_a)]$ 是 $Q - h$ 的一个 Gallai 树分支，其所有顶点都在 V_k 中，矛盾。◁

设 T 是 Q' 的一个极化 Gallai 树分支，如断言 6.1.2 所述。设 $T^+ = Q[V(T) \cup \{h\}]$。从 Γ' 中移除每个满足 Γ_a 不是 T 的坏度数极化赋值的颜色 $a \in L'(h)$，从而得到 T^+ 的极赋值 $\Gamma^+ = (L^+, R^+)$。由断言 6.1.2， $|L^+(h)| \geq 2$。按照构造， T^+ 现在不是 Γ^+-可着色的。我们还知道，对所有 $u \in V(T^+) \setminus \{h\}$， $|L^+(u)| \geq d_{T^+}(u)$，且 T 是连通的。因此，由定理 5.4， $(T^+, h) \in \mathbf{N}_{|L^+(h)|}$，且 Γ^+ 是 T^+ 的一个 h-坏极赋值。此外， $V(T) \subseteq V_k$。注意，对所有 $u \in V(T^+) \setminus \{h\}$， $|L^+(u)| = d_{T^+}(u)$，并且由 **(N3)** 可知， h 与 T 的任何顶点之间都没有平行边。我们继续努力导出矛盾。

命题 6.1.3。 设 B 是 T 的一个块。那么，对于所有 u， $v \in V(B)$，都有 $d_B(u) = d_B(v) \leq k - 1$。

子证明。 由于 T 是 Gallai 树，因此对于所有 u， $v \in V(B)$，都有 $d_B(u) = d_B(v)$。令 $v \in V(B)$，并注意到 $d_B(v) \leq d_T(v) \leq d_Q(v) \leq k$。假设 $d_B(v) = k$。那么 v，事实上 B 中的每个顶点都是 T 的内部顶点，且 $v \notin N_Q(r) \cup N_Q(h)$。因此， $B \cong K_{k+1}$，而 B 是 T 的唯一块。因此， B 是 $Q - h$（以及 $Q - r$）中的一个 Gallai 树分支，其顶点集包含于 V_k 中，矛盾。◁

如果 T 的一个块 B 满足对于所有 $u \in V(B)$ 都有 $d_B(u) = k-1$，我们就称其为满块。根据(**N1**)， T 的每个块都是轻、正常或重的。如果一个块是满轻块，或者是与满轻块共享一个割点的重 K_2-块，我们就称其为终端块。

断言 6.1.4. 设 B 是 T的一个满轻块，且 u 是 $V(B)$中 T的一个割点。那么 $u \notin N_Q(r) \cup N_Q(h)$，并且 u 恰好属于 T的另一个块，该块是一个重 K_2-块。

子证明. 由于 B 是满的，我们有 $d_B(u) = k-1$。如果 $u \in N_Q(r) \cup N_Q(h)$，那么 $d_T(u) \leq k-1$，这意味着 u 不是 T的割点。因此， $u \notin N_Q(r) \cup N_Q(h)$。于是，根据 (**G2**)，我们有 u 属于 T的一个重块 S。由于 $d_B(u) = k-1$ 且 $d_B(u) + d_S(u) \leq k$，我们有 $d_S(u) = 1$，所以 S 是一个K_2-块，而 u 不属于 T的任何其他块。◁

断言 6.1.5. 设 $u \in V(T) \cap N_Q(r)$。则 T 中存在某个块 B，包含 u，且 B 不是终端。

子证明。假设 T 中所有包含 u 的块都是终端。设 u 是 T 的内部顶点。由定理 5.6(iii)， u 不在重块中，因此 u 在一个满轻块中。由 (N1) 和 (G1)，这意味着 $u \in N_Q(h)$。所以 $u \in N_Q(r) \cap N_Q(h)$，因此 $d_T(u) \leq k-2$，这与 u 在一个满块中矛盾。现在设 u 是 T 的割点。由于 T 中每个包含 u 的块都是终端，因此 u 要么在一个重块中，要么 u 在一个满轻块中。若 u 在一个重块中，则由定理 5.6(i)， $u \notin N_Q(h)$；而若 u 在一个满轻块中，则由断言 6.1.4， $u \notin N_Q(h)$。由于无论哪种情况都有 $u \notin N_Q(h)$，定理 5.6(ii) 蕴含 u 恰好属于一个轻块 A 和一个重块 S。但此时 $d_A(u) = k-1$ 且 $d_S(u) = 1$，所以 $d_A(u) + d_S(u) = k$，进而 $u \notin N_Q(r)$，矛盾。◁

断言 6.1.6。 T 至少有一个不满的轻块。

子证明。注意， T 在 $N_Q(h)$ 中至少有一个顶点；否则， T 就是 $Q-r$ 的一个 Gallai 树分支，且所有顶点都在 V_k中，这与我们的初始假设矛盾。如果 $u \in N_Q(h) \cap V(T)$，那么根据定理 5.6(i)， u 属于 T的某个轻块。因此， T 至少有一个轻块。

假设 T 的所有轻块都是满的。根据断言 6.1.5，如果 T 的每个块都是终端块，那么$N_Q(r) \cap V(T) = \emptyset$，这意味着 T是 $Q-h$ 的一个 Gallai 树分支，且所有顶点都在 V_k中，矛盾。因此， T 有一个非终端块。现在 T 同时有终端块和非终端块，因此存在 T 的一个割点 v，它同时属于一个终端块 B 和一个非终端块 A。根据断言 6.1.4，如果B 是一个满轻块，那么 A 就是一个重 K_2块，因而是终端块，矛盾。因此， B 是一个重 K_2块。根据定理 5.6(i)， $v \notin N_Q(h)$，所以根据定理 5.6(ii)， v 恰好属于一个轻块 A'。然而，由于 T 的所有轻块都是满的， A' 是满的，因此根据断言 6.1.4， A'和 B 是包含 v的仅有的块，所以 v 不属于任何非终端块，矛盾。◁

引理 6.1.7。 $L^+(h) \neq L(h)$。

子证明。假设 $L^+(h) = L(h)$，因此 $|L^+(h)| = k$，此时 $(T^+, h) \in \mathcal{N}_k$。根据引理 6.1.6，存在 T 的一个轻块 B，它不是满的。现在，对于 B 的任意顶点 v，由 (**N2**)，有 $d_B(v) \geq |L^+(h)| - 1 = k-1$，并且根据命题 6.1.3， $d_B(v) \leq k-1$，因此 $d_B(v) = k-1$，这与 B 不是满的矛盾。◁

断言 6.1.8。 $N_Q(r)$ 中至少有一个顶点不属于 $V(T)$。

子证明。假设 $N_Q(r) \subseteq V(T)$。特别地， $h \notin N_Q(r)$，因此 $L'(h) = L(h)$。根据引理 6.1.7， $L^+(h) \neq L'(h)$。由于 $L^+(h) \subseteq L'(h)$，存在 $d \in L'(h) \setminus L^+(h)$，以及 Q' 中一个不同于 T 的极性 Gallai 树分支 T_d，使得 $V(T_d) \subseteq V_k$。现在 $N_Q(r) \cap V(T_d) = \emptyset$，所以 T_d 是 $Q-h$ 的一个 Gallai 树分支，矛盾。◁

现在，由于 $d_Q(r) \leq k$，根据断言 6.1.8，我们有 $|N_Q(r) \cap V(T)| \leq k-1$。

断言 6.1.9。如果 $|N_Q(r) \cap V(T)| = k-1$，那么 $Q[V(T) \cup \{r\}]$ 不是 *Gallai* 树。

子证明。反设 $|N_Q(r) \cap V(T)| = k-1$ 且 $Q[V(T) \cup \{r\}]$ 是一棵 Gallai 树。那么，由于 $d_Q(r) \leq k$ 且根据断言 6.1.8， $r \in V_k$，并且 r 恰有一个不属于 T 的邻点。如果 r 与 h 之间有一条边，那么 $Q[V(T) \cup \{r\}]$ 是 $Q-h$ 的一个连通分量，因此它是一个所有顶点都属于 V_k 的 Gallai 树分支，矛盾。因此 r 与 h 之间没有边，从而

$L'(h) = L(h)$。根据引理 6.1.7，$L^+(h) \neq L'(h)$。由于 $L^+(h) \subseteq L'(h)$，存在某个 $d \in L'(h) \setminus L^+(h)$，以及 Q' 的一个极性 Gallai 树分支 T_d，且它不同于 T，满足 $V(T_d) \subseteq V_k$。现在，T_d 不是 $Q-h$ 的一个连通分量，否则 T_d 就是 $Q-h$ 的一个 Gallai 树分支。因此 r 有一个邻点 $u \in V(T_d)$。现在，u 是 r 唯一一个不属于 T 的邻点，因此 $Q[V(T_d) \cup \{r\}]$ 是一棵 Gallai 树，其中 $\{r,u\}$ 是这棵 Gallai 树中一个 K_2-块的顶点集。由此可知，$Q[V(T) \cup V(T_d) \cup \{r\}]$ 是一棵 Gallai 树，因为它可以通过识别 Gallai 树 $Q[V(T) \cup \{r\}]$ 和 $Q[V(T_d) \cup \{r\}]$, 中的 r 而得到，这两棵树的所有顶点都属于 V_k。但是，$Q[V(T) \cup V(T_d) \cup \{r\}]$ 是 $Q-h$ 的一个连通分量，因此这是一个 Gallai 树分支，矛盾。◁

断言 6.1.10. T 中至少有两个块不是终端块。

子证明. 由引理 6.1.6，存在 T 的一个块 B，使得 B 是轻的且不满。由命题 6.1.3，且由于 B 不满，对于每个 $v \in V(B)$，都有 $d_B(v) < k-1$。

反设 B 是 T唯一的非终端块。任取 $u \in V(B)$，令 $m = k-1-d_B(u)$（回忆一下，对于所有 $u,v \in V(B)$，都有 $d_B(u) = d_B(v)$）。我们证明，对于所有 $v \in V(B)$，都有 $e_Q(r,v) = m$。令 $v \in V(B)$。若 v 是 T的内部顶点，则由 (G1)，$v \in N_Q(h)$，因此$d_{Q-h}(v) = k-1$。由于 $d_{Q-h}(v) - e_Q(r,v) = d_{Q'}(v) = d_B(v)$，可得 $e_Q(r,v) = m$。另一方面，若 v 是 T的割点，则 v 至少属于一个不同于 B的块，而所有这类块都是终端块。终端块要么是轻块，要么是重块，因此由定理 5.6(iv)可知，除 B 外，恰有一个块包含 v，且该块是一个重 K_2-块。因此 $d_T(v) = d_B(v) + 1$。由定理 5.6(i)，$v \notin N_Q(h)$，故 $d_T(v) = k - e_Q(r,v)$，于是再次得到 $e_Q(r,v) = m$。

注意，$m \geq 1$，因为对于所有 $v \in V(B)$，$d_B(v) < k-1$。我们断言 B 是完全图。假设 B 是一个奇圈，且 $|V(B)| \geq 5$。那么 $m = k-3$，因此 $k \geq 4$。由于对于所有 $v \in V(B)$，$|V(B)| \geq 5$，且 $e_Q(r, v) = k-3$，所以 r 与 B 的顶点之间至少有 $5(k-3)$ 条边。但对于所有 $k \geq 4$，$5(k-3) > k$，因此这意味着 $d_Q(r) > k$，矛盾。因此，B 是一个有 $d_B(u)+1$ 个顶点的完全图。所以，r 与 B 的顶点之间至少有 $m(d_B(u)+1) = m(k-m)$ 条边。根据断言 6.1.8，这样的边至多有 $k-1$ 条。因此，$m(k-m) \leq k-1$，这意味着 $k(m-1) \leq (m-1)(m+1)$，于是 $m=1$ 或 $m = k-1$。但 $m = k-1$ 意味着 B，因此 T 仅由一个顶点组成，矛盾。因此，$m=1$，进而 $B \cong K_{k-1}$，其中对每个 $v \in V(B)$，$e_Q(r, v) = 1$。但根据断言 6.1.8，r 在 T 中没有其他邻点，因此 $Q[V(T) \cup \{r\}]$ 是一棵 Gallai 树，这与断言 6.1.9 矛盾。由此可得，T 中至少有两个非终端块。◁

断言 6.1.10 特别意味着，T中至少有两个块，因此 T 的每个块都至少有一个割点。

断言 6.1.11. 设 u 是 T的一个内部顶点，并设 B 是 T 中包含 u的块。

(i) 如果 $u \notin N_Q(r)$，则 $u \in N_Q(h)$，且 B 是一个满轻块。(ii) 如果 $u \in N_Q(r)$，则要么 $u \in N_Q(h)$，且 B 是轻但非满的；要么 $u \notin N_Q(h)$，且 B 是一个普通块。

子证明。块 B 包含一个割点 $v \neq u$。于是 $d_T(v) > d_T(u)$，因此，由于 $d_Q(u) = d_Q(v) = k$，我们有 $u \in N_Q(r) \cup N_Q(h)$。假设 $u \notin N_Q(r)$。那么 $u \in N_Q(h)$，所以根据(G1)，B 是轻的。由于$u \in N_Q(h) \setminus N_Q(r)$，我们有 $d_T(u) = k-1$，因此 $d_B(u) = k-1$，从而 B是满的。因此 (i) 成立。

现在设 $u \in N_Q(r)$。根据 (G1)，若 $u \in N_Q(h)$，则 B 是轻的；而若 $u \notin N_Q(h)$，则 B 是正常的。此外，当 $u \in N_Q(r) \cap N_Q(h)$ 时，我们有 $d_B(u) = d_T(u) \leq k-2$，因此 B不是满的。◁

设 u 是极性 Gallai 树 T 的割点。则 T 是某些极性 Gallai 树的并$\mathcal{U}$，其中每棵树都包含 u，但与$\mathcal{U}$中任一不同成员没有其他公共顶点。对于 B 中包含 u 的每个块，$\mathcal{U}$ 中都有唯一的极图包含 B；我们将这棵极性 Gallai 树记为 $Q_T(u,B)$，见图 8。设 A 是 T 的一个块，且 $u \notin V(A)$，并设 v 是 T 在 A 中的一个割点。注意，若 $Q_T(v,A)$ 不包含 u，则 $Q_T(v,A)$ 是 $Q_T(u,B)$ 的子图。

断言 6.1.12. 设 u 是块 B 中 T 的割点。如果 B 不是终端，那么 $Q_T(u,B)$ 有一个块 A，使得以下情况之一成立

(i) A 是正常的，并且在 r 和 $V(A) \setminus \{u\}$ 之间至少有 $k-1$ 条边；或者

(ii) A 是轻的，并且在 r 和 $V(A) \setminus \{u\}$ 之间至少有 $k-2$ 条边。

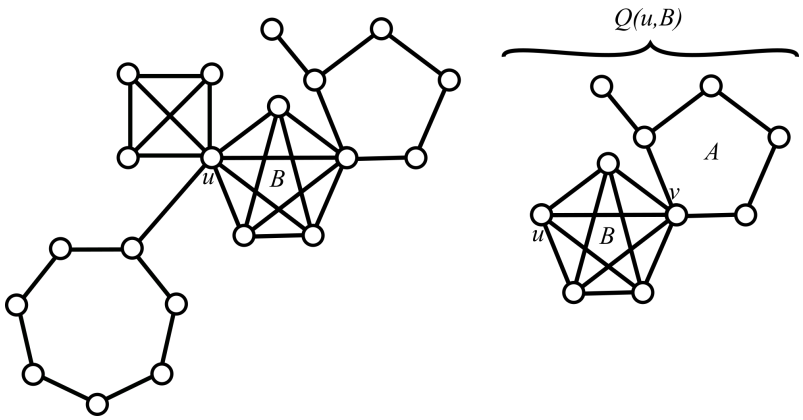


图 8. 一个带有割点 u 和包含 u 的块 B 的极化 Gallai 树 T（左）；以及 $Q_T(u,\ B)$，图中标出了一个块 A和一个割点 v（右）。这里，$Q_T(v,\ A)$不包含 u，因此它是 $Q_T(u,\ B)$的子图。

子证明。证明对 $Q_T(u,B)$ 的块数作归纳。由于 B 是 $Q_T(u,B)$ 的一个块，在基例中，B 是 $Q_T(u,B)$ 的唯一块。因此，对于任意 $v \in V(B)\setminus\{u\}$，我们有 v 是 T 的内部顶点；于是，根据断言 6.1.11，且由于 B 不是终端，$v \in N_Q(r)$。首先，假设存在某个 $v' \in V(B)\setminus\{u\}$，使得 $v' \notin N_Q(h)$，并令 $m = e_Q(r,v')$。那么，根据断言 6.1.11，B 是正常的，并且对所有 $v \in V(B)\setminus\{u\}$，都有 $v \notin N_Q(h)$。现在，对所有 $v \in V(B)\setminus\{u\}$，$d_B(v) = d_T(v) = k-m$，且 $e_Q(r,v) = m$。此外，$|V(B)| \geq k-m+1$，因此 $|V(B)\setminus\{u\}| \geq k-m$。因此，在 r 与 $V(B)\setminus\{u\}$ 之间至少有 $(k-m)m$ 条边。显然，$1 \leq m$，且根据断言 6.1.8，$m \leq k-1$。因此 $k(m-1) \geq (m+1)(m-1) = m^2-1$，这意味着 $(k-m)m \geq k-1$，所以在这种情况下 (i) 成立。

假设对于所有 $v \in V(B)\setminus\{u\}$，都有 $v \in N_Q(h)$。根据断言 6.1.11，B是轻的。令任意 $v' \in V(B)\setminus\{u\}$ 对应 $m = e_Q(r,v')$，则对于所有 $v \in V(B)\setminus\{u\}$，有 $d_B(v) = k-m-1$ 且 $e_Q(r,v) = m$。因此 $|V(B)\setminus\{u\}| = k-m-1$。于是 r 与 $V(B)\setminus\{u\}$ 之间至少有 $(k-m-1)m$ 条边。显然 $m \geq 1$，并且由于 $d_B(v) \geq 1$，我们有 $m \leq k-2$。因此 $k(m-1) \geq (m+2)(m-1)$，这意味着 $(k-m-1)m \geq k-2$，故 (ii) 成立，从而当 $Q_T(u,B)$ 由一个块构成时，该断言成立。

现在假设 $Q_T(u,B)$ 有 i 个块，其中 $i \geq 2$ 是某个值，并且对于任意满足 $Q_T(u',B')$ 的块数少于 i 的割点 u' 和块 B'，结论均成立。由于 $i \geq 2$，B 中至少存在一个 $Q_T(u,B)$ 的割点 x，且满足 $x \neq u$。设 B_1 为 $Q_T(u,B)$ 的一个块，它包含 x，且不同于 B。若 B_1 不是终端，则由于 $Q_T(x,B_1)$ 的块数少于 i，根据归纳假设，它包含一个块 A，使得以下条件之一成立：A 是正常的，且 r 与 $V(A)\setminus\{x\}$ 之间至少有 $k-1$ 条边；或者 A 是轻的，且 r 与 $V(A)\setminus\{x\}$ 之间至少有 $k-2$ 条边。由于 $Q_T(x,B_1)$ 不包含 u，它是 $Q_T(u,B)$ 的子图，因此无论哪种情况，结论都成立。

因此，我们可以假设所有其他包含 x 的块都是终端块。特别地，B_1 是终端的。若 B_1 是满轻块，则由断言 6.1.4 可知，B 是一个重 K_2-块，这意味着 B 是终端的，矛盾。因此，B_1 是一个重 K_2-块。由定理 5.6(iv)，x 至多属于一个重块。由此可知，B 和 B_1 是仅有的包含 x 的块；并且由定理 5.6(iii)，B 是轻的。由定理 5.6(i)，$x \notin N_Q(h)$。若 $x \notin N_Q(r)$，则 $k = d_T(x) = d_B(x) + d_{B_1}(x)$，且 $d_{B_1}(x) = 1$，因此 $d_B(x) = k-1$，这意味着 B 是满轻块，与 B 不是终端的矛盾。所以 $x \in N_Q(r)$。令 $m = e_Q(x,r)$。我们有 $d_B(x) = k-1-m$，因此 $|V(B)| \geq k-m$。

现在令 $x' \in V(B)\setminus\{u\}$。若 x'是 $Q_T(u,B)$ 的割点，则 x'在 $Q_T(u,B)\setminus V(B)$ 中只有一个邻点（因为在前面的论证中，B里的 $Q_T(u,B)$ 的割点 x是任意选取的）。另一方面，若 x'是 $Q_T(u,B)$ 的内部顶点，则由 (G1) 且由于 B是轻的，可得 $x' \in N_Q(h)$。因此，对所有这样的 x'，都有 $d_{Q-r}(x') = k-m$，所以 r 与每个 $x' \in V(B)\setminus\{u\}$ 之间有 m 条边。由于 $|V(B)| \geq k-m$，r 与 $V(B)\setminus\{u\}$ 之间至少有 $(k-m-1)m$ 条边。和之前一样，$(k-m-1)m \geq k-2$，因此块 B 满足 (ii)，证毕。由归纳法可得结论。◁

根据断言 6.1.10， T 有两个不同的非终端块 B 和 B'，并且存在一个割点$u_B \in V(B)$，它将 $V(B)\setminus\{u_B\}$ 与 $V(B')\setminus\{u_B\}$分离；还存在一个割点 $u'_B \in V(B')$，它将$V(B')\setminus\{u'_B\}$ 与 $V(B)\setminus\{u'_B\}$分离。注意，若 B 和 B' 共享一个割点，则 $u_B = u'_B$；否则，$Q_T(u_B, B)$ 与 $Q_T(u'_B, B')$ 顶点不交。

根据断言 6.1.12，存在一个块 A of $Q_T(u_B, B)$，使得在 r 与 $V(A)\setminus\{u_B\}$ 之间有一个至少包含 $k-2$ 条边的集合 Z；并且存在一个块 A' of $Q_T(u'_B, B')$，使得在 r 与 $V(A')\setminus\{u'_B\}$ 之间有一个至少包含$k-2$条边的集合 Z'。由于 $Q_T(u_B, B)$ 和 $Q_T(u_B, B')$ 除了可能的 u_B 和 u'_B 之外顶点不交，因此 Z 和 Z' 不相交，所以 r 与 $V(T)$ 之间至少有 2($k-2$) 条边。由于 $d_Q(r) \le k$，我们有 $k \le 4$。此外，如果 $k=4$，那么 $N_Q(r) \subseteq V(T)$，这与断言 6.1.8 矛盾。

现在只需考察 $k=3$ 的情形。由断言 6.1.8， $N_Q(r) \not\subseteq V(T)$，因此 r 与 $V(T)$ 之间至多有两条边。因此， r 与 $V(A)\setminus\{u_B\}$ 之间恰有一条边，且 r 与 $V(A')\setminus\{u'_B\}$ 之间也恰有一条边。由断言 6.1.12， A 和 A' 是轻的。令 $z \in V(A)\cap N_Q(r)$。若 z 是 T 的内部顶点，则由断言 6.1.11， A 是一个 K_2-块。否则， z 在 $V(T)\setminus V(A)$ 中至少有一个邻点，因此，由于 $d_Q(z)=3$，我们有 $d_A(z)=1$，于是 A 又是一个 K_2-块。因此， A 以及类似地 A' 都是轻的 K_2-块。特别地， A 和 A' 不是终端。在 $G(T)$ 的块割图中， A 与 A' 之间存在唯一的路径。令 T_B 为 T 的导出子图，其顶点由这条路径上的各块中的所有顶点组成；那么 T_B 由一条块路径构成，其中每个块也是 T 中的块，且 A 和 A' 是 T_B 的叶块。令 $V(A)=\{v_A, u_A\}$，且 $V(A')=\{v'_A, u'_A\}$，其中 u_A 和 u'_A 是 T_B 的割点。注意，在 $Q_T(u_A, A)$ 中，与 r 在 Q 中相邻的唯一顶点属于 $V(A)$。由断言 6.1.12，由于 A 不是终端， $v_A \in N_Q(r)$。类似地， $v'_A \in N_Q(r)$。

