arXiv:2603.17114v1 [math.CO] 17 Mar 2026

将树闭合为单环反例

保持单峰但失去对数凹性的独立多项式

Vadim E. Levit* Ohr Kadrawi**

阿里埃勒大学数学系，以色列阿里埃勒 40700

2026年3月17日

摘要

我们提出一种基于族的方法，构造独立多项式单峰但非对数凹的单圈图。本文围绕一项核心结论展开：对于显式的 KL 闭包族 $U_{k,\ r}$，若 $r \in \{0,1,2\}$且 k 满足可容许条件，则其独立多项式单峰但非对数凹。证明将闭包多项式分解为一个占主导地位的卷积项和一个实根修正项。在非对数凹性方面，我们通过符号推导证明，对每个可容许参数，倒数第二个对数凹不等式都会失效。在单峰性方面，我们结合精确系数公式、Ibragimov 强单峰性原理和剩余类增长论证，证明主卷积项$H_{k,\ r} = G_k F_{k+r}$ 是单峰的，且其众数受到控制。随后，Darroch 定位和相邻众数桥接引理将这一众数结论推广至完整的 KL 闭包多项式。由此得到一个显式的无限族，其成员均为独立多项式单峰但非对数凹的单圈图。在精确范围 $k \leq 400$ 内，我们进一步验证倒数第二处断点唯一，并确定 $H_{k,\ r}$、二项式修正项以及 $I(U_{k,\ r};\ x)$ 本身的精确众数公式。本文还将 KL 族置于一个更广泛的储备族研究框架中，该框架涉及 Galvin、Ramos–Sun 和 Bautista–Ramos 树；借此，我们为有限范围建立了若干重要的普适精确定理。

关键词。 独立多项式；单峰性；对数凹性；单圈图；单边闭包；图多项式；独立集。

MSC 2020. 主要分类号：05C31、05C69。次要分类号：05C05、05C38、05C76、05A20.

*levitv@ariel.ac.il

**orka@ariel.ac.il

1 引言

对于有限简单图 G，令

$$I(G;x)=\sum_{k=0}^{\alpha(G)} s_k(G)x^k$$

将其记为独立多项式，其中 $s_k(G)$ 统计大小为 k 的独立集，而 $\alpha(G)$ 是 G 的独立数。若非负序列 $(a_0,a_1,\ldots,a_d)$ 先增至峰值再下降，则称其为单峰序列；若

$$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1} \qquad (1\leq i\leq d-1).$$

每个正的对数凹序列都是单峰的。有关一般背景，参见 Brenti [5]；有关经典的独立序列问题，参见 Alavi、Malde、Schwenk 和 Erdős [1]。

过去两年，树的独立多项式领域呈现出崭新的清晰图景。Kadrawi 和 Levit 证明，26阶的树就已不满足对数凹性，并构造了首批无限储备族 $T_{3,m,n}$ 和 $T^*_{3,m,n}$ [11]。Galvin 构造了一个族，其中首次出现断点的位置可以任意接近系数序列的顶端 [7]。Bautista-Ramos 首次证明，断点可以有任意多个 [2]。最近，Bautista-Ramos、Guillén-Galván 和 Gómez-Salgado 将许多已知的树反例整合进一个通用的模式图框架，为这些族推导出线性递推，证明了具有两个和三个连续断点的无限族以及具有四个和五个连续断点的有限族，并指出圆 $|x+1/3|=1/3$ 是基于基本模式图的储备族 [3] 的非孤立零点轨迹。Ramos 和 Sun 利用人工智能辅助搜索，找到了许多更多的有限例子 [14]。另一方面，Li 在2026年证明，两个基本的 Kadrawi–Levit族尽管如此仍始终是单峰的 [13]。这些结果共同自然地引出了一个新目标：不再研究树，而是研究通过插入一条边从这些树得到的单圈图。

因此，本文的基本操作是单边闭包

$$T \longmapsto T+uv,$$

其中 T 是一棵树， uv 是 T的一条非边。由此得到的图是单圈图。我们的主要目标是利用这一闭包操作构造大量单圈图，使其独立多项式仍然是单峰的，但不再是对数凹的。具体而言，我们希望找到一种方法，既能处理符号化无限族，也能处理经计算验证的有限范围。

主要定理 （KL 闭包定理）。 对于 $r\in\{0、1、2\}$ 以及 $k\geq 3$（当 $k\geq 4$ 时$r=2$），令$U_{k、r}=U_{k、k+r}$ 表示如下得到的单圈图：从 $T_{3、k、k+r}$ 出发，在特殊分支顶点 v_1 与细分顶点 $a_{2、1}$ 之间添加一条边，其中后者位于一条固定的P_2-臂 $v_2a_{2、1}b_{2、1}$ 上，该臂属于在 v_2处的 k-束。则独立多项式 $I(U_{k、r};x)$为

单峰的，但不是对数凹的。更确切地说，倒数第二个对数凹不等式不成立。

本文围绕这一简短陈述展开，定理 4.10 则完整地证明了它。证明分为三个部分。定理 4.6 给出了符号化非对数凹性这一部分。定理4.8证明主加数项

$$H_{k,r}(x) = G_k(x)F_{k+r}(x)$$

是单峰的，且具有受控众数。接着，命题4.9 利用 Darroch定位，从这一众数结论推出整个 KL闭包多项式的单峰性。

本文由两个核心思路推动。

(1) **先讨论运算**。 我们精确地梳理闭包运算的代数结构：采用本文所需记号的标准有根乘积恒等式；Darroch众数定位，以及针对基本实根分支因子的相邻众数桥接引理；单边插入的精确减法恒等式；环转移递推；以及对约化森林 $T - \mathrm{N}[u] - \mathrm{N}[v]$ 的奇偶性分析。

(2) **先讨论族**。 我们围绕目前已知会导致非对数凹性的四个树储备库来组织问题：KL族、Galvin的后期断裂族、Ramos–Sun有限语料库，以及Bautista–Ramos模式图储备族，其中包括新发现的连续断裂族。

其成果在于形成了一套方案，使主要构造能够转化为明确的系数计算，而不是对示例进行无定义的搜索。

一个核心的结构划分取决于 $\mathrm{dist}_T(u,\ v)$ 的奇偶性。闭合一条偶长度的 u–v路径会产生一个奇环，而闭合一条奇长度的路径会产生一个偶圈。由于树是二部的，这等价于判断添加的边连接的是树二部划分的同一部分还是相反部分。在偶环一侧，该闭包仍是二分图，因此 Levit–Mandrescu上三分之一单调性定理给出了严格的尾部控制 [12]。这只是部分控制，因为二分图一般不一定是单峰的 [4]。在奇环一侧，以及更一般地对于明确的 KL 闭包，自然的工具是 Li式直接系数比较 [13]。

本文证明的内容。 本文将当前的结构核与更强的族级结果体系结合起来。已证明的结果如下：

(i) 单边闭包和加权环闭包的精确传递恒等式；(ii) 奇偶性字典，以及描述控制修正项的约化森林的带分支路径描述；(iii) 一个显式的无限 KL导出单环族 $U_{k,\ r}$，$r \in \{0,\ 1,\ 2\}$，其独立多项式对所有可容许参数均为单峰且非对数凹；(iv) 对 $U_{k,\ r}$ 的已验证范围锐化，证明存在唯一倒数第二断裂，并给出所有可容许 $k \le 400$ 的精确众数公式；

(v) 一条适用于 Galvin 和 Bautista–Ramos 的广泛范围的普适穷尽定理；

(vi) 一项完备定理表明，经过检验的 KL 扩张始终保持单峰，尽管非对数凹性的普遍保持在此处并不成立。

因此，本文并非只是提出一种策略。如今，它证明了适用于所有可容许参数的核心 KL 闭包定理，在一个广阔的精确范围内进一步强化该定理，并构造出大量有限且经认证的区域，其中包含单峰但非对数凹的单圈图。

2 一般闭包机制

2.1 根附着积（背景）

设 (H, r) 是一个有根图。定义

$$A_H(x) := I(H - r; x), \qquad B_H(x) := x\, I(H - \mathrm{N}[r]; x).$$

若 G 是任意图，令 $G \odot (H, r)$ 表示如下得到的图：取 G 的一个副本，并对每个顶点 $v \in V(G)$，沿根接口将 $H - r$ 的一个新副本附着到 v 上。

在介绍真正新颖的闭包恒等式之前，我们先用后文采用的记号记录标准的根积公式。该公式可追溯至 Gutman 的复合图恒等式和 Rosenfeld 的根积公式，也可视为 Zhu 的团覆盖积定理的一个特例 [9, 15, 16]。

命题 2.1（已知的根积公式）。若 G 的阶为 n，则

$$I\Big(G \odot (H, r); x\Big) = A_H(x)^n \, I\left(G; \frac{B_H(x)}{A_H(x)}\right).$$

这个恒等式仅用于整理重复的分支附着。它是后文所研究的分支束族背后的替换机制。

2.2 单边闭合的精确传输

设 T 是一棵树，且 u，$v \in V(T)$ 是互不相同且不相邻的顶点。令

$$H = T + uv.$$

由于 T 中存在唯一一条连接 u–v 的路径，图 H 是单圈图。

命题 2.2 (加边恒等式)。对于每棵树 T 以及每对不相邻的顶点 $u, v \in V(T)$,

$$I(H; x) = I(T; x) - x^2 I\Big(T - \mathrm{N}[u] - \mathrm{N}[v]; x\Big).$$

证明。 $H = T + uv$ 的独立集恰好是 T的独立集，但不包括同时含有 u 和 v的那些独立集。任何同时含有 u和 v的 T 独立集，都必须避开 $\mathbf{N}(u) \cup \mathbf{N}(v)$中的每个顶点；删去 u和 v后，它就成为 $\mathbf{N}[u]-\mathbf{N}[v]$的一个独立集。反过来，$\mathbf{N}[u]-\mathbf{N}[v]$的每个独立集都能唯一扩展为同时含有 u 和 v的 T 的一个独立集。因此，被删去的族恰好贡献了所示的修正项。 □

