arXiv:2603.17125v1 [math.AT] 17 Mar 2026

几何环的弦距离变换及其持久同调

James A. D. Binnie[*1, 2]，Otto Sumray[†3, 4, 5]，以及 Ka Man Yim[‡6]

[1]数学学院，卡迪夫大学，英国[2]海尔布隆数学研究所，布里斯托尔，英国[3]德累斯顿系统生物学中心，德国[4]马克斯·普朗克分子细胞生物学与遗传学研究所，德国[5]马克斯·普朗克复杂系统物理研究所，德国[6]统计学系，牛津大学，英国。

2026年3月19日

摘要

我们提出了一个关于将 S^1 嵌入欧几里得空间的嵌入的等距变换与参数化不变量。具体而言，我们将嵌入圆上点对之间的距离表示为定义在莫比乌斯带上的函数；该莫比乌斯带即 S^1 的两点有限子集空间。我们将此函数称为该嵌入的弦距离变换。我们证明，弦距离变换的下水平集持续同调满足所需的等距变换与参数化不变性；此外，相对于圆嵌入空间上的惠特尼拓扑以及持久图空间中的瓶颈距离，该变换是连续的。随后，我们考察了弦距离变换对于 C^2 和有限分段线性嵌入的一般行为。在 C^2 情形下，我们证明，在圆嵌入的一个开稠子集上，弦距离变换的非边界临界点有限且非退化。因此，对于一般位置的 C^2 嵌入，其持久同调逐点有限维。在有限分段线性情形下，我们也找到了非退化临界点的分段连续类比，并给出了使弦距离变换的同调临界点非退化的一般条件。为了从几何角度理解弦距离变换及其持久同调，我们给出了 C^2 和有限分段线性非退化临界点的几何刻画。最后，我们探讨了如何推广弦距离变换，以捕捉嵌入形状上涉及 $n \geq 2$ 个点的几何特征，并将其视为定义在 n点有限子集空间上的函数。

[*]电子邮箱：BinnieJA@cardiff.ac.uk

[†]电子邮箱：sumray@mpi-cbg.de

[‡]电子邮箱：kaman.yim@stats.ox.ac.uk

目录

1 引言 3

2 背景 8.

2 1 构形空间和有限子集空间 .

2 1 1 11 . . 有限子集空间的分层 . . 圆的第二有限子集空间作为莫比乌斯带 .12 2 2 . 莫尔斯理论与持久同调 . 16 2 21 . . 次水平集过滤的持久同调 .16 2 22 . . 带边界流形的光滑莫尔斯理论 .18 2 23 . . 过滤单纯复形的莫尔斯理论 .19 2 3 . 微分拓扑 .21 24 23. 正可达子集 .

3 弦距离变换持久同调的一般性质 23。

3 1 连续性 .

24324 32 3 25。 对称不变性 .。 持久同调对系数域的依赖性。 .

4 欧几里得空间中的光滑圆嵌入 27。

4 1 具有莫尔斯支撑弦距离变换的嵌入的一般性 . . . . . .

29429 411 12 . . 边界附近的临界点 . . 开性 .31 413 . . 稠密性 .33 42 37. 临界点的几何刻画 .

5 分段线性闭曲线 38.

5 1 分段线性闭曲线 .

395.2 距离函数 .405.3 神经复形的过滤 .425.3.1 神经 .435.3.2 滤过 .445.4 持久同调 .45 541 46. . 临界点的几何刻画 .

6 高阶有限子集空间与体积变换 50 61 高阶有限子集空间的拓扑性质 .50 62 50. 体积函数 .**7 讨论与未来工作** 53**A Morton 的构造： 2nd 的对称积 S^1** **54**

1 引言

拓扑数据分析（TDA）关注形状的统计分析。解决这一问题的一种主流范式是将形状转换为向量特征，以表达形状显著的拓扑和几何性质。用数学术语来说，这需要设计一个特征映射 F，将形状空间映射到向量空间 V。将形状的特征表示为向量后，便可应用经典统计工具分析形状数据集。本研究探讨如何对几何环进行拓扑数据分析。我们的工作受到生物和化学形状分析问题的启发，其中细胞轮廓和环状化合物等结构被建模为几何环 [13]。

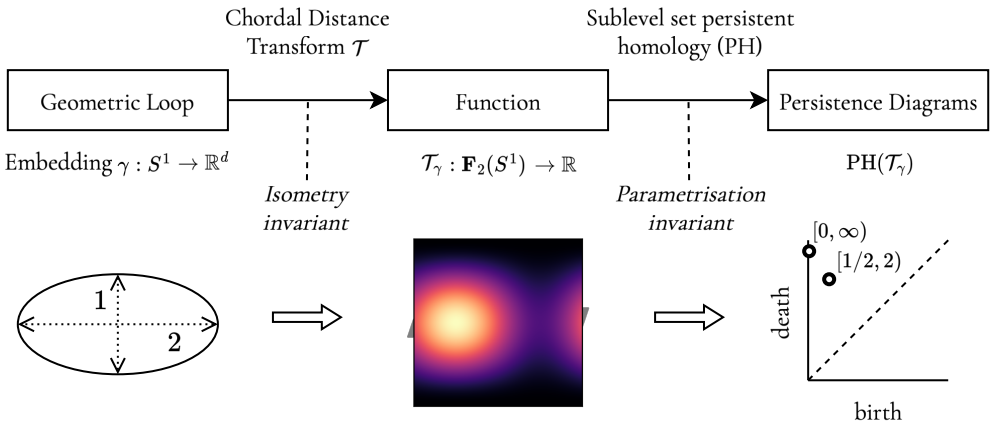


图 1：弦距离变换将由嵌入 γ 表示的几何环变换为莫比乌斯带上的函数 $\mathcal{T}_\gamma$。这为我们的几何环提供了一种等距不变表示。对 $\mathcal{T}_\gamma$ 的次水平集滤过进行持久同调分析，可概括环的几何特征，且该概括不受 γ 重参数化的影响。

几何环空间由嵌入欧几里得空间的圆嵌入空间参数化 $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^d)$。然而，直接对这些嵌入应用统计方法可能颇具挑战，因为有无穷多个等价的嵌入表示同一个几何环。因此，基于有限个环嵌入观察值推断出的任何统计模型，都可能无法很好地泛化到未见数据。为克服这一挑战，我们考虑一种特征映射（图1），它由两个变换复合而成：

$$F: \quad \mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^d) \xrightarrow{\mathcal{T}} C(\mathbf{F}_2(S^1), \mathbb{R}) \xrightarrow{\mathrm{PH}} \mathbf{Dgm} \tag{1}$$

第一个映射是**弦距离变换** $\mathcal{T}$，它将圆嵌入 γ 上各点的距离矩阵以拓扑方式实现为实值函数 $\mathcal{T}_\gamma$，定义在莫¨比乌斯带上。莫¨比乌斯带与圆的两点有限子集空间$\mathbf{F}_2(S^1)$ 同胚。然而，由于 $\mathcal{T}_\gamma$ 取决于 γ 的参数化方式，我们应用**下水平集持续同调**(持久同调) [20, 24, 23] 来消除这一与环几何无关的依赖。持久同调是对函数的拓扑概括，用以描述次水平集变化的过程。

$$\Gamma^a := \{x \in \mathbf{F}_2(S^1) \ : \ \mathcal{T}_\gamma(x) \leq a\} \tag{2}$$

随着阈值参数 $a \in [0, \infty$ 的变化）。 $\mathcal{T}_\gamma$ 在维数 i 上的持久同调，是次水平集的同调群之间的一族线性映射（系数取自某个固定域 $\mathbb{F}$），由包含映射诱导：

$$H_i(\Gamma^\bullet) : (H_i(\Gamma^a) \to H_i(\Gamma^b))_{0 \leq a \leq b < \infty}$$

这族线性映射，即持久模，由持久图 $\mathbf{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$ 表示，它描述了随着滤过参数 a 变化，同调特征的出生与消亡。随后可以将持久图向量化，生成适用于统计和机器学习算法的特征（关于持久图向量化方法的综述，参见 [4]）。

本文重点探讨特征映射 F（见式（1）的理论性质，以证明其在几何环数据分析中的应用合理性。具体而言，我们考察 F的四项理想性质：

	有限分段线性嵌入	光滑嵌入 ($C^k, k \geq 2$)
连续性	$\mathcal{T}$：嵌入$^k(S^1, \mathbb{R}^d) \to C^k(\mathbf{F}_2(S^1)\ \mathbb{R})$ 关于 $k \geq 0$ (引理 3.2)连续 持久同调 $\circ\mathcal{T}$：嵌入$(S^1, \mathbb{R}^d) \to \mathbf{Dgm}$ 连续（推论 3.3）。	
不变性	持久同调 $\circ\mathcal{T}$关于 S^1 的重参数化和欧几里得等距变换保持不变——对于任意拓扑嵌入（命题 3.5）	
持久同调模的温和性 持久同调($\mathcal{T}_\gamma$)	是（命题 5.6 和推论 5.7）	在一般位置的（即 开且稠密）嵌入空间的子集 $\Xi \subset \mathrm{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$（定理 4.3）
几何刻画-特征化 of 临界点 $\mathcal{T}_\gamma$（即特征的诞生与消亡 在 PH($\mathcal{T}_\gamma$) 中）	满足一般条件时的非退化临界点——条件(C1)至(C3) 均成立，几何与同调描述在定义5.13和定理5.14 分别别。	非退化于 Ξ；描述于定理4.18

表 1： $\mathcal{T}$的主要性质概述。对于从圆到欧几里得空间的拓扑嵌入，持久同调的连续性与不变性成立。我们针对两种特殊的嵌入情形——有限分段线性嵌入和 C^2 ——证明了可以得到温和的持久模，并对具有不同莫尔斯指标的临界点给出几何刻画。

1. F的连续性；2. F 在闭曲线 γ的欧几里得等距变换和重参数化下的不变性；3. F 的温和性（即持久图 $F(\gamma) = \mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$是否由有限多个点表示）；以及 4. 持久图 $\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$的几何解释。

我们在表1中总结了如何回答这些问题。对于拓扑圆嵌入$\mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^d)$，我们分别在推论 3.3 $\circ\mathcal{T}$和命题 3.5 中证明，PH 在嵌入的重参数化和欧几里得等距变换下具有连续性和不变性。对于$\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$的温和性和几何解释，我们将研究范围限定在两大类圆嵌入上，其中嵌入 γ 或者是 C^2，或者是有限分段线性的（PL）。PL 情形出现在这样的应用中：我们可能只能观测到某条闭曲线的有限个样本$(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}$，并使用分段线性插值来近似其底层形状。在化学中，这类情形也自然出现，因为我们可以将环状化合物构型表示为分段线性闭曲线。 C^2 从微分几何的角度看，情形也具有独立的理论价值。我们研究 C^2 情形也有实际动机，因为它描述了使用样条对有限数据$(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 进行的平滑插值。