命题 6.1.13。 T_B 的每个块都是一个 K_2-块，且要么是轻的，要么是正常的。此外， T_B 的每个割点都位于两个块中：一个轻块和一个正常块。

子证明。设 T_B的块为 B_1、 B_2、……、 B_m，其中对于每个 $j \in \{2,\dots,m\}$， $B_1 = A$、 $B_m = A'$以及 B_j和 B_{j-1}共享一个割点 u_j。我们首先证明，对于 $j \in \{1,2,\dots,m\}$，每个 B_j都是一个轻的或正常的 K_2-块。为导出矛盾，假设存在某个这样的 j，使得 B_j 不是一个轻的或正常的 K_2-块；选取最小的这样的 j 作为 i （见图 9）。由于 A 是轻的， $i \ge 2$。因此， B_i 有一个割点 u_i，该割点将 $V（B_i）\setminus\{u_i\}$ 与 $V（A）\setminus\{u_i\}$分离，而 u_i 属于另一个块 B_{i-1}，后者是一个轻的或正常的 K_2-块。

回想一下 $u_i \notin N_Q(r)$。因此，要么 $u_i \in N_Q(h)$ 和 $d_T(u_i)=2$，要么 $u_i \notin N_Q(h)$ 和 $d_T(u_i)=3$。假设我们处于第一种情况。由于 B_{i-1} 是一个 K_2-块， B_i 也是一个 K_2-块。根据 (**G2**)，如果 B_{i-1} 是轻的，那么 B_i 是正常的；如果 B_{i-1} 是正常的，那么 B_i 是轻的。因此， B_i 是一个轻或正常的 K_2-块，这就矛盾了。因此，我们可以假设 $u_i \notin N_Q(h)$ 和 $d_T(u_i)=3$。为简化记号，令 $d_i = d_{B_i}(u_i)$ 且 $d_{i-1} = d_{B_{i-1}}(u_{i-1})$。于是 $d_{i-1}=1$，并且由于 $u_i \notin N_Q(h)$，我们有 $d_i \in \{1,2\}$。

假设 $d_i = 1$。那么，由于 $d_T(u_i)=3$ 和 $d_{i-1}=1$，存在另一个包含u_i的块 B'_i，它也是一个 K_2-块。根据(**G2**)，要么 B_i、 B_{i-1}和 B'_i 全都正常；要么其中一个是轻的，一个是重的，还有一个是正常的。根据假设， B_i 是重的，因此 B'_i 要么是轻的，要么是正常的，所以它不是终端的。因此，根据断言 6.1.12，在 $Q_T(u_i, B'_i)$ 中存在一个块 A_i，使得 r 与 $V(A_i)\setminus\{u_i\}$ 中的某个顶点之间有一条边。但这样一来， r 在 T 中有一个邻点，该邻点不同于 v_A 和 v'_A，这就矛盾了。

现在我们可以假设 $d_i = 2$。那么，包含 u_i 的 T 中只有 B_i 和 B_{i-1}这两个块。根据（**G2**），若 B_{i-1} 正常，则 B_i 正常；若 B_{i-1} 轻，则 B_i 重。无论如何， B_i

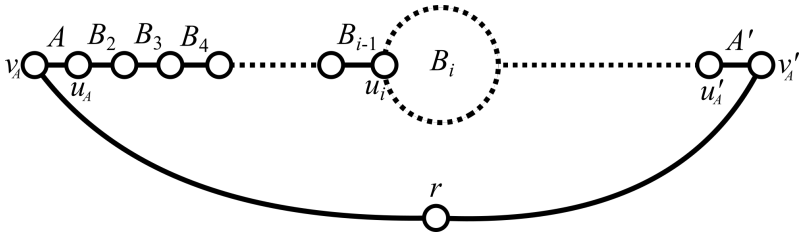


图 9. 由 $V(T_B)\cup\{r\}$ 诱导的图，其中展示了 T_B 的块 $B_1,\dots,B_m$。块 B_i 是第一个既不是轻型也不是正常的 K_2-块。

都不轻。由于 $d_i = 2$，我们有 $|V(B_i)| \geq 3$。由于 $B_i \neq A'$，我们选择 $x \in V(B_i) \setminus \{u_i, u_{i+1}\}$，并有 $x \notin N_Q(r)$。若 $x \in N_Q(h)$，则 $d_T(x) = 2 = d_i = d_{B_i}(x)$，这意味着 x 是 T 的一个内部顶点，因此根据断言 6.1.11，B_i 是轻的，矛盾。因此，$x \notin N_Q(r) \cup N_Q(h)$ 且 $d_T(x) = 3$。由于 $d_{B_i}(x) = 2$，这意味着还有另一个块 B_x 包含 x，且 B_x 是一个 K_2-块。那么，包含 x 的块只有 B_i 和 B_x，其中 B_i 不轻，因此根据（G2），B_x 不重。于是 B_x 不是终端，因此根据断言 6.1.12，$Q_T(x, B_x)$ 包含 $N_Q(r)$ 中一个不同于 v_A 和 v'_A 的顶点，矛盾。因此，T_B 的所有块都是轻的或正常的 K_2-块，证毕。

现在，根据命题 6.1.13，T_B 是一条端点为 v_A 和 v'_A的路径。令 $x \in V(T_B) \setminus \{v_A, v'_A\}$。由上述结果可知，$x$ 属于 T_B 中的两个 K_2-块，而这两个块是轻块或普通块。还需证明 x 属于一个轻块和一个普通块。我们有 $d_Q(x) = 3$ 以及 $d_{T_B}(x) = 2$，且 $x \notin N_Q(r)$。根据 (G2)，如果 $x \in N_Q(h)$，那么 x 属于一个轻块，并且所有其他包含 x 的块都是普通块，结论得证。因此，假设 $x \notin N_Q(h)$。于是，x 属于 T 的另一个块 X，该块不在 T_B中，而 X 是一个K_2-块。假设 X 不是重的。那么，X 不是终端，因此根据断言 6.1.12，$Q_T(x, X)$存在一个块 A'，它在 $N_Q(r)$中有一个顶点，该顶点不同于 v_A，且 v'_A，矛盾。因此，X是重的。但根据 (G2)，T_B 中包含 x 的两个块中，一个是轻块，另一个是普通块，结论得证。◁

现在，T_B 在轻 K_2块和正常 K_2块之间交替，且以轻块开始和结束。因此，T_B 有奇数个块。所以，$Q[V(T_B) \cup \{r\}]$ 是一个奇圈，进而$Q[V(T) \cup \{r\}]$ 是一个 Gallai 树，其中 $|N_Q(r) \cap V(T)| = k - 1$，这与断言 6.1.9 矛盾。□

对于图 s（也就是说，当我们没有极化边时），我们得到以下刻画:

定理 6.2。设 G 是一个简单图，k 是一个满足 $k \geq 3$的整数。设 $h \in V(G)$ 满足$d(h) > k$，但对所有 $u \in V(G) \setminus \{h\}$，$d(u) \leq k$。当且仅当存在某个 $r \in V(G)$ 使得 $G - r$ 包含一个 *Gallai* 树分支 H，且对所有 $v \in V(H)$，$d_G(v) = k$ 时，图 G 才是 k-受限的。

证明。一个方向由定理 6.1 得出。对于另一个方向，设 $V_k = \{v \in V(G) : d(v) = k\}$，并假设存在某个 $r \in V(G)$，使得 $G - r$ 包含一个带有$V(H) \subseteq V_k$的 Gallai 树分支 H。那么每个 $v \in V(H)$ 在 G中都有 k 个邻点，其中至多有一个（记为 r）不属于 $V(H)$。因此，每个 $v \in V(H)$ 都有 $d_H(v) \in \{k-1, k\}$。设 L 是 H的一个坏度列表赋值，并注意到若 $v \notin N_G(r)$，则$|L(v)| = k$；若 $v \in N_G(r)$，则 $|L(v)| = k - 1$。令 $c \in \mathbb{N} \setminus \bigcup_{v \in N_G(r)} L(v)$，并令 L' 为 G的一个k-列表赋值，构造方式如下：若 $v \in N_G(r) \cap V(H)$，则令 $L'(v) = L(v) \cup \{c\}$；若 $v \in V(H) \setminus N_G(r)$，则令 $L'(v) = L(v)$；令 $L'(v)$ 为大小为 k的任意列表，但满足 $c \in L'(r)$。那么，根据构造，从 (G, L') 中删除颜色 (r, c) 后，得到的图含有一个带有坏度列表赋值的 Gallai 树分支，因此不可着色。因此，r 在 c上是 L'-受限的，所以G 有一个 k-受限顶点，证毕。□

我们主要关注极图为 2-连通的情形，在这种情况下，我们可以得到稍强一些的结论。

推论 6.3. 设 Q 是一个2-连通极图，k 是一个满足 $k \geq 3$ 的整数。设 $h \in V(Q)$，使得 $d(h) > k$，但对所有 $u \in V(Q) \setminus \{h\}$，都有 $d(u) \leq k$。若 Q 是 k-受限的，则 $G(Q - h)$ 是一棵 *Gallai* 树，并且对所有 $v \in V(Q) \setminus \{h\}$，都有 $d_Q(v) = k$。

证明。根据定理 6.1，存在某个 $w \in V(Q)$，使得 $G(Q-w)$ 含有一个 Gallai 树连通分量 H，其中对所有 $u \in V(H)$，都有 $d_Q(u) = k$。由于 Q 是 2-连通的，$Q - w$ 是连通的，因此 $H = G(Q - w)$，且 $h = w$。结论得证。□

7. 类 $\mathcal{T}_k^-$

设 $k \geq 3$。对于最大度至多为 k、最小度严格小于 k 的图 H，回顾一下，H 的几乎 k-正则扩展（记作 H_k^+）是通过添加一个顶点 h，并对每个顶点 $v \in V$（G），在 h 与 v之间添加 $k - d_H$（v）条平行边而从 H 得到的图。我们将$\mathcal{T}_k^-$ 定义为这样一类图：它们是 Gallai 树的几乎 k-正则扩展，最大度至多为 k、最小度小于 k，且不含 K_2-块。图 10 展示了$\mathcal{T}_5^-$ 中的一些图例。

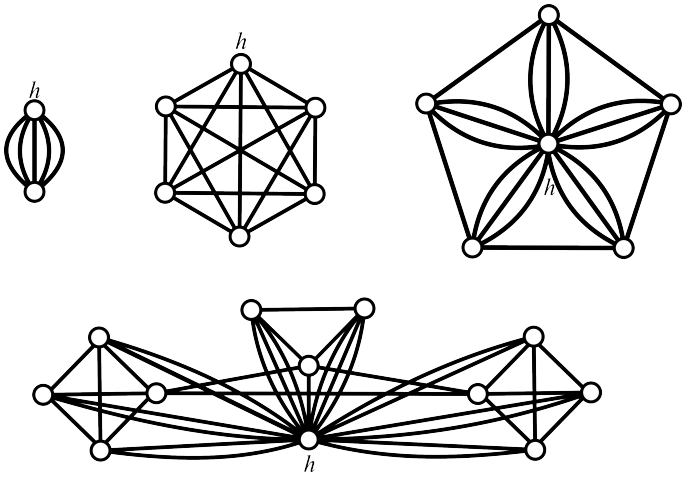


图 10。$\mathcal{T}_5^-$中的一些图。

在下一节中，我们将通过 Haj´os 联结对$\mathcal{T}_k^-$ 进行闭包，从而得到$\mathcal{T}_k$。请注意，由于定义$\mathcal{T}_k^-$ 时排除了 K_2-块，这里的$\mathcal{T}_k$ 定义与引言中的定义略有不同。不过，稍后我们将看到定理 8.9，它表明，如果 G 是 Gallai 树的几乎 k-正则扩展（即便该树含有 K_2-块），那么 $G \in \mathcal{T}_k$。因此，这两个定义实际上是一致的。

本节首先证明$\mathcal{T}_k^-$ 中图的一些结构性质。然后考察极化奇轮，它们是一类底层图属于$\mathcal{T}_3^-$的极图。接下来，我们刻画底层图属于$\mathcal{T}_k^-$ 的极图何时是 k-受限的，并考察当某个顶点在不止一种颜色上是 k-受限时，此类极图的一些性质（见定理7.8）。最后，我们引入 k-可连接极图的概念，并证明底层图属于$\mathcal{T}_k^-$ 的极图是 k-可连接的。

7.1. 结构性质。 设 $G \in \mathcal{T}_k^-$，其中 $k \geq 3$。我们称 G 的 $h \in V(G)$为枢纽，若 G 同构于 $G-h$的几乎 k-正则扩展，其中 $G-h$是最大度至多为 k 且最小度小于 k的 Gallai 树。显然， G至少有一个枢纽，但也可能有多个。若 $G \cong K_{k+1}$ 或 $G \cong I_k$，其中 I_k 是由两个顶点以及连接它们的 k 条边组成的图，则称 G 为 k-对称。当 G为 k-对称时，对于任意 $v \in V(G)$， G都是 $G-v$ 的几乎 k-正则扩展；也就是说， G 的每个顶点都是一个枢纽。下面的引理断言，当 G不是 k-对称时，它只有一个枢纽。此外，我们还证明了当 G不是 k-对称时一个进一步有用的性质。

引理 7.1. 设 G 是 T_k^- 中的一个图，对于 $k \geq 3$，且它不是 k-对称的。

(i) G 有唯一枢纽 $h \in V(G)$。(ii) 此外，若 G 不是奇轮，则对于 $G-h$ 的每个内部顶点 u，都有 $e_G(u,h) \geq 2$。

证明。设 h 是 G的一个枢纽，因此 $(G-h)_k^+ \cong G$。于是，除 h 外， G 的每个顶点在G 中的度都是 k。所以，若 G 不是 k- 正则的，(i) 显然成立。特别地，若 G 是非完全图的奇轮，则情况如此。因此，以下我们假设 G 不是奇轮。此外，若 $|V(G)| = 2$，则 $G \cong I_k$，矛盾。所以 $|V(G)| \geq 3$。

设 $T = G-h$。那么 T 是一棵满足 $|V(T)| \geq 2$ 的 Gallai 树。由此可知， T 至少有两个内部顶点。注意，由于 Gallai 树是简单图， G 的任何平行边都与 h 关联。因此，若 G 有不同的平行类，则 (i) 成立。现在只需证明 (ii) 成立，因为这意味着 G 有不同的平行类，进而意味着 (i) 成立。

假设 T 由单个块组成。那么， T 中的每个顶点都是内部顶点，且度数相同，为 d。注意， $d < k$，因为 T的最小度小于 k。若 $d = k-1$，则当 $k = 3$时， T是一个奇圈；当 $k > 3$时， $T \cong K_k$。在前一种情况下， G 是一个奇轮；而在后一种情况下

$G \cong K_{k+1}$；两种情况都会导致矛盾。因此 $d \leq k-2$，此时h 与 T中的每个顶点之间至少有两条边，所以(ii)成立。

现在可以假设 T 有多个块。那么， T 的每个块都至少包含 T 的一个割点。设 u 是 T 的一个块 B 中的内部顶点， x 是 B 中的一个割点。于是 $d_T(u) = d_B(u) = d_B(x) < d_T(x) \leq k$，因此 $d_T(u) \leq k-1$。如果 $d_T(u) = k-1$，那么 $d_B(x) = k-1$ 且 $d_T(x) = k$，因此 x 属于一个 K_2-块，矛盾。因此 $d_T(u) \leq k-2$。于是，在 G 中， u 和 h 之间至少有两条平行边，因此 (ii) 成立。□

引理 7.2. 设 $G \in \mathcal{T}_k^-$，其中 $k \geq 3$，并设 $U \subseteq V(G)$，满足 $G[U] \cong K_k$。那么 $G \cong K_{k+1}$。

证明。由于 $G \in \mathcal{T}_k^-$，我们有 $G \cong H_k^+$，其中 H 是一棵没有 K_2-块的 Gallai 树，其最大度为 k，最小度小于 k。令 h 为 G 的一个枢纽。

我们先证明引理在 $h \notin U$ 的情形下成立。因此假设 $h \notin U$。于是 $U \subseteq V(H)$，所以 U 包含在 H 的一个块 B 中。假设 U 真包含于 $V(B)$。那么存在 $v \in V(B) \setminus U$，使得 v 在 U 中有一个邻点 u，因此 u 在 H 中的度至少为 k。但是，由于 H 是一棵最大度至多为 k 的 Gallai 树，这意味着 H 仅由一个块构成，且其中每个顶点的度均为 k，故其最小度为 k，矛盾。由此可得 $U = V(B)$。若 B 是 H 的唯一一个块，则 $G \cong K_{k+1}$，证毕。因此我们可以假设 B 含有一个割点，该割点属于某个与 B 不同的块 B'。由于 U 中每个顶点在 B 中的度均为 $k-1$，且 H 的最大度为 k，我们得到 B' 是一个 K_2-块，矛盾。因此，当 $h \notin U$ 时，引理成立。

现在假设 $h \in U$。注意， $G[U \setminus \{h\}] \cong K_{k-1}$，其中对每个 $u \in U \setminus \{h\}$， h与 u 之间恰有一条边。这意味着每个 $u \in U \setminus \{h\}$ 在 H中的度为 $k-1$，因此在 $V(H) \setminus U$中恰有一个邻点 v_u。由于 H没有 K_2-块，包含 u和 v_u的块中有某个顶点 w_u，它同时与 u和 v_u相邻。由于 v_u是 u在 $V(H) \setminus U$中的唯一邻点，因此 $w_u \in U$。所以， v_u与 u和 w_u位于 H的同一块中，即包含 $U \setminus \{h\}$的块。由此可知，顶点 $U' = U \setminus \{h\} \cup \{v_u\}$ 构成 H的一个块，其中 $G[U'] \cong K_k$，且 $h \notin U'$。由上一段可得 $G \cong K_{k+1}$，证毕。□

引理 7.3。设 G 是 T_k^- 中的一个图，其中 $k \geq 3$。则 G 是 k-边连通的。

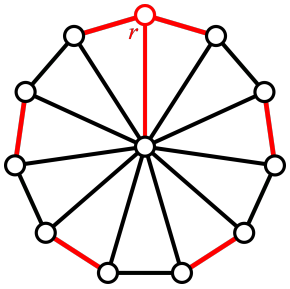
证明。设 $G = T_k^+$ 是某个 Gallai 树 T，其最大度至多为 k，且最小度小于 k；设 h 是 T 的一个枢纽。只需证明：若 $v \in V(G) \setminus \{h\}$，则 v 与 h 之间在 G 中存在 k 条边不相交路径。假设对于某个 $v \in V(G) \setminus \{h\}$，结论不成立。我们假设在所有此类反例中， G 的顶点数最少。

首先假设 T 仅由一个块组成。取 $S \subseteq E(G)$，其中 $|S| < k$，使得 v 和 h 位于 $G \setminus S$ 的不同连通分量中。显然，如果 $|V(T)| = 1$，则 $G \cong I_k$，因此不存在这样的 S，矛盾。所以我们可以假设 $|V(T)| \geq 2$。由于 T 要么是完全图，要么是奇轮，每个顶点都有相同的度 $d_T(v)$。根据定义， v 与 h 之间有 $k - d_T(v)$ 条边，因此 S 包含这 $k - d_T(v)$ 条边。于是，由于 $N_T(v)$ 中的每个顶点也都在 $N_G(h)$ 中，这样的边割还至少包含一条与 $N_T(v)$ 中每个顶点关联的边。由于这样的顶点有 $d_T(v)$ 个，$|S| \geq k - d_T(v) + d_T(v) = k$，矛盾。

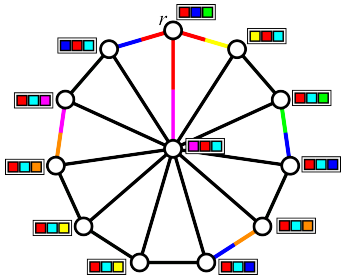
因此，我们可以假设 T 有多个块，此时 T 有一个割点 x。设 T_0 和T_1 为 Gallai 树，使得 $V(T_0) \cap V(T_1) = \{x\}$，且 $V(T_0) \cup V(T_1) = V(T)$。令 G_i 为 T_i 的近乎 k- 正则扩展，其枢纽为 h，其中 $i \in \{0, 1\}$。那么，对于每个 $i \in \{0, 1\}$，都有 $G_i \in \mathcal{T}_k^-$，且$V(G_i) \subset V(G)$。我们还注意到， G_0 中的每条边都对应于 G 中的一条边，唯独 G_0中 x 和 h 之间多出$d_{T_1}(x)$条边。类似地， G_1 中的每条边都对应于 G中的一条边，唯独 G_1中 x 和 h 之间多出 $d_{T_0}(x)$条边。不失一般性，假设 $v \in V(G_0)$。由 G的极小性可知，存在一个集合 $\mathcal{P}_0$，其中包含 G_0中 v 与 h 之间的 k 条边不相交路径，至多 $d_{T_1}(x)$条路径使用了不属于 G的边。类似地，存在一个集合 $\mathcal{P}_1$，其中包含 G_1中 x 与h 之间的 k 条边不相交路径，至多 $d_{T_0}(x)$条路径使用了不属于 G的边。因此，$\mathcal{P}_1$ 中至少有 $k - d_{T_0}(x)$条路径使用了 G中的边。注意， $k - d_{T_0}(x) = k - (d_T(x) - d_{T_1}(x)) = k - d_T(x) + d_{T_1}(x) \geq d_{T_1}(x)$。取 $\mathcal{P}_0$ 中使用 G 的边的路径（至少有 $k - d_{T_1}(x)$ 条）与 $\mathcal{P}_1$ 中使用 G 的边的路径（至少有 $d_{T_1}(x)$条）的并，可推得 G中 v 与 h 之间有 k条边不相交路径，证毕。□

7.2. **极化奇轮图**。 若极图 Q 满足 $G(Q)$是奇轮图，则称其为极化奇轮图。回顾一下，奇轮图类包含于 $\mathcal{T}_3^-$。本节将刻画极化奇轮图何时为 3-受限，考察在某个顶点对多个颜色均为 3-受限的 3-极化赋值的性质，并证明极化奇轮图的任意真极化子图都是 3-非受限。我们首先给出若干引理，说明 3-受限顶点在极化奇轮图中的出现方式。

设 G 是一个奇轮。回顾一下， G 的支配顶点 h 称为枢纽，因此 $G-h$ 是一个奇圈。注意，要么 $G \cong K_4$ 的每个顶点都是支配顶点，此时我们可以任意选择枢纽 h；要么 G 有唯一枢纽 h。设 $v \in V(G) \setminus \{h\}$。对于 $G-h$ 的一条边 xy，有 $G' = (G-h)\backslash xy$ 是一条长度为偶数的路径，因此距离 $d_{G'}(x,v)$ 和 $d_{G'}(y,v)$ 的奇偶性相同。如果 $d_{G'}(x,v)$ 和 $d_{G'}(y,v)$ 都是偶数，那么我们称 xy 在 $G-h$ 中相对于 v 有偶位移。



(a) 奇轮 G，其顶点为 r，其中 $\mathrm{Ev}_G(r)$ 由红边组成。



(b) 极化奇轮 Q，带有一个 3-极化指派 Γ。这里，顶点 r 在红色上是 Γ-受限的，且 $F(Q) \subseteq \mathrm{Ev}_Q(r)$。

图11. 带有顶点 r 的（极化）奇轮。

现在，对于每个 $v \in V(G) \setminus \{h\}$，我们定义图 G 的一个边集合，记作 $\mathrm{Ev}_G(v)$，如下：若 v 是支配的，则 $\mathrm{Ev}_G(v)$ 是与 v 关联的边的集合；若 v 不支配，则令 h 为 G 的支配顶点，并定义

$$\mathrm{Ev}_G(v) = \{vh\} \cup \{e \in E(G-h) : e \text{ has even displacement to } v \text{ in } G-h\}.$$

注意，若 v 与边 $e \in E(G)$ 关联，则 $e \in \mathrm{Ev}_G(v)$。示例见图11(a)。对于极图 Q，我们写作 Ev_Q，而非 $\mathrm{Ev}_{G(Q)}$。