推论 2.3 （系数传递）。 令

$$I(T;x) = \sum_{k\geq 0} t_k x^k, \qquad I\Big(T - \mathrm{N}[u] - \mathrm{N}[v]; x\Big) = \sum_{k\geq 0} r_k x^k,$$

其中 $r_k = 0$ 对于 $k < 0$。若

$$I(H;x) = \sum_{k\geq 0} h_k x^k,$$

则对每个 $k \geq 0$ ，都有

$$h_k = t_k - r_{k-2}.$$

证明。 这是命题 2.2的逐系数形式。 □

为局部追踪对数凹性，定义

$$\Delta_k(G) := s_k(G)^2 - s_{k-1}(G)s_{k+1}(G).$$

那么 $I(G;x)$ 在 k 处不满足对数凹性，当且仅当 $\Delta_k(G) < 0$。

命题 2.4 (精确缺陷传递)。 使用上述记号，对于每个 $k \geq 0$，我们有

$$\Delta_k(H) = \Delta_k(T) - 2t_k r_{k-2} + t_{k-1}r_{k-1} + t_{k+1}r_{k-3} + r_{k-2}^2 - r_{k-3}r_{k-1}.$$

Proof. 将 $h_k = t_k - r_{k-2}$ 代入 $\Delta_k(H)$ 的定义并展开，得到 es

$$\begin{aligned}\Delta_k(H) &= (t_k - r_{k-2})^2 - (t_{k-1} - r_{k-3})(t_{k+1} - r_{k-1}) \\ &= t_k^2 - t_{k-1}t_{k+1} - 2t_k r_{k-2} + t_{k-1}r_{k-1} + t_{k+1}r_{k-3} + r_{k-2}^2 - r_{k-3}r_{k-1},\end{aligned}$$

且前两项等于 $\Delta_k(T)$。 □

推论 2.5 (支撑窗口)。 对于固定的闭包 $H = T + uv$，局部缺陷可能发生变化的唯一指标 k，是至少有一个 r_{k-3}、r_{k-2}、r_{k-1} 非零的那些指标。特别是，如果

$$r_{k-3} = r_{k-2} = r_{k-1} = 0,$$

那么 $\Delta_k(H) = \Delta_k(T)$。

证明。 这直接由命题2.4得出。 □

注 2.6（新代数所在之处）。 约化森林

$$F_{u,v} := T - \mathrm{N}[u] - \mathrm{N}[v]$$

是边插入后新代数的唯一来源。特别是，任何族定理都必须确定 $I(F_{u,\,v};\ x)$ 的系数序列如何与 $I(T;\ x)$ 的系数序列相互作用。这一区分了两种可能的机制：既有树断点的延续，以及通过闭包产生全新的断点。

2.3 环转移递推

减法恒等式是单边闭包最简洁的通用公式，但对于穷举计算，直接处理唯一环及其附着的有根分支通常更为方便。

命题 2.7（环闭合转移公式）。 设 $U = T + uv$ 是一棵树的单边闭包。设

$$C = (c_0, c_1, \ldots, c_{\ell-1})$$

是 U 的唯一环，其中 $c_0 = u$ 和 $c_{\ell-1} = v$ 按环上的顺序列出。删除环边后，得到附着于 c_i 的有根树 B_i 。对于每个 i，定义

$$A_i(x) = I(B_i - c_i; x), \qquad B_i(x) = x\, I(B_i - \mathrm{N}[c_i]; x).$$

Set

$$f_0^{(0)} = A_0, \quad g_0^{(0)} = 0, \qquad f_0^{(1)} = 0, \quad g_0^{(1)} = B_0,$$

并对 $1 \le i \le \ell - 1$ 定义

$$f_i^{(\varepsilon)} = (f_{i-1}^{(\varepsilon)} + g_{i-1}^{(\varepsilon)})A_i, \qquad g_i^{(\varepsilon)} = f_{i-1}^{(\varepsilon)} B_i, \qquad \varepsilon \in \{0, 1\}.$$

Then

$$I(U; x) = \left(f_{\ell-1}^{(0)} + g_{\ell-1}^{(0)}\right) + f_{\ell-1}^{(1)}.$$

如果所有分支对都相同，即对于每个 i 都有 $A_i = A$ 和 $B_i = B$ ，那么

$$I(U; x) = A(x)^{\ell} I\left(C_\ell; \frac{B(x)}{A(x)}\right).$$

证明。 递推计算路径 c_0，c_1，……，$c_{\ell-1}$上的加权独立集，条件是 c_0 不被选入或被选入。若 c_0 不被选入，那么最后一个环顶点可以不被选入，也可以被选入。若 c_0 被选入，那么由于 $c_{\ell-1}$ 与 c_0相邻， $c_{\ell-1}$ 必须不被选入。将这两种情形相加，即得第一个公式。在同分支情形下，环的每个独立集 S 都贡献$B(x)^{|S|}A(x)^{\ell-|S|}$，对所有 $S \in \mathrm{Ind}(C_\ell)$ 求和即可得到因式分解。 □

添加的边连接	.....的奇偶性 $\mathrm{dist}_T(u,\ v)$	.....中的唯一环 $T+uv$	闭包类型
同一二分部	even	odd	非二分图
相对的二分部	odd	even	二部的
类			

表 1：奇偶划分可以直接从树二分中读取。

2.4 唯一环的奇偶性核算

由于每棵树都是二部的，单边闭包的奇偶划分可以得到清晰的结构性改写。

命题 2.8 (奇偶性字典**)。** 设 T是一棵二部划分为 $V(T) = A \cup B$的树，且 u、v是两个不同且不相邻的顶点。令 $H = T + uv$。则以下命题等价：

(i) u 和 v 位于 T的二部划分的同一部分中；

(ii) $\mathrm{dist}_T(u, v)$ 是偶数；

(iii) H 的唯一环长度为奇数；

(iv) H 是非二分图。

同样，以下命题等价：

(i) u 和 v 位于 T的相对二分部；

(ii) 到$_T(u, v)$ 是奇数；

(iii) H 的唯一环具有偶数长度；

(iv) H 是二部的。

证明。 在二分图中，两个顶点位于同一部，当且仅当连接它们的每条路径都具有偶数长度；位于相对的二分部，当且仅当每条这样的路径都具有奇数长度。由于 T是一棵树，因此存在唯一的 u–v路径，所以 $\mathrm{dist}_T(u, v)$ 的奇偶性由二部划分决定。添加边 uv 后，这条路径闭合成 H的唯一环，其长度为 $\mathrm{dist}_T(u, v) + 1$。最后，一个图是二部的，当且仅当它不含奇环。 □

注释 2.9（奇偶性为何重要）。奇偶划分同时也是按树中的距离奇偶性、闭包后唯一环的奇偶性，以及闭包是否仍为二部图进行的划分。因此，计算任何族时，一开始就应区分奇环闭包和偶环闭包。

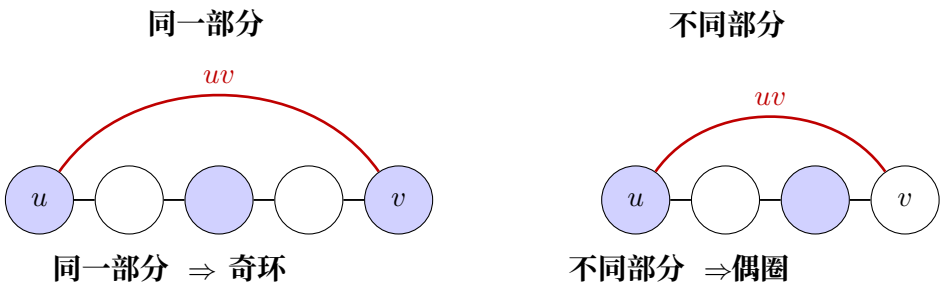


图1：树的单边闭包的奇偶划分。顶点着色表示底层树的二部划分。

2.5 约化森林与分支数据

Let

$$P(u,v) = x_0 x_1 \cdots x_d$$

是 T 中 u–v 之间的唯一 $x_0 = u$ 路径，其中 $x_0 = u$ 和 $x_d = v$。约化森林

$$F_{u,v} := T - \mathrm{N}[u] - \mathrm{N}[v]$$

决定命题2.2 中的修正项以及命题2.4中的缺陷更新。

引理 2.10 (保留的路径核心**)**。 假设 $d \geq 4$。那么， $P(u, v)$ 中在 $F_{u,v}$ 中保留下来的顶点恰好是

$$x_2, x_3, \ldots, x_{d-2},$$

并且它们诱导出一条含有 $d-3$ 个顶点的路径。因此，

- 如果 d 为偶，则保留的路径核心具有奇数阶，因此有唯一的中心顶点；
- 如果 d 为奇，则保留的路径核心具有偶数阶，因此有一条中心边。

证明。 删除 $\mathrm{N}[u]$ 会移除 $x_0 = u$ 和 x_1，而删除 $\mathrm{N}[v]$ 会移除 $x_d = v$ 和x_{d-1}。没有其他路径顶点属于 $\mathrm{N}[u] \cup \mathrm{N}[v]$，因此保留下来的路径顶点恰好是 $x_2, \ldots, x_{d-2}$。这些顶点上的诱导子图是从 $P(u, v)$ 继承而来的路径。 □

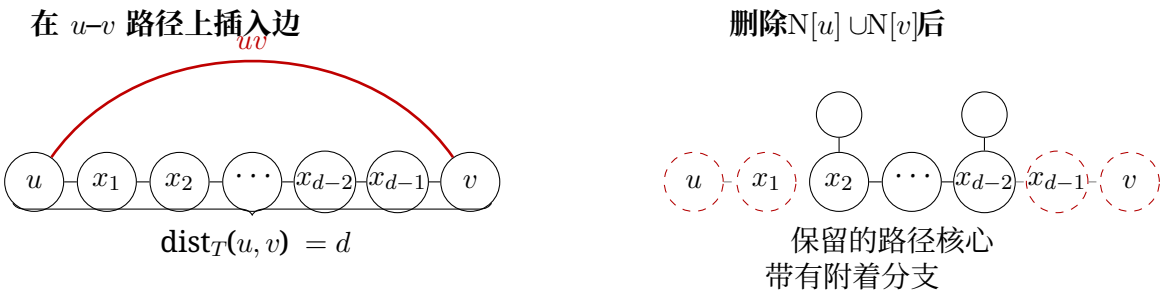
Lemma 2.11 （约化森林的分支分解）。 每个连通分量 *of*

$$F_{u,v} - \{x_2, \ldots, x_{d-2}\}$$

与保留的路径核心至多相交于一个顶点。等价地，$F_{u,\ v}$ 是由核心得到的带分支路径森林

$$x_2 x_3 \cdots x_{d-2}$$

通过将有根树附加到其中的一些顶点上。



Fig图 2：约化森林 $F_{u,\ v}$：保留的核心 x_2、……、x_{d-2}，带有有根分支 s.