对 C^2 和分段线性嵌入的限制，使我们能够采用莫尔斯理论方法，探讨持久图 $\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$ 的温和性，以及 $\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$ 中所描述同调特征的几何解释。莫尔斯理论使我们能够利用函数临界点的解析性质，约束函数次水平集的拓扑。如果临界点是非退化的，那么它们对应于滤过 Γ^a 中同调特征的诞生或消亡，这一点总结在持久图 $\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$ 中。因此，通过研究 $\mathcal{T}_\gamma$ 的非退化临界点如何取决于 γ 的几何和解析性质，我们可以将持久图 $\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$ 与闭曲线 γ 的底层几何联系起来。

在嵌入是 C^2的情形下，我们运用微分拓扑中的横截理论工具和经典的（光滑）莫尔斯理论证明：对于一般圆嵌入 γ，其弦距离变换 $\mathcal{T}_\gamma$ 在 $\mathbf{F}_2(S^1)$的内部上只有有限个非退化临界点。因此，对于一般嵌入 γ，滤过 Γ^a 中每个非平凡的同调特征出生或消亡，都可以与 $\mathcal{T}_\gamma$的一个非退化临界点相关联，并且持久图 $\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$ 是温和的（定理 4.3）。当 γ 是分片线性的情况下，光滑莫尔斯理论不适用。然而，我们可以改用组合方式描述滤过 Γ^a $\mathbf{F}_2(S^1)$，因为 Γ^a 同伦等价于一个有限单纯复形的滤过（命题 5.6）。接下来我们

利用离散/组合莫尔斯理论分析单纯形过滤。由于我们可以用有限数据描述同调变化，因此可以得出 $\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$ 是温和的。这一同伦等价还给出了一个组合算法，使我们能够在分片线性情形下精确计算持久同调 $\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$。此外，我们证明，如果一个分片线性嵌入满足从 (C1) 到 (C3) 的一般条件，那么我们就可以识别出分片线性情形下 C^2-非退化临界点的对应物（定理5.14）。

在上述一般位置的情形中，我们可以通过研究与这些同调特征相关的 $\mathcal{T}_\gamma$ 的非退化临界点的几何意义，来解释 $H_i(\Gamma^\bullet)$ 中同调特征的出生与消亡。由于 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 是带边界二维流形（事实上是一个莫比乌斯带），$\mathrm{F}_2(S^1)$ 内部的 $\mathcal{T}_\gamma$ 的非退化临界点要么是极小值点、鞍点，要么是极大值点；$H_0(\Gamma^\bullet)$ 中一个特征的出生对应一个极小值点，$H_1(\Gamma^\bullet)$ 中一个特征的消亡对应一个极大值点，而 $H_0(\Gamma^\bullet)$ 中一个特征的消亡或 $H_1(\Gamma^\bullet)$ 中一个特征的出生则对应一个鞍点。在 C^2 情形下，我们在定理 4.18 中根据 γ 的局部切线和曲率条件，对极小值点、鞍点和极大值点作几何描述。在 PL 情形下，我们在定义 5.13 和定理 5.14 中，根据线段与弦之间夹角的锐性或钝性，对它们作几何描述。

最后，我们讨论如何将弦距离变换推广到任何嵌入 $X \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ 欧几里得空间的情形，以编码高阶几何信息。我们提出一种称为体积变换 Vol_k的推广；当 $X = S^1$ 和 $k = 1$ 时，它可还原为弦距离变换 $\mathcal{T}$。我们还讨论了推导此类推广的理论界所面临的挑战，因为流形的高阶有限子集空间可能是分层空间，无法直接应用针对流形的标准微分拓扑和莫尔斯理论。

弦距离变换

我们提出将弦距离变换 $\mathcal{T}$作为嵌入 γ的几何表示，利用几何环上点对之间的距离 $\gamma(z_1)$ $\gamma(z_2)$。考虑环面上的连续函数 $d_\gamma\colon S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$，其中 $d_\gamma(z_1, z_2) = \|\gamma(z_1) - \gamma(z_2)\|_2$。直观地说，我们可以用 d_γ 来表示闭曲线的几何形状。然而，d_γ 包含冗余信息，因为交换 z_1 和 z_2 时，d_γ 具有对称性；环面一半上的函数与另一半携带相同的信息（见图2）。为消除这种冗余，我们考虑商空间 $\mathrm{F}_2(S^1)$ $= (S^1 \times S^1)/S_2$上的诱导函数，该空间与莫比乌斯带 M¨同胚 $\mathcal{M}$。空间 $\mathrm{F}_2(S^1)$是基数至多为 2 的子集 $\{z_1, z_2\} \subset S^1$ 所构成的空间。由于 $\{z_1, z_2\}$ 定义了圆上的一条弦，我们可以将 $\mathrm{F}_2(S^1)$视为圆上弦的空间。因此，弦距离变换是一个将弦 $\{z_1, z_2\}$ 映射到其端点之间距离的函数 $\|\gamma(z_1) - \gamma(z_2)\|_2$，其中端点位于嵌入环上。

定义 1.1. 弦距离变换 $\mathrm{T} : \mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^d) \to C(\mathbf{F}_2(S^1)\ \mathbb{R})$ 是一个函数，它将圆嵌入 $\gamma\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ 映射到唯一的连续映射 $\mathrm{T}\gamma\colon \mathbf{F}_2(S^1) \to \mathbb{R}$，其定义域为 $S^1 \times S^1$ 的商空间 $\mathbf{F}_2(S^1)$，并满足 $d_\gamma = \mathrm{T}\gamma \circ q$:

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \xrightarrow{d_\gamma} & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & \nearrow_{\exists!\mathrm{T}\gamma} & \\ \mathbf{F}_2(S^1) & & \end{array} . \tag{3}$$

明确地说，$\mathrm{T}C \quad S^1 \quad \overset{\gamma}{\mathbb{R}} \qquad \to \qquad (\{z_1, z_2\}) = \|\gamma(\,)\,(\,)\|_2$。平滑弦长距离变换 $\mathcal{T}\colon \mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^d)\ (\mathbf{F}_2(\,)\,)$ 定义为。

$$\mathcal{T}_\gamma = \frac{1}{2}\mathrm{T}_\gamma^2. \tag{4}$$

注 1.2。为推导理论结果，我们在此主要采用平滑弦长距离变换，因为当 γ 为 C^k 时，$\mathcal{T}_\gamma$ 是定义在作为带边界流形的 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 上的 C^k 映射。我们推导出的关于 $\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$ 的理论性质可扩展至 $\mathrm{PH}(\mathrm{T}\gamma)$，因为 $\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$ 与 $\mathrm{PH}(\mathrm{T}\gamma)$ 的持久图之间存在双射（引理 3.1）。在实际应用中，我们应使用 T，因为它是从 $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^d)$ 到 $C(\mathrm{F}_2(S^1)\ \mathbb{R})$ 的 2-利普希茨映射（引理 3.2）。

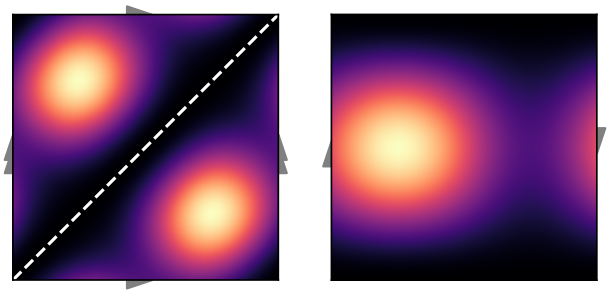
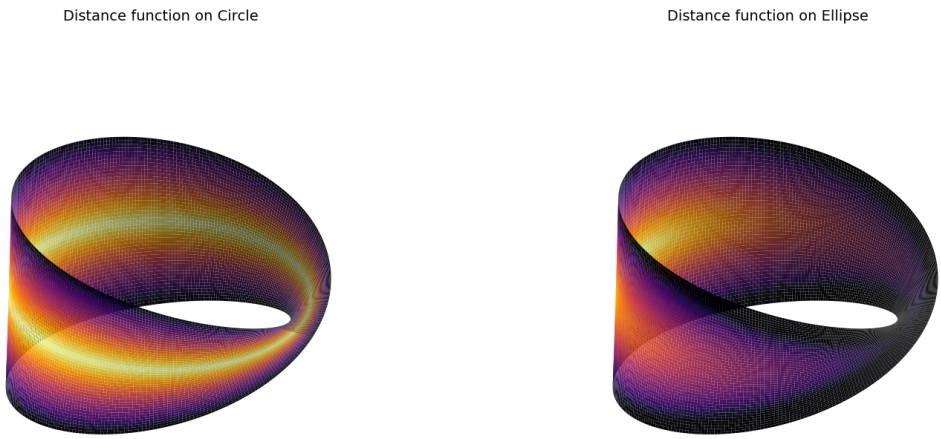


图2：我们将圆嵌入 γ的弦距离变换表示为点对距离矩阵的函数 d： $S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$。由于距离矩阵在置换 $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$下具有对称性（直观上表现为沿对角线反射），我们只考虑圆上点对的距离，并对置换 $\{z_1, z_2\}$取模，以去除对称性带来的冗余信息。由此得到一个定义在 S^1的二点子集空间 $\mathbf{F}_2(S^1)$上的函数 $\mathrm{T}\gamma$；该空间与莫比乌斯带 $\mathcal{M}$同胚。我们称此函数为 γ的弦距离变换，因为 $\mathbf{F}_2(S^1)$中的每个 $\{z_1, z_2\}$ 都对应圆上的一条弦，而 $\mathrm{T}\gamma(\{z_1, z_2\})$编码了嵌入环上每条弦的长度。左图展示了长轴为 $= 2$、短轴为 $= 1$的椭圆 γ的距离矩阵。右图展示了由 d导出的弦距离变换 $\mathrm{T}\gamma$： $\mathbf{F}_2(S^1) \to \mathbb{R}$。



(a) 圆的弦距离变换。

(b) 椭圆的弦距离变换。

图3：圆的弦距离变换的热图表示（图3a）和椭圆的弦距离变换的热图表示（图3b），作为定义在 M¨obius 带上的函数。此处椭圆的长轴为 $a = 8$，短轴为 $b = 1$。