引理 7.4. 设 Q 是一个极化奇轮，其中 $|V(Q)| > 4$，枢纽为 h，且 $r \in V(Q) \setminus \{h\}$。假设 $(Q-r,h) \in \mathcal{N}_2$。则 $(Q-\{r,h\}, V(Q-\{r,h\}))$ 是一棵平衡 Gallai 树，其中 $Q-\{r,h\}$ 的块交替为轻块和正常块，叶块为轻块，并且 $F(Q) \subseteq \mathrm{Ev}_Q(r)$。

证明。由于 $(Q-r,h) \in \mathcal{N}_2$，(N1) 成立，也就是说，$(Q-\{r,h\}, V(Q-\{r,h\}))$ 是一棵平衡 Gallai 树。由于 $Q-\{r,h\}$ 是一条长度至少为 3 的奇路径，$Q-\{r,h\}$ 由两个度为 1 的内部顶点组成，而其余顶点都是割点，且每个割点都属于两个 K_2-块。由 (G1) 和 (G2)，每个内部顶点都属于一个轻块，而每个割点都同时属于一个轻块和一个普通块。因此，$Q-\{r,h\}$ 的块在轻块和普通块之间交替出现。由 (G3)，极化边只能出现在平衡 Gallai 树的普通块中，因此 $F(Q) \subseteq \mathrm{Ev}_Q(r)$。□

引理 7.5。设 Q 是一个极化奇轮，$|V(Q)| > 4$，枢纽为 h，且 $r \in V(Q) \setminus \{h\}$。设 $\Gamma = (L,R)$ 是 Q 的一个 3-极化赋值，其中 $c \in L(r)$；设 $(Q-r,\Gamma_c)$ 是从 (Q,Γ) 删除颜色 (r,c) 后所得的结果，并假设 $Q-r$ 不可 Γ_c-着色。则 $(Q-r,h) \in \mathcal{N}_2$，且 Γ_c 是 h-坏的。特别地，令 $\Gamma_c = (L_c,R_c)$，则存在互不相同的 $c_1,c_2 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $u \in V(Q-r)$，都有 $\{c_1,c_2\} \subseteq L_c(u)$；其中，若 $u \in N_Q(r)$，则 $|L_c(u)| = 2$，否则 $|L_c(u)| = 3$。

证明。注意，对于所有 $v \in V(Q) \setminus \{h\}$，$d_Q(h) \geq 5$，且 $|L(v)| = d_Q(v) = 3$。令 $\Gamma_c = (L_c,R_c)$。对于每个顶点 $v \in V(Q) \setminus \{r,h\}$，$v$ 与 r 之间至多有一条边，因此 $|L_c(v)| \geq d_{Q-r}(v)$。

假设 $Q-r$ 不可 Γ_c着色。由于 $Q-\{r,h\}$ 是连通的，定理 5.4 表明，对于 $k = |L_c(h)|$，有 $(Q-r,h) \in \mathcal{N}_k$，且 Γ_c 是 h-坏的。注意，存在 $u \in N_Q(h) \cap N_Q(r)$，使得 $d_{Q-\{r,h\}}(u) = 1$,

因此， u 是 $Q-\{r,h\}$ 的内部顶点，且属于一个块 B。由于 $u\in N_{Q-r}(h)$，根据 (N1) 和 (G1)，块 B 是轻的，因此根据 (N2)， $k=2$。令 $Q'=Q-\{r,h\}$。由定理 7.4，$(Q',V(Q'))$ 是一棵平衡 Gallai 树，其中 Q' 的块在轻块与正常块之间交替排列，且叶块均为轻块。由于 Γ_c 是 h-坏的，可知存在不同的 $c_1,c_2\in\mathbb{N}$，使得 $L_c(h)=\{c_1,c_2\}$，且对所有 $u\in V(Q')$，都有 $L_c(h)\subseteq L_c(u)$，并且对于 $u\in N_Q(r)\setminus\{h\}$， $|L_c(u)|=2$。□

引理 7.6. 设 Q 是一个极化奇轮，且 $r\in V(Q)$。以下结论均成立 :

(i) 顶点 r 是 3-受限的，当且仅当 $F(Q)\subseteq \mathrm{Ev}_Q(r)$。(ii) 若 Γ 是 Q 的一个 3-极赋值，且 r 在多个颜色上都是 Γ-受限的，则

- $F(Q)=\emptyset$,
- $M_{Q,\ \Gamma}(r)\subseteq L(u)$ 对所有 $u\in V(Q-r)$ 均成立，且
- $\Gamma|V(Q-r)$ 是一致的。

(iii) 对于 Q 的任意真极化子图 Q' ，顶点 r 在 Q' 中是3-不受限的。

证明。我们首先假设 r 是支配的。假设 $F(Q)\subseteq \mathrm{Ev}_Q(r)$。注意，如果 $e\in F(Q)$，那么$e\in \mathrm{Ev}_Q(r)$，因此 r 与 e 关联。我们将为 Q 构造一个 3-极化赋值 $\Gamma=(L,R)$，使得 r 是 Γ-受限的。设 L 是一个一致的 3-列表赋值，满足 $c\in L(r)$，并定义 R ，使得对于任意 $ur\in F(Q)$，都有 $R(e,u,r)=(c,c)$。令 $(Q-r,\Gamma_c)$ 为从 (Q,Γ) 中进行 (r,c)-颜色删除所得。于是$Q-r$ 是一个没有极化边的奇圈，并且对于任意顶点 $u\in V(Q-r)$，都有 $L_c(u)=L(u)\backslash\{c\}$。因此， Γ_c 是一个坏度数极化赋值，且 $Q-r$ 不可 Γ_c-着色，所以 r 是 3-受限的。

反过来，假设 $F(Q)\not\subseteq \mathrm{Ev}_Q(r)$。那么存在某条极化边 $e=uw$，它不与 r 关联。令 Γ 为 Q的一个 3-极化赋值，并令 $(Q-r,\ \Gamma_c)$ 为从 $(Q,\ \Gamma)$ 中删除颜色 $(r,\ c)$ 后所得的结果，其中 $c\in L(r)$。那么 $Q-r$是一个含有极化边的奇圈，而 Γ_c是一个度极化赋值，因此根据定理 4.1， $Q-r$ 是 Γ_c-可着色的。因此， Q 是 3-非受限的，所以当r 支配时，(i) 成立。

我们继续假设 r 支配，接下来考虑 (ii)。假设 $\Gamma=(L,R)$ 是 Q 的一个 3-极化赋值，使得 r 在多种颜色上是 Γ-受限的；也就是说，$|M_{Q,\Gamma}(r)|\geq 2$。对于$c\in M_{Q,\Gamma}(r)$，我们再次令 $(Q-r,\Gamma_c)$ 为从 (Q,Γ) 中删除颜色 (r,c) 后所得的结果，其中 $\Gamma_c=(L_c,R_c)$。那么对于这样的 c，$Q-r$ 不可 Γ_c-着色，其中 $Q-r$ 是一个奇圈，且 Γ_c 是一个度极化赋值。由上文可知， $F(Q)\subseteq \mathrm{Ev}_Q(r)$，所以 $F(Q-r)=\emptyset$。根据定理 3.5，若 Q 有一条极化边 ur，那么由于 $|M_{Q,\Gamma}(r)|\geq 2$，存在 $c\in M_{Q,\Gamma}(r)$ 使得 $|L_c(u)|>2$，因此 Γ_c 不是坏的，这意味着根据定理 4.1， $Q-r$ 是Γ_c-可着色的，矛盾。因此 $F(Q)=\emptyset$。类似地，对每个 $c\in M_{Q,\Gamma}(r)$，对于所有 $u\in V(Q-r)=N_Q(r)$，都有$c\in L(u)$。也就是说，对于所有 $u\in V(Q-r)$，$M_{Q,\Gamma}(r)\subseteq L(u)$。现在，对每个$c\in M_{Q,\Gamma}(r)$，我们有 Γ_c是一致的。因此，$\Gamma|V(Q-r)$ 是一致的，正如所需。所以当 r 支配时，(ii) 也成立。

现在假设 r 不是支配的。于是 Q 有唯一的支配顶点 $h\in V(Q)\setminus\{r\}$。令 $Q'=(Q-r)-h$ ，并注意到 Q' 是一条长度至少为一的奇路径。

假设 $F(Q)\not\subseteq \mathrm{Ev}_Q(r)$。那么根据定理 7.4，$(Q-r,h)\notin\mathcal{N}_2$。现在，对于 Q 的任意 3-极化赋值$\Gamma=(L,R)$，其中 $c\in L(r)$，根据定理 7.5，(r,c)-颜色删除 $(Q-r,\Gamma_c)$ 中的 (Q,Γ) 是 Γ_c-可着色的。因此 r 是 3-非受限的。

反过来，假设 $F(Q)\subseteq \mathrm{Ev}_Q(r)$。我们有，$(Q',V(Q'))$ 是一棵平衡 Gallai 树，其中 Q' 的块在轻与正常之间交替，且叶块为轻，因此 (N1) 成立。由于 Q' 的每个块都是一个 K_2-块，(N2) 得以满足；又由于 $Q-r$ 是简单的，且 $F(Q)\subseteq \mathrm{Ev}_Q(r)$，(N3) 成立。因此 $(Q-r,h)\in\mathsf{N}_2$。根据定理 5.3，存在一个针对 $Q-r$ 的 h-坏极赋值 $\Gamma_2=(L_2,R_2)$。我们按如下方式将 Γ_2扩展为针对 Q 的 3-极化赋值 $\Gamma=(L,R)$。令 $L(r)=\{a,b,c\}$，其中对于任意 $u\in N_Q(r)$，$c\notin L_2(u)$；对于每个 $u\in N_Q(r)$，令 $L(u)=L_2(u)\cup\{c\}$；并对所有 $w\in V(Q)\setminus(N_Q(r)\cup\{r\})$，令 $L(w)=L_2(w)$。最后，对于任意与 r 关联的极化边 $e=ur$，令 $R(e,u,r)=(c,c)$。由此可知，从 (Q,Γ) 中删除颜色 (r,c) 后所得的 $(Q-r,\Gamma_2)$ 不可着色，因此 r是 3-受限的，证毕。

我们继续假设 r 不是支配的，并考虑 (ii)。令$c\in M_{Q,\Gamma}(r)$，因此由定理 7.5 可知，对于所有 $u\in V(Q')$，都有 $L_c(h)\subseteq L_c(u)$，且当 $u\in N_Q(r)$ 时， $|L_c(u)|=2$ 。由此，根据定理 3.5， Q 没有与 r关联的极化边。因此 $L_c(h)=L(h)\setminus\{c\}$。由于$|M_{Q,\Gamma}(r)|\geq 2$，可知 $\Gamma|V(Q-r)$ 是一致的，且 $c\in L(u)$。所以，对于所有$u\in V(Q-r)$，都有 $M_{Q,\Gamma}(r)\subseteq L(u)$。

剩下需要证明 $F(Q) = \emptyset$。我们有 $F(Q) \subseteq \mathrm{Ev}_Q(r)$，并且根据定理 7.4，$Q'$ 的任意极化边都属于 Q'的一个正常 K_2-块。设 $e = uv$ 是一条极化边，它属于 Q'的一个正常K_2-块 B'。那么 u 也属于一个轻块 B。考虑互不相同的 $a,b \in M_{Q,\Gamma}(r)$，并回顾一下，$\Gamma_a = (L_a, R_a)$ 和 $\Gamma_b = (L_b, R_b)$ 分别是由 (r, a)-颜色删除和 (r, b)-颜色删除得到的极赋值。由于 Γ_a 和 Γ_b 都是 h-坏的，根据定理 5.2，它们可以表示为一组两两不冲突的极赋值之并。设 $\Gamma_{B,a}$ 和$\Gamma_{B',a}$ 分别是针对 B 和 B' 的这类极赋值，它们出现在构成 Γ_a的并中；对于 $\Gamma_{B,b}$ 和$\Gamma_{B',b}$ 相对于 Γ_b，同理。于是，$\Gamma_{B',a}$ 和 $\Gamma_{B',b}$ 是针对 B' 的坏度数极化赋值。令 $\Gamma_{B,a} = (L_{B,a}, R_{B,a})$ 和 $\Gamma_{B,b} = (L_{B,b}, R_{B,b})$，则 $L_{B,a}$ 和 $L_{B,b}$ 是针对 B 的一致 2-列表指派，并且$L_a(h) \subseteq L_{B,a}(u)$，且 $L_b(h) \subseteq L_{B,b}(u)$。由于 $L_{B,a}(u) = L(u) \setminus \{a\}$，且 $L_{B,b}(u) = L(u) \setminus \{b\}$，其中 $u \in V(B) \cap V(B')$，并且 $\Gamma_{B,a}$ 和 $\Gamma_{B',a}$（或 $\Gamma_{B,b}$ 和 $\Gamma_{B',b}$）互不冲突，因此极赋值$\Gamma_{B',a}$ 和 $\Gamma_{B',b}$ 彼此不同。但由于 e是极化的，$\Gamma_{B',a}$ 和$\Gamma_{B',b}$ 是极化相容的，因此它们相等，矛盾。由此，除可能与 r关联的边外，$\mathrm{Ev}_Q(r)$ 中没有极化边。根据定理 3.5 可知，没有极化边与 r 关联。

还需证明 (iii) 成立。只需证明 r 在 Q' 中是 3-非受限的，其中 $Q' = Q \backslash e$ 对某个 $e \in E(Q)$ 成立。因此，令 $Q' = Q \backslash e$ 对某个 $e \in E(Q)$ 成立。为导出矛盾，令 $\Gamma = (L, R)$ 是 Q' 的一个 3-极化赋值，使得 r 在 Q' 中的 c 上是 Γ-受限的，其中 $c \in L(r)$。令 $(Q' - r, \Gamma_c)$ 为从 (Q', Γ) 中删除 (r, c) 颜色所得的结果，从而 $Q' - r$ 不可 Γ_c-着色，其中 $\Gamma_c = (L_c, R_c)$。

首先，我们假设 r 在 Q 中是支配的。于是，Γ_c 是一个度极化赋值，因此根据定理 4.1，Γ_c 是坏的。假设 e 与 r 在 Q 中关联；令 $e = ru$ 对某个顶点 u 成立。则 $|L_c(u)| = 3$，但 $d_{Q'-r}(u) = 2$，由此可知 Γ_c 不是坏的，矛盾。因此，我们可以假设 e 不与 r 关联。于是，$Q' - r$ 是一条路径。令 v 为该路径的一个端点。则 $|L_c(v)| \geq 2$，因为在颜色删除过程中至多删除了一种颜色，但 $d_{Q'-r}(u) = 1$，由此可知 Γ_c 不是坏的，矛盾。

现在假设 r 在 Q中不是支配顶点。令 h 为 Q中的一个支配顶点，并注意到 $d_Q(h) \geq 5$。首先假设 $e = hr$。此时注意到 $|L_c(h)| = 3$，而对于所有 $u \in V(Q' - r) \setminus \{h\}$，都有 $|L_c(u)| \geq d_{Q'-r}(u)$。我们还知道 $Q' - \{r, h\}$ 是连通的，因此由定理 5.4，$(Q' - r, h) \in \mathsf{N}_3$。根据 (N1)，$(Q' - \{r, h\}\ N_{Q'-r}(h))$ 是一棵平衡 Gallai 树。令 $u \in N_{Q'}(r) \cap N_{Q'}(h)$，于是 u 是路径 $Q' - \{r, h\}$ 的一个端点。根据 (G1)，u 位于 $Q' - \{r, h\}$ 的一个轻块中；然而 u 在该块中的度为一，这与 (N2) 矛盾。现在可以假设 $e \neq hr$。考虑 $Q' - \{r, h\}$ 的一个连通分支。令 u 为该连通分支中与 e 在 Q中关联的一个顶点。于是 $d_{Q'}(u) = 2$。令 Γ_h 为从 $(Q' - r, \Gamma_c)$ 中删除 h 的一个颜色删除。则 Γ_h 是一个度极化赋值，但 $|L_h(u)| > d_{Q'-\{r,h\}}(u)$。因此，根据定理 4.1，$Q' - \{r, h\}$ 的每个连通分支都是 Γ_h-可着色的，结论得证。□

7.3. 受限顶点。接下来，我们将上一节的结果从极化奇轮推广到 $\mathcal{T}_k^-$ 中的任意图。更具体地说，对于具有 $G(Q) \in \mathcal{T}_k^-$ 的极图 Q，我们刻画其 k-受限顶点；我们证明，如果一个顶点在不止一种颜色上是 k-受限的，那么 Q 是一个奇轮图，或是一个没有极化边的完全图；此外，我们还证明，任何真极化子图都是 k-不受限的。

我们需要中心顶点这一概念。对于极化奇轮图 Q，回忆一下第7.2节中给出的 Ev_Q 的定义。

定义 7.7（中心顶点）。设 Q 是一个具有 $G(Q) \in \mathcal{T}_k^-$ 的极图，其中 $k \geq 3$。若顶点 $v \in V(Q)$ 满足以下条件，则称其为中心：

- Q 是一个极化奇轮图，且 $F(Q) \subseteq \mathrm{Ev}_Q(v)$；或者
- Q 不是极化奇轮图，每个平行类至多有一条非极化边，并且所有极化边都与 v 关联。

定理7.8。设 Q 是一个极图，满足 $G(Q) \in \mathcal{T}_k^-$，其中 $k \geq 3$，并设 $r \in V(Q)$。以下两条均成立：

(i) 顶点 r 是 k-受限的，当且仅当 r 是中心。(ii) 若 Γ 是 Q的一个 k-极赋值，使得 r 在多个颜色上都是 Γ-受限的，那么

- $F(Q) = \emptyset$,
- $G(Q)$ 若 $k = 3$，则是一个奇轮；否则是一个有 $k + 1$ 个顶点的完全图，
- $M_{Q,\Gamma}(r) \subseteq L(u)$ 对所有的 $u \in V(Q - r)$，且

- $\Gamma|V(Q-r)$ 是一致的。（iii）对于 Q 的任意真极化子图 Q'，顶点 r 在 Q' 中是 k-不受限的。

证明。若 $G(Q)$ 不是 k-对称的，则令 h 为 Q 的枢纽；否则，Q 的每个顶点都是枢纽，并令 $h=r$。现在，若 $r\neq h$，则 $G(Q)$ 不是 k-对称的；而若 $r=h$，则 $G(Q)$ 可能是，也可能不是 k-对称的。

首先考虑 $r=h$ 的情形。令 $\Gamma=(L,R)$ 为 Q 的一个 k-极赋值，令 c 为 $L(r)$ 中任意一种颜色，并令 $(Q-r,\Gamma_c)$ 为从 (Q,Γ) 中删除颜色 (r,c) 后所得的结果，其中 $\Gamma_c=(L_c,R_c)$。

断言 7.8.1。假设 $r=h$，且 $Q-r$ 不可 Γ_c-着色。那么，$Q-r$ 是一棵极化 *Gallai* 树，Γ_c 是 $Q-r$ 的一个坏极赋值，并且对所有 $u\in V(Q-r)$，都有 $|L_c(u)|=d_{Q-r}(u)=|L(u)|-e(u,r)$。

子证明。由于 $r=h$，对于所有 $u\in V(Q-r)$，我们有 $d_Q(u)=k=|L(u)|$。于是 $|L_c(u)|\geq|L(u)|-e(u,r)=d_Q(u)-e(u,r)=d_{Q-r}(u)$，因此 Γ_c 是 $Q-r$ 的度极化赋值。因此，由于 $Q-r$ 不可 Γ_c 着色，根据定理 4.1，$Q-r$ 是一棵极化 Gallai 树，且 Γ_c 是坏的。由于 Γ_c 是坏的，对于所有 $u\in V(Q-r)$，都有 $|L_c(u)|=d_{Q-r}(u)=|L(u)|-e(u,r)$。◁

断言 7.8.2。当 $r=h$，(i) 成立。

子证明。如果 Q是一个极化奇轮，则由定理 7.6(i)，(i) 成立。因此，我们可以假设 $G(Q)$ 不是一个奇轮。

令 $T=Q-r$。假设 r 是中心。由于 $G(Q)$ 不是奇轮，根据中心顶点的定义，Q 的所有极化边都与 r 关联。因此，$Q-r$ 没有极化边，并且由于 $r=h$，它是一个极化 Gallai 树。因此，存在一个针对 T 的坏度数极化赋值 $\Gamma_T=(L_T,R_T)$。

我们将 Γ_T 扩展为 Q 的一个 k-极赋值 Γ，如下所示。对于任意 $u\in V(T)$，令 $\{e_u,1,e_u,2,\ldots,e_{u,k-d_T(u)}\}$ 为 Q 中 u 与 r 之间的边集合，其中 $e_u,1$ 是唯一的非极化边（如果存在）。令 $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_k\}$ 为一个包含 k 个颜色的集合，使得对于所有 $u\in V(T)$，$C\cap L_T(u)=\emptyset$。对于 $i\leq k$，我们用 C_i 表示 C 的子集 $\{c_1,c_2,\ldots,c_i\}$。令 $\Gamma=(L,R)$ 为 Q 的 k- 极赋值，其中

$$L(v)=\begin{cases}L_T(v)\cup C_{k-d_T(v)} & \text{if } v\in V(T)\\ C_k & \text{if } v=r,\end{cases}$$

并且对每个 $u\in V(T)$ 及每条极化边 $e_{u,i}$，$R(e_{u,i},u,r)=(c_i,c_1)$。容易看出，Γ 是一个 k-极赋值，并且由于所有极化边都与 r关联，极化 R 定义良好。注意，若 $e_u,1$ 被极化，则 $R(e_u,1,u,r)=(c_1,c_1)$，因此，无论 $e_u,1$ 是否被极化，从 (Q,Γ) 中删除 (r,c_1)-颜色后得到 (T,Γ_T)。由于 T不可 Γ_T-着色，r 在 c_1 上是 Γ-受限的。这表明，若 r 是中心的，则它是 k-受限的。

对于另一个方向，假设 r 不是中心的。若存在任何不与r关联的极化边，那么由于 T 没有 K_2-块，T 不是极化 Gallai 树，因此根据断言 7.8.1，r 不是 k-受限的。回忆一下，$G(Q)$ 不是奇轮。由于 r 不是中心的，根据前文，我们还可以假设存在某个 $u\in V(T)$，使得 u 与 r之间有不同的非极化边 e_0 和 e_1。但这时 $|L_c(u)|>d_T(u)$，因为 e_0 和 e_1 都会从 $L(u)$ 中删除 c。因此，根据断言 7.8.1，r 不是 k- 受限的。这表明，若 r 不是中心的，则 r 不是 k- 受限的，证毕。◁

断言 7.8.3。当 $r=h$，(ii) 成立。

子证明。令 $C=M_{Q,\Gamma}(r)$，因此 r 在 C 中的每种颜色上都是 Γ-受限的，其中 $|C|\geq 2$。令 u 与 r 在 Q 中相邻。由断言 7.8.1，对于每个 $c\in C$，(r,c)-颜色删除会从 L 中删除 $e(u,r)$ 种颜色。因此，由定理 3.6，$e(u,r)=1$。此外，若存在一条极化边 $e=ur$，满足 $R(e,u,r)=(c_u,c_r)$，则只有 c_r 会从 u 中删除一种颜色。因此，没有极化边与 r 关联。由于 r 是中心的，由 (i) 可知，$F(Q)=\emptyset$；并且由定理 7.1，若 $k=3$，则 $G(Q)$ 是一个奇轮；否则它是一个具有 $k+1$ 个顶点的完全图。无论哪种情况，$G(Q-r)$ 都是由单个块构成的 Gallai 树，因此由断言 7.8.1，Γ_c 对所有 $c\in C$ 都一致。由此可知，$\Gamma|V(Q-r)$ 也一致。接着注意，对于每个 $c\in C$，对所有 $u\in N_Q(r)=V(Q-r)$，都有 $c\in L(u)$，因为一次 (r,c)-颜色删除会从 u 中删除一种颜色。因此，对所有 $u\in V(Q-r)$，都有 $C\subseteq L(u)$，证毕。◁