证明。 T外部的每个顶点都在该路径上有一个唯一的最近顶点。删除 $\mathbf{N}[u] \cup \mathbf{N}[v]$ 后，远离核心的每个仍存连通分量与剩余路径最多相交于一个顶点；否则，两个不同的接触点会在原树中形成一个环。因此，每个核心外连通分量都连接到唯一的剩余路径顶点上。

□

备注 2.12（族依赖性由此开始）。 奇偶性只能决定保留的核心具有中心顶点还是中心边。系数 I（$F_{u,\ v}$；x）以及由此决定的命题 2.4中修正项的符号和大小，取决于附着在该核心上的有根分支数据。这就是为什么奇偶划分是严谨的，而在计算分支多项式之前，任何方向偏差都必须保持族依赖性。

例 2.13（将路径闭合成环）。 取 $T = P_n$，并令 u，v 为其端点。那么 $H = T + uv = C_n$，而

$$F_{u,v} = P_{n-4} \qquad (n \geq 4).$$

因此，命题 2.2变为

$$I(C_n; x) = I(P_n; x) - x^2 I(P_{n-4}; x).$$

这是更复杂的 KL 型闭包的最简单模型：整个修正项都由保留的路径核心承载，完全没有侧分支。

2.6 系数工具、Darroch 局部化、桥引理与 Li 式约化

引理 2.14（相同众数的和保单峰性）。 设 P_1（x）$\ldots, P_r$（x）是具有非负系数的多项式，它们均为单峰，且具有相同的众数指标 m。若$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geq 0$，则 $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i$（$x$）是单峰的，众数为 m。

证明。 在共同众数 m 之前，每个系数序列都弱递增；在 m 之后，每个系数序列都弱递减。正线性组合会保持这两种单调性。

□

命题 2.15（Ibragimov 强单峰性原理）。 设

$$P(x)=\sum_{i=0}^{d} p_i x^i, \qquad Q(x)=\sum_{j=0}^{e} q_j x^j$$

具有非负系数。若$(p_0,\dots,p_d)$是对数凹且没有内部零项，并且$(q_0,\dots,q_e)$是单峰的，则 $P(x)Q(x)$ 的系数序列是单峰的。

证明。 这是伊布拉吉莫夫强单峰性定理针对对数凹分布卷积的有限支撑形式 [10]。另见 Brenti [5, 第 4]节。下文将其用于 $P(x)=G_k(x)$ 以及 $Q(x)=F_{k+r}(x)$。 □

引理2.16（相邻众数桥接）。 设

$$P(x)=\sum_{j\ge 0} p_j x^j, \qquad Q(x)=\sum_{j\ge 0} q_j x^j$$

具有非负系数。假设 P 是单峰的，众数位于 m，且 Q 是单峰的，众数位于$\{m,m+1\}$。则 $P(x)+Q(x)$ 是单峰的，众数位于$\{m,m+1\}$。更准确地说， $P+Q$ 的系数序列直到索引 m 为止弱递增，从索引 $m+1$ 起弱递减，因此唯一尚未确定的比较是索引 m 和 $m+1$处的两个桥接系数。

证明。 对于每个 $j<m$，单峰性假设给出

$$p_j \le p_{j+1}, \qquad q_j \le q_{j+1},$$

因为 Q 的一个众数不早于 m。因此

$$p_j+q_j \le p_{j+1}+q_{j+1} \qquad (j<m),$$

所以 $P+Q$ 的系数序列直到指标 m 都是弱递增的。同样，对于每个 $j\ge m+1$，有

$$p_j \ge p_{j+1}, \qquad q_j \ge q_{j+1},$$

因为 P 在 m 之后已经是非递增的，而 Q 在其众数之后也是非递增的，该众数位于 m 或 $m+1$。因此

$$p_j+q_j \ge p_{j+1}+q_{j+1} \qquad (j\ge m+1),$$

所以系数序列从指标 $m+1$ 起是弱递减的。这就证明了该结论。

□

引理 2.17（乘法的尾部判据）。 设

$$P(x)=\sum_{i=0}^{d} p_i x^i, \qquad Q(x)=\sum_{j=0}^{e} q_j x^j, \qquad R(x)=P(x)Q(x),$$

其中 $p_d q_e > 0$。记作 $r_k = [x^k]R(x)$，则有

$$r_{d+e} = p_d q_e, \qquad r_{d+e-1} = p_{d-1}q_e + p_d q_{e-1},$$

and

$$r_{d+e-2} = p_{d-2}q_e + p_{d-1}q_{e-1} + p_d q_{e-2}.$$

特别是，如果

$$\Big(p_{d-1}q_e + p_d q_{e-1}\Big)^2 < p_d q_e\Big(p_{d-2}q_e + p_{d-1}q_{e-1} + p_d q_{e-2}\Big),$$

那么 R 不是对数凹的。

证明。 前三个系数由对它们有贡献的唯一次数组合汇总而得。所示不等式恰好表明，在指标 $d+e-1$ 处对数凹性不成立。

□

Darroch经典定理指出，如果

$$P(x) = \sum_{j=0}^{d} a_j x^j$$

具有正系数且只有实根，那么每个众数 m 都满足

$$\left\lfloor \frac{P'(1)}{P(1)} \right\rfloor \le m \le \left\lceil \frac{P'(1)}{P(1)} \right\rceil.$$

我们仅将此定理作为众数局部的指引，用于本文中反复出现的实根辅助因子 [6]。

命题2.18（基本分支因子的 Darroch定位）。 设

$$A_t(x) = (1+2x)^t, \qquad B_t(x) = x(1+x)^t, \qquad E_{k,r}(x) = x(1+2x)^{2k+r+3}.$$

那么， A_t、 B_t 和 $E_{k,\,r}$ 的每个众数分别都位于

$$\left\{\left\lfloor \frac{2t}{3} \right\rfloor, \left\lceil \frac{2t}{3} \right\rceil\right\}, \qquad \left\{\left\lfloor 1+\frac{t}{2} \right\rfloor, \left\lceil 1+\frac{t}{2} \right\rceil\right\}, \qquad \left\{\left\lfloor \frac{4k+2r+9}{3} \right\rfloor, \left\lceil \frac{4k+2r+9}{3} \right\rceil\right\}.$$

证明。 多项式 $A_t(x)$ 只有负实根 $-1/2$，因此 Darroch 定理给出的第一个区间来自

$$\frac{A_t'(1)}{A_t(1)} = \frac{2t}{3}.$$

For $B_t(x) = x(1+x)^t$，因子 $(1+x)^t$ 只有负实根 -1 an d

$$\frac{d}{dx}(1+x)^t\Big|_{x=1} \Big/ (1+1)^t = \frac{t}{2}.$$

乘以 x 会使每个众数指标都增加 1，从而得到第二个区间。将相同的平移论证应用于 $(1+2x)^{2k+r+3}$，即可得到第三个区间。 □

关键并不在于仅凭 Darroch 就能证明这里的单峰性。相反，第 4 节采用了两条互补的原理。一旦确定了众数，Ibragimov定理便可处理主卷积项 $H_{k,\,r} = G_k(x)\,F_{k+r}(x)$；而 Darroch 与引理2.16则将实根修正项转化为局部桥接工具。一旦知道一个主加数项在指标 m 处达到峰值，且 Darroch窗口将修正项限制在 $\{m,\ m+1\}$ 内，和的单峰性便归结为指标 m 与 $m+1$处系数之间唯一的中心比较。

引理 2.19 (Li型前缀加尾部判据). 设$(a_0, a_1, \dots, a_d)$ 是一个正序列，并设 $q \in \{1, \dots, d\}$。假设

(1) $a_j^2 \geq a_{j-1}a_{j+1}$ 对每个 $1 \leq j \leq q-1$,

(2) $a_q \geq a_{q+1} \geq \cdots \geq a_d$。

那么$(a_0, a_1, \dots, a_d)$ 是单峰的。

证明。 令 $\rho_j = a_j/a_{j-1}$ 为 $1 \leq j \leq q$。条件 (1) 意味着

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_q.$$

因此，比值序列与水平 1 至多相交一次。等价地，存在一个指标 $p \in \{0,1,\dots,q\}$ 使得

$$\rho_1, \dots, \rho_p \geq 1 \qquad \text{and} \qquad \rho_{p+1}, \dots, \rho_q \leq 1,$$

其中任一段都可能为空。因此

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_p \qquad \text{and} \qquad a_p \geq a_{p+1} \geq \cdots \geq a_q,$$