相关工作

形状统计 在形状分析中，人们开发了多种统计摘要，用于量化并比较数据的形状。基于拓扑数据分析的方法包括持久同调变换（PHT） [57] 和欧拉示性数变换（ECT） [31, 50]，它们分别记录形状沿各个方向过滤后得到的持久同调和欧拉示性数。对于广泛的形状类别，在温和条件下，PHT/ECT 是单射，因而能够唯一确定底层集合。然而，这两种方法都不具有旋转/平移不变性，并且需要预先对形状进行定向，尽管已有方法可以消除部分这种敏感性（例如 [61]）。持久同调已被直接用于研究细胞轮廓 [13] 以及打结和无结蛋白质的环形状 [11]。较为经典的方法包括椭圆傅里叶描述子（EFD） [53, 42] 和普氏分析 [30, 1]。EFD 本质上是参数化闭合轮廓的笛卡尔坐标函数的傅里叶展开。EFD 可以归一化，从而获得不变性

然而，对于平移和旋转（以及缩放），与 PHT 和 ECT 一样，这种归一化并非规范的；通常通过将质心置于原点来实现平移不变性。普氏分析通过优化消除形状（通常表示为地标集）之间的平移、旋转和缩放差异，实现几何对齐；消除这些外在差异后，便可对形态变化进行比较研究。

距离矩阵上的持久同调 将持久同调应用于作为过滤复形的距离矩阵，是若干与时间序列分析及动力系统特征刻画相关的研究中出现过的一个概念。在 Takashi Ichinomiya 的一篇文章中 [36] 以及 David Hien 的博士论文中 [34], , 时间序列数据的距离矩阵（也称为递归图） [22], 被表示为一种称为距离复形的过滤立方复形。在 [36] 中，该复形构造于完整的距离矩阵之上；而 [34] 则将复形限制在距离矩阵的上三角部分，因为距离矩阵关于对角线对称。这等价于将无序双点构形空间 $\mathbf{F}_2([0,1])$ 的 $[0,1]$ 表示为一个立方复形。Takashi [36] 通过实证表明，从距离复形的持久同调中提取的特征可用于区分动力系统中的周期性行为和混沌行为，并且有助于心电图数据的分类。在 [34], 中，Hien 着重研究了这一构造的理论性质，并证明 0th 距离复形的持久同调所捕获的信息多于 1st 将时间序列作为点云时其 Vietoris-Rips 复形的持久同调 [34, 定理 5.2。5]。

如果将 S^1 的嵌入视为循环时间序列数据，那么弦距离变换可以看作一种类似的构造。弦距离变换的子水平集过滤，是针对显式循环数据的距离复形的连续版本。由于我们考虑的不是 $[0,1]$ 的嵌入，而是 S^1 的嵌入，因此在我们的情形中，被过滤的空间是一个 M¨obius 带 $\mathrm{F}_2(S^1) \approx \mathcal{M}$，而不是分别与 $[0,1]^2$ 或 $\mathrm{F}_2([0,1])$ 同胚的空间。在研究对有限循环数据进行插值的 S^1 的分段线性嵌入 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}$ （第 5 节）时，我们将此类嵌入的弦距离变换视为定义在作为流形的 $\mathcal{M}$ 上的分段连续函数；这不同于基于点集 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}$构造的距离复形。距离复形的滤过仅由点集中的点 x_i、x_j 之间的距离诱导，而弦距离变换则考虑了在 x_i 和 x_{i+1} 之间插值的分段线性嵌入上各点之间的距离。正如我们在第 5 节所见， $\mathcal{M}$ 的弦距离变换滤过的同调临界值可能由插值点诱导，而距离复形的临界值则只有 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 中各点之间的距离。

构形空间与有限子集空间 构形空间记录了拓扑空间中有限多个互异点的位置。若该空间是一个流形，则构形空间的同伦类型是其底层流形的一个同胚不变量，因此已在代数拓扑中得到广泛研究 [40, 19, 38]。有限子集空间于20世纪初被引入 [14, 15], 近年来 Handel [32] 和Tuffley [54, 56] 进一步给出了关于一般拓扑空间、曲面和图的有限子集空间的同伦结果。图上的构形空间也已出现在应用中，例如 [27]。

一个与弦距离变换相关的函数曾与构形空间一起用于内接正方形问题。在 Vaughan 的证明 [59] （见 [46] 的第4节）中，他证明任何平面简单光滑曲线都包含一个矩形，并定义了一个函数 $f\colon \mathbf{F}_2(S^1) \to \mathbb{R}^3$其中 $f(\{x,y\}) = (\frac{1}{2}(\gamma(x)+\gamma(y)), \|\gamma(x)-\gamma(y)\|)$。若 f 是单射，则它将诱导 $\mathbb{R}P^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个嵌入，这是不可能的。 f 为单射意味着 γ 包含一个内接矩形。

大纲

本文将概述各部分内容。第 2 节介绍本文所需的数学背景：第 2.1 节介绍构形空间和有限子集空间。我们尤其关注$\mathbf{F}_2(S^1)$，即 2nd 的有限子集空间，并证明它同胚于一个 M¨obius 带 $\mathcal{M}$。我们还给出 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 作为带边界流形的一个显式图册，并利用它为本文余下部分中定义在 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 上的函数提供局部坐标。第 2.2 节介绍光滑莫尔斯理论和次水平集过滤的持久同调背景，并阐明特征的诞生与消亡如何与次水平集持久同调中的非退化临界点相关。我们引入莫尔斯支撑的概念（定义 2.22），用于描述本文所考虑的函数，

即定义在带边界流形上且在边界处为零的非负函数；这一概念将在第 4节中使用。对于离散情形，我们介绍 Conley 指数的背景知识，并将在第 5节中使用。在第 2.3 节中，我们简要介绍函数空间上的强 Whitney 拓扑、射丛和横截理论；这些内容是第 4.1节一般性结果所必需的。

在 第 3 节中，我们介绍弦距离变换及其持久同调的一些基本且理想的性质。我们在第 $\mathcal{T}$节证明 持久同调 $\circ\mathcal{T}$是连续变换。第 3.1节中3.2节中，我们证明 持久同调 $\circ\mathcal{T}$它们在重参数化和欧几里得等距变换下保持不变。此外，我们在第 3.3节讨论莫比乌斯带上函数的持久同调如何取决于同调所用的域系数。

第 4 节聚焦于欧几里得空间中闭曲线的光滑嵌入。第 4.1节中，我们证明本节的主要结果（定理 4.3）：（二阶可微）嵌入的弦距离变换一般而言具有莫尔斯支撑，因此其关联的持久模是有限维的。我们分别在第 4.1.2 节和 4.1.3 节讨论一般性的开性和稠密性。证明一般位置嵌入具有莫尔斯支撑后，我们在第 4.2节分析弦距离变换的非退化临界点，并对局部极小值、极大值点和鞍点给出几何刻画。由此，我们得以从几何角度解释持久图 持久同调$_i$ $\circ\mathcal{T}(\gamma)$中同调特征的出生与消亡。

第 5 节重点讨论 S^1 到欧几里得空间的分段线性嵌入。主要结果是定理 5.14，它给出了几何条件 (K0) 至 (K2)，这些条件对于 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 上的点成为 $\mathcal{T}_\gamma$ 的非退化同调临界点既必要又充分。证明分为两部分：首先，构造一个过滤单纯复形，使其持久同调与由 $\mathcal{T}_\gamma$ 给出的 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 的子水平集过滤同构（第 5.3.1 节）。我们精确构造了该单纯复形，并给出其各单形的滤过值，从而使持久同调能够在实践中计算。其次，在嵌入满足一定一般性条件 (C1) 至 (C3) 的情况下，我们证明该单纯复形的莫尔斯集本身就是单纯形，并从几何上刻画 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 上的点对应于此类临界单纯形的条件，同时确定其作为 n-鞍点的指标（第 5.4 节）。

在第6 节中，我们描述弦距离变换向高阶有限子集空间上的函数推广的可能性。我们证明，弦距离变换可视为 k-单纯形体积变换的一个特例，该变换将嵌入映射为定义在$(k+1)^{\text{th}}$ 有限子集空间上的函数。我们在定理6.6中证明，该变换是连续且稳定的。

最后，在第7节中，我们将总结弦距离变换在生物学中的可能应用，并讨论将莫尔斯理论框架推广到高阶有限子集空间所面临的理论挑战。

2 背景

本节介绍我们所研究的空间：构形空间、对称积和 n 阶有限子集空间。我们将举例说明这些空间并提供直观理解，同时介绍它们的一些拓扑性质。我们将详细讨论圆的第二有限子集空间，因为这是我们在弦距离变换中使用的空间。我们还将介绍后续章节中会用到的莫尔斯理论和持久同调基础知识。此外，我们还将介绍微分拓扑中的一些概念，例如函数空间上的惠特尼拓扑、射流和多重射流。本节最后将讨论有关正可达子集的结果。

2.1 配置空间与有限子集空间

我们将始终考虑的主要空间包括：有序和无序构形空间、对称积以及第 n 个有限子集空间。始终假设 X 是一个豪斯多夫拓扑空间。

定义 2.1。给定一个空间 X，其**有序 n-点构形空间**定义为

$$\mathrm{Conf}_n(X) := \{(x_1, \ldots, x_n) \,:\, x_i \in X,\, i \neq j \implies x_i \neq x_j\} = \left(\prod_{i=1}^{n} X\right) \setminus \Delta \tag{5}$$

$$\text{where} \quad \Delta = \{(x_1, \ldots, x_n) \,:\, x_i = x_j \quad \text{for some} \quad i \neq j\} \tag{6}$$

通常地，对称群 S_n 通过置换作用于 $\mathsf{Conf}_n(X)$，由此得到如下结论：

定义 2.2. 取 $\mathrm{Conf}_n(X)$ 在 S_n 下的轨道空间，定义 **无序 n-点构形空间**

$$\mathrm{UConf}_n(X) := \mathrm{Conf}_n(X)/S_n. \tag{7}$$

由于我们假设 X 是豪斯多夫空间，且 S_n （一个有限群）的作用是自由的，因此这个商空间实际上是一个覆盖映射。对于 $n = 1$，以下结论成立：$X = \mathsf{Conf}_1(X) = \mathsf{UConf}_1(X)$。

给定一个集合 $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$，我们使用记号 $\wr x_1, \ldots\ldots, x_n \int$；括号中记载的所有元素均不相同。利用这一记号，可以将 $\mathsf{UConf}_n(X)$ 写成一个集合

$$\mathrm{UConf}_n(X) = \{\wr x_1, \ldots, x_n \int \,:\, x_i \in X\}\,. \tag{8}$$