断言 7.8.4。当 $r=h$时，(iii) 成立。

子证明。若 Q 是一个极化奇轮，则由定理 7.6(iii)，(iii)成立。因此，我们可以假设 $G(Q)$不是奇轮。此外，只需证明 $Q' = Q\backslash e$ 对某个 $e \in E(Q)$成立时的(iii)。分两种情况：要么 e 与 r关联，要么 e不与 r关联。先假设 e 与 r关联。于是 $Q' - r = Q - r$。令$(Q' - r, \Gamma'_c)$为从(Q', Γ)中删除(r, c)-颜色后得到的图，其中 $\Gamma'_c = (L'_c, R'_c)$。为导出矛盾，假设 $Q' - r$ 不可 Γ'_c-着色。令 $e = ur$，其中某个 $u \in V(Q) \setminus \{r\}$。则 Γ'_c 是 $Q' - r$的度极化赋值。由定理 4.1，Γ'_c 是坏的。Q' 中与 r关联的每条边（例如 rv）至多从 $L(u)$中删除一种颜色。特别是，由于 e 属于 Q 但不属于 Q'，我们有 $|L'_c(u)| > k - e_Q(u, r) = d_{Q'-r}(u)$，这意味着 Γ'_c 不是坏的。因此，我们可以假设 r 不与 e关联。令 Q'' 为在 Q 中添加 e 到 $F(Q)$后得到的极图。令 $\Gamma'' = (L, R'')$，其中 $R''|Q = R$，且 $R''(e, u, v) = (a, a')$，使得 $a \notin L(u)$且 $a' \notin L(v)$。显然，ϕ是 Q' 的一个Γ-着色，当且仅当 ϕ 是 Q''的一个 Γ''-着色。由于 e是一条不与r关联的极化边，根据断言 7.8.2，r 在 Q' 中是 k-不受限的。这就证明了该断言。◁

现在，根据断言 7.8.2–7.8.4，当 $r = h$ 时定理成立，因此假设 $r \neq h$。回忆一下，在这种情况下，$G(Q)$ 不是 k-对称的。若 Q 是一个极化奇轮，则 $k = 3$，并且由定理 7.6，定理成立。因此，我们现在可假设 $G(Q)$ 不是奇轮。

断言 7.8.5。存在一个顶点 $u \in V(Q) \setminus \{h, r\}$，使得 $e_Q(h, u) \geq 2$。

子证明。考虑 $T = Q - h$，因此 $G(T)$ 是一棵 Gallai 树。我们将证明 T 至少有两个内部顶点。若 T 由单个块组成，则该块至少包含两个顶点，否则 $G(Q)$ 是 k-对称的；因此在这种情况下，T 至少有两个内部顶点。否则，当 T 有多个块时，它至少有两个叶块，其中每个叶块都包含一个内部顶点（该顶点不属于任何其他块）。因此，无论哪种情况，T 都至少有两个内部顶点，设为 u_1 和 u_2。于是，由定理 7.1(ii)，$e(h, u_1) \geq 2$，且 $e(h, u_2) \geq 2$。现在，$r \neq u_1$ 或 $r \neq u_2$，所以令 $u \in \{u_1, u_2\}$，使得 $r \neq u$。◁

令 u 为断言 7.8.5 所给出的对象。若 Q 中的每个平行类至多有一条非极化边，则 h 与 u之间至少有一条极化边，其中 $r \notin \{h, u\}$。这表明 r 不是中心。

现在证明 r 是 k-不受限的。令 $\Gamma = (L, R)$ 为 Q 的一个 k-极赋值。对任意 $c \in L(r)$，令 $(Q - r, \Gamma_c)$ 为从 (Q, Γ) 中删除 (r, c) 颜色所得的结果，其中 $\Gamma_c = (L_c, R_c)$。同样，令 $T = Q - h$，于是 $G(T)$ 是一棵不含 K_2- 块的 Gallai 树。分两种情况：要么 r 是 T 的割点，要么 r 是 T 的内部顶点。先假设 r 是 T 的内部顶点。则 $T - r = (Q - r) - h$ 连通。由于 T 不含 K_2-块，T 的每个顶点的度都至少为二。特别地，r 在 T 中的度至少为二，因此 $e_Q(r, h) \leq k - 2$。于是，对于 $c \in L(r)$，有 $|L_c(h)| \geq 2$。根据定理 5.4，若 $Q - r$ 不可 Γ_c- 着色，则 $(Q - r, h) \in \mathbf{N}_{|L_c(h)|}$。然而，根据断言 7.8.5，存在一个顶点 u 属于 $Q - r$，使得 $e_{Q-r}(h, u) \geq 2$，因此 $Q - r$ 不是简单的；由此，根据 (N3)，$(Q - r, h) \notin \mathbf{N}_{|L_c(h)|}$。因此，$r$ 不是 k-受限的。

接下来，假设 r 是 T 的割点。在这种情况下，$T - r$ 不连通，因此我们不能直接应用定理 5.4；相反，我们找一个特定的极子图来应用定理 5.4。对于 $T - r$ 的任意连通分量 C，我们考虑极子图 $Q[V(C) \cup \{r\}]$。令 S 为所有此类极子图组成的集合；也就是说，令 $\mathbf{S} = \{Q[V(C) \cup \{r\}] : C \text{ 是 } T - r \text{ 的一个连通分量}\}$。注意，对于 S 中任意极图，其底层图是 Gallai 树，因为 $G(T)$ 是一棵 Gallai 树。S 中任意两个不同的极图边不相交，且仅有顶点 r 是它们共有的。此外，S 中所有成员的并为 T。由于 T 没有 K_2-块，S 中的每个成员都没有 K_2- 块。因此，对每个 $S \in \mathbf{S}$，$d_S(r) \geq 2$。由此可得 $|\mathbf{S}| \leq d_T(r)/2$。

假设 r 在 c上是 k-受限的。那么对于每个 $d \in L_c(h)$，$(Q - r, \Gamma_c)$ 中的 (h, d)-颜色删除后不可着色。对于 $S \in \mathbf{S}$，令 $S^+ = Q[(V(S) - \{r\}) \cup \{h\}]$。现在，$Q - r$ 是 $\{S^+ : S \in \mathbf{S}\}$ 中所有成员的并，其中任意两个成员仅有顶点 h 是公共的。对于每个$d \in L_c(h)$，存在某个 $S_d \in \mathbf{S}$，使得 h 在 $(S_d)^+$中的 d 上是 Γ_c-受限的。由于 $|L_c(h)| \geq k - e(r, h)$，且 $e(r, h) = k - d_T(r)$，我们有 $|L_c(h)| \geq d_T(r)$。由于 $|\mathbf{S}| \leq d_T(r)/2$，存在某个 $S' \in \mathbf{S}$，使得 h 在 $(S')^+$中至少对两种颜色是 Γ_c-受限的；令 c_1 和 c_2 为这两种颜色。通过令 $L'(h) = \{c_1, c_2\}$，并令 $L'(v) = L_c(v)$（对 $v \neq h$），我们为 $(S')^+$ 构造一个极赋值 $\Gamma' = (L', R_c)$。现在，$(S')^+ - h$ 是连通的，$|L'(h)| = 2$，而 $(S')^+$ 不可 Γ'-着色。因此，根据定理 5.4，$((S')^+, h) \in \mathbf{N}_2$。然而，$T$有一个叶块包含于 $(S')^+ - h$中，因此，根据定理 7.1，

存在 $u \in V((S')^+ - h) \setminus \{r\}$，使得 $e(u,h) \geq 2$。因此，$((S')^+, h) \notin \mathcal{N}_2$。由此矛盾可推出，$r$ 不是 k-受限的。

现在我们已证明，在 $r \neq h$ 的情况下，r 不是中心，且 r 不受 k 限制，因此 (i) 和 (ii) 成立。此外，由于 r 在 Q 中不受 k 限制，因此对于任意 $e \in E(Q)$，r 在 $Q \backslash e$ 中不受 k 限制；于是，在 $r \neq h$ 的情况下，(iii) 成立。证明至此完成。□

推论 7.9。设 Q 是一个极图，其 $G(Q) \in T_k^-$，其中 $k \geq 3$；并设 Γ 是 Q 的一个 k-极赋值。那么，Q 不可 Γ-着色，当且仅当

(I) $F(Q) = \emptyset$, (II) $G(Q)$ 在 $k = 3$ 时是一个奇轮，否则是一个具有 $k+1$ 个顶点的完全图，并且 (III) Γ 是一致的。

证明。令 h 为 Q 的枢纽；若 $G(Q)$ 是 k-对称的，则 h 可以任意取。假设 Q 不可 Γ-着色，并令 $\Gamma = (L, R)$。于是，对每个 $c \in L(h)$，h 都是 Γ-受限的，因此 $M_{Q,\Gamma}(h) = L(h)$。现在，由定理7.8(ii)，可知 (I) 和 (II) 成立，$L(h) = M_{Q,\Gamma}(h) \subseteq L(u)$ 对于 $u \in V(Q-h)$ 成立，且 $\Gamma | V(Q-h)$ 一致。对于任意 $u \in V(Q-h)$，有 $|L(h)| = |L(u)|$，因此 $L(h) = L(u)$，从而 Γ 一致。另一个方向由定理 1.2 得出。□

7.4. **k-可连接性**。在本小节中，我们引入 k-可连接图的概念，并证明，任何底层图属于 $\mathcal{T}_k^-$ 的极图都是 k-可连接的。

我们首先需要定义顶点上的某个颜色何时是“强制的”。

定义 7.10（强制）。设 Q 是一个极图，其具有互不相同的顶点 u、$v \in V(Q)$，并设 $\Gamma = (L, R)$ 是 Q 的一个极赋值，其中 $c_v \in L(v)$ 和 $c_u \in L(u)$。如果对于 Q 的任意 Γ-着色 ϕ，满足 Q 的 $\phi(v) = c_v$ 时，都有 $\phi(u) = c_u$，则称 (v, c_v) 在 (Q, Γ) 中强制 (u, c_u)。如果存在 $c \in L(u)$，使得 (v, c_v) 在 (Q, Γ) 中强制 (u, c)，我们也称 (v, c_v) 在 (Q, Γ) 中强制 u。

引理 *7.11*。设 Q 是一个极图，其具有互不相同的 u、$v \in V(Q)$。设 $\Gamma = (L, R)$ 是 Q 的一个 f-极赋值，使得对于某个 $c_v \in L(v)$，(v, c_v) 在 (Q, Γ) 中强制 u。那么，对于任意 $c \in \mathbb{N} \setminus \{c_v\}$，存在一个 f-极赋值 Γ'，使得 (v, c_v) 在 (Q, Γ') 中强制 (u, c)。

证明。根据假设，存在 $c_u \in \mathbb{N}$，使得 (v, c_v) 在 (Q, Γ) 中强制 (u, c_u)。我们可以假设 $c_u \neq c$，否则 $\Gamma' = \Gamma$ 就是我们所需的 f-极赋值。回顾一下，若对于所有 $v \in V(Q)$，都有 $c' \notin L(v)$，且对于所有 $e = uv \in F(Q)$，都有 $c' \notin R(e, u, v)$，我们就称 $c' \in \mathbb{N}$ 对于 $\Gamma = (L, R)$ 是新的。我们还可以假设 c 对于 Γ 是新的；因为如果 c 不是新的，那么我们就对某个对于 Γ 是新的 c'，交换 c 和 c' 的颜色（此操作不会影响 c_v，因为 $c \neq c_v$）。

现在令

$$L_u(x) = \begin{cases} L(x) \setminus \{c_u\} \cup \{c\} & \text{if } x = u \\ L(x) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并令 $\Gamma_u = (L_u, R)$。那么不难看出，Γ_u 是一个 f-极赋值，在此赋值下，(v, c_v) 在 (Q, Γ_u) 中强制 (u, c)，如所需。□

我们希望能够讨论一个顶点（比如 v）对另一个顶点（比如 u）强制出的颜色。然而，定理 7.11 告诉我们，当我们只知道存在单一颜色 $c_v \in L(v)$，使得 (v, c_v) 强制出 u 时，我们无法对施加在 u 上的颜色作出任何有意义的判断。这促使我们给出接下来的两个定义。

定义 7.12（k-强制）。设 Q 是一个带有极赋值 $\Gamma = (L, R)$ 的极图，且 $u, v \in V(Q)$ 互不相同。设 k 为正整数。若存在 $C \subseteq L(v)$，使得 $|C| \geq k$，并且对每个 $c \in C$，(v, c) 在 (Q, Γ) 中强制出 u，则称 v k-强制 u 在 (Q, Γ) 中成立。

定义 7.13（k-模仿物）。设 Q 是一个极图，其中 u、$v \in V(Q)$ 互不相同。令 L 为所有满足 v 2-强制 u 于 (Q, Γ) 的 k-极赋值 Γ（针对 Q）构成的集合。若对于所有 $\Gamma = (L, R) \in$ L，以及所有满足 (v, c) 强制 u 于 (Q, Γ) 的 $c \in L(v)$，都有 (v, c) 在 (Q, Γ) 中强制 (u, c)，则称 u 是 Q 中 v 的 k-模仿物。

直观地说，如果 u 是 v 的 k-模仿物，那么每当 v 2 强制 u 时，就有 v 强制 u 与 v 具有相同的颜色。注意，如果对于任何 k-极赋值， v 都不对 u 施行 2-强制，那么 u 就真空地成为 v 的 k-模仿物。

定义 7.14 （k-可连接的）。 我们称极图 Q 是 k-可连接的，如果对于所有 $e = uv \in E(Q)$，都有 $Q\backslash e$ 是 k-不受限的，且 u 是 k-模仿者，在 $Q\backslash e$ 中模仿 v 。如果图 G 满足：任意满足 $G(Q) = G$ 的极图 Q 都是 k-可连接的，那么我们称 G 是 k-可连接的。

正如我们将在第 8.2 节看到的，对于 k-可连接图，我们可以利用极化边模拟 Haj´os 联结的一侧。我们首先着手证明：若 G 是 k-极不受限的，则 G 是 k-可连接的。

引理 7.15. 设 G 是一个 k-极不受限图，设 Q 是一个满足 $G(Q) = G|e$ 的极图，其中某个$e = uv \in E(G)$ 成立；再设 $\Gamma = (L, R)$ 是 Q 的一个 k-极赋值。那么不存在满足(v, c) 在(Q, Γ)中强制 u 的 $c \in L(v)$ 。

证明。为导出矛盾，假设存在 $c \in L(v)$，使得在 (Q, Γ) 中，(v, c) 强制 (u, d)，其中 $d \in \mathbb{N}$。考虑极图 $Q' = (G, F(Q) \cup \{e\})$。设 $\Gamma' = (L', R')$ 是 Q' 上的一个 k- 极赋值，其中 $\Gamma'|Q = \Gamma$ 且 $R'(e, u, v) = (d, c)$。注意，由于在 (Q, Γ) 中，(v, c) 强制 (u, d)，因此 Q' 的任何 Γ'-着色 ϕ 都不满足 $\phi(v) = c$；因为在任何这样的着色中，我们都有 $\phi(u) = d$，这违反了 e 上的 (P2)。因此，v 在 Q' 中对 c 是 Γ'-受限的，这与 G 是 k-极无约束的事实矛盾。□

推论 7.16。 如果 G 是一个 k-极无约束图，那么 G 是 k-可连接的。

证明。 设 Q 是一个极图，其底层图为 G，且 $e = uv \in E(Q)$。由于 Q 是 k-不受限的，$Q\backslash e$ 也同样是 k-不受限的。此外，根据定理 7.15， u显然是 v的一个 k-拟态。这表明，任何底层图为 G的极图 Q 都是 k-可合并的，证毕。□

注意，根据 k-可合并的定义和定理 7.16可知，若 G 是 k-可合并的，则$G\backslash e$是 k-可合并的。因此， k-可合并的图在取子图后仍然属于此类。

现在证明本小节的主要结果。

定理 7.17。 设 G 是 T_k^- 中的一个图，其中 $k \geq 3$。则 G 是 k-可合并的。

证明。为导出矛盾，假设存在一个极图 Q，满足 $G(Q) = G$ ，但它不是 k-可合并的。根据定理 7.8(iii)，对于任意 $z \in E(Q)$， $Q\backslash z$ 都是 k-不受限的。因此存在一条边 $e = ur$，使得在 $Q\backslash e$中， u 不是 r 的 k-拟态。因此，存在一个 k-极赋值 $\Gamma = (L, R)$，适用于$Q\backslash e$，其中存在不同的 c_0和 $c_1 \in L(r)$，使得在 $(Q\backslash e, \Gamma)$ 中，(r, c_0) 强制 (u, d_0)，且 (r, c_1) 强制 (u, d_1)，其中 $d_0, d_1 \in L(u)$，且 $c_0 \neq d_0$。令 $(Q - r, \Gamma_i)$ 为从 $(Q\backslash e, \Gamma)$ 中删除颜色 (r, c_i) 后得到的结果，其中 $i \in \{0, 1\}$；再令 $\Gamma_i = (L_i, R_i)$。接着，令 $\Gamma_i' = (L_i', R_i)$ 为 $Q - r$的极赋值，其中 L_i'由 L_i通过从 $L_i(u)$ 中移除 d_i 得到；也就是说，对于每个 $v \neq u$， $L_i'(u) = L_i(u) \setminus \{d_i\}$，且 $L_i'(v) = L_i(v)$。于是，对于 $i \in \{0, 1\}$，$Q - r$都不可 Γ_i'-着色；否则就存在 $Q - r$ 的一个 Γ_i-着色，其中 u 未被赋予d_i颜色，这与 (r, c_i) 强制 (u, d_i) 矛盾。

我们还可以将 $(Q - r, \Gamma_i')$ 作为底层图为 Q' (G) 的极图 Q 的颜色删除来获得。为此，设 Q' 是底层图为 $G(Q)$ 且极化边为 $F(Q) \cup \{e\}$ 的极图；也就是说，Q 是由 Q 得到的，其中将 e 设为一条极化边（其中，如果 $e \in F(Q)$，则 $Q' = Q$）。设 $\Gamma' = (L', R')$ 是 Q' 的极赋值，使得 $R'(e, u, r) = (d_0, c_0)$ 且 $R'|Q = R$。于是，$(Q - r, \Gamma_0')$ 是从 (Q', Γ') 中删除 (r, c_0) 颜色所得，因此 r 在 Q' 中是 k-受限的。因此，根据定理 7.8(i)，r 是 Q' 中的中心顶点。

设 h 是 Q 的枢纽。若 $G(Q)$ 不是奇轮且不是 k-对称的，则 h 是 Q' 中唯一的中心顶点。因此，首先假设 $G(Q)$ 不是奇轮且不是 k-对称的，并且 $r = h$。现在，对于 $i \in \{0, 1\}$，我们有 Γ_i' 是 $Q - r$ 的度极化赋值，而 $Q - r$ 不可 Γ_i'-着色，因此，根据定理 4.1， Γ_i' 是坏的。此外，对于所有 $v \in V(Q - r)$， $|L_i'(v)| = d_Q(v) - e_Q(v, r)$。 $Q - r$ 中至少有两个内部顶点，因此 $Q - r$ 中存在某个不同于 u 的内部顶点 v。然后，根据定理 7.1(ii)， $e_Q(v, r) \geq 2$。根据定理 3.6，要么 $|L_0'(v)| > d_Q(v) - e(v, r)$，要么$|L_0'(v)| > d_Q(v) - e(v, r)$，所以 $Q - r$ 要么是 Γ_0'-可着色的，要么是 Γ_0'-可着色的，矛盾。

现在我们可以假设 Q 是 k-对称的，或是一个奇轮。若 $Q \cong I_k$，那么根据定理 3.6，对于某个 $i \in \{0, 1\}$，有 $|L_i'(u)| > 0$，因此 $Q - r$ 是 Γ_i'- 可着色的，矛盾。因此我们可以假设

$Q \cong K_{k+1}$ 或 Q 中有一个是奇轮。若 r 是枢纽，则 Γ_i' 是 $Q-r$ 的度极化赋值，因此根据定理 4.1，Γ_i' 是坏的。由于 $Q-r$ 仅由一个块构成，且它不是 K_2-块，因此 Γ_i' 是一致的。根据定理 3.5，r 不与任何极化边关联。现在，由于对于 $i \in \{0,1\}$，Γ_i' 是一致的，故可得 $c_0 = d_0$，矛盾。

因此，我们可以假设 Q 是一个奇轮图，且 r 不是枢纽。若 u是枢纽，则令 $w \in N_Q(r) \cap N_Q(u)$；否则，令 w 为枢纽。无论哪种情况，都有 $L_i'(w) = L(w)\backslash\{c_i\}$，并且根据定理 7.5，$L_i'(w) = L_i'(u)$。由此可得 $c_i = d_i$，矛盾。□

8. Haj´os 联合与类 $\mathcal{T}_k$

令 $\mathcal{T}_k$ 为包含 $\mathcal{T}_k^-$ 且在进行 Haj´os 联合运算下封闭的最小图类，其中$k \geq 3$。注意，由于在 $k=3$ 的情况下，$\mathcal{T}_k^-$ 包含奇轮图；而在 $k>3$的情况下，包含顶点数为 $k+1$的完全图，因此有 $\mathcal{H}_k \subseteq \mathcal{T}_k$。

本节首先介绍 Haj´os 联结的一些结构性质，然后考察与极化列表着色相关的一些性质。特别地，定理 8.5 说明了如何利用极化列表着色来模拟 Haj´os 联结中两个图的可着色性。接着，我们利用这些结果证明 $\mathcal{T}_k$ 中图的一些性质。本节的主要结果——定理 8.15——表明，底层图属于 $\mathcal{T}_k$ 且不可 k-选择着色的极图，正是 $\mathcal{H}_k$ 中不含极化边的图。

8.1. Haj´os 联结与结构性质。 前两个引理想必广为人知，但我们未能在文献中找到证明；第一个引理的证明较为直接，故略去；为完整起见，我们给出第二个引理的证明。

引理 8.1。 设 G 是图 G_0 和 G_1 的 *Haj´os* 联结。图 G 是 *2*-连通的，当且仅当 G_0 和 G_1 均为 *2*-连通图。

引理 8.2。 设 G 是图 G_0 和 G_1的 *Haj´os* 联接，且设 $k \geq 2$。图 G 是 k-边连通的，当且仅当 G_0 和 G_1 均为 k-边连通。

证明。 设 $G = (G_0, v, u_0) \triangle (G_1, v, u_1)$，使得对 $i \in \{0,1\}$，有 $v, u_i \in V(G_i)$。对 $i \in \{0,1\}$，令 $e_i = u_i v$，并令 $e = u_0 u_1$。

假设对 $i \in \{0,1\}$，G_i是 k-边连通的。由于 $k \geq 2$，在 G_i中存在两条边不相交的(u_i, v)-路径，其中至多一条包含 e_i，因此对 $i \in \{0,1\}$，$G_i\backslash e_i$至少有一条(u_i, v)-路径。为导出矛盾，假设 G 不是 k-边连通的。那么 G 有一个边割 S，满足 $|S| < k$。由于$G\backslash S$ 至少包含两个连通分量，存在一个顶点 x，它在$G\backslash S$中与 v 不属于同一个连通分量。因此，S 在 G中分离 x 和 v，所以 G中边不相交的(x, v)-路径严格少于 k 条。不失一般性，假设 $x \in V(G_0)$。由于 G_0 是 k-边连通的，G_0中存在 k条边不相交的(x, v)-路径，其中至多一条包含 e_0。如果没有这样的路径包含 e_0，那么 G中就有 k 条边不相交的(x, v)-路径，矛盾。因此，$G_0\backslash e_0$ 中存在 $k-1$ 条(x, v)-路径，以及一条包含 e_0的(x, v)-路径 P_0，这些 k 条路径两两边不相交。将 P_0的(x, u_0)-子路径、由单边 e 构成的(u_0, u_1)-路径，以及 $G_1\backslash e_1$中的一条(u_1, v)-路径连接起来，我们得到 G 中的一条(x, v)-路径，它与其他 $k-1$ 条(x, v)-路径边不相交。因此，G中再次存在 k条边不相交的(x, v)-路径，矛盾。由此可知，G 是 k-边连通的。