所以前缀 $(a_0, \dots, a_q)$ 是单峰的。条件 (2) 表明，从 a_q 开始的尾部弱递减，因此整个序列是单峰的。 □

推论2.20 （二部图归约）。 设 G 是一个连通二部图，且

$$I(G;x) = \sum_{j=0}^{\alpha(G)} i_j x^j.$$

Set

$$q(G) := \left\lceil \frac{2\alpha(G)-1}{3} \right\rceil.$$

If

$$i_j^2 \geq i_{j-1}i_{j+1} \qquad (1 \leq j \leq q(G)-1),$$

那么 $I(G;x)$ 是单峰的。

证明。 根据 König-Egerváry 图的 Levit–Mandrescu 后三分之一定理， [12],可得

$$i_{q(G)} \geq i_{q(G)+1} \geq \cdots \geq i_{\alpha(G)}$$

对于连通二部图 G。因此引理2.19 适用。 □

3 树储备库、束结构小工具与证明工具

对于 $t \geq 0$，令 S_t 表示由根 r 附加 t 个 P_2 副本到 r 上得到的有根束。相应的有根对为

$$A_t(x) = (1+2x)^t, \qquad B_t(x) = x(1+x)^t.$$

这些束是下文讨论的所有族的基本构件。

定义 3.1。我们使用以下标准树族。

(1) Kadrawi–Levit族 $T_{3,\ m,\ n}$ 有一个根 v_0，其子节点为 v_1， v_2， v_3；顶点v_1 带有三条 P_2臂 $v_1a_{1,\ j}b_{1,\ j}$ $(1 \leq j \leq 3)$， v_2 带有 m P_2条臂 $v_2a_{2,\ j}b_{2,\ j}(1 \leq j \leq m)$，而 v_3 带有 n P_2条臂 $v_3a_{3,\ j}b_{3,\ j}$ $(1 \leq j \leq n)$。

(2) 星号族 $T^*_{3,m,n}$ 由 $T_{3,m,n}$ 通过将 v_1 处三个P_2臂中的一个替换为悬挂 P_4得到。(3) Galvin 族 $T_{m,t}$ 有一个根 v，其子节点为 $w_1, \ldots, w_m$，且每个 w_i 都带有 tP_2臂。(4) Bautista–Ramos族$T_{G,m,t}$ 由 m 个互不相交的 $T_{3,t}$ 副本构成：将它们的根连接到一个新根 v_0，并添加一个与 v_0相邻的额外叶节点。

注3.2（当前树储备库）。单圈图研究计划有四类特别自然的输入。

(1) **KL储备库**。 最初的阶为26的反例扩展为无限族$T_{3、\ m、\ n}$ 和$T^*_{3、\ m、\ n}$ [11, 13]。由于Li证明了这两个族都是单峰的，它们是构造显式无限单圈图例子的最有希望来源。(2) **Galvin储备库**。 Galvin 族具有非常晚的对数凹性失效点 [7]，因此是构造能够保留或移动后期缺陷的闭包的自然来源。(3) **Ramos–Sun储备库**。 Ramos 和 Sun 的人工智能生成的例子提供了一个包含27–101个顶点的大型有限种子库 [14]。它们的作用是提供小型零星单圈图例子，并用于低阶猜想挖掘。(4) **Bautista–Ramos模式图储备库**。 Bautista-Ramos 首先构造了具有任意多个断点的无限族 [2]。随后，Bautista-Ramos、Guillén-Galván和Gómez-Salgado 的新论文确定了一种共同的模式图机制，推导出线性递推，证明了连续失效

储备族	树的源点 非对数凹性	目前可用 形状信息	后续预期作用 单边闭包
KL	显式族 $T_{3,m,n}$， $T^{*}_{3,m,n}$ 构造自 首阶26种子	Li 证明了 单峰性适用于 两个图族	首个明确的无限 单圈图族； 奇偶性前沿下的 一个典范闭包
Galvin	一个无限族，具有 在 $\alpha(T)$ 附近的断裂	晚断裂 渐近行为	rule 保持不变的闭包 或将其推迟到很晚
Ramos–Sun	许多人工智能生成的 有限反例 具有 27–101 个顶点	经验目录 而非 符号公式	缺陷 稀疏有限 单圈 反例； 低阶搜索
Bautista–Ramos / 模式图	任意多个断点， 然后连续失效 模式族与 线性递推	多断点与 连续失效 轮廓；递推 代数；零点集 关于……的信息 基于 P_2 的 储备集	指导 候选多重断裂 和连续失效 单圈图族

表 2：为单圈图研究计划提供支持的当前树储备库。

族，并通过 Beraha–Kahane–Weiss 理论引入了零点集视角 [3]。这些是多重断点和连续失效单圈图族的自然候选。

定理 3.3（偶环一侧的上三分之一单调性）。设 $H = T + uv$ 是树的单边闭包，并假设 距离$_T$（u与 v）为奇数。若

$$I(H;x) = \sum_{k=0}^{\alpha(H)} h_k x^k,$$

then

$$h_{\lceil (2\alpha(H)-1)/3 \rceil} \geq h_{\lceil (2\alpha(H)-1)/3 \rceil + 1} \geq \cdots \geq h_{\alpha(H)}.$$

证明。根据命题 2.8，图 H 是二分图。每个二分图都是柯尼希-埃格瓦里图，因此该定理可由 Levit 和 Mandrescu 关于柯尼希-埃格瓦里图独立多项式的单调性定理推出 [12]。 □

推论 3.4（偶圈闭包的尾部控制）。对于偶圈闭包 $H = T + uv$，任何单峰性失效都必定发生在系数序列最后三分之一之前。

证明。 定理 3.3 表明，从 $\lceil (2\alpha(H) - 1)/3 \rceil$ 开始的末尾区段是递减的。 □

注记 3.5（为何尾部定理仅是部分结果）。定理 3.3 并未证明每个偶圈闭包都是单峰的。这一区别至关重要：一般而言，二部图的独立序列不一定是单峰的 [4]。该定理从可能出现问题的范围中排除了上尾部，但并未解决整个问题。

注记 3.6（KL 一侧的 Li 型计算）。对于 KL 闭包，尤其是没有一般 König-Egerváry 尾部定理适用的奇圈闭包，自然的单峰性证明途径是直接比较系数，这与 Li 的证明思路一致，适用于$T_{3,\,m,\,n}$ 和 $T^{*}_{3,\,m,\,n}$ [13]。上面的传输公式准确指出了在$F_{u,\,v}$ 的多项式明确后，需要比较哪些修正系数。

命题 3.7 （归约为两个符号任务）。固定一个树族 $\boldsymbol{T}$，并给定一条规范规则，该规则在每个 $T \in \boldsymbol{T}$ 中选取一个非边 $u_T v_T$。令

$$H_T = T + u_T v_T, \qquad F_T = T - \mathrm{N}[u_T] - \mathrm{N}[v_T].$$

于是，从 $\boldsymbol{T}$ 构造一个单峰但非对数凹的单圈图族，归结为以下两项任务：

(i) 证明 $I(H_T;\ x)$ 的单峰性；

(ii) 利用命题 *2.4* 找出一个指标 k，使得 $\Delta_k(H_T) < 0$。

此外，如果 $\mathrm{dist}_T(u_T,\ v_T)$ 为奇数，那么根据定理 (i) 中的任务在系数序列的最后三分之一部分已得到解决*3.3*。

证明。 根据构造，图 H_T 是单圈图。当且仅当条件 (i) 和 (ii) 同时成立时，它是单峰但非对数凹的。最后一句即推论 3.4。 □

4 KL 闭包族与旗舰定理

现在，我们从一般的闭包机制转向第一个明确的无限族。在本节中，

$$F_t(x) := (1+2x)^t + x(1+x)^t,$$

不要将其与第 2 节中的约化森林记号 $F_{u,\,v}$ 混淆。

定义 4.1。 对于整数 $m,\ n \geq 1$，在 $T_{3,\,m,\,n}$于 v_2 处的m束中，选定一条固定的 P_2臂 $v_2 a_{2,\,1} b_{2,\,1}$，并令 $U_{m,\,n}$ 为添加边 $v_1 a_{2,\,1}$后得到的单圈图。对于 $r \geq 0$，我们简记为

$$U_{k,r} := U_{k,k+r}.$$

特别地，对称族 $U_{k,\ 0} = U_{k,\ k}$ 是 $T_{3,\ k,\ k}$最基本的环闭合类比。

命题 4.2（精确减法公式）。 对所有整数 $m,\ n \geq 1$,

$$I(U_{m,n}; x) = I(T_{3,m,n}; x) - R_{m,n}(x),$$

其中

$$I(T_{3,m,n}; x) = F_3(x)F_m(x)F_n(x) + x(1+2x)^{m+n+3}$$

and

$$R_{m,n}(x) = x^2(1+x)^3(1+2x)^{m-1}F_n(x).$$

证明。树$T_{3,m,n}$ 可通过在 v_0处进行标准根删除来处理：若不选入 v_0 ，则得到乘积 $F_3F_mF_n$；若选入 v_0 ，则每条 P_2-臂都会使各分支贡献一个因子$(1+2x)$，从而得到 $x(1+2x)^{m+n+3}$。减法项来自命题 2.2，其中选取的非边为v_1a_2,1。删除v_1 和a_2,1的闭邻域后，剩下三个孤立叶节点、位于 v_2侧的其余 P_2条 $m-1$ -臂，以及位于 v_3侧的完整 n-束。这便给出了$R_{m,n}(x)$的所述公式。 □

命题 4.3（归约为 $T_{3,\ k-1,\ 0}$）。 对每个 $k \geq 1$ 和 $r \geq 0$,

$$I(U_{k,r}; x) = I(T_{3,k-1,0}; x)F_{k+r}(x) + x(1+2x)^{2k+r+3}.$$

等价地，若

$$G_k(x) := I(T_{3,k-1,0}; x), \qquad H_{k,r}(x) := G_k(x)F_{k+r}(x), \qquad E_{k,r}(x) := x(1+2x)^{2k+r+3},$$

then

$$I(U_{k,r}; x) = H_{k,r}(x) + E_{k,r}(x).$$

此外，

$$G_k(x) = F_4(x)(1+2x)^{k-1} + x(1+x)^kF_3(x).$$

证明。 从命题 4.2 出发，结合 $m = k$ 和 $n = k+r$，可得

$$I(U_{k,r}; x) = F_3F_kF_{k+r} + x(1+2x)^{2k+r+3} - x^2(1+x)^3(1+2x)^{k-1}F_{k+r}.$$