注 2.3. 文献中对构形空间的记号多种多样，$\mathcal{F}^n(X)$、$F(X,\ n)$、$B(X,\ n)$、$C_k(X)$。我们将使用记号 $\mathsf{Conf}_n(X)$ 和 $\mathsf{UConf}_n(X)$ 分别表示有序构形空间和无序构形空间。

例 2.4. 现在考虑 $n = 2,3$ 时的 $\mathsf{Conf}_n(\mathbb{R})$：我们看到，$\mathsf{Conf}_2(\mathbb{R})$ 就是去掉对角线 $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2\}$ 后的平面。因此，$\mathsf{UConf}_2(\mathbb{R})$ 是沿对角线 Δ 折叠得到的空间。这个空间同胚于上半平面。对于 $\mathsf{Conf}_3(\mathbb{R})$，我们得到去掉平面 $x = y$、$y = z$ 和 $x = z$ 后的 $\mathbb{R}^3$。由此得到的空间被分成 6 个不相交区域。随后，将这 6 个不相交区域合并，构成空间 $\mathsf{UConf}_3(\mathbb{R})$，也就是一个楔形。因此，这个空间同胚于 $\mathbb{R}^3$ 的一个半空间。

例 2.5. 对于 $\mathsf{Conf}_2((0,1))$，情况与 $\mathbb{R}$ 类似，但还需满足位于正方形 $(0,1)^2$ 内的约束。因此，$\mathsf{UConf}_2((0,1))$ 同胚于 $\{(x, y) \in (0,1)^2 :\ x < y\}$。对于 $\mathsf{Conf}_3((0,1))$，它是被切分成 6 个区域的单位立方体；将这些区域视为同一部分后，我们看到 $\mathsf{UConf}_3((0,1))$ 同胚于开 3-单形。图 4 展示了其中一个区域的形状。

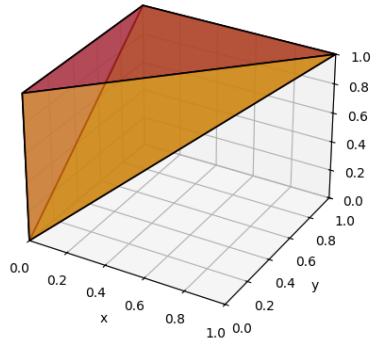


图 4：这里我们看到 $\mathrm{UConf}_3((0,1))$ 由以下平面截出：$x = y$，$x = z$ 和 $y = z$，其中我们考虑 $x < y < z$。这与示例 2.5 中描述的开 3-单形同胚。

注 2.6。如果 X 是光滑的 d-流形，那么 $\mathrm{Conf}_n(X)$ 和 $\mathrm{UConf}_n(X)$ 都是光滑的 dn-流形 [40]。

如果我们不局限于 $\mathsf{Conf}_n(X)$，而是允许整个空间 X^n 以及 S_n 的自然作用，那么我们得到如下空间。

定义 2.7. X 的 n 阶**对称积** 定义为以下商空间

$$SP^n(X) := X^n/S_n$$

作用不再是自由的，因此对于 $n \geq 2$，对称积是一个轨形；而对于 X，它是一个光滑流形（参见 [2] 例 1.13）。我们可以将 $SP^n(X)$ 表示为无序 n元组 $[x_1, \ldots, x_n]$的集合。

尽管对称积将空间中点的对称性整合到了一起，但我们希望消除具有相同点集的点的所有重数。例如，如果考虑 $n = 3$，我们希望将 $(a,\ b,\ b)$ 视为与 $(a,\ a,\ b)$ 相同。然而，在对称积中，这两点属于不同的等价类。因此，我们需要定义一个新的空间，使这些点能够合并在一起。

现在我们来描述 n 阶 **有限子集空间**，它属于 X，$\mathbf{F}_n(X)$。它不仅是 X^n 的商空间，也是 $SP^n(X)$ 的商空间，命题 2.10 中将对此进行说明。

定义 2.8。我们定义 $\mathbf{F}_n(X)$ 为由 X 的所有非空有限子集组成的集合，其基数至多为 n [54]。映射 $E_n\colon\ X^n \to \mathbf{F}_n(X)$定义为

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto \{x_1, x_2, ..., x_n\} \tag{9}$$

在 $\mathbf{F}_n(X)$ 上诱导出商拓扑，即 nth X 的有限子空间集。

使用公式（8）中的记号，我们也可以等价地将集合 $\mathbf{F}_n(X)$ 表示为

$$\mathbf{F}_n(X) = \{\wr x_1, \ldots, x_k \int\ :\ x_i \in X,\ k \in [n]\} = \bigsqcup_{k=1}^{n} \mathrm{UConf}_k(X). \tag{10}$$

注意，对于 $n = 2$，有 $SP^n(X) = \mathbf{F}_n(X)$，但对于 $n \geq 3$，情况不再如此，因为 (x, x, y) 和 (x, y, y) 的 S_3 等价类在对称积中显然不同。然而，它们在 E_3 下的像相同，即 $\wr x, y \int$。

备注 2.9。n 阶有限子集空间（Tuffley [54, 55, 56], 使用的术语）也称为（有限）Ran 空间 $\mathrm{Ran}^{\leq n}(X)$ [6, 43]。需要指出的是，此处定义的 n 阶有限子集空间，在文献中被称为对称积。我们将 n 阶有限子集空间记作 $\mathbf{F}_n(X)$。该空间还有以下其他记法：$\mathrm{Sub}(X, n)$、$\exp_n(X)$、$X^{(n)}$ 和 $\mathrm{Ran}^{\leq n}(X)$ [32, 54, 15, 6]。

命题 2.10. 存在唯一的商映射，$Q_n\colon\ SP^n(X) \to \mathbf{F}_n(X)$ 使得 $E_n = Q_n \circ q$。

证明. 我们有商映射 $q\colon\ X^n \xrightarrow{/S_n} SP^n(X)$，根据定义，它是连续的。它是开映射，因为若 $U \subset X^n$ 是开集，则 $[U]_{S_n}$ 的原像是 $\bigcup_{\sigma \in S_n} \sigma \cdot U$ 的并集，而该并集在 X^n 中是开集。由于 E_n 连续，且在 X^n 上的 S_n 作用下保持不变。根据商映射的泛性质，存在唯一的连续映射 Q_n。

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow[/S_n]{q} & SP^n(X) \\ & \searrow^{E_n} & \downarrow \exists! Q_n \\ & & \mathbf{F}_n(X) \end{array} \tag{11}$$

我们有，$V \subset \mathbf{F}_n(X)$是开集，当且仅当 $\iff E_n^{-1}(V)$在 $X^n \iff E_n^{-1}(V)$中是开集；$= q^{-1}(Q_n^{-1}(V))$在 X^n 中是开集（因为三角图交换）；$\iff Q_n^{-1}(V)$在 $SP^n(X)$中是开集，因为 q是商映射。因此，V在 $\mathbf{F}_n(X)$中是开集，当且仅当 $Q_n^{-1}(V)$在 $SP^n(X)$中是开集。 □

注 2.11. 映射 E_n是闭映射（因而是完美映射）[32]。然而，它不一定是开映射。例如，考虑 $X = \mathbb{R}$和 $n = 3$。我们有一个点 $(0,\ 2,\ 2)$，它有一个邻域 $U = (-1,\ 1) \times (32,\ 3) \times (32, -3)$，然而，点 $(0,\ 0,\ 2) \in E_3^{-1}(E_3(U))$，但该点的任何邻域都不可能完全包含在 $E_3^{-1}(E_3(U))$ 内。

2.1.1 有限子集空间的分层

由于对于 $n \geq k$，任意元素 $\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathbf{F}_k(X)$ 也是 $\mathbf{F}_n(X)$ 的一个元素，因此我们有一个滤过

$$\emptyset \subset \mathbf{F}_1(X) \subset \mathbf{F}_2(X) \subset \cdots \subset \mathbf{F}_{n-1}(X) \subset \mathbf{F}_n(X) \tag{12}$$

这些包含映射实际上是嵌入：由商映射 E_{n-1} 赋予 $\mathrm{F}_{n-1}(X)$ 的拓扑与从 $\mathrm{F}_n(X)$ 继承的子空间拓扑一致 [32, 命题 2.04]。这个滤过与式 (10) 中将 $\mathrm{F}_n(X)$ 分解为低阶无序构形空间有关。我们可以将这个滤过视为 $\mathrm{F}_n(X)$ 的一种分层，其中各层——即滤过中相邻空间 $\mathrm{F}_i(X)$ 和 $\mathrm{F}_{i-1}(X)$ 的差——由有序构形空间 $\mathrm{F}_i(X) \setminus \mathrm{F}_{i-1}(X) \approx \mathrm{UConf}_i(X)$ 给出。已证明这种分层是锥形光滑的（[44] 中的定义 A.5.5）[6]。

W我们通过商映射 E_n 对分层作出明确描述： $X^n \twoheadrightarrow \mathbf{F}_n(X)$

$$E_n : (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto \{x_1, x_2, ..., x_n\}, \tag{13}$$

以及 X^n 的一个划分。我们将 X^n 分成以下不交并；将X_i^n写作点 $(x_1, \ldots, x_n)$ 的子集，其中 i 个元素互不相同，则有

$$X^n = X_1^n \sqcup X_2^n \sqcup \cdots \sqcup X_n^n \tag{14}$$

注意到 $X_n^n = \mathrm{Conf}_n(X)$。回想一下，广义对角线 $\Delta^{n-1} \subset X^n$ 是由至多有 $n-1$ 个不同项的元组 $(x_1, \ldots, x_n)$ 构成的，那么根据定义

$$\Delta^{n-1} = X_1^n \sqcup \cdots \sqcup X_{n-1}^n \quad \text{and} \quad X^n = \mathrm{Conf}_n(X) \sqcup \Delta^{n-1}. \tag{15}$$

现在，我们通过将 F ( ) ( ) 分解为连通分支( ) 和 (Conf ( )) 的像来描述分层式 (12) 中的包含映射 F
E_n X^n E_n Δ^{n-1} E_n X X (X) $\hookrightarrow$ F (X),