现在假设 G 是 k-边连通的，但为导出矛盾，假设 G_0 不是 k-边连通的。那么，对于某些 x、$y \in V$（G_0），G_0中少于 k 条边不相交的（x，y）-路径。由于 G 是 k-边连通的，G中存在 k 条边不相交的（x，y）-路径，其中至多一条经过 e。任何不经过 e的（x，y）-路径都包含在 G_0中，因此不妨设其中一条路径（记作 P_0）经过 e。于是 P_0 同时包含 e 和 v_0；不失一般性，假设 e 出现在 v_0之前。将 P_0的（x，u_0）-子路径、由边 e_0构成的（u_0，v）-路径，以及 P_0的（v，y）-子路径首尾连接起来，可得 G_0 中的一条（x，y）-路径，它与 G_0中的其他 $k-1$ 条（x，y）-路径边不相交，矛盾。由此可知 G_0，并由对称性可知 G_1 是 k-边连通的。□

引理 8.3。 设 G 为图 G_0 和 G_1 的 *Haj´os* 粘合$(G_0, v, u_0) \triangle (G_1, v, u_1)$，其中对于 $i \in \{0,1\}$，图 G_i 的最大局部边连通度为 k_i，且 $u_i v \in E(G_i)$ 不是桥。那么 G 的最大局部边连通度为 $\max\{k_0, k_1\}$。

证明。设 $e = u_0u_1$，并令 $i \in \{0,1\}$ 的 $e_i = u_iv$。为简洁起见，令 $\lambda(G)$ 表示 G 的最大局部边连通度；对于 $x, y \in V(G)$，令 $\lambda_G(x, y)$ 表示 G 中边不相交的 (x, y)-路径的最大数量。

首先，考虑 $v_i \in V(G_i) \setminus \{v\}$，其中 $i \in \{0, 1\}$。显然，每条 (v_0, v_1)-路径都包含 e 或 v。在 $G_i \backslash e_i$ 中至多存在 k_i 条边不相交的 (v_i, v)-路径，因为 $\lambda(G_i) = k_i$。此外，对于任意这样的k_i 条边不相交的 (v_i, v)-路径，不存在与其中每条路径均边不相交的 (v_i, u_i)-路径；否则$\lambda_{G_i}(v_i, v) = k_i + 1$，这与 $\lambda(G_i) = k_i$矛盾。于是可得，$\lambda_G(v_0, v_1) \leq \max\{k_0, k_1\}$。

现在考虑互异的 $x, y \in V(G_0)$。注意，G中的任意 (x, y)-路径若不同时属于 G_0，则必包含 e，因此 $\lambda_G(x, y) \leq \lambda_{G_0}(x, y) + 1$。令 $\lambda_{G_0}(x, y) = k$，并假设 G_0中的 k条边不相交的 (x, y)-路径中有一条包含 e_0。不妨设该路径含有一条 (x, u_0)-子路径和一条 (v, y)-子路径；此时，将它们分别与 u_0, e, u_1 以及 $G_1 \backslash e_1$ 中的一条 (u_1, v)-路径连接起来（该路径存在，因为 e_1 不是桥），便可在 G 中得到另一条与其余路径边不相交的 (x, y)-路径。因此，在这种情况下 $\lambda_G(x, y) = k$。另一方面，假设 G_0 中存在 k条边不相交的 (x, y)-路径，且其中没有一条包含 e_0。则 G 中不存在与这些路径中的每一条均边不相交的 (x, y)-路径，因为这样的路径将包含 e 以及 G_1中的一条 (u_1, v)-子路径；我们可以用 e_0 替换该子路径，从而得到一条包含 e_0 且与这 k 条路径均边不相交的 (x, y)-路径。故在任意情况下，$\lambda_G(x, y) = k = \lambda_{G_0}(x, y)$。由对称性可知，对于任意$i \in \{0, 1\}$以及任意 $x, y \in V(G_i)$，$\lambda_{G_i}(x, y) = \lambda_G(x, y)$。

由此可得 $\lambda(G) \leq \max\{k_0, k_1\}$。此外，存在 $i \in \{0,1\}$，使得 G_i有不同的顶点 x, y，满足 $\lambda_{G_i}(x, y) = \max\{k_0, k_1\}$；此时 $\lambda_G(x, y) = \max\{k_0, k_1\}$。因此，$\lambda(G) = \max\{k_0, k_1\}$，如所需。□

8.2. **Haj´os 的联接与极化列表染色**。我们先介绍一个关于极图的技术性但重要的引理，其底层图可通过 Haj´os 联接得到。实质上，它将此类极图上的极化列表染色问题化简为其中一个部分上的极化列表染色问题。

引理 *8.4.* 设 Q 是一个极图，其中 $G(Q)$ 是图G_0 与 G_1 的 ***Haj´os*** 联接 $(G_0, v, u_0) \triangle (G_1, v, u_1)$，且对于 $i \in \{0, 1\}$，有 $u_i, v \in V(G_i)$。假设 G_1 是 k-可联接的。设 $\Gamma = (L, R)$ 是 Q的一个 k-极赋值，令 $Q_i = Q[V(G_i)]$，其中 $i \in \{0, 1\}$，并令 $C = \{c \in L(v) : (v, c)$ 强制 u_1 于 $(Q_1, \Gamma)\}$。

(i) 若 $C = \emptyset$，则 Q_0 的任意 Γ-着色都可扩展到 Q。(ii) 否则，存在一个极图 Q_0'，满足 $G(Q_0') = G_0$ 且 $Q_0'|vu_0 = Q_0$，以及一个 k-极赋值 Γ_0，定义在 Q_0' 上，使得 $\Gamma_0|Q_0 = \Gamma|Q$，并且 Q_0' 的每个 Γ_0-着色都可扩展为 Q的一个 Γ-着色。

证明。设 $e = u_0u_1$，并令 ϕ 为 Q_0的一个 Γ-着色。注意，为了找到 ϕ 到Q的扩展，只需找到 Q_1 的一个 Γ-着色 ϕ'，使得 $\phi'(v) = \phi(v)$ 和 $\phi(u_0)$ 以及 $\phi'(u_1)$ 不会导致 e违反 (P2)（见图12）。若 e 未极化，我们要求 $\phi'(u_1) \neq \phi(u_0)$。若 e 已极化，且 $R(e, u_0, u_1) = (\phi(u_0)\ c_1)$，则我们要求 $\phi'(u_1) = c_1$。因此，在这两种情况下，只需找到 Q_1 的一个 Γ-着色 ϕ'，使得 $\phi'(v) = \phi(v)$ 且对某个 c_1，有 $\phi'(u_1) \neq c_1$。由于 G_1 可进行 k- 连接，Q_1 是 k- 不受限制的，尤其是 k- 可选择着色。若 $C = \emptyset$，则 $(v, \phi(v))$ 不会在 Q_1 中强制 u_1，因此存在所需的 Γ-着色 ϕ'。这就证明了 (i)。

现在假设 $C \neq \emptyset$。令 Q_0^N和 Q_0^P为由 Q_0 添加一条非极化 or 极化边 u_0v得到的图，分别如此。为证明 (ii)，我们证明以下断言。

断言 8.4.1。

(I) 若 $|C| = 1$，或者 $|C| > 1$ 和 u_0u_1 是极化的，则存在 k-极赋值 Γ_P，使得 $\Gamma_P|Q_0 = \Gamma|Q_0$，并且 Q_0^P的任意 Γ_P-着色都可以扩展到 Q。(II) 若 $|C| > 1$ 且 u_0u_1 未极化，则 Q_0^N 的任意 Γ-着色都可以扩展到 Q。

子证明。为证明 (II)，假设 $|C| > 1$ 和 e 未被极化。由于 G_1 是可与 k连接的，且 $G(Q_1) = G_1 \backslash u_1v$，因此 u_1 是 Q_1中 v 的一个 k-模仿者。因此，由于 $|C| > 1$，对于所有 $c \in C$，我们有 (v, c) 在 (Q_1, Γ) 中强制 (u_1, c)。现在，当且仅当 $\phi(v) \in C$ 且 $\phi(u_0) = \phi(v)$ 时，ϕ 才不会扩展到 Q。由此可知，Q_0^N的任何 Γ-着色都能扩展到 Q，如所需。

为证明 (I)，首先假设 e 未极化且 $|C| = 1$。令 $C = \{c\}$ 和 $d \in \mathbb{N}$ 满足：(v, c) 在 (Q_1, Γ) 中强制 (u_1, d)（注意，尽管 G_1 是 k-可连接的，但由于 $|C| = 1$，我们仍可能有 $d \neq c$）。由于

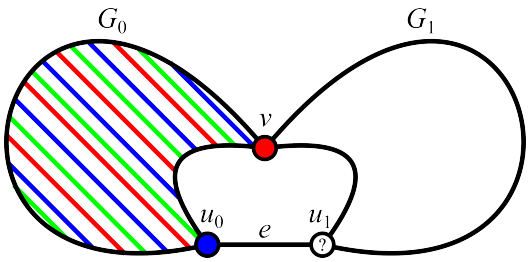


图12。图 G_0 和图 G_1的 Haj´os 联结。这里， ϕ 是 G_0的一个着色。要将 ϕ扩展为整个图的着色，只需找到 G_1 的一个着色，使 v着成 $\phi(v)$，且为 u_1 选择的颜色不会导致 e 与**(P2)**冲突。

e未极化时， ϕ不能扩展到 Q，当且仅当 $\phi(v) = c$且 $\phi(u_0) = d$。令 $\Gamma_P = (L|Q_0, R_P)$ 为 Q_0^P的 k-极赋值，其中 $R_P|Q_0 = R|Q_0$且 $R_P(e_P, u_0, v) = (d, c)$，其中 e_P是 Q_0^P中连接 u_0 和 v的极化边。那么， Q_0^P的任意 Γ_P-着色都能扩展到 Q。

最后，假设 $|C| \geq 1$和 e是极化的。令 $R(e, u_0, u_1) = (c_0, c_1)$，并注意到，当且仅当 $\phi(v) \in C$ 且 $\phi(u_0) = c_0$ 时， ϕ不能扩展到 Q；并且 $(v, \phi(v))$ 在 (Q_1, Γ)中强制 (u_1, c_1)。若 $|C| \geq 2$，则由于 G_1是 k-可联结的，对每个 $c \in C$，都有 (v, c) 在 (Q_1, Γ)中强制 (u_1, c)。因此，至多存在一个 $c \in C$使得 (v, c) 在 (Q_1, Γ)中强制 (u_1, c)，即 $c = c_1$（若 $c_1 \in C$）。若 $c_1 \in C$，令 $c = c_1$；否则任意选择 $c \in \mathbb{N}$。这次我们令 $R_P(e_P, u_0, v) = (c_0, c)$，再一次可知， Q_0^P的任意 Γ_P-着色都能扩展到 Q。◁

现在，若 (I) 成立，令 $Q_0' = Q_0^P$ 和 $\Gamma_0 = \Gamma_P$；否则令 $Q_0' = Q_0^N$ 和 $\Gamma_0 = \Gamma$，由断言 8.4.1 可得 (ii)。□

下一个引理本质上是定理 8.4 的一个较简单形式，通常已足以满足我们的需要。

引理 8.5. 设 Q 是一个极图，且 $G(Q)$ 是图 G_0 与 G_1 的 ***Haj´os*** 合并，其中 G_1 可进行 k-合并。设 Γ 是 Q 的一个 k-极赋值。则存在一个极图 Q_0'，满足 $G(Q_0') = G_0$，以及 Q_0' 的一个 k-极赋值 Γ_0，使得 $\Gamma_0|Q[V(G_0)] = \Gamma|Q$，并且 Q_0' 的每个 Γ_0-着色都可扩展为 Q 的一个 Γ-着色。

证明。令 $G(Q) = (G_0, v_0, u_0) \triangle (G_1, v_1, u_1)$，其中对 $i \in \{0, 1\}$，有 $u_i, v_i \in V(G_i)$。令 $C = \{c \in L(v_1) : (v_1, c)$ 强制 $(Q[V(G_1)], \Gamma)$ 中的 $u_1\}$。若 $C \neq \emptyset$，则由定理 8.4(ii) 可得该引理成立。因此，设 $C = \emptyset$。由定理 8.4(i)， $Q[V(G_0)]$ 的任意 Γ-着色都可扩展为 Q。令 $\Gamma = (L, R)$。我们向 $Q[V(G_0)]$ 添加一条极化边 $e_0 = u_0v_0$，得到一个满足 $G(Q_0') = G_0$ 的极图 Q_0'；并令 $\Gamma_0 = (L, R')$，其中 R' 由 R 得到，但将 $R'(e_0, u_0, v_0)$ 替换为 $= (c, c')$，其中 c 和 c' 是 Γ 的新顶点。那么， Q 是Γ- 可着色的，当且仅当 Q_0' 是 Γ_0- 可着色的，结论得证。□

我们使用定理 8.4 和 8.5 来证明以下内容：

定理 8.6。 如果 G 是两个 k-可粘合图的 ***Haj´os*** 粘合，那么 G 是 k-可粘合的 .

证明。令 $G = (G_0, v, u_0) \triangle (G_1, v, u_1)$，且 $e = u_0u_1$是 G中的新边。令 $e_0 = u_0v$和 $e_1 = u_1v$分别为 G_0 和 G_1 中不存在于 G 的边。令 Q 为一个极图，使得 $G(Q) = G$，并令 $Q_i = Q[V(G_i)]$，其中 $i \in \{0, 1\}$。

断言 8.6.1。 对于任意 $e' \in E(Q)$，我们有 $Q|e'$ 是 k-不受限的。

子证明。令 $e' \in E(Q)$。我们证明，对于 $Q\backslash e'$ 的任意 k-极赋值 $\Gamma = (L, R)$，以及任意$x \in V(Q)$和任意 $c_x \in L(x)$，存在一个 Γ-着色 ϕ，使得 $Q\backslash e'$ 满足 $\phi(x) = c_x$。如果 $e' = e$，那么 $Q\backslash e'$ 是两个 k-不受限极图的 1-粘合，因此根据定理 3.7，它是 k-不受限的。因此不妨设 $e' \in E(Q) \setminus \{e\}$，于是对于某个 $i \in \{0, 1\}$，有 $e' \in E(Q_i)$。由对称性，不失一般性地设 $i = 1$。于是 $G\backslash e' = (G_0, v, u_0) \triangle (G_1\backslash e', v, u_1)$，其中 $e = u_0u_1$ 是添加的边。我们还固定 $Q\backslash e'$ 的任意 k-极赋值 $\Gamma = (L, R)$。

令 $x \in V(G)$，并令 $c_x \in L(x)$。首先假设 $x \in V(G_0)$。由于 G_0 是 k-可连接的，且 $G(Q_0) = G_0\backslash e_0$，因此 Q_0 是 k-不受限的，所以存在一个 Γ-着色 ϕ，使得 Q_0

$\phi(x) = c_{x^\circ}$。根据定理 8.4(i)，ϕ 可以扩展到 $Q\backslash e'$，除非 $(v, \phi(v))$ 强制 u_1 在 $(Q_1\backslash e', \Gamma)$ 中。注意，$G_1\backslash e'$ 是 k-极不受限的，因为 G_1 是 k-可连接的，且 $G(Q_1\backslash e') = G_1\backslash\{e', e_1\}$。因此，根据定理 7.15，不存在 $c \in L(v)$ 使得 (v, c) 强制 u_1 在 $(Q_1\backslash e', \Gamma)$ 中。特别地，$(v, \phi(v))$ 不会强制 u_1 在 $(Q_1\backslash e', \Gamma)$ 中，因此 ϕ 可以扩展到 $Q\backslash e'$。

接下来假设 $x \in V(G_1)$。由于 G_1 是 k-可连接的，我们有 $Q_1\backslash\{e_1, e'\}$ 是 k-不受限的，因此存在一个 Γ-着色 ϕ，适用于 $Q_1\backslash\{e_1, e'\}$，且 $\phi(x) = c_{x^\circ}$ 如果不存在 $c \in L(v)$ 使得 (v, c) 在 (Q_0, Γ) 中强制 u_0，那么根据定理 8.4(i)，ϕ 扩展为 $Q\backslash e'$。否则，根据定理 8.4(ii)，由于 G_0 是 k-可连接的，存在一个极图 Q_1'，其 $G(Q_1') = G_1\backslash e'$，以及一个适用于 Q_1' 的 k-极赋值 Γ'，使得 $\Gamma'|Q_1' = \Gamma|Q_1$，并且 Q_1' 的任意 Γ'-着色都扩展为 $Q\backslash e'$ 的 Γ-着色。此外，由于 G_1 是 k-可连接的，Q_1' 是 Γ'-不受限的，因此存在一个 Γ'-着色 ϕ，适用于 Q_1'，该着色扩展为 $Q\backslash e'$ 的 Γ-着色，且 $\phi(x) = c_{x^\circ}$。◁

由断言 8.6.1，只需证明对于 Q 的每条边 $e' = xy$，y 都是 $Q\backslash e'$ 中 x 的 k-模仿者。设 Q 的一条边为 $e' = xy$，并反设 y 不是 x 的 k-模仿者。令 $\Gamma = (L, R)$ 是 $Q\backslash e'$ 的一个 k-极赋值，使得在 $(Q\backslash e', \Gamma)$ 中，x 2 强制 y；但存在某个 $c \in L(x)$，使得在 $(Q\backslash e', \Gamma)$ 中，(x, c) 强制 (y, d)，其中 $c \neq d$。假设 $e' \in E(G_1)$，因此 G 是 G_0 与 $G_1\backslash e'$ 的 Haj´ós 合并，其中识别顶点 v 并添加边 $e = u_0u_1$。由定理 8.5，存在一个极图 Q_1'，满足 $G(Q_1') = G_1\backslash e'$，并且存在 Q_1' 的一个 k-极赋值 $\Gamma' = (L', R')$，使得$\Gamma'|Q_1 = \Gamma|Q_1$，且 Q_1' 的任意 Γ'-着色都能扩展到 Q。由于 $G(Q_1') = G_1\backslash e'$ 且 G_1 可进行 k-合并，对于每个 $c' \in L'(x)$，都存在 Q_1' 的一个 Γ'-着色 ϕ，使得 $\phi(x) = c'$。若存在某个 $c' \in L(x)$，使得在 $Q\backslash e'$ 中，(x, c') 强制 (y, d')，则按定义有 $c' \in L'(x)$，因此存在 Q_1' 的一个 Γ'-着色 ϕ，使得 $\phi(x) = c'$。由于 ϕ 可扩展到 Q，可得 $\phi(y) = d'$。因此，(x, c') 在 (Q_1', Γ') 中强制 (y, d')。这意味着在 (Q_1', Γ') 中，x 2 强制 y，且在 (Q_1', Γ') 中，(x, c) 强制 (y, d)，其中 $c \neq d$。所以 y 不是 Q_1' 中 x 的 k-模仿者，这与 G_1 可进行 k-合并矛盾。

由对称性，只需考察 $e' = e$ 且 $(x, y) = (u_0, u_1)$ 的情形。现在，$\Gamma = (L, R)$ 是 $Q\backslash e$ 的一个 k-极赋值，其中 $c \in L(u_0)$ 满足：(u_0, c) 在 $(Q\backslash e, \Gamma)$ 中强制 (u_1, d)。我们首先断言，(u_0, c) 在 $(Q\backslash e, \Gamma)$ 中强制 v。反设不然。令 ϕ 和 ϕ' 为 Q_0 的 Γ-着色，使得 $\phi(u_0) = \phi'(u_0) = c$，但 $\phi(v) \neq \phi'(v)$。由于 Q_1 是 k-不受限制的，ϕ 和 ϕ' 都可扩展到 $Q\backslash e$，因此令 Φ_E 为 ϕ 的所有此类扩展所成的集合，并令 Φ_E' 为 ϕ' 的所有此类扩展所成的集合。由于 (u_0, c) 在 $(Q\backslash e, \Gamma)$ 中强制 (u_1, d)，故对所有 $\phi_E \in \Phi_E \cup \Phi_E'$，都有 $\phi_E(u_1) = d$。然而，这意味着 $(v, \phi(v))$ 和 $(v, \phi'(v))$ 都在 Q_1 中强制 (u_1, d)，这与 u_1 是 Q_1 中 v 的一个 k-模仿相矛盾，因为 $\phi(v) \neq \phi'(v)$。因此，(u_0, c) 在 $(Q\backslash e, \Gamma)$ 中强制 (v, c_v)，记为此结论。

接下来我们断言，在（$Q\backslash e, \Gamma$）中，(v, c_v) 强制 (u_1, d)。反设不然。令 ϕ 为 Q_0 的一个 Γ-着色，使得 $\phi(u_0) = c$，于是 $\phi(v) = c_v$。由于 (v, c_v) 在 (Q_1, Γ) 中并不强制 (u_1, d)，因此存在 ϕ_E，它是将 ϕ 扩展到 Q 的一个扩展，并且 $\phi_E(u_1) \neq d$。这与 (u_0, c) 在（$Q\backslash e, \Gamma$）中强制 (u_1, d) 这一事实矛盾。

我们现在已经证明，(u_0, c) 在 (Q_0, Γ) 中强制 (v, c_v)，而 (v, c_v) 在 (Q_1, Γ) 中强制 (u_1, d)。由于 v 是 Q_0 中 u_0 的一个 k-模仿者，且 u_1 是 Q_1 中 v 的一个 k-模仿者，因此 u_1 是 $Q\backslash e$ 中 u_0 的一个 k-模仿者，证毕。□

我们还利用定理 8.4 和 8.5 得到了下面两个引理。

引理 8.7。若 G 是两个 k-极无约束图的 *Haj´os* 联结，则 G 是 k-极无约束的。

证明。设 G_0 和 G_1 是满足 $u, v_i \in V(G_i)$ 的图，其中 $i \in \{0, 1\}$；设 $G = (G_0, v, u_0) \triangle (G_1, v, u_1)$；并设 Q 是一个极图，满足 $G(Q) = G$。设 $\Gamma = (L, R)$ 是一个 k-极赋值，且 $r \in V(Q)$ 和$c \in L(r)$。不失一般性，假设 $r \in V(G_0)$。由于 G_0 是 k-极无约束的，$Q[V(G_0)]$是 k-无约束的，因此存在 Γ着色 ϕ，使得 $Q[V(G_0)]$ 且 $\phi(r) = c$。根据定理 7.16，G_1 是k-可联结的。此外，根据定理 7.15，不存在 $c \in L(v)$ 使得 (v, c) 在 $(Q[V(G_1)], \Gamma)$ 中强制 u_1。因此，根据定理 8.4(i)，ϕ 扩展至 Q。于是，r 在 c 上不是 Γ-受限的。□

引理 8.8. 设 G 是图 G_0 和 G_1 的 *Haj´os* 拼接。假设 G_0 是 k-可拼接的，且 G_1 是 k-极性不受限的。那么 G 是 k-极性不受限的。

证明。令 $G = (G_0, v, u_0) \triangle (G_1, v, u_1)$，并令 $e_0 = u_0v$ 和 $e_1 = u_1v$ 分别为 G_0 和 G_1 中不属于 G 的边。令 Q 为底层图为 G 的极图，令 $\Gamma = (L, R)$ 为 Q 的一个 k-极赋值，并令 $r \in V(Q)$，其中 $c \in L(r)$。令 $Q_i = Q[V(G_i)]$，其中 $i \in \{0, 1\}$。

首先假设 $r \in V(G_0)$。由于 G_0 是 k-可连接的，且 $G(Q_0) = G_0 \backslash e_0$，因此 Q_0 是不受限制的 Γ。于是，存在 Q_0 的一个 Γ-着色 ϕ，使得 $\phi(r) = c$。根据定理 7.16，G_1 是 k-可连接的；根据定理 7.15，不存在这样的 $c \in L(v)$，使得 (v, c) 在 (Q_1, Γ) 中强制 u_1。因此，根据定理 8.4(i)，ϕ 扩展到 Q。故 r 在 Q 中的 c 上不受 Γ-限制。