利用

$$F_k = (1+2x)F_{k-1} + x(1+x)^{k-1}(1+x),$$

我们得到

$$F_3F_k - x^2(1+x)^3(1+2x)^{k-1} = (1+x)F_3F_{k-1} + x(1+2x)^{k+2}.$$

右端恰好是 $I(T_{3,\ k-1,\ 0}; x)$ 的标准根删除公式，因为在 $T_{3,\ k-1,\ 0}$ 中，根 v_0 有一个3臂分支、一个 $(k-1)$ 臂分支和一个叶节点分支。代入后即可得到所声称的因式分解，再展开一次便得到 $G_k(x)$ 的所示公式。 □

定理 4.4 (直接对数凹性$T_{3、\,k-1、\,0}$)。 对于任意整数 $k \geq 1$，多项式

$$G_k(x) = I(T_{3,k-1,0}; x) = F_4(x)(1+2x)^{k-1} + x(1+x)^k F_3(x)$$

是对数凹的。

证明。令

$$G_k(x) = \sum_{j=0}^{k+5} g_{k,j} x^j.$$

由上面的显式表达式可得

$$\begin{aligned} g_{k,j} = {} & 2^j \binom{k-1}{j} + 9\,2^{j-1}\binom{k-1}{j-1} + 28\,2^{j-2}\binom{k-1}{j-2} + 38\,2^{j-3}\binom{k-1}{j-3} \\ & + 20\,2^{j-4}\binom{k-1}{j-4} + 2^{j-5}\binom{k-1}{j-5} + \binom{k}{j-1} + 7\binom{k}{j-2} + 15\binom{k}{j-3} \\ & + 11\binom{k}{j-4} + \binom{k}{j-5}. \end{aligned}$$

对于 $1 \leq j \leq k+4$，令

$$u := j-1, \qquad v := k+4-j.$$

于是 u， $v \geq 0$, $u+v = k+3$，直接进行符号化简可得

$$\Delta_{k,j} := g_{k,j}^2 - g_{k,j-1}g_{k,j+1} = \frac{(u+v-4)!(u+v-3)!}{(u+1)!(u+2)!(v+1)!(v+2)!}\,\Phi(u,v),$$

其中 $\Phi(u,\ v) \in \mathbb{Z}[u, v, 2^u]$。由于阶乘前因子为正，只需证明 $\Phi(u,\ v) \geq 0$。

对于边界值 $u = 0$、1、2、3，多项式 Φ 可因式分解如下:

$$\begin{aligned} \Phi(0,v) &= 512v^2(v-4)(v-3)^2(v-2)^2(v-1)^2(v+1)(2v^2+7v+4), \\ \Phi(1,v) &= 1024v^2(v-3)(v-2)^2(v-1)^2(v+1)(4v^4+29v^3+98v^2+64v-93), \\ \Phi(2,v) &= 1024v^2(v-2)(v-1)^2(v+1)(16v^6+204v^5+1111v^4 \\ &\qquad +2784v^3+3661v^2+1332v+5076), \\ \Phi(3,v) &= 1024v^2(v-1)(v+1)(64v^8+1304v^7+10937v^6+47615v^5 \\ &\qquad +131831v^4+226301v^3+256768v^2+235980v+51120). \end{aligned}$$

由于 $u+v = k+3 \geq 4$，情形 $u = 0$、1、2、3 分别要求 $v \geq 4$、3、2、1。因此，所展示的每个因式分解都是非负的。

现在假设 $u \geq 4$，并将 $u = s+4$ 写作 $s \geq 0$。那么

$$\Phi(s+4, v) = \sum_{m=0}^{12} c_m(s) v^m.$$

直接进行系数提取可得，每个 $c_m(s)$ 都具有如下形式

$$c_m(s) = A_m(s)4^s - B_m(s)2^s + C_m(s),$$

其中 A_m、B_m、$C_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[s]$，此外该多项式

$$\frac{s}{2}A_m(s) - B_m(s)$$

还具有非负系数。例如，

$$c_{12}(s) = 1024 \cdot 4^s,$$

and

$$c_{11}(s) = 16 \cdot 2^s\Big(576 \cdot 2^s s + 2112 \cdot 2^s - s^2 - 3s + 10\Big).$$

由于对每个 $s \geq 0$都有 $2^s \geq s/2$，因此可得

$$c_m(s) \geq 2^s\left(\frac{s}{2}A_m(s) - B_m(s)\right) + C_m(s) \geq 0.$$

因此，$\Phi(s+4, v)$ 的每个系数都是非负的，所以对所有 $v \geq 0$，$\Phi(s+4, v) \geq 0$。因此，对于每个 $1 \leq j \leq k+4$，$\Delta_{k,j} \geq 0$，且 $G_k(x)$ 的系数序列是对数凹的。

□

P命题 4.5（分支因子 F_t）。对于每个整数 $t \geq 1$，该多项式 l

$$F_t(x) = (1+2x)^t + x(1+x)^t$$

具有正的对数凹系数序列。因此它是单峰的。此外，对于每个 $t \geq 3$，F_t 的一个众数是

$$m_t := \left\lfloor \frac{2t+1}{3} \right\rfloor.$$

这个众数是唯一的，除非 $t = 5$，此时 F_5 有两个相邻众数 3和4。较小的情形为

$$F_1(x) = 1 + 3x + x^2, \qquad F_2(x) = 1 + 5x + 6x^2 + x^3,$$

它们的众数分别唯一，为1和 2。

证明。设

$$F_t(x) = \sum_{j=0}^{t+1} f_{t,j}x^j, \qquad f_{t,j} = 2^j\binom{t}{j} + \binom{t}{j-1},$$

其中 t 第二项在其自然取值范围之外时视为 0。对于 $1 \leq j \leq t+1$,

$$\frac{f_{t,j}}{f_{t,j-1}} = \frac{2(t-j+2)\Big(2^j(t-j+1)+j\Big)}{j\Big(2^j(t-j+2)+2j-2\Big)}.$$

令 $s = t - j \geq 0$。直接相减可得

$$\frac{f_{t,j}}{f_{t,j-1}} - \frac{f_{t,j+1}}{f_{t,j}} = \frac{N(j,s)}{j(j+1)\Big(2^j s + 2^j + j\Big)\Big(2^j s + 2^{j+1} + 2j - 2\Big)},$$

其中

$$\begin{aligned} N(j,s) = {} & 4^j\Big(2s^3 + 8s^2 + 10s + 4 + 6js + 4j\Big) \\ & + 2^j j\Big((2^{j+1} - j + 7)s^2 + (5j + 13)s + 6j + 6\Big) + 2j(j+1)(j+s+1). \end{aligned}$$

对于 $j \geq 1$和 $s \geq 0$，每一项均为非负数，特别地， $2^{j+1}-j+7 >0$。因此，比值序列

$$\frac{f_{t,1}}{f_{t,0}}, \frac{f_{t,2}}{f_{t,1}}, \ldots, \frac{f_{t,t+1}}{f_{t,t}}$$

是弱递减的。因此，($f_{t,\ 0}$，……，$f_{t,\ t+1}$) 是对数凹的。

接下来需要确定 $t \geq 3$ 的一个众数。情形 $t = 1$，2 已在陈述中列出。令 $m_t = \lfloor (2t+1)/3 \rfloor$ 并按剩余类划分。如果 $t = 3n$，则 $n \geq 1$,$m_t = 2n$ 以及

$$\begin{aligned} f_{3n,2n} - f_{3n,2n-1} &= \frac{\Big(4^n(n+2) - 2n(n-3)\Big)(3n)!}{(2n)!(n+2)!} > 0, \\ f_{3n,2n} - f_{3n,2n+1} &= \frac{(n+1)\Big(4^n + 2n - 1\Big)(3n)!}{(2n+1)!(n+1)!} > 0. \end{aligned}$$

如果 $t = 3n+1$，则 $n \geq 1$, $m_t = 2n+1$ 以及

$$\begin{aligned} f_{3n+1,2n+1} - f_{3n+1,2n} &= \frac{\Big(4^n(n+2) - 2n^2 + 3n + 2\Big)(3n+1)!}{(2n+1)!(n+2)!} > 0, \\ f_{3n+1,2n+1} - f_{3n+1,2n+2} &= \frac{(2 \cdot 4^n + n)(3n+1)!}{(2n+1)!(n+1)!} > 0. \end{aligned}$$

如果 $t = 3n+2$，则 $n \geq 1$, $m_t = 2n+1$ 以及

$$\begin{aligned} f_{3n+2,2n+1} - f_{3n+2,2n} &= \frac{\Big(3 \cdot 4^n(n+3) - 2n^2 + 5n + 3\Big)(3n+2)!}{(2n+1)!(n+3)!} > 0, \\ f_{3n+2,2n+1} - f_{3n+2,2n+2} &= \frac{(n-1)(3n+2)!}{(2n+1)!(n+2)!}. \end{aligned}$$

因此， m_t 始终是众数。只有当 $n = 1$，也就是 $t = 5$ 时，二阶差分才会为零，此时 3 和 4 是两个相邻众数。其他情况下，众数都是唯一的。

□

定理 4.6（KL 闭包族的全参数非对数凹性）。 固定 $r \in \{0,1,2\}$，令 $U_{k,r} = U_{k,k+r}$ 为由 $T_{3,k,k+r}$ 添加