这些像的并集为 F ( )。我们首先注意到，像 $E_n(\Delta^{n-1})$ 和 $E_n(\mathrm{Conf}_n(X))$ 不相交，因此构成 $\mathrm{F}_n(X)$ 的一个划分：

$$\mathbf{F}_n(X) = E_n(\mathrm{Conf}_n(X)) \sqcup E_n(\Delta^{n-1}). \tag{16}$$

这直接由集合 $\mathrm{Conf}_n(X)$ 和 Δ^{n-1} 的定义得出。由于 $E_n(\Delta^{n-1}) \subset \mathbf{F}_n(X)$ 恰好是基数至多为 $n-1$ 的有限子集，

$$E_n(\Delta^{n-1}) = \mathbf{F}_{n-1}(X). \tag{17}$$

因为 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Conf}_n(X)$ 是由 n 个互不相同的元素组成的元组，所以 $E_n(\mathrm{Conf}_n(X))$ 的元素恰好是基数为 n 的子集 $\{x_1, \ldots, x_n\}$，因此 $E_n(\mathrm{Conf}_n(X)) \cap \mathrm{F}_{n-1}(X) = \emptyset$。现在我们证明 $E_n(\mathrm{Conf}_n(X))$ 实际上与 $\mathrm{UConf}_n(X)$ 同胚；因此，式 (16) 推出如下结论。

命题 2.12。 $\mathbf{F}_n(X) \setminus \mathbf{F}_{n-1}(X) = E_n(\mathrm{Conf}_n(X)) \approx \mathrm{UConf}_n(X)$。

证明。回顾命题 2.10， $E_n = Q_n \circ q$。因此，我们可以将 E_n(Conf $_n$ X 写作 Q_n((Conf (X)))
Q_n $_n X$ $_n X \subset SP^n X$ q X $_n$ = (X)) n

(UConf ( ))。由于 UConf ( ) ( ) 恰好是各个集合中重数为 1 的无序元素，将 Q_n 限制在 $\mathrm{UConf}_n(X)$ 上，便得到从 $\mathrm{UConf}_n(X)$ 到其像的连续双射。为了证明它是同胚，我们现在证明：若 V 在 $\mathrm{UConf}_n(X)$ 中是开集，则 $Q_n(V)$ 在 $Q_n(\mathrm{UConf}_n(X))$ 中是开集。

注意，若 V在 $\mathrm{UConf}_n(X)$ 中是开集，则它在 $SP^n(X)$ 中也是开集，因为 $\mathrm{UConf}_n(X)$ 是 $SP^n(X)$ 的开子空间。此外，由于 $\mathrm{Conf}_n(X)$ 在 X^n 中是开集， $Q_n(\mathrm{UConf}_n(X))$ 在 $\mathbf{F}_n(X)$ 中是开集。因此，我们将证明 $Q_n(V)$ 在整个 $\mathbf{F}_n($ $X)$ 中是开集。

如果 V 在 $\mathrm{UConf}_n(X)$ 中是开集，那么 $q^{-1}(V)$ 在 X^n 中是开集。我们有， $Q_n(V)$ 在 $\mathbf{F}_n(X)$ 中是开集，当且仅当 $E_n^{-1}(Q_n(V))$ 在 X^n 中是开集。由于 Q_n 限制在 $\mathrm{UConf}_n(X)$ 上是连续双射，因此 $E_n^{-1}(Q_n(V)) = q^{-1} \circ Q_n^{-1}(Q_n(V))$ $= q^{-1}(V)$。因此， $Q_n(V)$ 在 $\mathbf{F}_n(X)$ 中是开集。于是，将 Q_n 从 $\mathrm{UConf}_n(X)$ 限制到 $Q_n(\mathrm{UConf}_n(X)) = E_n(\mathrm{Conf}_n(X))$ 所得到的是一个同胚。

□

此外，对于 $i \le n$，由于 $\mathbf{F}_i(X)$ 作为 $\mathbf{F}_n(X)$ 的子集所具有的子空间拓扑与由 E_i赋予的商拓扑一致，我们可以通过归纳法证明命题2.12 蕴含

$$E_n(X_i^n) = \mathbf{F}_i(X) \setminus \mathbf{F}_{i-1}(X) \approx \mathrm{UConf}_i(X) \tag{18}$$

对每个 $i \le n$ 在分层式（12）中。这使我们能够按照式（**10**）的方式，将 $\mathbf{F}_n(X)$ 分解如下：

$$\begin{array}{ccccccc} X^n & = & X_1^n & \sqcup & X_2^n & \sqcup\cdots\sqcup & X_n^n = \mathrm{Conf}_n(X) \\ \downarrow E_n & & \downarrow E_n & & \downarrow E_n & & \downarrow E_n \\ \mathbf{F}_n(X) & = & E_n(X_1^n) & \sqcup & E_n(X_2^n) & \sqcup\cdots\sqcup & E_n(\mathrm{Conf}_n(X)) \\ & & \wr & & \wr & & \wr \\ & & X & \sqcup & \mathrm{UConf}_2(X) & \sqcup\cdots\sqcup & \mathrm{UConf}_n(X) \end{array} \tag{19}$$

此外，$\mathrm{UConf}_i(X)$ 在 $\mathbf{F}_n(X)$ 中的边界恰好是 $\mathbf{F}_{i-1}(X)$。

命题 2.13. 边界 $E_n(\mathrm{Conf}_n(X))$ 在 $\mathbf{F}_n(X)$ 中是 $\mathbf{F}_n(X)\backslash E_n(\mathrm{Conf}_n(X)) = E_n(\Delta^{n-1}) \approx \mathbf{F}_{n-1}(X)$。

证明。若 X 是豪斯多夫的，则对 $q \in \mathrm{Conf}_n(X)$ 中的每个点，我们都可以找到一组开集 U_{q_i}，使得 $q \in \prod_{i=1}^n U_{q_i}$ 且 $U_{q_i} \cap U_{q_j} = \emptyset$ 对于 $i \ne j$ 成立。因此 $\mathrm{Conf}_n(X)$ 是开集。$E_n(\mathrm{Conf}_n(X))$ 是开集，当且仅当 $E_n^{-1}(E_n(\mathrm{Conf}_n(X)))$ 在 X^n 中是开集；这恰好就是 $\mathrm{Conf}_n(X)$，因而是开集。因此，$E_n(\mathrm{Conf}_n(X))$ 是 $\mathbf{F}_n(X)$ 中的开集。

因此，$E_n(\mathrm{Conf}_n(X))$ 在 $\mathrm{F}_n(X)$ 中的边界为 $\partial E_n(\mathrm{Conf}_n(X)) = \mathrm{cl}(E_n(\mathrm{Conf}_n(X)))\backslash\mathrm{int}(E_n(\mathrm{Conf}_n(X))) = \mathrm{cl}(E_n(\mathrm{Conf}_n(X))\backslash E_n(\mathrm{Conf}_n(X))$。假设存在一个 $x \in \mathrm{F}_n(X)$，使得 $x \notin \mathrm{cl}(E_n(\mathrm{Conf}_n(X)))$。那么存在一个开集 $U \subset \mathrm{F}_n(X)$，使得 $x \in U$且 $U \cap E_n(\mathrm{Conf}_n(X)) = \emptyset$。我们知道，当 $Y := \{q \in X^n : [q]_{E_n} \in U\}$ 为开集时，U 是开集。若 $q \in Y$，则 $q \notin \mathrm{Conf}_n(X)$，因此当 $q \in Y$ 时，q 有两个相同的元素。不妨设 $q = (q_1, q_1, \ldots, q_{n-1})$。由于 X 是豪斯多夫的，我们有 $q \in U_{q_1} \times U_{q_1} \times \prod_{i=2}^{n-1} U_{q_i} \subset Y$，其中 $U_{q_i} \cap U_{q_j} = \emptyset$ 对所有 $i \ne j$ 均成立。这意味着 U_{q_1} 必须是单元素集 $\{q_1\}$。由于 X 未赋予离散拓扑，该集合不是开集（我们排除离散拓扑，因为所有边界都为空）。因此，所有 $x \in \mathrm{F}_n(X)$ 都属于 $\mathrm{cl}(E_n(\mathrm{Conf}_n(X)))$。所以我们有，$\partial E_n(\mathrm{Conf}_n(X)) = \mathrm{F}_n(X)\backslash E_n(\mathrm{Conf}_n(X)) = E_n(\Delta^{n-1}) \approx \mathrm{F}_{n-1}(X)$。 □

命题 2.14。 $E_n(X_i^n)$ 在 $\mathbf{F}_i(X) \subset \mathbf{F}_n(X)$ 中的边界是 $\mathbf{F}_i(X)\backslash E_n(X_i^n) = E_i(\Delta^{i-1}) \approx \mathbf{F}_{i-1}(X)$。

证明。我们有 $E_n(X_i^n)$ 集合 $= E_i(X_i^i) \approx \mathrm{UConf}_i(X)$，它在 $\mathrm{F}_i(X)$ 中是开集。根据 [32] 的命题 2.04，我们有 $E_n(X_i^n)$ 在 $\mathrm{F}_i(X) \subset \mathrm{F}_n(X)$ 中是开集。$E_n(X_i^n)$ 在 $\mathrm{F}_i(X) \subset \mathrm{F}_n(X)$ 中的闭包是 $\mathrm{F}_i(X)$，证明方法与上述命题类似。因此，在 $\mathrm{F}_i(X) \subset \mathrm{F}_n(X)$ 中，我们有 $\partial E_n(X_i^n) = \mathrm{F}_i(X)\backslash E_n(X_i^n) = E_i(\Delta^{i-1}) \approx \mathrm{F}_{i-1}(X)$。

□

2.1.2 圆的第二有限子集空间是一个 M¨obius 带

本节回顾，$\mathrm{F}_2(S^1)$ 与 M¨obius 带 $\mathcal{M}$ 同胚。这一观察最早由 [14], 提出，[54, §2.2], 中有直观解释，我们在图 5 中重现并说明了这一解释。这里我们采用 [48] 提出的更为技术性的构造。Morton 的构造通过无限条带 $[0,1] \times \mathbb{R}$，经由 $S^1 \times S^1$ 的万有覆盖 $\mathbb{R}^2$，导出 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 的万有覆盖 $\bar{\mathsf{e}}$。回顾一下，我们有 S^1 的万有覆盖 $\mathsf{e} : \mathbb{R} \to S^1$，由 $\mathsf{e}(t) = e^{2\pi i t}$ 给出；此外，$S^1 \times S^1$ 的万有覆盖由乘积 $\tilde{\mathsf{e}} = \mathsf{e} \times \mathsf{e} : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ 给出。首先注意到，通过复合 $\tilde{\mathsf{e}} : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ 与 $q : S^1 \times S^1 \twoheadrightarrow \mathrm{F}_2(S^1)$，可以得到从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 的商映射。Morton 证明，先对 $\mathbb{R}^2$ 施加一个 $\mathbb{Z}^2$-作用，再对 $S^1 \times S^1$ 施加一个 S_2-作用所得到的连续商，等价于对 $\mathbb{R}^2$ 施加半直积 $\mathbb{Z}^2 \rtimes S_2$ 的作用所得到的商。此外，商空间 $q \circ \tilde{e}$ 还可以分解为另一对连续商 $\bar{\mathsf{e}} \circ \tilde{q}$,