接下来假设 $r \in V(G_1)$。根据定理 8.5，存在一个极图 Q_1'，满足 $G(Q_1') = G_1$，以及一个针对 Q_1' 的 k-极赋值 Γ'，使得 Q_1' 的任意 Γ'-着色都可扩展为 Q 的 Γ-着色。由于 G_1 是 k-极不受限的，因此存在 Q_1' 的一个 Γ'-着色 ϕ'，其中 $\phi'(r) = c$。于是 ϕ' 可扩展为 Q 的一个 Γ-着色，因此 r 在 Q 中的 c 上不受 Γ 限制。由此可知，Q 是 k-极不受限的，证毕。□

8.3. **类 $\mathcal{T}_k$。** 现在我们证明：如果 G 是一个 Gallai 树的几乎 k-正则扩展（即使该树含有 K_2-块），那么 G 属于 $\mathcal{T}_k$。

引理 8.9。 *设 G 是一个图，且有顶点 $h \in V(G)$ 使得 $G - h$ 是一棵 Gallai 树，并且对所有 $v \in V(G) \setminus \{h\}$，$d_G(v) = k$。那么 $G \in \mathcal{T}_k$。*

证明。注意到 G 是 $G - h$ 的几乎 k-正则扩展。因此，如果 $G - h$ 没有 K_2-块，那么显然 G 属于 $\mathcal{T}_k^-$，所以也属于 $\mathcal{T}_k$。因此，当 $G - h$ 没有 K_2-块时，引理成立。

反设存在这样的图 G，使得 $G \notin \mathcal{T}_k$。不妨设在所有这样的图中，G 的顶点数最少。由上文可知，$G - h$ 有一个 K_2-块 B。令 $V(B) = \{u_0, u_1\}$，且 $E(B) = \{e\}$。由于 B 是 $G - h$ 的一个块，边 e 是 $G - h$ 的一座桥。令 H_0 和 H_1 为 $(G - h) \backslash e$ 的两个连通分量，其中对每个 $i \in \{0, 1\}$，$u_i \in H_i$。注意，H_0 和 H_1 都是 Gallai 树。对 $i \in \{0, 1\}$，令 G_i 为通过添加边 $e_i = hu_i$，由 $G[V(H_i) \cup \{h\}]$ 得到的图。我们有 $G_i - h = H_i$，其中 H_i 是一棵 Gallai 树。此外，对任意 $v \in V(H_i)$，有 $d_{G_i}(v) = d_G(v) = k$（若 $v \neq u_i$，这显然成立；而若 $v = u_i$，则在 G_i 中，我们删去边 e，但添加边 e_i）。因此，由 G 的极小性，G_0 和 G_1 都属于 $\mathcal{T}_k$。然而，G 是 G_0 与 G_1 的 Haj´os 粘合，因此 $G \in \mathcal{T}_k$，矛盾。□

在定理 8.11 中，我们将证明，存在一种自然的方法，可以用大小至多为 k 的边割将图 G 分解为两个连通分量，使得当这些连通分量属于 $\mathcal{T}_k$ 时，G 属于 $\mathcal{T}_k$。现在我们来描述这种分解得到的图。

假设图 G 有一个边割 S，将 X 与 Y 分离，其中 (X, Y) 是 $V(G)$ 的一个划分。我们用以下记号描述由 G 和 (X, Y) 得到的两个特定图。令 X_S（或 Y_S）为 X（或 Y）中与 S 中某条边关联的顶点所组成的子集。对于 $e \in S$，令 x_e（或 y_e）为 X_S（或 Y_S）中与 G 中的 e 关联的顶点。令 G'_X 为从 $G[X]$ 添加一个新顶点 w，并对每个 $e \in S$ 添加一条连接 w 与 x_e 的单边 e 后得到的图。注意，在 G'_X 中可能存在与 w 关联的平行边。令 G_Y 为从 $G[Y]$ 添加一个集合 $U = \{u_e : e \in S\}$ 中的 $|S|$ 个新顶点，使得在 G_Y 中 U 是一个团，并对每条边 $e \in S$ 添加一条边 $e = u_e y_e$ 后得到的图。注意，在 Q'_X 中，与 w 关联的边的集合是 S；而 S 是 G_Y 中的一个边割。示意图见图 13。

引理 8.10。 *设 $k \geq 3$，且 G 是图 H_0 和 H_1 的 Haj´os 黏合，其中 $H_0, H_1 \in \mathcal{T}_k$ 和 $V(H_0) \cap V(H_1) = \{z\}$。设 $H \in \{H_0, H_1\}$，且 $v \in V(H)$。则*

(i) $d_G(v) \geq d_H(v) \geq k$，且(ii) $d_G(v) > d_H(v)$ 当且仅当 $v = z$。

证明。首先，假设 H_0，$H_1 \in \mathcal{T}_k^-$。由于 $H \in \mathcal{T}_k^-$，因此对所有 $v \in V(H)$，都有 $d_H(v) \geq k \geq 3$。此外，若 $u \in V(H) \setminus \{z\}$，则显然 $d_H(u) = d_G(u)$。另一方面，$d_G(z) = d_{H_0}(z) + d_{H_1}(z) - 2 \geq d_{H_0}(z) + 1$，故由对称性，$d_G(z) > d_H(z)$。通过常规的归纳论证即可得到该引理。□

引理 8.11. *设 $k \geq 3$，且设 G 是一个图，其极小边割 S 将 X 与 Y 分离，其中 (X, Y) 是 $V(G)$ 的一个划分，并且 $|S| \leq k$。如果 G'_X 和 G_Y 都属于 $\mathcal{T}_k$，那么 $G \in \mathcal{T}_k$。*

证明。假设 G'_X 和 G_Y 属于 $\mathcal{T}_k$，但反设 $G \notin \mathcal{T}_k$。我们还假设 G 在所有此类反例中顶点数最少。

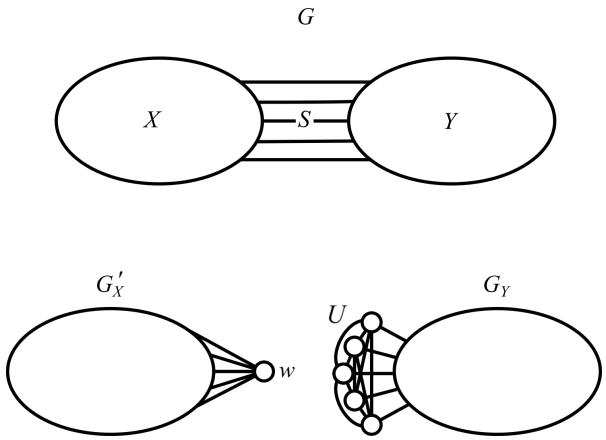


图 13。图 G'_X 和 G_Y

断言 8.11.1。 $|S| = k$。

子证明。 注意， $d_{G'_X}(w) = |S|$。 若 $G'_X \in \mathcal{T}_k^-$ ， 则 G'_X 的最小度为 k。 若 $G'_X \notin \mathcal{T}_k^-$ ， 则根据定理 8.10(i)， G'_X 的最小度同样为 k。因此，无论哪种情况， $|S| = d_{G'_X}(w) \geq k$。由于 $|S| \leq k$，我们得到 $|S| = k$，如所需。◁

假设 $G_Y \in \mathcal{T}_k^-$ 。根据断言 8.11.1， $G_Y[U] \cong K_k$，因此由定理 7.2， $G_Y \cong K_{k+1}$。于是$Y = V(G_Y) \setminus U$ 仅由一个顶点组成，由此可得 $G'_X \cong G$。因此，由于 $G'_X \in \mathcal{T}_k$，我们有 $G \in \mathcal{T}_k$，正如所需。

因此，我们可以假设 $G_Y \notin \mathcal{T}_k^-$ ，所以存在图 $G_0, G_1 \in \mathcal{T}_k$ ，使得 $G_Y = (G_0, z, v_0) \triangle (G_1, z, v_1)$，其中 $z, v_i \in V(G_i)$ 对于 $i \in \{0,1\}$成立。令 $e_0 = v_0 z$和 $e_1 = v_1 z$分别为图 G_0 和图 G_1中未出现在 G_Y里的边。我们先证明以下断言。

断言 8.11.2. 对于某个 $i \in \{0,1\}$，有 $U \subseteq V(G_i) \setminus \{z\}$，且 U 是 G_i中的一个团。

子证明。反设存在 $u_0 \in U \cap V(G_0)$ 和 $u_1 \in U \cap V(G_1)$。若 $u_0 = z$，则由定理 8.10 可得 $d_{G_Y}(u_0) > d_{G_0}(u_0) \geq k$ ，这与根据 G_Y的构造及断言 8.11.1， U中的每个顶点在 G中的度均为 k 矛盾。因此， $u_0 \in V(G_0) \setminus \{z\}$，类似地，$u_1 \in V(G_1) \setminus \{z\}$。由于 u_0和 u_1 在 G_Y中相邻，因此有 $u_0 = v_0$和 $u_1 = v_1$。然而，由于$|U| = k$，根据断言 8.11.1，且 $k \geq 3$，存在某个 $u' \in U \setminus \{u_0, u_1\}$，它在 G_Y中同时与 v_0和 v_1相邻。这个顶点只能是 z，但这样一来 $d_{G_Y}(z) > k$ ，于是 $z \notin U$，矛盾。由此矛盾可推得，对于某个 $i \in \{0, 1\}$，有 $U \subseteq V(G_i) \setminus \{z\}$。现在 $G_Y[U] = G_i[U]$。因此，由于 U是 G_Y中的一个团，它也是 G_i中的一个团。◁

不失一般性，假设 $i = 0$ 属于断言 8.11.2，因此 $U \subseteq V(G_0) \setminus \{z\}$ 且 $G_0[U]$ 是完全图，而 $U \cap V(G_1) = \emptyset$。注意到 $|U| = k$，并且对于每个 $u \in U$，在 G_Y 中， u 与一个不属于 U 的顶点之间恰有一条边。

断言 8.11.3. $G_0 - U$ 是连通的。

子证明。 由于边割 S 是极小的， $G[Y] = G_Y - U$ 是连通的。为导出矛盾，假设 $G_0 - U$ 不连通。于是存在不同的顶点 v， $v' \in V(G_0) - U$，使得 $G_0 - U$ 中不存在 (v, v')-路径。注意到 v， $v' \in V(G_Y - U)$。由于 $G_Y - U = G[Y]$ 连通， $G_Y - U$ 中存在一条 (v, v')-路径。由于这条路径在 $G_0 - U$ 中不存在，它包含一个属于 $V(G_1) \setminus \{z\}$ 的顶点，因此同时包含 z 和 v_0。然而，我们可以用 G_0 中的边 $e_0 = zv_0$ 替换一条 (z, v_0)-子路径，从而得到 $G_0 - U$ 中的一条 (v, v')-路径，矛盾。◁

现在，我们通过取 $G_0 - U$ 和 $G[X]$的并来构造图 G'，然后按如下方式为每个 $e \in S$ 添加一条边。对于每个 $e \in S$，有 $u_e \in U \subseteq V(G_0) \setminus \{z\}$ 因此，由于 $u_e y_e$ 是 G_Y 的一条边，故 $y_e \in V(G_0)$ 或 $y_e = v_1$；若 $y_e \in V(G_0)$，则在 G' 中添加边 $e = x_e y_e$，否则，当

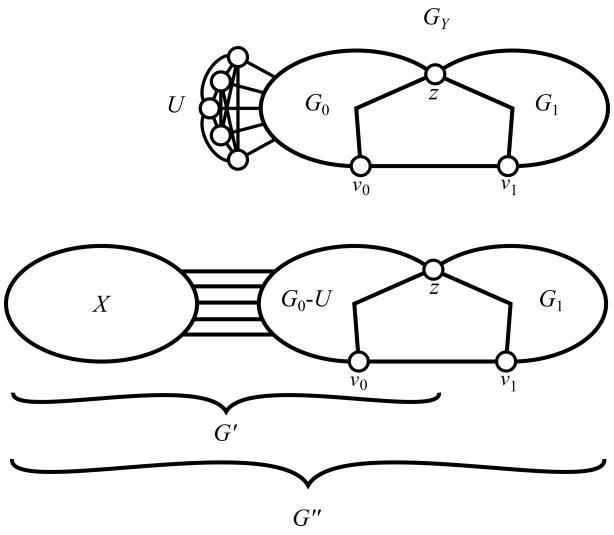


图14。 G_Y、 U、 G_0、 G_1、 G' 和 G''的示意图。

$y_e = v_1$，我们就在 G' 中添加边 $e = x_e z$。现在， S 是 G' 中的边集合（也是 G 中的边集合）。令 $Y' = V(G_0 - U)$。注意， S 中 G' 的每条边都与 X 中的一个顶点以及 Y' 中的一个顶点关联，因此 $G'\backslash S$ 由两个连通分支组成，即 $G[X]$ 和 $G_0 - U$；根据断言 8.11.3，后者是连通的。现在，(X, Y') 是 $V(G')$ 的一个划分，其中 S 是 G' 的一个极小边割，它将 X 与 Y' 分离，并满足 $|S| \leq k$。 G'_X 和 $G_{Y'} = G_0$ 都属于 $\mathbf{T}_k$，且 $|V(G')| < |V(G)|$，因此根据 G 的极小性，我们有 G' 属于 $\mathbf{T}_k$。

现在定义一个图 G''，它由对 G' 和 G_1 作 Haj´os 拼接得到。假设 $v_0 \notin U$。那么$e_0 = zv_0 \in E(G_0 - U)$，因此 $e_0 \in E(G')$。在此情形下，我们令 $G'' = (G', z, v_0) \triangle (G_1, z, v_1)$。另一方面，假设 $v_0 \in U$。那么，对于某个 $e \in S$，有 $v_0 = u_e$；此时 $y_e = v_1$，因此根据构造， $x_e z$ 是 G' 的一条边。在此情形下，我们令 $G'' = (G', z, x_e) \triangle (G_1, z, v_1)$。在这两种情形下，我们都令 e' 表示在 G'' 中添加、但在 G' 或 G_1 中不存在的边。图 14 给出了这些图的大致示意图，重点展示 $v_0 \notin U$ 的情形。由于 G'' 是 $\mathbf{T}_k$ 中两个图的 Haj´os 拼接，因此 $G'' \in \mathbf{T}_k$。

我们断言 $G'' \cong G$。不难看出，根据构造， $V(G'') = V(G)$，且 $E(G'') = E(G)$。此外，当 $\{v, v'\} \subseteq X$，或 $\{v, v'\} \subseteq V(G_0 - U)$，或 $\{v, v'\} \subseteq V(G_1)$ 时，顶点 v、 v' 之间的关联在 G 和 G'' 中当然相同。考虑 $v_0 \notin U$ 的情形。根据构造， S 中的边在 G 中与在 G'' 中具有相同的端点。此外， G_Y 中作为 G_0 与 G_1 之间的 Haj´os 连接的一部分而添加的边 $v_0 v_1$，对应于 G'' 中作为 G' 与 G_1 之间的 Haj´os 连接的一部分而添加的边 $e' = v_0 v_1$。现在，在 $v_0 \notin U$ 的情况下， $G = G''$ 显然成立。

剩下的情况是 $v_0 \in U$。令 $e \in S$ 使得 $u_e = v_0$，此时 $y_e = v_1$。显然， $S \setminus \{e\}$ 中的边在 G 中的端点与在 G''中的端点相同。对于 e，注意到 $x_e z$ 是作为 G_0 与 G_1之间的 Haj´os 接合的一部分而添加到 G_Y 中的边。在通过 G' 与 G_1之间的 Haj´os 接合构造 G'' 时，边 $x_e z$ 被删去，边 $x_e v_1 = x_e y_e$ 被添加。因此， S中的边保持关联关系不变。由此可得 $G \cong G''$。于是 $G \in \mathcal{T}_k$，矛盾。□

现在我们来考察前两个小节中的结果对类 $\mathcal{T}_k$的推论。

引理 8.12。 设 G 是 T_k中的一个图，其中 $k \geq 3$。则 G 是 k-边连通的，且最大局部边连通度为 k。

证明。 令 $H \in \mathcal{T}_k^-$。那么， H 是一个 Gallai 树 T 的近乎 k-正则扩展，其枢纽为 h。由于H 至多有一个度大于 k 的顶点，即 h，因此 H 的最大局部边连通度至多为 k。根据定理 7.3， H 是 k-边连通的；由此可知， H 的最大局部边连通度恰为 k。现在，根据定理 8.2 和 8.3，可知 $G \in \mathcal{T}_k$ 是k-边连通的，且最大局部边连通度为 k。□

推论 8.13。设 G 是一个图，且有一个属于 T_k 的真子图，其中 $k \geq 3$。那么， G 要么不是 2-连通的，要么 G 的最大局部边连通度大于 k。

证明。假设 G 是 2-连通的。我们将证明 G 的最大局部边连通度大于 k。设 G' 是 G 的一个真子图，且属于 T_k。根据定理 8.12， G' 是 k-边连通的。首先，假设存在 $u \in V(G) \setminus V(G')$，并设 v_0 和 v_1 是 $V(G')$ 中不同的顶点。由于 G 是 2-连通的，定理 2.3 表明，存在一条 (u, v_0)-路径 P_0 和一条 (u, v_1)-路径 P_1，二者内部不相交。设 w_0 是 P_0 在 $V(G')$ 中遇到的第一个顶点，设 w_1 是 P_1 在 $V(G_1)$ 中遇到的第一个顶点。由于 G' 是 k-边连通的， G' 中存在 k 条边不相交的 (w_0, w_1)-路径。将 P_0 的 (u, w_0)-子路径和 P_1 的 (u, w_1)-子路径接上后，可知 G 中至少有 $k+1$ 条边不相交的 (w_0, w_1)-路径。现在可以假设 $V(G') = V(G)$，因此存在 $e \in E(G) \setminus E(G')$。令$e = uv$。由于 G' 是 k-边连通的， G' 中存在 k 条边不相交的 (u, v)-路径。再加上 e，可知 G 中至少有 $k+1$ 条边不相交的 (u, v)-路径。□

引理 8.14. 若 $G \in T_k$，对于 $k \geq 3$，则 G 是 k-可连接的。

证明. 反设存在 $\mathcal{T}_k$ 中一个并非 k-可连接的图。在所有反例中，令 G 为顶点数最少的这样一个图。由定理 7.17， G 不属于 $\mathcal{T}_k^-$ ，因此 G 可由 $\mathcal{T}_k$ 中的两个图 G_1 和 G_2 作 Haj´os 和得到。 G_1 和 G_2 的顶点数都少于 G，故它们都是 k-可连接的。但由定理 8.6， G 于是是 k-可连接的，矛盾。□

定理 8.15. 设 Q 是一个极图，其中 $G(Q) \in T_k$，对于 $k \geq 3$。设 Γ 是 Q 的一个 k-极赋值。则当且仅当 $G(Q) \in H_k$， $F(Q) = \emptyset$，且 Γ 一致时， Q 不可 Γ-着色。

证明。如果 $G(Q) \in \mathsf{T}_k^-$ ，则根据定理 7.9，结论成立。因此， $G(Q)$ 是图 G_0 和 G_1 的 Haj´os 联结，其中 G_0, $G_1 \in \mathsf{T}_k$。令 $G(Q) = (G_0, v, u_0) \triangle (G_1, v, u_1)$，其中 $v, u_i \in V(G_i)$ 对 $i \in \{0, 1\}$ 成立，并令 e 为 G 中的边 u_0u_1。令 $Q_i = Q[V(G_i)]$ 对 $i \in \{0, 1\}$ 成立。根据定理 8.14， G_i 是 k-可联结的，因此 Q_i 是 k-不受限的。

令 $\Gamma = (L, R)$。对于 $i \in \{0, 1\}$，令 Q_i^P(和 Q_i^N) 为通过向 Q_i 添加一条单独的极化（或非极化）边 $e_i = vu_i$ 所得到的极图，使得 $G(Q_i^P) = G_i$。对于 $c, d \in \mathbb{N}$，令 $\Gamma_i^{(c,d)} = (L_i, R_i)$ 为 Q_i^P 的 k-极赋值，其中 $\Gamma_i^{(c,d)}|Q_i = \Gamma|Q_i$ 和 $R_i(e_i, u_i, v) = (c, d)$。

我们先证明以下命题，讨论 e 被极化的情形。

命题 8.15.1. 设 e 被极化，且 $R(e, u_0, u_1) = (c_0, c_1)$。令 $x \in V(G_0)$。当且仅当存在某个 $c \in \mathbb{N}$，使得 x 在 Q_0^P 中的 a 上是 $\Gamma^{(c_0,c)}{}_0$ - 受限的，并且 v 在 Q_1^P 中的 c 上是 $\Gamma^{(c_1,c)}{}_1$ - 受限的，顶点 x 才在 Q 中的 $a \in L(x)$ 上是Γ-受限的。

子证明。设 x 在 Q 中的 $a \in L(x)$ 上是 Γ-受限的。令 ϕ_0 为 Q_0 的任意一个满足 $\phi_0(x) = a$ 的 Γ-着色。于是 ϕ_0 不能扩展到 Q。由于 Q_1 是 k-非受限的，存在 Q_1 的一个 Γ-着色 ϕ_1，使得 $\phi_1(v) = \phi_0(v)$。因此，若 $\phi_0(u_0) \neq c_0$ 或 $\phi_1(u_1) \neq c_1$，则 ϕ_0 可以扩展到 Q，这与假设矛盾。所以在任何这样的 Γ-着色 ϕ_1 中，$\phi_0(u_0) = c_0$，且 $(v, \phi_0(v))$ 强制 (u_1, c_1) 于 (Q_1, Γ) 中。由于 $G(Q_1) = G_1 \backslash u_1 v$，且 G_1 可 k-连接， u_1 是 Q_1 中 v 的一个 k-仿像。因此，存在唯一的 $c \in \mathbb{N}$，使得 (v, c) 强制 (u_1, c_1) 于 (Q_1, Γ) 中（因为若 v 2 在 (Q_1, Γ) 中强制 u_1，且对于某个颜色 c， (v, c) 强制 (u_1, c_1)，则 $c = c_1$）。现在，对任意这样的 ϕ_0， $\phi_0(v) = c$ 且 $\phi_0(u_0) = c_0$。因此 x 在 Q_0^P 中的 a 上是 $\Gamma^{(c_0,c)}$ 0 -受限的。类似地，对于满足 $\phi_1(v) = c$ 的任意 Q_1 的 Γ-着色 ϕ_1，有 $\phi_1(u_1) \neq c_1$。因此 v 在 c 上是 $\Gamma^{(c_1,c)}$ 1 -受限的。这就证明了一个方向。

对于另一个方向，注意到 x 在 Q_0^P 中于 a 上是 $\Gamma^{(c_0,c)}$ 0-受限的，但在 $Q_0 = Q_0^P \backslash e_0$ 中不是。因此，对于任意满足 $\phi_0(x) = a$ 的 Q_0 的 $\Gamma^{(c_0,c)}$ 0-着色 ϕ_0，我们有 $\phi_0(v) = c$，且 $\phi_0(u_0) = c_0$。另一方面， v 在 Q_1^P 中于 c 上是 $\Gamma^{(c_1,c)}$ 1-受限的，但在 $Q_1^P \backslash e_1$ 中不是。因此，对于任意满足 $\phi_1(v) = c$ 的 Q_1 的 $\Gamma^{(c_1,c)}$ 1-着色 ϕ_1，我们有 $\phi_1(u_1) = c_1$。于是， ϕ_0 无法延拓到 Q，因此 x 在 Q中于 a 上是Γ-受限的，证毕。◁

下一个命题针对 e 未极化的情况。

命题 8.15.2. 假设 e 未极化，且 $x \in V(G_0)$。若 x 在 Q 中相对于 $a \in L(x)$ 是 Γ-受限的，则以下情况至少有一种成立：

(i) x 在 Q_0^N 中于 a 上受到 Γ限制，且 v 在 Q_1^N 中受到多个颜色的 Γ限制；或(ii) 存在 c、$d \in \mathbb{N}$，使得 x 在 Q_0^P 中于 a 上受到 $\Gamma_0^{(d,c)}$ 限制，且 v 在Q_1^P 中于 c 上受到 $\Gamma_1^{(d,c)}$ 限制。