边$v_1a_{2,1}$ 得到的单圈图。记

$$I(U_{k,r};x)=\sum_{j=0}^{2k+r+6}u_{k,r;j}x^j.$$

那么：

(1) 对于 $r=0$ 和任意 $k\geq 3$，多项式 $I(U_{k,\,0};\,x)$ 是非对数凹的；

(2) 对于 $r=1$ 和任意 $k\geq 3$，多项式 $I(U_{k,\,1};\,x)$ 是非对数凹的；

(3) 对于 $r=2$ 和任意 $k\geq 4$，多项式 $I(U_{k,\,2};\,x)$ 是非对数凹的。

在每种情况下，对数凹性的失效都发生在倒数第二个指标处。

证明。令 $d:=2k+r+6$。根据命题 4.2，$I(U_{k,\,r};\,x)$ 的最高次系数为

$$u_{k,r;d}=1,$$

而下一个系数为

$$u_{k,r;d-1}=2^{k-1}+2^{k+r}+2k+r+11.$$

从命题中直接进行系数提取 4.2 可得

$$\begin{aligned}u_{k,r;d-2}&=2^{k+r}k+11\cdot 2^{k+r}+2^{k-2}k+39\cdot 2^{k-2}+2^{k-1}(k+r)+2^{k+r-1}(k+r)\\&\quad+17\cdot 2^{2k+r-1}+\frac{k^2}{2}+k(k+r)+\frac{21k}{2}+\frac{(k+r)^2}{2}+\frac{21(k+r)}{2}+15.\end{aligned}$$

因此，倒数第二超额为

$$\Gamma_{k,r}:=u_{k,r;d-2}-u_{k,r;d-1}^2.$$

对于这三个值 $r=0$、1、2，可得到精确公式

$$\begin{aligned}4\Gamma_{k,0}&=25\cdot 4^k-(15k+49)2^k-8k^2-92k-424,\\4\Gamma_{k,1}&=43\cdot 4^k-(25k+107)2^k-8k^2-100k-472,\\4\Gamma_{k,2}&=55\cdot 4^k-(45k+233)2^k-8k^2-108k-524.\end{aligned}$$

现在定义 $\Phi_r(k):=4\Gamma_{k,r}$。直接计算可得

$$\begin{aligned}\Phi_0(k+1)-4\Phi_0(k)&=30k\,2^k+68\cdot 2^k+24k^2+260k+1172>0,\\\Phi_1(k+1)-4\Phi_1(k)&=50k\,2^k+164\cdot 2^k+24k^2+284k+1308>0,\\\Phi_2(k+1)-4\Phi_2(k)&=90k\,2^k+376\cdot 2^k+24k^2+308k+1456>0.\end{aligned}$$

因此，一旦 $\Phi_r(k)$ 为正，对于所有更大的 k，它都会保持为正。初始值为

$$\Phi_0(3)=76>0,\qquad \Phi_1(3)=452>0,\qquad \Phi_2(4)=6388>0.$$

因此，对于所有 $k \geq 3$，$\Gamma_{k,\ 0} > 0$；对于所有 $k \geq 3$，$\Gamma_{k,\ 1} > 0$；对于所有 $k \geq 4$，$\Gamma_{k,\ 2} > 0$。由于$u_{k,\ r;d} = 1$，这恰恰说明倒数第二个指标处不满足对数凹性。 □

引理 4.7（主导加数的中心差）。设

$$T_{1,k,r}(x) := F_4(x)(1+2x)^{2k+r-1}, \qquad m_{k,r} := \left\lfloor \frac{4k+2r+8}{3} \right\rfloor,$$

并定义

$$D^-_{k,r} := [x^{m_{k,r}}]T_{1,k,r}(x) - [x^{m_{k,r}-1}]T_{1,k,r}(x),$$
$$D^+_{k,r} := [x^{m_{k,r}}]T_{1,k,r}(x) - [x^{m_{k,r}+1}]T_{1,k,r}(x).$$

则对于可容许参数，以下公式成立。

(i) 若 $r = 0$ 且 $k = 3n$，则 $m_{k,r} = 4n+2$ 且

$$D^-_{3n,0} = \frac{16^n\big(2240n^3 + 4224n^2 + 1690n + 171\big)(6n)!}{4(2n+3)!(4n+1)!},$$
$$D^+_{3n,0} = \frac{16^n\big(864n^3 + 1360n^2 + 532n + 51\big)(6n)!}{2(4n+3)(2n+2)!(4n+1)!}.$$

(ii) 若 $(r,k) = (0, 3n+1)$ 或 $(r,k) = (2, 3n)$，则 $m_{k,r} = 4n+4$ 且

$$D^-_{3n+1,0} = D^-_{3n,2} = \frac{16^n\big(256n^3 + 448n^2 + 225n + 36\big)(6n+1)!}{(4n+3)(2n+3)!(4n+1)!},$$
$$D^+_{3n+1,0} = D^+_{3n,2} = \frac{22\cdot 16^n\big(400n^3 + 744n^2 + 428n + 75\big)(6n+1)!}{(4n+3)(4n+5)(2n+2)!(4n+1)!}.$$

(iii) 若 $(r,k) = (0, 3n+2)$ 或 $(r,k) = (2, 3n+1)$，则 $m_{k,r} = 4n+5$ 且

$$D^-_{3n+2,0} = D^-_{3n+1,2} = \frac{12\cdot 16^n\big(1808n^4 + 8192n^3 + 13148n^2 + 8922n + 2175\big)(6n+2)!}{(4n+3)(4n+5)(2n+4)!(4n+1)!},$$
$$D^+_{3n+2,0} = D^+_{3n+1,2} = \frac{3\cdot 16^n\big(5696n^3 + 15360n^2 + 13354n + 3765\big)(6n+2)!}{(4n+3)(4n+5)(2n+3)!(4n+1)!}.$$

（*iv*）如果 $r = 1$ 和 $k = 3n$，那么 $m_{k,r} = 4n+3$ 和

$$D^-_{3n,1} = \frac{4\cdot 16^n\big(904n^4 + 2288n^3 + 1786n^2 + 507n + 45\big)(6n)!}{(4n+3)(2n+3)!(4n+1)!},$$
$$D^+_{3n,1} = \frac{16^n\big(2848n^3 + 3408n^2 + 1133n + 108\big)(6n)!}{(4n+3)(2n+2)!(4n+1)!}.$$

(v) 如果 $r = 1$ 且 $k = 3n+1$，那么 $m_{k,\ r} = 4n+4$ 且

$$D^-_{3n+1,1} = \frac{3\cdot 16^n\big(1120n^3 + 3792n^2 + 3797n + 1176\big)(6n+2)!}{(4n+3)(2n+4)!(4n+1)!},$$
$$D^+_{3n+1,1} = \frac{3\cdot 16^n\big(864n^3 + 2656n^2 + 2540n + 765\big)(6n+2)!}{(4n+3)(4n+5)(2n+3)!(4n+1)!}.$$

(vi) 如果 $r=1$ 且 $k=3n+2$，那么 $m_{k,\,r}=4n+6$ 且

$$D^{-}_{3n+2,1}=\frac{6\cdot 16^{n}(3n+2)\big(512n^{3}+1664n^{2}+1730n+585\big)(6n+2)!}{(4n+3)(4n+5)(2n+4)!(4n+1)!},$$
$$D^{+}_{3n+2,1}=\frac{264\cdot 16^{n}(3n+2)\big(400n^{3}+1344n^{2}+1472n+525\big)(6n+2)!}{(4n+3)(4n+5)(4n+7)(2n+3)!(4n+1)!}.$$

(vii) 若 $r=2$ 和 $k=3n+2$，则 $m_{k,\,r}=4n+6$ 和

$$D^{-}_{3n+2,2}=\frac{18\cdot 16^{n}(3n+2)(6n+5)\big(2240n^{3}+10944n^{2}+16858n+8325\big)(6n+2)!}{(4n+3)(4n+5)(2n+5)!(4n+1)!},$$
$$D^{+}_{3n+2,2}=\frac{36\cdot 16^{n}(3n+2)(6n+5)\big(864n^{3}+3952n^{2}+5844n+2807\big)(6n+2)!}{(4n+3)(4n+5)(4n+7)(2n+4)!(4n+1)!}.$$

特别地，所有这些中心差均为正。

证明。 这可通过对 $T_{1,\,k,\,r}(x) = F_4(x)(1+2x)^{2k+r-1}$直接进行系数提取得到，随后对上述七种剩余类情形作常规化简。 □

定理 4.8 （主加数项的众数）。 固定 $r\in\{0,1,2\}$，并设 k 是可容许的。那么

$$H_{k,r}(x)=G_k(x)F_{k+r}(x)$$

是单峰的，且众数为

$$m_{k,r}:=\left\lfloor\frac{4k+2r+8}{3}\right\rfloor.$$

证明。 由定理 4.4， $G_k(x)$ 的系数序列为正且对数凹。由命题 4.5， $F_{k+r}(x)$ 的系数序列是单峰的。因此，命题 2.15 意味着 $H_{k,\,r}(x)=G_k(x)F_{k+r}(x)$ 是单峰的。

为了确定一个众数，写作

$$H_{k,r}(x)=T_{1,k,r}(x)+J_{k,r}(x),$$

其中

$$\begin{aligned}T_{1,k,r}(x)&:=F_4(x)(1+2x)^{2k+r-1},\\ J_{k,r}(x)&:=xF_4(x)(1+2x)^{k-1}(1+x)^{k+r}+xF_3(x)(1+x)^{k}(1+2x)^{k+r}\\&\quad+x^2F_3(x)(1+x)^{2k+r}.\end{aligned}$$

由于 $J_{k,r}(x)$ 的系数非负，$J_{k,r}$ 的每个系数都至多为

$$J_{k,r}(1)=97\,3^{k-1}2^{k+r+1}+35\,2^{k}3^{k+r}+35\,2^{2k+r}. \tag{1}$$

令$D^{-}_{k,\,r}$ 以及$D^{+}_{k,\,r}$ 为引理4.7中的两个中心差。若

$$D^{-}_{k,r}>J_{k,r}(1)\qquad\text{and}\qquad D^{+}_{k,r}>J_{k,r}(1),$$

then

$$[x^{m_{k,r}}]H_{k,r} > [x^{m_{k,r}-1}]H_{k,r}, \qquad [x^{m_{k,r}}]H_{k,r} > [x^{m_{k,r}+1}]H_{k,r},$$