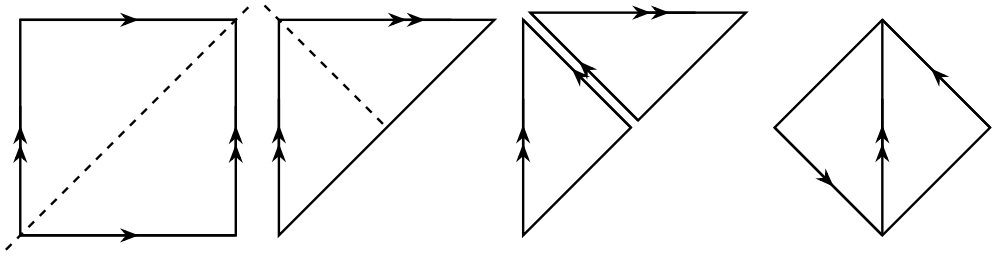


图 5：剪切与粘合论证表明，$\mathbf{F}_2(S^1) = (S^1 \times S^1)/S_2$ 是莫比乌斯带。将环面表示为一组对边相互粘合的正方形，S_2 作用沿虚线对角线“折叠”环面。所得商空间是一个三角形，其中图示的一对边按图中所示的定向粘合。为说明该空间与莫比乌斯带 $\mathcal{M}$ 同胚，我们沿另一条对角线剪开，得到两个三角形以及另一种粘合方式。然后将原三角形的竖边与横边粘合，得到右侧的正方形，其中一对相对的边以相反定向粘合。

其中第一个映射 $\tilde{q}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 在正规子群 $N \cong \mathbb{Z} \rtimes S_2$ 的作用下得到的商空间 G，而 $\bar{e}$ 是莫比乌斯带 Möbius band $\mathcal{M}$ 在一个 $\mathbb{Z}$-作用下的万有覆盖 $\mathbb{R}^2/N \approx [0,1] \times \mathbb{R}$。我们在下文的命题 2.15 中概述他的构造，并在第 A 节给出精确构造的细节。

命题 2.15（[48]）。令 $q\colon S^1 \times S^1 \twoheadrightarrow \mathbf{F}_2(S^1)$ 为环面关于 S_2 作用 $\sigma \cdot (z_1, z_2) = (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)})$ 的商空间，且 $\tilde{e}\colon \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow S^1 \times S^1$ 为 $S^1 \times S^1$ 的万有覆盖映射。那么存在由群作用得到的商空间 $\tilde{q}\colon \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2/N \xrightarrow{\approx} [0,1] \times \mathbb{R}$ 和 $\bar{e}\colon [0,1] \times \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbf{F}_2(S^1)$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[/(\mathbb{Z}\rtimes S_2)]{\tilde{q}} & [0,1]\times\mathbb{R} \\ {\scriptstyle \tilde{e}}\big\downarrow{\scriptstyle /\mathbb{Z}^2} & & {\scriptstyle \bar{e}}\big\downarrow{\scriptstyle /\mathbb{Z}} \\ S^1 \times S^1 & \xrightarrow[/S_2]{q} & \mathbf{F}_2(S^1) \end{array} \quad . \tag{20}$$

此外，

(i) $\bar{e}$ 是 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 的万有覆盖，并且它是一个莫比乌斯带 $\mathcal{M}$；

(ii) 存在一个嵌入 $\lambda\colon [0,1] \times \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$，其像为 $\{(x_1, x_2)\colon\ x_2 - x_1 \in [0,1]\}$，且 $\tilde{q} \circ \lambda = \mathrm{id}_{[0,1]\times\mathbb{R}}$。

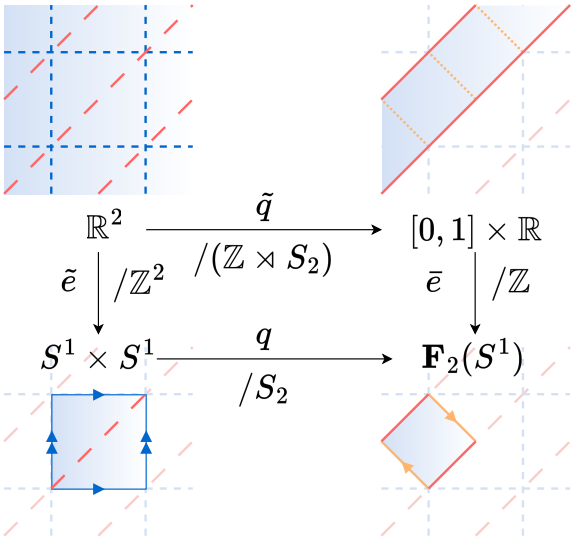
(iii) 边界 $\partial\mathbf{F}_2(S^1)$ 同胚于 S^1，它由满足以下条件的点组成：$\{\{z\}\colon\ z \in S^1\} = \mathbf{F}_1(S^1) = q(\Delta)$，其中 Δ 是对角线 $\{(z,z)\colon\ z \in S^1\} \subset S^1 \times S^1$。

利用命题 2.15，我们可以证明映射 $q \circ \bar{e}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbf{F}_2(S^1)$ 存在局部逆映射。也就是说，对于每个 $w \in \mathbf{F}_2(S^1)$，都存在一个邻域 $W \ni w$，使得存在嵌入 $\varphi\colon W \hookrightarrow \mathbb{R}^2$，满足 $(q \circ \bar{e}) \circ \varphi = \mathrm{id}_W$。我们利用覆盖映射 $\bar{e}$ 的提升以及嵌入 λ 来构造 φ。对每个 $w \in \mathbf{F}_2(S^1)$ 取邻域后，我们得到 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 的一组坐标图 $\Phi = \{(\varphi, W)\}$。我们证明，可以选择这些坐标图，使其构成 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 的一个图册。由于该空间同胚于莫比乌斯带，因此它是一个带边界流形。

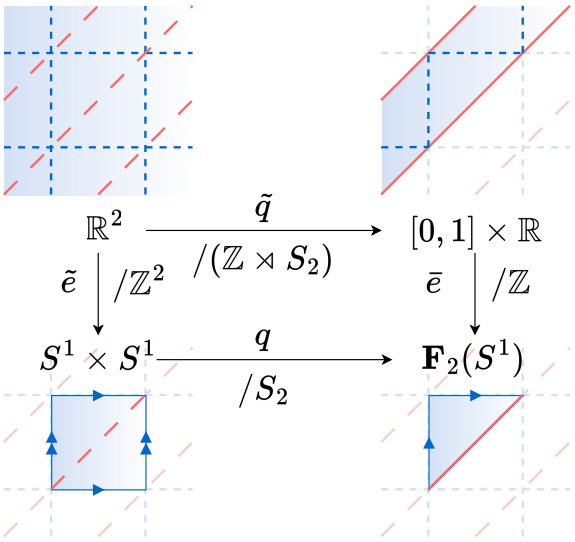
命题 2.16 对于每个 $w \in \mathbf{F}_2(S^1)$，都存在一个邻域 $W \ni w$，使得存在一个嵌入 $\varphi\colon W \hookrightarrow \mathbb{R}^2$，满足 $\bar{e} \circ \tilde{q} \circ \varphi = \mathrm{id}_W$。如果这类邻域构成 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 的一个开覆盖 $\mathcal{W} = \{W_j\}_{j\in\mathcal{J}}$，那么对每个 W_j 任取这样的坐标图 $\Phi = \{(\varphi_j, W_j)\}_{j\in\mathcal{J}}$，即可得到 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 的一个图册。

证明。由于 $\bar{e}$ 是一个覆盖映射，对于 W 的充分小邻域 $w \in \mathbf{F}_2(S^1)$，我们可以找到一个嵌入 $\bar{\varphi}\colon W \hookrightarrow [0,1] \times \mathbb{R}$。将其与命题 2.15 中的嵌入 $\lambda\colon [0,1] \times \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ 复合，得到一个嵌入 $\varphi = \lambda \circ \bar{\varphi}\colon W \hookrightarrow \mathbb{R}^2$。因为 $\tilde{q} \circ \lambda = \mathrm{id}_{[0,1]\times\mathbb{R}}$，且 $\bar{e} \circ \bar{\varphi} = \mathrm{id}_W$，

$$(\bar{e} \circ \tilde{q}) \circ \varphi = \bar{e} \circ (\tilde{q} \circ \lambda) \circ \bar{\varphi} = \bar{e} \circ \bar{\varphi} = \mathrm{id}_W\,.$$



(a) 万有覆盖 $\bar{\mathbf{e}}$ $\mathbf{F}_2(S^1)$的示意图，其中我们为 $[0,1] \times \mathbb{R}$ 上的 $\mathbb{Z}$-作用选取了一个正方形基本域（以橙色虚线标示）。该作用将橙色点线的相邻线段对映起来，且定向相反，



(b) 万有覆盖 $\bar{\mathbf{e}}$ $\mathbf{F}_2(S^1)$的示意图，其中我们为 $[0,1] \times \mathbb{R}$ 上的 $\mathbb{Z}$-作用选取了一个三角形基本域（以蓝色虚线标示）。$\mathbb{Z}$-作用在三角形基本域的一条竖直蓝色边上，先将其关于红色对角线反射，再向上平移一个竖直单位，使其与水平边重合。

图 6：命题 2.15 的示意图，该命题通过将 $S^1 \times S^1$ 和 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 的万有覆盖 $\bar{\mathbf{e}}$ 和 $\bar{e}$ 分别用商映射 q 和 $\tilde{q}$ 联系起来，说明二点有限子集空间 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 如何表示为一个莫比乌斯带 $\mathbf{M}$¨。商映射 $q \circ \bar{\mathbf{e}}$ 可分解为复合 $\bar{\mathbf{e}} \circ \tilde{q}$，其中 $\tilde{q}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 关于一个 $(\mathbb{Z} \rtimes S_2)$- 作用的商空间；对角条带 $\approx [0,1] \times \mathbb{R}$ （作为 $\mathbb{R}^2$ 的子集）不仅是该 $(\mathbb{Z} \rtimes S_2)$- 作用的基本域，而且与商空间同胚。映射 $\bar{\mathbf{e}}$ 是关于滑移反射的商映射，滑移反射是在无限条带上的一种 $\mathbb{Z}$-作用。我们还注意到，对角线 $\Delta \subset S^1 \times S^1$ （以红色虚线标出）被映射到 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 的圆形边界；这是命题 2.13 的一个特例。也可以先将对角线提升到它们在 $\mathbb{R}^2$ 中的原像（同样以红色虚线标出）；由于它们构成带边界流形 $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes S_2) = [0,1] \times \mathbb{R}$ 的边界，而 $\bar{\mathbf{e}}$ 是一个将流形边界映射到流形边界的覆盖映射，因此 Δ 在 q 下的像就是 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 的边界。