子证明。设 x 在 Q 中相对于 a 是 Γ-受限的。Q_0 的一个 Γ-着色 ϕ_0 可扩展到 Q，当且仅当存在 Q_1 的一个Γ-着色 ϕ_1，使得 $\phi_1(v) = \phi_0(v)$ 且 $\phi_1(u_1) \neq \phi_0(u_0)$。对于 Q_0 的每个满足$\phi_0(x) = a$的 Γ-着色 ϕ_0，ϕ_0 都不能扩展到 Q，因此 $(v, \phi_0(v))$ 在 (Q_1, Γ) 中强制 $(u_1, \phi_0(u_0))$。假设对于某个 $c \in \mathbb{N}$，(x, a) 在 (Q_0, Γ) 中强制 (v, c)。那么存在 $d \in \mathbb{N}$，使得对于任意满足 $\phi_0(x) = a$ 的 Q_0 的 Γ-着色ϕ_0，都有 $\phi_0(v) = c$；并且由于 ϕ_0 不能扩展到 Q，我们还有$\phi_0(u_0) = d$，且 (v, c) 在 (Q_1, Γ) 中强制 (u_1, d)。由此可得，x 在 Q_0^P 中相对于 a 是 $\Gamma_0^{(d,c)}$-受限的，而 v 在 Q_1^P 中相对于 c 是$\Gamma_1^{(d,c)}$ -受限的，因此 (ii) 成立。

现在假设 (x, a) 在 (Q_0, Γ) 中不强制 v。那么，对于 Q_0，存在 Γ-着色 ϕ_0 和 ϕ_0'，使得 $\phi_0(x) = \phi_0'(x) = a$，但 $\phi_0(v) \neq \phi_0'(v)$，其中 ϕ_0 和 ϕ_0' 均不能扩展到 Q。因此，v 2 在 (Q_1, Γ) 中强制 u_1。由于 G_1 可 k-连接，且 $G(Q_1) = G_1 \backslash e_1$，我们有 u_1 是 Q_1 中 v 的一个 k-模仿项，所以对于所有这样的 ϕ_0，$(v, \phi_0(v))$ 都强制 $(u_1, \phi_0(v))$。因此，对于任意这样的 ϕ_0，我们有 $\phi_0(u_0) = \phi_0(v)$，所以 x 在 Q_0^N 中对 a 是Γ- 受限的。同理，对于任意这样的 ϕ_0，我们有 v 在 Q_1^N 中对 $\phi_0(v)$ 是 Γ-受限的。由于不存在这样的 $c \in \mathbb{N}$，使得对于每个这样的 ϕ_0 都有 $\phi_0(v) = c$，因此 v 在 Q_1^N 中对多个颜色是 Γ-受限的，故 (ii) 成立。◁

我们还需要一个命题。

命题 8.15.3。如果存在一个 $x \in V(Q)$ 在 Q 中受到超过一种颜色的 Γ-限制，那么 $F(Q) = \emptyset$且 $G \in \boldsymbol{H}_k$。

子证明。假设 Q 是该命题的一个最小规模反例，因此 $x \in V(Q)$ 在 Q 中受到 a和 a'的 Γ-限制，其中 $a, a' \in \mathbb{N}$彼此不同，并且要么 $F(Q) \neq \emptyset$，要么 $G(Q) \notin \mathcal{H}_k$。注意，$G(Q_0^P) = G_0$。因此，若我们能证明：对于 Q_0^P 的某个k-极赋值 Γ_0，存在一个顶点在 Q_0^P 中受到超过一种颜色的 Γ_0-限制，那么，由于 Q_0^P 包含至少一条极化边，这将与 Q 是最小规模的相矛盾。以下我们将经常使用这一策略来导出矛盾。

首先，假设 e 已极化，并设 $R(e, u_0, u_1) = (c_0, c_1)$。通过使用$a$应用命题 8.15.1，存在 $c \in \mathbb{N}$，使得 x 在 Q_0^P中关于 a 是 $\Gamma^{(c_0,c)}$ 0-受限的，并且 v 在 Q_1^P中关于 c 是 $\Gamma^{(c_1,c)}$ 1-受限的。再次使用 a'应用命题 8.15.1，存在 $c' \in \mathbb{N}$，使得 x 在Q_0^P中关于 a' 是 $\Gamma^{(c_0,c')}$ 0-受限的，并且 v 在 Q_1^P中关于 c' 是 $\Gamma^{(c_1,c')}$ 1-受限的。由于 Q_1 是 k-不受限的，我们有 (v, c) 和 (v, c') 在 $(Q_1^P \backslash e_1, \Gamma)$ 中强制 (u_1, c_1)。若 $c \neq c'$，则 v 2-强制 (Q_1, Γ) 中的 u_1，由此可知 u_1不是 Q_1中 v 的 k-模仿者，因此 G_1 不可 k-连接，这与假设矛盾。因此 $c = c'$，所以 $\Gamma^{(c_0,c)} = \Gamma_0^{(c_0,c')}$。现在，对于 $Q_0^P \backslash e_0$的任意Γ-着色 ϕ，若 $\phi(x) \in \{a, a'\}$，则 $\phi(v) = c$，且 $\phi(u_0) = c_0$。因此，x 在 Q_0^P中关于多于一种颜色是 $\Gamma^{(c_0,c)}$ 0-受限的。由于 Q_0^P 至少包含一条极化边，这与 Q 是最小规模的相矛盾。由此矛盾可推得，e未极化。

现在，e 不是极化的。假设在 Q_0^N 中，x 在 a 上不是 Γ-受限的。那么，根据 8.15.2，存在c、$d \in \mathbb{N}$，使得在 Q_0^P 中，x 在 a 上是 $\Gamma_0^{(d,c)}$-受限的，且 v 在 c 上是 $\Gamma_1^{(d,c)}$-受限的。因此，对于 Q_0 的每个 Γ-着色 ϕ，若 x 的 $\phi = a$，则有 v 的 $\phi = c$，且 u_0 的 $\phi = d$。若在 Q_0^P 中，x 在 a' 上也为 $\Gamma_0^{(d,c)}$ -受限，则由于 Q_0^P 包含一条极化边，这与 Q 是最小规模反例相矛盾。因此，在 Q_0^P 中，x 在 a' 上不是 $\Gamma_0^{(d,c)}$ - 受限的。因此，存在 Q_0 的一个 Γ-着色 ϕ'，使得 x 的 $\phi' = a'$，但 ϕ 的 $v \neq c$ 或 ϕ 的 $u_0 \neq d$。假设 v 的 $\phi' = c$。那么，由于 ϕ' 不能扩展到 Q，且 e 不是极化的，(v, c) 在 (Q_1, Γ) 中强制 $(u_1, \phi'(u_0))$。然而，由于在 Q_1^P 中，v 在 c 上是 $\Gamma_1^{(d,c)}$-受限的，因此 (v, c) 在 (Q_1, Γ) 中强制 (u_1, d)。所以 u_0 的 $\phi' = d$，矛盾。因此 v 的 $\phi' \neq c$。我们有 (v, c) 在 (Q_1, Γ) 中强制 (u_1, d)；并且，由于 x 在 a' 上是 Γ-受限的，$(v, \phi'(v))$ 在 (Q_1, Γ) 中强制 $(u_1, \phi'(u_0))$，且 v 的 $\phi' \neq c$。所以 v 2 在 Q_1 中强制 u_1。由于 G_1 是 k-可连接的，我们可推出 $c = d$。但这样一来，在 Q_0^P 中，x 在 a 上是 $\Gamma_0^{(c,c)}$ -受限的，因此在 Q_0^N 中也在 a 上是 Γ-受限的，矛盾。

我们可推出，在 Q_0^N 中， x 在 a 和 a' 上均为 Γ-受限的。由于 Q 是最小规模反例，$G_0 \in \mathbf{H}_k$，且 F 的 $Q_0 = \emptyset$。若存在 c、 $d \in \mathbb{N}$，使得对于 Q_0 的每个 Γ- 着色 ϕ，若 x 的 $\phi \in \{a, a'\}$，则有 v 的 $\phi = c$，且 u_0 的 $\phi = d$，那么在 Q_0^P 中， x 在 a 和 a' 上均为 $\Gamma_0^{(d,c)}$ -受限的。由于 Q_0^P 包含一条极化边，这与 Q 是最小规模反例相矛盾。因此，存在Γ-着色 ϕ 和 ϕ'，它们都是 Q_0 的着色，且满足 $\{\phi(x)\ \phi'(x)\} \subseteq \{a, a'\}$，并且 $\phi(v) \neq \phi'(v)$ 或 $\phi(u_0) \neq \phi'(u_0)$。由于 ϕ 和 ϕ' 都不是 Q_0^N 的 Γ-着色，因此 v 的 $\phi = \phi(u_0)$，且 v 的 $\phi' = \phi'(u_0)$，所以 ϕ 的 $v \neq \phi'(v)$。由于 ϕ 和 ϕ' 都不能扩展到 Q，因此 $(v, \phi(v))$ 强制 $(u_1, \phi(v))$，且 $(v, \phi'(v))$ 在 (Q_1, Γ) 中强制 $(u_1, \phi'(v))$。因此，在 Q_1^N 中， v 在不同的颜色 $\phi(v)$ 和 $\phi'(v)$ 上是 Γ-受限的；又由于 Q 是最小规模反例，我们有 $G_1 \in \mathbf{H}_k$，且 F 的 $Q_1 = \emptyset$。现在 Q 的 $F = \emptyset$；并且，由于 G 是 G_0 和 G_1 的 Haj´os 联结，且 G_0、 $G_1 \in \mathbf{H}_k$，我们有 $G \in \mathbf{H}_k$，矛盾。至此，命题得证。◁

现在我们正式证明该定理。先证明一个方向，假设 $G(Q) \in \mathcal{H}_k$, $F(Q) = \emptyset$，且Γ 是一致的。那么，根据定理 1.2， Q 不可 Γ着色。再证明另一个方向，假设 Q 不可 Γ着色。那么，对于所有 $x \in V(Q)$，对每个 $c \in L(x)$， x 在 c 上是 Γ-受限的。根据命题 8.15.3，我们有 $F(Q) = \emptyset$，且 $G(Q) \in \mathcal{H}_k$。现在只需证明：如果 Q 不可 Γ着色，那么 Γ 是一致的。

为导出矛盾，假设 Q不可 Γ着色，但 Γ 不一致，其中 Q 的规模最小。由于 Q_0 是 k-非受限的，对每个 $c \in L(v)$，都存在一个 Γ着色 ϕ_c，使得 Q_0 的 $\phi_c(v) = c$，但 ϕ_c 不能扩展到 Q。由于 G_1 是 k-可连接的，定理 8.4(ii)成立；也就是说，对于$Q_0' \in \{Q_0^N, Q_0^P\}$，存在一个针对 Q_0' 的 k-极赋值 Γ_0，使得 $\Gamma_0|Q_0 = \Gamma|Q_0$，且 Q_0' 的每个 Γ_0着色都能扩展为 Q的 Γ着色。由于 Q 不可 Γ着色， Q_0' 不可 Γ_0着色。由于 Q_0^P包含一条极化边，命题 8.15.3 蕴含Q_0^P的任一顶点至多在一种颜色上是 Γ_0-受限的，因此Q_0^P可 Γ_0着色。于是$Q_0' = Q_0^N$，且Q_0^N不可 Γ着色。由于 Q 是一个最小规模反例， $\Gamma|V(Q_0)$是一致的。此外，对每个 $c \in L(v)$， Q_0 的 Γ着色 ϕ_c 不能扩展到 Q_0^N，所以 $\phi_c(u_0) = \phi_c(v)$。因此，对于每个 $c \in L(v)$，在(Q_1, Γ)中，(v, c) 强制 (u_1, c)。由此可知，Q_1^N不可 Γ着色；因此，由于 Q 是一个最小规模反例， $\Gamma|V(G_1)$也一致。由于 $\Gamma|V(G_0)$和 $\Gamma|V(G_1)$都一致，且 $v \in V(G_0) \cap V(G_1)$，我们得到 Γ 是一致的，矛盾。由此可得，如果 Q 不可 Γ着色，那么 Γ 是一致的。□

9. 定理 1.3 和定理 1.5 的证明

现在我们可以证明最大局部边连通度为 k 的图的 Brooks 型定理（定理 1.3）了。我们先证明定理 1.5。

引理 9.1. 设 Q 是一个2连通极图，且至多有一个顶点的度大于 k，其中$k \geq 3$。若 Q 是 k-受限的，则 $G(Q) \in T_k$。

证明。假设 Q 是 k-受限的。设 r 是 Q 的一个顶点，并令 $\Gamma = (L, R)$ 是 Q 的一个 k-极赋值，使得对于某个 $c \in L(r)$， r 在 Q 中的 c 上是 Γ-受限的。首先假设 Q 没有度大于 k 的顶点。于是，对于所有 $u \in V(Q)$，$k = |L(u)| \geq d_Q(u)$；因此 Γ 是一个度极化赋值。令 $(Q - r, \Gamma_c)$ 为从 (Q, Γ) 中删除颜色 (r, c) 后所得的结果。则 Γ_c 也是一个度极化赋值，因此根据定理 4.1， $Q - r$ 是一棵极化 Gallai 树，且 Γ_c 是坏的。由于 Γ_c 是坏的，对于所有 $u \in V(Q - r)$， $|L_c(u)| = d_{Q-r}(u)$。然而， $|L_c(u)| \geq k - e_Q(u, r) \geq d_Q(u) - e_Q(u, r) = d_{Q-r}(u)$，所以等式处处成立。因此，对于所有 $u \in V(Q - r)$， $d_Q(u) = k$。于是，根据定理 8.9， $G(Q)$ 属于 $\mathbf{T}_k$。

现在我们可以假设 Q包含一个顶点 h，使得 $d_Q(h) > k$。于是，由定理 6.3， $G(Q - h)$ 是一棵 Gallai 树，并且对所有 $u \in V(Q - h)$， $d_Q(u) = k$。由定理 8.9， $G(Q) \in \mathcal{T}_k$，符合要求。□

现在我们证明本节的第一个主要结果，它蕴含定理 1.5。

定理 9.2。设 Q 是一个最大局部边连通度至多为 k（$k \geq 3$）的 2-连通极图。若 Q 是 k-受限的，则 $G(Q) \in T_k$。

证明。反设 Q是 k-受限的，但 $G(Q) \notin \mathcal{T}_k$。进一步假设，在所有此类图中， Q 的顶点数最少。根据定理 9.1， Q 包含两个不同的顶点 h_x 和 h_y，其度大于 k。令 S 为一个大小最小的边割，使得

S 将 X 与 Y 分离，其中 (X,Y) 是 $V(G)$ 的一个划分，且 $h_x \in X$ 和 $h_y \in Y$。对于 $e \in S$，我们用 x_e（和 y_e）表示在 X（和 Y）中与 e 关联的顶点。由于 Q 的最大局部边连通度为 k，由 Menger 定理可知 $|S| \leq k$。还需注意，这意味着 $|Y| > 1$，因为 $h_y \in Y$ 和 $d(h_y) > k$。

断言 9.2.1. $Q[Y]$ 是 k-不受限的。

子证明。反设 $Q[Y]$ 是 k-受限的。则存在 $r \in Y$ 和一个 k-极赋值 $\Gamma = (L,R)$，其定义在 $Q[Y]$ 上，使得对于某个 $c \in L(r)$，r 在 c 上是 Γ-受限的。由定理 3.8，存在 $Q[Y]$ 的一个 2-连通 k-受限极子图 Q_Y。注意，由于 $G(Q_Y)$ 是 $G(Q)$ 的子图，Q_Y 的最大局部边连通度至多为 k。因此，根据 Q 的极小性，我们有 $G(Q_Y) \in \mathcal{T}_k$，但这与定理 8.13 矛盾。由此可得，$Q[Y]$ 是 k-不受限的，证毕。◁

由于 Q 是 k-受限的，存在 $r \in V(Q)$ 和一个 k-极赋值 $\Gamma = (L,R)$，其定义在 Q 上，使得对于某个 $c \in L(r)$，r 在 c 上是 Γ-受限的。不失一般性，假设 $r \in Y$。

令 Q'_X 为由 $Q[X]$ 添加顶点 w 得到的极图；对于每条边 $e \in S$，我们在 Q'_X 中于 x_e 和 w 之间添加一条极化边 e。这样，S 是 Q 中的一个边割，同时也是 Q'_X 中与 w 关联的边的集合。注意，令 $G = G(Q)$，则有 $G(Q'_X) = G'_X$，如定理 8.11 之前所述。

断言 9.2.2. 顶点 w 在 Q'_X 中是 k-受限的。此外，对于任意 $Q[Y]$ 的 Γ-着色 ϕ，若满足 $\phi(r) = c$，则存在 Q'_X 的一个 k-极赋值 Γ'_X，使得从 (w,d) 中删除颜色，所得结果等于从 (Q'_X,Γ'_X) 中删除颜色的结果 (Y,ϕ)，即从 (Q,Γ) 中删除颜色的结果。

子证明。设 $Q[Y]$ 的一个 Γ-着色为 ϕ，且满足 $\phi(r) = c$；根据断言 9.2.1，这样的着色存在。令 $(Q[X],\Gamma_X)$ 为从 (Q,Γ) 中删除 (Y,ϕ) 颜色所得的结果。由于 r 在 Q 的 c 上是 Γ-受限的，因此 Q_X 不可 Γ_X-着色。由此，我们将构造 Q'_X 的一个 k-极赋值 Γ'_X，使得 w 在 Q'_X 中是 Γ'_X-受限的。对于每个 $e \in S$，若 e 在 Q 中未极化，则令 $c_e = \phi(y_e)$；若 e 在 Q 中极化，且对于某个 c_x，有 $R(e,x_e,y_e) = (c_x,\phi(y_e))$，则令 $c_e = c_x$；否则，令 c_e 为 $L(x_e)$ 中任意一个颜色。现在令 $\Gamma'_X = (L'_X,R'_X)$ 为 Q'_X 的一个 k-极赋值，使得 $\Gamma'_X|X = \Gamma|X$，且 $L'_X(w)$ 由 k 种颜色组成，其中一种是 d；对于每条极化边 $e = x_e w$，令 $R'_X(e,x_e,w) = (c_e,d)$。注意，根据构造，从 (Q'_X,Γ'_X) 中删除 (w,d) 颜色，所得结果为 $(Q[X],\Gamma_X)$。由于 Q_X 不可 Γ_X-着色，因此 w 在 Q'_X 的 d 上是 Γ'_X-受限的，证毕。◁

断言 9.2.3。 极图 Q'_X 是2-连通的，且其最大局部边连通度至多为 k .

子证明。由于 S 是 Q 中的最小边割，图 $Q[X]$ 是连通的，因此 Q'_X 是连通的。由于 $|S| \leq k$ 和 $d_{Q'_X}(h_x) > k$，我们有 $|V(Q'_X)| \geq 3$。要证明 Q'_X 是 2-连通的，只需证明 Q'_X 不含割点。显然，w 不是割点，因为 $Q'_X - w = Q[X]$。此外，如果 $u \in V(Q'_X) \setminus \{w\}$ 是割点，设为 $\{u\}$，那么它将 w 与 $x \in V(Q'_X) \setminus \{u, w\}$ 中的某个顶点分离。在这种情况下可知，$\{u\}$ 将 x 与 Q 中的 h_y 分离，这与 Q 是 2-连通的矛盾。因此，Q'_X 是 2-连通的。

为证明 Q'_X 的最大局部边连通度至多为 k，首先注意到，对于任意 $v \in V(Q'_X) \setminus \{w\}$，$Q'_X$ 中至多有 k 条边不相交的 (w, v)-路径，因为 $d(w) = |S| \leq k$。接着注意到，Q 中有 $|S|$ 条边不相交的 (X_S, h_y)-路径，且这些路径与 Q'_X 中关联于 w 的 $|S|$ 条边构成双射。对于任意 $u, v \in X$，Q'_X 中的一条 (u, v)-路径，在 Q 中都有一条对应路径；该路径可通过将 Q'_X 中任意形如 $u_e w$ 的边替换为对应的 (x_e, h_y)-路径（位于 Q 中）得到。由于 Q 的最大局部边连通度至多为 k，因此 Q'_X 中至多有 k 条 (u, v)-路径，所以 Q'_X 的最大局部边连通度确实至多为 k。◁

现在 $|V(Q'_X)| < |V(Q)|$，由于 $|Y| \geq 2$，因此根据断言 9.2.2 和 9.2.3 以及 Q 的极小性，我们有 $G(Q'_X) \in \mathcal{T}_k$。由定理 8.10(i)，对于所有 $u \in V(Q'_X)$，我们都有 $d_{Q'_X}(u) \geq k$。特别地，$|S| = d_{Q'_X}(w) \geq k$，但由于 $|S| \leq k$，我们有 $|S| = d_{Q'_X}(w) = k$。

断言 9.2.4。 $G(Q'_X) \in \mathcal{T}_k^-$。

子证明。为导出矛盾，假设 $G(Q'_X) \notin \mathsf{T}_k^-$。那么 $G(Q'_X)$ 是两个图 $G_0, G_1 \in \mathsf{T}_k$ 的 Haj´os 联接。设 $G(Q'_X) = (G_0, z, u_0) \triangle (G_1, z, u_1)$，使得对于 $i \in \{0,1\}$，有 $z, u_i \in V(G_i)$，并设 $e = u_0u_1 \in E(Q'_X)$。若 $z = w$，则由于 $d_{Q'_X}(w) = k$，这与定理 8.10(ii) 矛盾。因此 $z \neq w$。不失一般性，$w \in V(G_0) \setminus \{z\}$。

令 $Z_0 = V(Q) \setminus V(G_1)$ 且 $Z_1 = V(G_1) \setminus \{z\}$，并注意到 $(Z_0, \{z\}\ Z_1)$ 是 $V(Q)$ 的一个划分，其中 $Y \subseteq Z_0$ 且 $u_1 \in Z_1$。令 $v_0 \in Z_0$ 且 $v_1 \in Z_1$。我们声称，Q 中的每条 (v_0, v_1)-路径都包含 z 或 e。令 P 为 Q 中的一条 (v_1, v_0)-路径。首先假设 P 不包含来自 S 的边。那么，由于 $v_1 \in V(G_1) \subseteq X$，我们有 P 也是 Q'_X 中的一条路径。由于 $v_0 \notin V(G_1)$ 且 $v_1 \in V(G_1) \setminus \{z\}$，这意味着 P 包含 e或 z，正如所需。现在假设 P 至少包含 S 中的一条边。令 y 为 P 中第一个不属于 X 的顶点，并令 P' 为 P 的 (v_1, y)-子路径。于是，除末端顶点 y 外，P' 的每个顶点都属于 X，因此通过将 y 替换为 w，可见 P' 对应于 Q'_X 中的一条 (v_1, w)-路径。现在 $w \in V(G_0) \setminus \{z\}$ 且 $v_1 \in V(G_1) \setminus \{z\}$，所以 P'，进而 P，包含 e或 z，正如所需。

现在，根据前一段以及由于 Q 是 2-连通的，可知 $G(Q)$ 可以由两个图作 Haj´os 联接得到。我们有 $e = u_0u_1$，且 $u_0 \in Z_0$。令 G'_0 为从 $G(Q[Z_0 \cup \{z\}])$ 经添加一条连接 u_0 与 z 的边得到的图。于是，$G(Q)$ 是 Haj´os 联接 $(G'_0, z, u_0) \triangle (G_1, z, u_1)$。由于 Q 是 2-连通的，且其最大局部边连通度至多为 k，由定理 8.1 和 8.3 可知，G_1 和 G'_0 都是 2-连通的，且最大局部边连通度至多为 k。由于 $G(Q)$ 不是 k-极无约束的，G'_0 和 G_1 中至少有一个不是 k-极无约束的。由于 $|V(G'_0)|$，$|V(G_1)| < |V(Q)|$，存在一个 2-连通极图 Q'，其最大局部边连通度至多为 k，使得 $|V(Q')| < |V(Q)|$；因此，由 Q 的极小性可知，$G(Q') \in \mathsf{T}_k$。由定理 8.14，$G(Q')$ 是 k-可联接的。现在，由定理 8.8 可推出，G'_0 和 G_1 都不是 k- 极无约束的。于是，由 Q 的极小性可知，G'_0 和 G_1 都属于 T_k。因此，$G(Q) \in \mathsf{T}_k$，矛盾。由此可得，$G(Q'_X) \in \mathsf{T}_k^-$，证毕。◁