因此，$H_{k,\,r}$ 的单峰系数序列在$m_{k,\,r}$处有一个众数。

因此，我们比较 $D^{\pm}_{k,\,r}$ 与 $J_{k,\,r}(1)$。在模 3的固定剩余类内，引理 4.7 给出了$D^{\pm}_{k,\,r}$的显式公式。直接化简这些公式可知，在每个剩余类中

$$D^{-}_{k+3,r} > 216\, D^{-}_{k,r}, \qquad D^{+}_{k+3,r} > 216\, D^{+}_{k,r}. \tag{2}$$

另一方面，式（1）给出

$$J_{k+3,r}(1) < 216\, J_{k,r}(1) \tag{3}$$

对每个 k 都成立，因为将 k 替换为 $k+3$ 时，$J_{k,\,r}(1)$ 中的前两项乘以 216，而最后一项只乘以 64。

现在固定一个剩余类。根据（2）和（3），当 k 在该剩余类内每次递增 3 时，比值 $D^{-}_{k,\,r}/J_{k,\,r}(1)$ 和 $D^{+}_{k,\,r}/J_{k,\,r}(1)$ 严格递增。在以下起始值处进行精确计算，可知两个比值首次超过 1 的位置：

r	$k \equiv 0$ （模 3）	$k \equiv 1$ （模 3）	$k \equiv 2$ （模 3）
0	18	22	17
1	15	16	23
2	21	16	17

因此，不等式 $D^{-}_{k,\,r} > J_{k,\,r}(1)$ 和 $D^{+}_{k,\,r} > J_{k,\,r}(1)$ 对其剩余类中达到或超过所示起始值的所有可容许 k 均成立。对于低于这些起始值的有限个其余可容许参数，根据命题 4.3 进行精确系数计算可直接得出

$$[x^{m_{k,r}}]H_{k,r} > [x^{m_{k,r}-1}]H_{k,r}, \qquad [x^{m_{k,r}}]H_{k,r} > [x^{m_{k,r}+1}]H_{k,r}.$$

因此，对于每个可容许参数对（k，r），$m_{k,\,r}$ 都是$H_{k,\,r}$（x）的众数。 □

命题4.9（KL 闭包分解的 Darroch 桥）。固定 $r \in \{0, 1, 2\}$并令

$$m_{k,r} := \left\lfloor \frac{4k + 2r + 8}{3} \right\rfloor.$$

假设$H_{k,\,r}$（x）是单峰的，且众数为$m_{k,\,r}$。那么每个众数都满足

$$E_{k,r}(x) = x(1 + 2x)^{2k+r+3}$$

位于 $\{m_{k,\,r}, m_{k,\,r} + 1\}$ 中。因此

$$I(U_{k,r}; x) = H_{k,r}(x) + E_{k,r}(x)$$

是单峰的，其众数位于同一个两点集合中。特别是，一旦已知 $H_{k,r}$ 的众数，确定 $I(U_{k,r};x)$ 的众数就归结为比较 $m_{k,r}$ 和 $m_{k,r}+1$ 处系数的单次桥接比较。

证明。根据命题 2.18，$E_{k,r}$ 的每个众数都位于

$$\left\{\left\lfloor\frac{4k+2r+9}{3}\right\rfloor,\left\lceil\frac{4k+2r+9}{3}\right\rceil\right\}.$$

由于

$$m_{k,r}=\left\lfloor\frac{4k+2r+8}{3}\right\rfloor,$$

检查 $4k+2r$ 模 3 的三个剩余类可知

$$\left\{\left\lfloor\frac{4k+2r+9}{3}\right\rfloor,\left\lceil\frac{4k+2r+9}{3}\right\rceil\right\}\subseteq\{m_{k,r},m_{k,r}+1\}.$$

因此，结论由引理 2.16得出。 □

定理 4.10（KL 闭包定理）。固定 $r\in\{0,1,2\}$，令 $U_{k,r}=U_{k,k+r}$ 为由 $T_{3,k,k+r}$ 添加边 $v_1a_{2,1}$后得到的单圈图。则：

(1) 对于 $r=0$ 和任意 $k\geq 3$，独立多项式 $I(U_{k,0};x)$ 是单峰的，但不是对数凹的；

(2) 对于 $r=1$ 和任意 $k\geq 3$，独立多项式 $I(U_{k,1};x)$ 是单峰的，但不是对数凹的；

(3) 对于 $r=2$ 和任意 $k\geq 4$，独立多项式 $I(U_{k,2};x)$ 是单峰的，但不是对数凹的。

在每种情形下，倒数第二个对数凹不等式都不成立。

证明。 倒数第二个不等式不成立，正是定理 4.6。根据定理 4.8，多项式$H_{k,r}(x)$ 是单峰的，其众数为

$$m_{k,r}=\left\lfloor\frac{4k+2r+8}{3}\right\rfloor.$$

命题4.9 于是推出

$$I(U_{k,r};x)=H_{k,r}(x)+E_{k,r}(x)$$

是单峰的。结合这两个结论即可得到所需结果。 □

推论 4.11（KL 闭包族的已验证范围锐化）。 固定 $r\in\{0,1,2\}$，并令 $\alpha_{k,r}=2k+r+6=\alpha(U_{k,r})$。那么，对每个容许的 $k\leq 400$，以下结论均成立。

(1) 关于 $I(U_{k,r};x)$ 的所有对数凹不等式均成立，唯独倒数第二个不等式除外。特别是，在此范围内倒数第二处断点是唯一的。

(2) 多项式 $H_{k,\ r}(x)\ = G_k(x)F_{k+r}(x)$ 是对数凹的。

(3) $H_{k,\ r}(x)$的一个众数为

$$\mathrm{mode}(H_{k,r}) = \left\lfloor \frac{4k+2r+8}{3} \right\rfloor .$$

(4) $E_{k,\ r}(x)\ = x(1+2x)^{2k+r+3}$ 的一个众数为

$$\mathrm{mode}(E_{k,r}) = \left\lfloor \frac{4k+2r+10}{3} \right\rfloor .$$

(5) $I(U_{k,\ r};\ x)$ 本身的一个众数为

$$\mathrm{mode}(I(U_{k,r};x)) = \left\lfloor \frac{4k+2r+9}{3} \right\rfloor .$$

证明。对于每个满足 $k \le 400$ 的可容许参数对 (k,r)，根据命题 4.3，在整数范围内对 $H_{k,r}(x)$、$E_{k,r}(x)$ 以及 $I(U_{k,r};x)$ 的系数进行了精确计算。随后直接检验所得的系数序列。精确计算表明，$I(U_{k,r};x)$ 的每个对数凹不等式都成立，只有倒数第二个不等式例外；$H_{k,r}(x)$ 是对数凹的，且所显示的众数公式成立。该定理已经给出了对于所有可容许参数，$I(U_{k,r};x)$ 具有单峰性。 □

备注 4.12（仍待解决的问题）。定理 4.10 解决了 KL 闭包族的核心存在性问题。尚未得到符号化证明的是所有精确计算所揭示的更强现象，即对于每一对可容许参数唯一的 对数凹性断点是倒数第二个指标 (k,r)。

5 普适且穷尽的扩张定理

当一条计算性陈述对所列每棵树的每条非边都成立时，我们称它是普适的 。本文报告的所有计算均根据命题 2.7，使用整数精确完成；全程未使用浮点运算。

定理 5.1（针对 Galvin 族和 Bautista–Ramos 族的计算机辅助普适定理）。设

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{T_{4,t} : 5 \le t \le 9\} \cup \{T_{5,t} : 5 \le t \le 8\} \cup \{T_{6,5}, T_{6,6}\} \\ \cup \{T_{G,2,t} : 6 \le t \le 8\} \cup \{T_{G,3,t} : 6 \le t \le 8\}.\end{aligned}$$

若 $T \in \mathcal{F}$ 且 e 是 T 的任意一条非边，则单圈图 $T+e$ 的独立多项式是单峰的，但不是对数凹的。

族	扩展已检查	判定
$T_{4,}{}^{t}$, $5 \le t \le 9$	9, 170	全都是单峰的，全都非对数凹
$T_{5,}{}^{t}$, $5 \le t \le 8$	9, 910	全都是单峰的，全都非对数凹
$T_{6,}{}^{5}$ 和 $T_{6}{}_{,6}$	5, 148	全部为单峰，全部非对数凹
$T_{G,2,}{}^{t}$, $6 \le t \le 8$	12, 978	全部单峰，全部非对数凹
$T_{G,3,}{}^{t}$, $6 \le t \le 8$	29, 097	全部单峰，全部非对数凹
总计	66,303	精确穷尽验证

表 3：定理 5.1给出的通用族。

证明。 对于列表中的每棵树，均对每条非边进行了精确枚举。对于每个扩张 $T + e$，命题 2.7 给出了精确的独立多项式，并检查了所得系数序列是否具有单峰性和对数凹性。结果汇总于表 3。在表中的全部 66，303 个扩张中，每个系数序列都是单峰的，且每个序列至少有一处不满足对数凹性。 □