现在我们证明，任意一组 Φ 这样的坐标图构成一个图册。对于 W，$W' \subset \mathbf{F}_2(S^1)$具有非空交集并分别允许提升 $\bar{\varphi}\ \bar{\varphi}'\qquad W\qquad W'\qquad n\in\mathbb{Z}\qquad n\star\bar{\varphi}\ W\cap$，，我们有某个，$W'\ =\bar{\varphi}'\ W\cap W'\qquad T\ \ \bar{\varphi}\ W\cap W'\ \to\bar{\varphi}'\ W\cap W'$ 使得 () () 。令： () () 为该同胚；那么我们有一个过渡映射 $\varphi(W\cap W') \xrightarrow{\approx} \varphi'(W\cap W')$，其形式为

$$(\lambda T q|_{\varphi(W)})\circ\varphi|_{W\cap W'} = \lambda T\circ(q\lambda|_{\bar{\varphi}(W)})\circ\bar{\varphi}|_{W\cap W'} = \lambda(T\bar{\varphi}|_{W\cap W'}) = \lambda\bar{\varphi}'|_{W\cap W'} = \varphi'|_{W\cap W'}. \tag{21}$$

其中，在第一个t及第二个等式中，我们分别使用了 $\varphi=\lambda\bar{\varphi}$这一事实，以及$q\lambda|_{\bar{\varphi}\ (W)}$ $=\mathrm{id}_{\bar{\varphi}\ (W)}$。□

推论 2.17. 设 $\varphi\colon W\to\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbf{F}_2(S^1)$的一个坐标图，如命题 2.16所述。则映射 $\psi := \tilde{e}\circ\varphi\colon W\to S^1\times S^1$ 是 W的一个嵌入，且 $q\circ\psi=\mathrm{id}_W$。

证明。由于 等式 (20) 中的交换方形，我们也可以证明 $\psi\colon W\to S^1\times S^1$ 是一个嵌入 ：

$$q\circ\psi = q\circ(\tilde{e}\circ\varphi) = (q\circ\tilde{e})\circ\varphi = (\bar{e}\circ\tilde{q})\circ\varphi = \mathrm{id}_W.$$

由于 $q|_{\psi(W)}$是一个连续双射，且 ψ也是到其像上的连续双射，因此我们可以确定 ψ是一个嵌入（到其像上的同胚）。此外， $q\circ\psi(W)=W$，因此 $\psi(W)\subset q^{-1}(W)$）。

□

此外，我们证明，坐标图 $\varphi\colon W\hookrightarrow\mathbb{R}^2$继承自为 $S^1\times S^1$ 中的 S_2-轨道代表元 $\psi(W)$ 的选取而得到的坐标图。我们先引入一些记号。若 $\{(\theta_i,U_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$是 S^1 的一个图册，则记 $\Theta=\{(\vartheta_{ab},U_{ab})\}_{a,b\in\mathcal{I}}$为 $S^1\times S^1$ 的诱导图册，其中 $\vartheta_{ab}:=\theta_a\times\theta_b$，且 $U_{ab}:=U_a\times U_b$。

命题 2.18。 存在一个开覆盖 $\mathcal{W}=\{W_j\}_{j\in\mathcal{J}}$，覆盖$\mathbf{F}_2(S^1)$，以及一个图册 $\{(\theta_i,U_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$，其坐标图 θ_i 是万有覆盖$e\colon\mathbb{R}\twoheadrightarrow S^1$的提升，并且对任意 $j\in\mathcal{J}$，均满足以下条件：

- 存在一个局部嵌入 $\psi_j\colon W_j\hookrightarrow S^1\times S^1$，使得 $q\circ\psi_j=\mathrm{id}^{W_j}$；
- 存在某个 $a,b\in\mathcal{I}$，其中 $\psi_j(W_j)\subseteq U_{ab}=U_a\times U_b$；并且
- 对于 $\vartheta_{ab}:=\theta_a\times\theta_b$，映射 $\varphi_j=\vartheta_{ab}\circ\psi_j\colon W_j\to\mathbb{R}^2$ 是一个坐标图。

此外，如此构造的坐标图集合 $\Phi=\{(\varphi_j,W_j)\}_{j\in\mathcal{J}}$构成$\mathbf{F}_2(S^1)$的一个图册。

证明。我们通过证明命题 2.16 中的 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 的图册满足这些条件，来证明此命题；其中开覆盖由所有 $w\in\mathbf{F}_2(S^1)$ 的邻域 W组成。对于每个这样的 W，都有一个坐标图 $\varphi=\lambda\circ\bar{\varphi}$，其中 $\bar{\varphi}$：$W\hookrightarrow[0,1]\times\mathbb{R}$是覆盖映射 $\bar{}\mathsf{e}$ 的提升。提升 $\bar{\varphi}$完全由它将 w映至何处决定，而 w属于 $\bar{}\mathsf{e}^{-1}(w)$。由于 λ是一个嵌入，这等价于说， φ完全由它将 w映至何处决定，而 w属于 $(\bar{}\mathsf{e}\circ\tilde{q})^{-1}(w)$。回想命题 2.16，这些坐标图无论如何选择 $(\bar{}\mathsf{e}\circ\tilde{q})^{-1}(w)$ 中 w 的代表元，都会构成一个图册。

现在注意到，子集 $F=\{(x_1,x_2)\in[0,1)\times[0,1)\colon\ x_2-x_1\in[0,1]\}\subset\mathbb{R}^2$属于 λ的像，并且对于任意 $w\in\mathbf{F}_2(S^1)$，在纤维 $(\bar{}\mathsf{e}\circ\tilde{q})^{-1}(w)$ 中恰好包含一个点。令图册中的坐标图 $\varphi\colon(W,w)\hookrightarrow(\mathbb{R}^2,(x,y))$ 为那些将 w映射到 $(x,y)\in F$ 的坐标图。对于每个 $(x,y)\in F$，考虑 $\tilde{U}_{xy}=\tilde{U}_x\times\tilde{U}_y$，其中 $\tilde{U}_x=(x-1/2,x+1/2)$。注意，$\mathsf{e}|_{\tilde{U}}$是到其像$U_x:=\mathsf{e}(\tilde{U}_x)\subset S^1$上的一个同胚。令 $\theta_x\colon U_x\to\tilde{U}_x$为覆盖 e 在 $U_x\subset S^1$处的提升，使得 $\mathsf{e}\theta_x=\mathrm{id}_{U_x}$。由于这些都是从欧几里得空间出发的覆盖映射的提升，这些坐标图 $\{(\theta_x,U_x)\}_{x\in[0,1)}$ 构成 S^1 的一个图册，其过渡映射源自 $\mathbb{R}$ 上的 $\mathbb{Z}$- 作用。类似地，坐标图的乘积 $\Theta=\{(\vartheta_{xy},U_{xy})\}_{x,y\in[0,1)}$ 也构成 $S^1\times S^1$的一个图册，其中 $\vartheta_{xy}(U_{xy})=\tilde{U}_{xy}$，且 $\bar{}\mathsf{e}\circ\vartheta_{xy}=\mathrm{id}_{U_{xy}}$。

现在假设我们这样做的邻域 W是连续的，因为 ψ是连续的，使得 $\varphi(W)\subset\tilde{U}_{xy}$。因此 ψ是一个嵌入 $W\hookrightarrow S^1\times S^1$为满足以下条件的嵌入：$q\circ\psi=\mathrm{id}_W$，如推论2.17所述。由于 $\psi(W)=\bar{}e\circ\varphi(W)\subset\bar{}e(\tilde{U}_{xy})=U_{xy}$，我们可以将 ϑ_{xy}应用于 ψ的像；因此

$$\vartheta_{xy}\circ\psi = (\vartheta_{xy}\circ\tilde{e}|_{\varphi(W)})\circ\varphi = \varphi.$$

□

命题2.18 所蕴含的相容图册的存在性，使我们能够将 $S^1 \times S^1$ 的对称映射的局部坐标描述转换为其在$\mathbf{F}_2(S^1)$上的诱导映射。如果 $f\colon\ S^1 \times S^1 \to X$ 满足$f(z_1, z_2) = f(z_2, z_1)$，那么回想一下，存在唯一的映射 f使得

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & \nearrow_{\exists!\bar{f}} & \\ \mathbf{F}_2(S^1) & & \end{array} .$$

如果我们将 $\bar{f}$限制在图册 $W_j \subset \mathbf{F}_2(S^1)$ 中的一个覆盖元素 Φ，就可以通过 $\bar{f}|_{W_j}$ 在局部坐标中表示$\varphi_j(V) \subset \mathbb{R}^2$，具体来说$\bar{f} \circ \varphi_j^{-1}$。然后，我们可以应用命题2.18，将其与在选定的轨道代表元 f上 $\psi_j(W_j) \subset S^1 \times S^1$的局部坐标表示联系起来：

$$\begin{aligned} \bar{f} \circ \varphi_j^{-1} &= \bar{f} \circ \vartheta_{ab} \circ \psi_j^{-1} = (\bar{f} \circ \psi_j^{-1}) \circ \vartheta_{ab}^{-1}|_{\varphi_j(W_j)} = (\bar{f} \circ q|_{\psi_j(W)}) \circ \vartheta_{ab}^{-1}|_{\varphi_j(W_j)} \\ &= f \circ \vartheta_{ab}^{-1}|_{\varphi_j(W)}. \end{aligned} \tag{22}$$

我们立即可知，如果 X 是一个流形，且 $f \in C^k(S^1 \times S^1, X)$，那么 $\bar{f} \in C^k(\mathbf{F}_2(S^1)\ X)$。要在 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 上用 $S^1 \times S^1$ 的局部坐标表示函数，对于第4节中的微分拓扑论证是必要的。