注意，根据 Q'_X 的构造，对所有 $u \in X$，都有 $d_{Q'_X}(u) = d_Q(u)$。特别地，$d_{Q'_X}(h_x) = d_Q(h_x) > k$。现在，$Q'_X$ 是一个极图，满足 $G(Q'_X) \in \mathsf{T}_k^-$；根据断言 9.2.4，且 Q'_X 含有一个度大于 k 的顶点 h_x，以及一个 k-受限的顶点 w，其中与 w 关联的每条 k 边都经过极化。根据定理 7.8(i)，w 是中心的。若 Q'_X 不是极化奇轮，那么根据定理 7.1(ii)，w 与一对平行边关联，且这两条边都经过极化，这意味着 w 不是中心的。因此，Q'_X 是一个极化奇轮，且 $k = 3$。由于 $d_{Q'_X}(h_x) > 3$，我们有 $|V(Q'_X)| > 4$，并且 h_x 是 Q'_X 的枢纽。因此，$|S| = 3$ 和 $|X| \geq 4$。令 X_S（或 Y_S）为 X（或分别为 Y）中与 Q 内 S 的边关联的顶点集合。那么 $|X_S| = 3$；又因为 h_x 在 Q'_X 中与 w 相邻，所以有 $h_x \in X_S$。

现在我们已经知道了 Q'_X 的结构，接下来考虑 $Q[Y]$ 中无法扩展到 Q 的着色。令 Φ 为满足 $\phi(r) = c$ 的 $Q[Y]$ 的 Γ-着色 ϕ 的集合。由断言 9.2.1，Φ 非空。由于 r 在 Q 中的 c 上是 Γ-受限的，因此对每个 $\phi \in \Phi$，ϕ 都无法扩展到 Q。

断言 9.2.5。令 $\phi \in \Phi$ 和 $e \in S$。

- 如果 e 在 Q 中极化，则对于某个 $c \in L(x_e)$，有 $R(e, x_e, y_e) = (c, \phi(y_e))$。
- 如果 e 在 Q 中未极化，则 $\phi(y_e) \in L(x_e)$。

子证明。令 $(Q[X], \Gamma_X)$ 为从 (Q, Γ) 进行的 (Y, ϕ)-颜色删除，其中 $\Gamma_X = (L_X, R_X)$。由于 r 在 Q 中的 c 上是 Γ-受限的，因此 $Q[X]$ 不可 Γ_X-着色。由断言 9.2.2，存在一个适用于 Q'_X 的 3-极化赋值 $\Gamma'_X = (L_X, R_X)$，使得从 (Q'_X, Γ'_X) 进行的 (w, d)-颜色删除为 $(Q[X], \Gamma_X)$。于是，由定理 7.5，对每个 $e \in S$，$|L_X(x_e)| = 2$。由于对每个 $e \in S$，$|L(x_e)| = 3$，断言得证。◁

断言9.2.6。要么

(i) 对于任意 ϕ_0、$\phi_1 \in \Phi$，有 $\phi_0|_{Y_S} = \phi_1|_{Y_S}$；要么(ii) 对于任意 $\phi \in \Phi$，

存在某个 $d_\phi \in \mathbb{N}$，使得 $\phi(y) = d_\phi$ 对所有 $y \in Y_S$ 都成立。

子证明。假设存在 $\phi_0, \phi_1 \in \Phi$ 使得 $\phi_0|_{Y_S} \neq \phi_1|_{Y_S}$。令 $(Q[X], \Gamma_i)$ 为 (Q, Γ) 的 (Y, ϕ_i)-颜色删除，其中 $i \in \{0,1\}$。那么 $Q[X]$ 既不是 Γ_0-可着色的，也不是 Γ_1-可着色的。由断言 9.2.2，对每个 $i \in \{0,1\}$，存在一个 3-极化赋值 Γ'_i，使得 (w, d)-颜色

从 (Q'_X, Γ'_i) 进行颜色删除，结果为 $(Q[X], \Gamma_i)$。令 $\Gamma_i = (L_i, R_i)$，其中 $i \in \{0,1\}$。对于 $x \in X_S$，由于 Γ 是一个 3-极化赋值，我们有 $|L(x)| = 3$。对于 $e \in S$，由断言 9.2.5，我们有 $|L_0(x_e)| = |L_1(x_e)| = 2$。因此，对于 $e \in S$，当且仅当 $\phi_0(y_e) = \phi_1(y_e)$ 时，$L_0(x_e) = L_1(x_e)$。由于 $\phi_0|_{Y_S} \neq \phi_1|_{Y_S}$，存在某个 $e' \in S$，使得 $\phi_0(y_{e'}) \neq \phi_1(y_{e'})$ 且 $L_0(x_{e'}) \neq L_1(x_{e'})$。现在，$e'$ 在 Q中未被极化，否则，对于某个 $i \in \{0,1\}$，有 $R(e', x_{e'}, y_{e'}) = (c_x, c_y)$，其中 $c_y \neq \phi_i(y_{e'})$，这与断言 9.2.5 矛盾。由定理 7.5，$L_i|_{X_S}$ 对于 $i \in \{0,1\}$ 是一致的。特别地，对于每个 $e \in S$，我们有 $\phi_0(y_e) \neq \phi_1(y_e)$ 且 $L_0(x_e) \neq L_1(x_e)$。现在，与之前类似，每个 $e \in S$ 在 Q中都未被极化。因此可得，对于所有 $y \in Y_S$ 及 $i \in \{0,1\}$，$\phi_i(y) = \phi_i(y_{e'})$。这表明，若存在 $\phi_0, \phi_1 \in \Phi$ 使得 $\phi_0|_{Y_S} \neq \phi_1|_{Y_S}$，则存在 $d_0, d_1 \in \mathbb{N}$ 使得对于所有 $y \in Y_S$ 及 $i \in \{0,1\}$，$\phi_i(y) = d_i$。

现在假设 (i) 不成立。那么存在 $\phi_0, \phi_1 \in \Phi$，使得 $\phi_0|_{Y_S} \neq \phi_1|_{Y_S}$；根据上一段，存在 $d_0, d_1 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $y \in Y_S$，$\phi_i(y) = d_i$。若 $|\Phi| = 2$，则 (ii) 成立。否则，对于任意 $\phi_2 \in \Phi \setminus \{\phi_0, \phi_1\}$，要么 $\phi_2|_{Y_S} = \phi_0|_{Y_S}$，此时对所有 $y \in Y_S$，$\phi_2(y) = d_0$；要么 $\phi_2|_{Y_S} \neq \phi_0|_{Y_S}$，此时根据上一段，存在 $d_2 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $y \in Y_S$，$\phi_i(y) = d_2$。$\lhd$

令 Q_Y 为由 $Q[Y]$ 按如下方式得到的极图：对于每个 $e \in S$，添加一个新顶点u_e，并在 u_e 与 y_e 之间添加一条新的非极化边，然后添加一些边，使得 $\{u_e : e \in S\}$ 成为一个团，其中所有边均未极化。由于 Q 是 2-连通的，且最大局部边连通度至多为 k，容易看出 Q_Y 是 2-连通的，且最大局部边连通度至多为 k。注意，令 $G = G(Q)$，则 $G(Q_Y) = G_Y$，如定理 8.11 之前所述。令$U = \{u_e : e \in S\}$。回忆一下，$|S| = k$，因此 $|U| = k$（其中 $k = 3$）。

首先假设断言 9.2.6(i)成立。设 $\phi \in \Phi$，并令 $C \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $|C| = 2$，且 C 与$\{\phi(y_e) : e \in S\}$不相交。令 $\Gamma_Y = (L_Y, R_Y)$为 Q_Y的3-极化赋值，使得 $\Gamma_Y|_Y = \Gamma|_Y$且$L_Y(u_e) = C \cup \{\phi(y_e)\}$，其中 $e \in S$。现在令$(Q_Y[U], \Gamma_U)$为从(Q_Y, Γ_Y)中删除(Y, ϕ)颜色所得的结果，并令 $\Gamma_U = (L_U, R_U)$。于是 $G(Q_Y[U]) \cong K_3$，且 $Q_Y[U]$没有极化边，其中 $L_U(u) = C$对所有 $u \in U$均成立（由断言 9.2.5），因此 $Q_Y[U]$不可 Γ_U-着色。因此，Φ中的每个着色都无法扩展到 Q_Y，所以 r 在 Q_Y中的 c 上是 Γ_Y-受限的。回想 $|X| > |S|$，于是由 Q的极小性可知，$G(Q_Y) \in \mathsf{T}_k$。

现在我们可以假设断言 9.2.6(ii) 成立，因此对于任意 $\phi \in \Phi$，都存在某个 $d_\phi \in \mathbb{N}$，使得对所有 $y \in Y_S$，$\phi(y) = d_\phi$。令 $D = \{d_\phi : \phi \in \Phi\}$，并注意到 $|D| \leq 3$，因为对于任意$y \in Y_S$，$|L(y)| = 3$。令 C 为一个包含 D 的 3 色集合。令 $\Gamma_Y = (L_Y, R_Y)$ 为 Q_Y 的 3- 极化赋值，使得 $\Gamma_Y|_Y = \Gamma|_Y$，且对每个 $e \in S$，$L_Y(u_e) = C$。现在，取某个 $\phi \in \Phi$，令 $(Q_Y[U], \Gamma_U)$ 为从 (Q_Y, Γ_Y) 中进行的 (Y, ϕ)-颜色删除，其中 $\Gamma_U = (L_U, R_U)$。于是，根据断言 9.2.5，$G(Q_Y[U]) \cong K_3$，$Q_Y[U]$ 没有极化边，并且对于所有 $u \in U$，$L_U(u) = C \setminus \{d_\phi\}$。也就是说，$\Gamma_U$ 是一致的 2-极化赋值，因此 $Q_Y[U]$ 不可 Γ_U-着色。由于这对 Φ 中的任意 ϕ 都成立，我们再次看到，r 在 Q_Y 中的 c 上是 Γ_Y- 受限的；并且再次利用 Q 的极小性，可知 $G(Q_Y)$ 属于 T_k。

因此，$G(Q'_X)$ 和 $G(Q_Y)$ 都属于 $\mathcal{T}_k$，所以根据定理 8.11，$G(Q)$ 也属于 $\mathcal{T}_k$，矛盾。至此，证明完成。□

基于定理 9.2，可以得到一种多项式时间算法，用于确定最大局部边连通度为 k 的 2-连通图中顶点的 k-限制指标，见 [3]。

最后，我们证明以下结论，它显然蕴含定理 1.3。

定理 9.3。设 G 是一个最大局部边连通度为 k 的 2-连通图，其中 $k \geq 3$，且 L 是 k 对 G 的列表赋值。那么，当且仅当 $G \in \mathcal{H}_k$ 且 L 一致时，G 不可 L 着色。

证明。假设 G 不可 L 着色。那么 G 不可 k 可选择着色，因此它是 k-受限的，故根据定理 9.2，$G \in \mathcal{T}_k$。于是，根据定理 8.15，$G \in \mathcal{H}_k$，且 L 一致，正如所需。这就证明了一个方向。另一个方向由定理 1.2 得出。□

10. 定理 1.4 的证明

在本节中，我们证明定理 1.4。令 k 为一个固定的正整数。我们定义以下对 k-可选择性的推广问题。

由 k 界定的 f-可选择性 实例：一个图 G 和一个函数 $f\colon V(G) \to \mathbb{N}$，其中对所有 $v \in V(G)$，$0 \leq f(v) \leq k$。问题：是否可进行 G f-可选择着色?

Erd˝os、Rubin 和 Taylor [10] 证明了，当限制在二分图上时，f-可选择性有界于 3 是 Π_2-完全的。他们通过描述从问题 $\forall\exists$3-Sat 到问题 f-可选择性有界于 3 的归约来实现这一点。仔细观察即可发现，通过该归约得到的图不仅是二分图，而且其最大局部边连通度至多为 3。因此，我们有如下结论：

命题 10.1。对于每个整数 $k \geq 3$，限制在最大局部边连通度至多为3的图上，f-可选择性有界于 k 是 Π_2-完全的。

我们将通过从 f-可选择性有界于 k 归约到 k-可选择性来证明定理 1.4。该归约利用了增补（见定理 3.11）。我们首先描述一个图 T_k，它具有一个 k-受限顶点，我们将在补加操作中使用该图。

对于每个整数 $k \geq 3$，我们定义图 T_k 如下。（注意，我们已经见过 T_3，如图5所示；其构造如图 15 所示。）从顶点集 $\{u, v\}$ 上的 I_k 的一个副本（由两个顶点之间有 k 条边的图组成）开始，我们依次与 K_{k+1} 的一个副本进行 $k-1$ 次 Haj´os 联结，联结顶点为 (u, v)，以及 K_{k+1} 的副本中任意一对顶点。注意，$T_k \in \mathcal{T}_k$。不难证明 $m_{T_k,k}(u) = 1$。

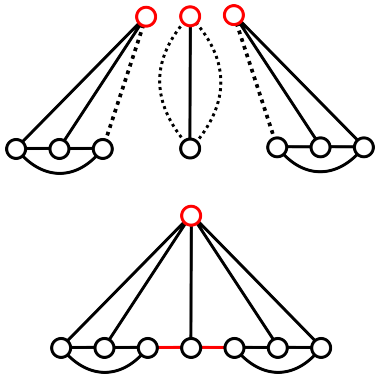


图 15。使用两次 Haj´os 联结，从 $\mathcal{T}_3^-$ 中的三个图构造 T_3。

现在我们可以证明定理 1.4，下面重新陈述该定理。

定理 1.4。对于每个整数 $k \geq 3$，当限制在最大局部边连通度为 k 的图上时，k-可选择性问题是 Π_2-完全的。

证明。我们将问题的一个实例 (G, f)（即对 $G \in \mathcal{G}$，受 k 限制的 f-可选择性问题）归约为问题 (G_+) 的一个实例（即 k-可选择性问题），其中 G_+ 是 (G, f, T_k, u, k)-补加操作。注意，我们可以在多项式时间内计算 G_+。由于 G和 T_k 的最大局部边连通度至多为k，图 G_+ 的最大局部边连通度也至多为 k。事实上，根据定理 8.12，T_k 是k-边连通的，并且 G 中至少有一个顶点 v 满足 $f(v) < k$，因此图 G_+ 的最大局部边连通度为 k。现在，根据定理 3.12，G 是 f-可选择着色的，当且仅当 G_+ 是 k-可选择着色的，正如所需。结合定理 10.1，即可得出该结果。□

参考文献

[1] P. Aboulker、G. Aubian 和 P. Charbit。有向图着色与弧连通性。arXiv:2304.04690，2023年。[2] P. Aboulker、N. Brettell、F. Havet、D. Marx 和 N. Trotignon。对连通度施加约束的图着色。《图论杂志》，85(4):814–838，2017年。[3] S. Bastida。多项式层次第二层的两个问题。博士论文，惠灵顿维多利亚大学，2025年。

[4] L. W. Beineke、O. R. Oellermann 和 R. E. Pippert。图的平均连通度。离散数学，252(1):31–45，2002年。[5] A. Y. Bernshteyn、A. Kostochka 和 S. Pron。关于图与多重图的DP着色。西伯利亚数学杂志，58(1):28–36，2017年。[6] B. Bollob´as。《极值图论》，第11卷。Academic Press，伦敦，1978年。[7] J. A. Bondy 和 U. S. R. Murty。《图论》，数学研究生教材第244卷。Springer，纽约，2008年。[8] R. L. Brooks。关于网络节点的着色。剑桥哲学学会数学学报，37(2):194–197，1941年。[9] Z. Dvo˘r´ak 和 L. Postle。对应着色及其在无长度为4至8的圈的平面图列表着色中的应用。组合理论杂志B辑，129:38–54，2018年。[10] P. Erd˝os、A. L. Rubin 和 H. Taylor。图的可选择性。西海岸组合学、图论与计算会议论文集，阿卡塔，Congressus Numerantium，26:125–157，1979年。[11] F. G¨oring 和 T. Hofmann。均匀3-连通图的性质。离散数学与理论计算机科学，25(3)，2024年。[12] F. G¨oring、T. Hofmann 和 M. Streicher。均匀连通图。《图论杂志》，( ): – 。[13] S.-J. Kim 和 K. Ozeki。关于DP着色的Brooks型定理的一则注记。《图论杂志》，91 161，2019 2 148( ): – 。[14] J. L. Leonard。关于Bollob´as和Erd˝os的一个猜想。匈牙利数学期刊，3(3-4):281–284，1973年。[15] L. Lov´asz。《组合问题与习题》，第361卷。美国数学学会，1979年。[16] W. Mader。有限图中的度与局部连通度。数学年刊，205(1):9–11，1973年。[17] T. Schweser、M. Stiebitz 和 B. Toft。低连通度超图的着色。组合学杂志，13 21，2022 1 1( ): – 。[18] B. A. Sørensen 和 C. Thomassen。图中的 k-轨。组合理论杂志B辑，17(2):143–159，1974年。[19] M. Stiebitz 和 B. Toft。关于最大局部边连通度的Brooks型定理。电子组合学杂志，25(1):P1.50，2018年。[20] M. Stiebitz、Z. Tuza 和 M. Voigt。关于列表临界图。离散数学，309(15):4931–4941，2009年。[21] V. G. Vizing。用指定颜色给图的顶点着色。离散分析、编码理论与电路方法，29:3–10，1976年。（俄文）。[22] M. Voigt。关于图的列表着色与可选择性。教授资格论文，伊尔梅瑙工业大学，1998年。[23] L. Xu。均匀3-连通图。《图论杂志》，105(3):403–412，2024年。

附录 A. 最大局部连通度为 k 的图的 k-可着色性之 NP 完全性

对于 $k = 3$, [2] 证明了，判定最大局部连通度至多为 3 的图是否为 3-可着色，是 NP 完全的。我们将其推广如下：

命题 A.1. 设 $k \geq 3$。判定最大局部连通度至多为 k 的图是否为 k-可着色，是 *NP* 完全问题。

我们通过推广 [2, 命题 4.2] 中使用的方法来证明这一点。我们从 k-可着色性的非限制版本归约：给定该问题的一个实例，我们将每个度至少为 $k+1$ 的顶点替换为一个构件，以确保所得图的最大局部连通度至多为 k。我们很快会描述这个构件；首先，需要一些定义。

对于整数 $n \geq 4$，令 K_n^- 为从 K_n 中删除一条边后得到的图。图 K_n^- 有 $n-2$ 个度为 $n-1$ 的顶点，以及两个度为 $n-2$ 的顶点；我们称 K_n^- 中这两个度为（$n-2$）的顶点为端点。若一棵树的所有顶点的度都为 1 或 3，则称它为三次树 。度为 1 的顶点称为叶；与叶关联的边称为悬挂 边，而与两个度为 3 的顶点关联的边称为内部 边。

对于 $\ell \geq 4$，令 T 为一棵有 ℓ 个叶的三次树。我们首先将 T 的每条内部边细分一次，得到树 $T\prime$。现在，对于 T' 的每条边 xy，我们删除 xy，取 K_{k+1}^- 的一个副本，并依次识别顶点 x 与 K_{k+1}^- 的一个端点，以及顶点 y 与 K_{k+1}^- 的另一个端点。所得图 $T\prime\prime$ 中度为（$k-1$）的顶点对应于 T 的一片叶；我们称这样的顶点为出口。我们还称 $T\prime\prime$ 为具有 ℓ 个出口的枢纽构件 。注意，对于任意整数 $\ell \geq k+1$，都存在恰有 ℓ 个出口的枢纽构件。当 $k = 4$ 时，一个具有五个出口的枢纽构件示例如图 16 所示。

定理 *A.1* 的证明。设 G 是 k-可着色性的一个实例。我们可以假设 G 是 2-连通的。对于每个满足 $d(v) \geq k+1$ 的 $v \in V(G)$，我们删除 v，并引入一个（不相交的）枢纽构件

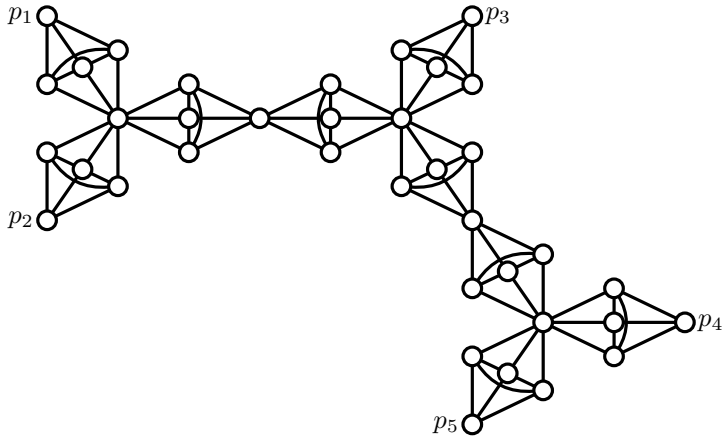


图 16. 一个用于 $k = 4$ 和 $\ell = 5$的枢纽构件。

带有出口 p_1, p_2, ..., $p_{d(v)}$, 然后，对于 G 中的每个 v 的邻点 n_i，对 $i \in \{1, 2, ..., d(v)\}$，添加 a 之间的单条边 之间。因此，每个出口在所得图 G'中的度为 k 。

显然， G' 是 2-连通的。现在我们证明， G' 的最大局部连通度至多为 k。回顾一下， $\kappa(u, v)$表示内部不相交的(u, v)-路径的最大数量。显然，如果 $d(x) \leq k$ 或 $d(y) \leq k$，那么 $\kappa(x, y) \leq k$。设 $d(x)$ $d(y) \geq k + 1$。那么 x 和 y 属于一个枢纽构件，且不是出口。因此， x 属于两个或三个 K^-_{k+1}，每个 K^-_{k+1}都有一个与 x不同的端点。令 P 为这些端点顶点的集合。当 $y \notin P$时，一条 xy-路径必须经过某个 $p \in P$，因此 $\kappa(x, y) \leq 3 \leq k$，如所需。否则， x 和 y 是一份 K^-_{k+1}的副本的端点，我们将其标记为 J_1，且 J_1 的两个端点都不是出口。在 $G'[V(J_1)]$中有 $k - 1$ 条内部顶点不交的 xy-路径。然而， J_1 的一个端点恰好属于 K^-_{k+1}的另一份副本，记作 J_2 ；而 G' 中的所有其他 xy-路径都必须经过 J_2中与 x 和 y不同的那个端点。因此， $\kappa(x, y) \leq k$，如所需。

假设 G 是 k-可着色的，并令 ϕ 为 G的一个 k-着色。我们证明 G' 是 k-可着色的。首先，将 $V(G)$ 中的每个顶点 v着成颜色 $\phi(v) \cap V(G')$。对于 G中 h的每个枢纽构件 H，将 H 中每条 K^-_{k+1} 的每个端点着成颜色 $\phi(h)$。显然，每个出口的颜色都与其在 $V(G)$ 中的邻点颜色不同，因为 ϕ 是 G的一个 k-着色。每个包含在 H 中的 K^-_{k+1} 的其余 $k - 1$ 个顶点都有两个邻点颜色相同，即 $\phi(h)$，因此可以使用剩余的 $k - 1$ 种颜色着色。因此， G' 是k-可着色的。

现在假设 G' 是 k-可着色的。在 G'的一个 k-着色中，每条 K^-_{k+1} 的两个端点必须颜色相同，因此一个枢纽构件的所有出口颜色都相同。令 G中 h 的枢纽构件为 H ，其中$h \in V(G)$。我们将 h 着成 G'的 k-着色中 H 所有出口的颜色。对于每个顶点 $v \in V(G) \cap V(G')$，我们将 v着成与 G'的 k-着色中相同的颜色，从而得到 G的一个k-着色。□

惠灵顿维多利亚大学数学与统计学院，新西兰电子邮箱地址： samuel.a.bastida@gmail.com电子邮箱地址： nick.brettell@vuw.ac.nz