定理 5.2 （针对所测试的 Kadrawi–Levit 族的计算机辅助定理）。以下集合中的每棵树的每一种单边扩张，其独立多项式都是单峰的：

$$T_{3,k,k}\ (4 \le k \le 12), \quad T_{3,k,k+1}\ (4 \le k \le 9), \quad T_{3,k,k+2}\ (4 \le k \le 9),$$

$$T^{*}_{3,k,k+1}\ (3 \le k \le 8), \quad T^{*}_{3,k-1,k+1}\ (4 \le k \le 9), \quad T^{*}_{3,k,k}\ (4 \le k \le 9),$$

$$T^{*}_{3,k,k+3}\ (4 \le k \le 9).$$

然而，所测试的集合中没有一个能普遍保持非对数凹性：在每个列出的族和每个测试范围内，都存在对数凹的单边扩张。

证明。 证明过程同样是精确且穷尽的。对于每一组列出的参数对 $(m,\ n)$，我们枚举了 $T_{3,\ m,\ n}$ 或 $T^{*}_{3,\ m,\ n}$ 的所有非边，通过命题 2.7计算每个扩张的独立多项式，并直接检验所得的系数序列。结果见表 4。所有 34，122 个经测试的扩张均保持单峰。另一方面，最后一列记录了 12，425 个对数凹扩张，因此在所有经测试的 KL 范围内，普遍非对数凹性均不成立。 □

族和测试范围	扩展 已检查	对数凹 扩展
$T_{3,k,k}$, $4 \le k \le 12$	7,860	2,296
$T_{3,k,k+1}$, $4 \le k \le 9$	4,136	1,306
$T_{3,k,k+2}$, $4 \le k \le 9$	4,586	1,822
$T^*_{3,k,k+1}$, $3 \le k \le 8$	3,710	1,216
$T^*_{3,k-1,k+1}$, $4 \le k \le 9$	4,136	1,394
$T^*_{3,k,k}$, $4 \le k \le 9$	4,136	1,211
$T^*_{3,k,k+3}$, $4 \le k \le 9$	5,558	3,180
总计	34,122	12,425

表 4：经测试的 Kadrawi–Levit族：每个扩张均保持单峰，但其中许多是对数凹的。

例 5.3（一个具有代表性的扩张）。 从 $T_{3,4,4}$ 出发，添加一条合适的边即可得到一个具有代表性的例子。其独立多项式为

$$I(U;x) = 1 + 26x + 299x^2 + 2022x^3 + 9000x^4 + 27901x^5 + 62014x^6 + 99907x^7 + 116133x^8 + 95263x^9 + 52524x^{10} + 17593x^{11} + 2783x^{12} + 43x^{13} + x^{14}.$$

该序列是单峰的，但在倒数第二个指标处不满足对数凹性，因为

$$43^2 < 2783 \cdot 1.$$

这个例子是符号族 $U_{k,r}$ 的典型代表：断裂发生在非常靠近顶端的位置，而整体形状仍然高度单峰。

6 奇偶分离前沿计划与展望

前几节已经给出了无穷多个和有限多个单峰但非对数凹单圈图的明确构造来源。当前的结构核也为进一步推进研究指出了一条更精细的路线。

猜想 6.1（固定储备族内的奇偶分离前沿）。 对于任意固定的储备族和任意固定的闭包规则，单峰但非对数凹单圈图首次出现时的最小参数值，会根据 $\mathrm{dist}_T(u, v)$ 的奇偶性分裂为两个不同的前沿部分。等价地，奇圈闭包与偶圈闭包形成彼此分离的符号化机制。

注释6.2（各储备族的预期作用）。图族计划自然分为四个渠道。

通道 1. KL 闭包. 这些构成了首个明确的无限单圈图族，因为基树本身已经是符号化的，而且其单峰性已为人所知。

通道 2. Galvin 闭包. 这些例子检验了树缺陷在单边闭包下的后期表现。它们自然地构成了这样的单圈图族：其断点仍接近序列的顶部。

通道 3：Ramos–Sun 闭包。 这些构成了该项目中有限且由计算引导的一部分。其作用是产生小型零星单圈图例子，并提示在符号族中尚未显现的低阶模式。

通道 4：Bautista–Ramos 闭包。 这些是为多断点问题设计的。它们应能表明，单边闭包是否能够保留或放大对数凹性的若干不同失效情形。

问题 6.3 (KL 闭包定理)。 在 $T_{3,\ m,\ n}$ 以及 $T^{*}_{3,\ m,\ n}$上固定一种规范闭包规则。精确确定对于哪些参数，所得单圈图是单峰但非对数凹的。

问题 6.4 (Galvin 到单环图的转移)。 在 *Galvin* 族上构造一种闭包规则，使对数凹性的一个后期断点能够在单圈图中保留下来。确定在命题 *2.4* 的传递公式下，断点指标如何移动。

问题 6.5 (来自 Ramos–Sun储备库的有限偶发闭包)。 将 *Ramos* 和 *Sun* 的有限目录用作搜索空间，以寻找其独立多项式单峰但非对数凹的最小单圈图。按奇圈与偶圈闭包类型对所得例子进行分类。

问题 6.6 （多断点单圈图族）。 从 *Bautista–Ramos* 的多断点图族 *[2]* 以及含两个和三个连续断点的较新模式图族 *[3]*, 出发，判断单边闭包能否构造出独立多项式在多个指标处，甚至在若干连续指标处不满足对数凹性、但仍保持单峰的单圈图。

问题 6.7 （局部分支分类）。 用引理 *2.10*中保留的路径核心所附带的有根分支数据，描述最初的极值闭包。等价地，对环周围导致命题 *2.4* 中的修正项变为负数的局部度数构型进行分类。

问题 6.8 （闭包下的零点集）。 对于基于基本 P_2的树储备集，*Bautista-Ramos*、*Guillén-Galván* 和 *Gómez-Salgado* 证明，零点的非孤立极限点位于圆 $|x+1/3| = 1/3$ *[3]*上。确定这些储备集的典范单边闭包是否具有类似的 *Beraha–Kahane–Weiss* 描述，以及奇圈闭包和偶圈闭包是保持还是扰动该圆。

定理 6.9 （图族计划的结构核）。 构造树的单峰但非对数凹单边闭包，依赖于以下严格的输入：

（*i*） 命题 *2.2*中的加边恒等式；

（*ii*） 推论*2.3*和命题*2.4*中的系数与缺陷传输公式；

（*iii*）命题*2.7*中的环转移递推；

（*iv*）命题 *2.8*中的奇偶性字典；

（*v*）引理 *2.10* 和 *2.11*中的存活路径与分支分解陈述；

（*vi*）定理 *3.3*中关于偶圈闭包的上三分之一单调性定理。

因此，一旦确定了一个储备族和一条闭包规则，剩余的族特定工作就集中于两项计算：多项式 $I(F_{u,v};\ x)$，以及对尚未受到（vi）控制的部分中的修正系数序列进行单峰性证明。

证明。 条目（i）–（v）已在前文各节中证明，条目（vi）即为定理 3.3。结论句正是命题3.7 与引理 $F_{u、v}$ 所给出的 2.10 和 2.11中的描述结合起来的结果。 □

综合来看，本文现在拥有清晰的口号和明确的定理主线。其口号是：可以将树闭合为单环反例。核心陈述是引言中给出的 KL 闭包定理，定理 4.10证明了它对每个可容许参数均成立。定理 4.6 揭示了非对数凹性的符号来源，定理 4.8 给出了主加数项的符号众数计算，而命题 4.9 则将该众数陈述转化为整个闭包多项式的单峰性。推论4.11随后通过展示唯一倒数第二断裂和精确众数公式，在一个较大的精确范围内进一步细化了这一图景。定理 5.1和 5.2 表明，更广泛的储备族计划已经在数学上取得了富有成效的成果。剩下的前沿问题已不再是 KL 族的存在性定理，而是更精细的全参数断点唯一性问题、将同一方法推广到更广泛的 Galvin、Ramos–Sun 和 Bautista–Ramos 模式图储备族，以及近期树侧递推理论所提出的新的零点集和连续断点问题。

参考文献

[1] Y. Alavi、P. J. Malde、A. J. Schwenk 和 P. Erdős，图的顶点独立集序列并非受到约束，Congressus Numerantium 58(1987)，15–23。[2] C. Bautista-Ramos，树的独立多项式中对数凹性的多处失效，arXiv:2511.00334，2025年。[3] C. Bautista-Ramos、C. Guillén-Galván 和 P. Gómez-Salgado，树的非对数凹独立多项式的线性递推，arXiv:2603.14204，2026年。[4] A. Bhattacharyya 和 J. Kahn，具有非单峰独立集序列的二分图，The Electronic Journal of Combinatorics20 (2013)，第4期，论文 P11。[5] F. Brenti，组合学中的单峰、对数凹和 *Pólya* 频率序列，Memoirs of the American Mathematical Society 81 (1989)，第413期。

[6] *J. N. Darroch*，关于独立试验中成功次数的分布，数理统计年刊 *35*（*1964*年），*1317–1321*。[7] *D. Galvin*，具有非对数凹独立集序列的树，*arXiv:2502.10654*，*2025*年。[8] *I. Gutman* 和 *F. Harary*，匹配多项式的推广，*Utilitas Mathematica 24*（*1983*年），*97–106*。[9] *I. Gutman*，若干复合图中的独立顶点集，*Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 52(66)*（*1992*年），*5–9*。[10] *I. A. Ibragimov*，关于单峰分布的复合，*Theory of Probability and Its Applications 1*（*1956*年），第*2*期，*255–260*。[11] *O. Kadrawi* 和 *V. E. Levit*，从*26*阶起，树的独立多项式并非总是对数凹，*Ars Mathematica Contemporanea 25*（*2025*年），第*4*期，论文 *P4.03*。[12] *V. E. Levit* 和 *E. Mandrescu*，柯尼希-埃格瓦里图独立多项式的部分单峰性，*Congressus Numerantium 179*（*2006*年），*109–119*。[13] *G. M. X. Li*，两类树的独立多项式的单峰性，*arXiv:2603.03025*，*2026*年。[14] *E. Ramos* 和 *S. Sun*，树单峰性猜想的人工智能增强方法，*arXiv:2510.18826*，*2025*年。[15] *V. R. Rosenfeld*，图的根积的独立多项式，离散应用数学 *158*（*2010*年），*551–558*。[16] *B.-X. Zhu*，团覆盖积与独立多项式的单峰性，离散应用数学 *206*（*2016*年），*172–180*。