2.2 莫尔斯理论与持久同调

现在，我们简要介绍用于证明本文结果所涉及的基础领域中的标准理论。我们将概述持久同调中的术语和主要思想，并讨论光滑莫尔斯理论如何帮助描述由光滑函数定义的带边界流形的次水平集过滤的持久同调。我们还将简要介绍 Conley 指标理论中的一些思想，以帮助描述过滤单纯复形的持久同调。

2.2.1 次水平集过滤的持久同调

设 $f\colon\ X \to \mathbb{R}$ 是连续函数，且 $X^t\colon = f^{-1}\ (-\infty,\ t]$ 是 f 在 t 下的次水平集。接下来考虑由 $\mathbb{R}$ 为指标的次水平集滤过。也就是说，对于任意 $s \le t$，包含映射的集合 $X^s \hookrightarrow X^t$:

$$X^\bullet : (X^s \xhookrightarrow{s \le t} X^t) \tag{23}$$

令 $H_i(-)$ 表示 i 次奇异同调函子，其系数取自域 $\mathbb{F}$，它将拓扑空间之间的映射映为其第 i 同调群之间的线性映射。将滤过 $X^\bullet$ 中的包含映射转化为同调群之间的映射，可得一个映射序列，即子水平集滤过的 i^{th}-持久模 [16, 第 1 节。1]，对应于 X:

$$H_i(X^\bullet) : \quad \left(H_i(X^s) \xrightarrow{s \le t} H_i(X^t)\right) \tag{24}$$

持久 模 $\mathbb{V}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是一个以 $\mathbb{R}$ 为指标的向量空间族 V^s，并配备线性映射 s

$$v_s^t : V^s \to V^t$$

for $s \le t$，它们满足交换关系 $v_s^t \circ v_r^s = v_r^t$（当 $r \le s \le t$ 时），以及 $v_t^t = \mathrm{id}_{V^t}$.

如果每个映射 v_s^t 的秩对于 $s < t$都是有限的，我们就称持久模是象限温和的，或称*q*-温和。如果所有向量空间 V^t 都是有限维的，则称该持久模为逐点有限维，或简称温和。如果 X 同胚于某个有限单纯复形的几何实现，且 f是连续的，那么次水平集滤过 $H_i(X^\bullet)$的持久同调是 q-温和的 [16, 定理 2.22]。

给定一个持久模，我们可以得到一种在实践中十分便利的不变量，称为持久图。我们按照 [16, 命题 2.3], ，基于秩函数为 q-温和持久模定义持久图

以及持久测度的概念。设 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$，并考虑扩展开上半平面 $\mathcal{H} \subset \bar{\mathbb{R}}^2$

$$\mathcal{H} := \{(s,t) \,:\, -\infty \le s < t \le \infty\}.$$

令 $\mathcal{R}$ 为包含在 $\mathcal{H}$ 中的所有矩形的集合

$$\mathcal{R} = \{[a,b] \times [c,d] \,:\, a < b < c < d\}.$$

对于一个持久模 $\mathbb{V}$，令 $r_s^t :=$ 秩 v_s^t 为秩函数，它将每一对 $s \le t$ 映射为线性映射 v_s^t的秩。q-温和持久模的持久测度 $\mathbb{V}$ [16, 命题 2。3] 定义为函数$\mu_{\mathbb{V}} :\ \mathcal{R} \to \mathbb{Z}$,

$$\mu_{\mathbb{V}}([a,b] \times [c,d]) = r_b^c - r_a^c - r_b^d + r_a^d, \tag{25}$$

由于线性映射复合的像满足$\operatorname{im}(fg) \cong \operatorname{im} g/(\ker f \cap \operatorname{im} g)$，因此按照式（25），可将其写为以下形式，依据 [16, 命题 2。5]:

$$\mu_{\mathbb{V}}([a,b] \times [c,d]) = \dim \left(\frac{\operatorname{im} v_b^c \cap \ker v_c^d}{\operatorname{im} v_a^c \cap \ker v_c^d} \right). \tag{26}$$

因此，持久测度非负。由式（26），$\mu_{\mathbb{V}}([a,b] \times [c,d])$ 当且仅当 v_c^d是单射且 v_a^b 是满射时为零。我们可以将 $\mu_{\mathbb{V}}([a,b] \times [c,d])$ 上的持久测度理解为由向量等价类构成的向量空间的维数，这些向量在滤过中于 $[a,b]$ 之间“诞生”，并于 $[c,d]$之间“消亡”。

将持久测度解释为持久模中向量等价类的枚举，可以通过 [16] 中的以下表述予以精确定义。设 **Dgm** 为由 $\mathcal{H}$ 中每个 $R \in \mathcal{R}$ 上均有限的多重集构成的空间；我们称这样的多重集为 持久图。考虑一个 q-温和持久模 $\mathbb{V}$。根据 [16, 定理 2.8，推论 2。15], 存在唯一的持久图 $\operatorname{dgm}(\mu_{\mathbb{V}})$，使得在矩形 $R \in \mathcal{R}$ 上取值的测度等于 $\operatorname{dgm}(\mathbb{V}) \cap R$ 中点的基数:

$$\mu_{\mathbb{V}}(R) = \#\{(b,d) \in \operatorname{dgm}(\mathbb{V}) \mid (b,d) \in R\}. \tag{27}$$

我们称 dgm($\mathbb{V}$) 中的点（b，d）为一个特征，而 b 和 d 分别为该特征在滤过中的出生时间和死亡时间。

注 2.19。定义逐点有限维持久模在 $\mathbb{R}$ 上的持久图的标准方法，是通过区间分解 [20]。原则上，次水平集过滤 $H_i(X^\bullet)$ 的持久同调未必是温和的，因此其持久模可能不存在区间分解。

回顾一下，如果我们考虑有限可三角剖分空间上的连续函数，那么持久模 $H_i(X^\bullet)$ 是 q-温和的 [16, 定理 2.22]。因此，我们可以将持久同调视为一个函数

$$\mathrm{PH}_i : C(X,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{Dgm}$$

它将每个 $f \in C(X,\mathbb{R})$ 映射到图 $\mathrm{PH}_i(f) := \operatorname{dgm}(H_i(X^\bullet))$，其中 $X^\bullet$ 是由 f 对 X 进行的次水平集过滤。按照 [20], 的说法，如果一个映射 f 温和，则其持久模 $H_i(X^\bullet)$ 逐点有限维，并且对所有 i，持久图 $\mathrm{PH}_i(f)$ 都是有限的。持久图空间 **Dgm** 配备了一种度量，即 瓶颈距离 （完整构造见 [16] 的第 4.2 节）。事实上，映射 PH_i 关于瓶颈距离是 1-Lipschitz 的。

定理 2.20。（稳定性） *[16, 推论 4.17]* 设 X 是一个可三角剖分空间，其上有连续函数 f、g：$X \to \mathbb{R}$。则次水平集过滤的持久图满足 $d_B(\mathrm{PH}_i(f), \mathrm{PH}_i(g)) \le \|f-g\|_\infty$，对任意整数 i 均成立。

这一性质确保输入函数的微小扰动只会使相应的持久图发生微小变化，因此持久同调是用于数据分析的稳定工具。

注 2.21。 考虑由空间 X 上的连续函数 f 生成的滤过所导出的持久模 $H_i(X^\bullet)$。对于序列中满足 $s<t$ 的任意一对 X^s, X^t，我们可以考虑相对同调的长正合序列

$$\cdots \to H_i(X^s) \to H_i(X^t) \to H_i(X^t, X^s) \to H_{i-1}(X^t) \to \cdots .$$

该序列的正合性意味着，当且仅当 $H_i(X^t, X^s) = 0$ 对所有 i成立时， $H_i(X^s) \to H_i(X^t)$ 是同构。若对于足够小的 $\epsilon > 0$，$H_i(X^{t-\epsilon}, X^{t+\epsilon}) = 0$ 对所有 i成立，则称参数 t 是该滤过的同调正则值；否则称其为同调临界值。根据式 (26) 中持久图的刻画，只有同调临界值才可能是 $\mathrm{dgm}(H_i(X^\bullet))$ 中某个特征的出生或消亡位置。

2.2.2 带边界流形的光滑莫尔斯理论

对于流形 M 上的光滑函数 $f \in C^k(M, \mathbb{R})$，记 $M_a = f^{-1}(-\infty, a]$ 为 f 在 a 下的次水平集。回顾一下， f 的临界点 p 是指 $\mathrm{d}f(p) = 0$ 的点。若对于 p 的任意局部坐标图 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$，海森矩阵 $(H_f)_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f\circ\varphi^{-1})$ 的行列式均非零，则称临界点为非退化临界点。非退化临界点的莫尔斯指标 $\lambda(p)$ 是 H_f 的负特征值个数。如果一个函数的所有临界点都是非退化的，则称其为莫尔斯函数。

莫尔斯理论使我们能够分析将一个次水平集 $M_a \hookrightarrow M_{a+t}$ 纳入另一个次水平集时同伦类型的变化。关于莫尔斯理论的论述，读者可参阅文献中许多优秀著作，例如 [47, 8, 52]。莫尔斯理论的关键洞见是，次水平集 M_{a+t} 的同伦类型只会在 t 经过 f 的临界值时发生变化。特别地，如果 f 是一个莫尔斯函数，那么同伦类型的变化由临界点的莫尔斯指标决定。如果 $[a_-, a]$ 只包含一个临界值 b，且该值位于 $(0, a]$，那么对于 $f^{-1}(b)$ 中的每个临界点 p， M_{a_-} 都与 M_a 同伦等价，而后者沿边界附加了 $\lambda(p)$ 维细胞 $e^{\lambda(p)}$ （[52, 定理2.2.3，注2.2.5], [47, §3.2]）：

$$M_a \simeq M_{a_-} \cup e^{\lambda(p_1)} \cup \cdots \cup e^{\lambda(p_n)}. \tag{28}$$

因此，数对 (M_a, M_{a_-}) 的相对同调由下列内容给出（[47, §5], [45, 定理 A.4.1-2], [52, 定理 2.2.3]）：

$$H_\bullet(M_a, M_{a_-}) = \bigoplus_{i=1}^{n} \tilde{H}_\bullet(S^{\lambda(p_i)}). \tag{29}$$

在应用光滑莫尔斯理论时，我们关注流形具有非空边界的情形。此情形见 [58]。由于我们主要研究的对象是莫比乌斯带上的一个光滑函数，该函数在内部为正，在边界上为零，因此我们将范围限定在以下这类函数。

定义 2.22。 对于 $k \geq 2$，设 $f \in C^k(M, \mathbb{R})$ 是带边界紧流形 $(M, \partial M)$ 上的一个非负函数，且满足 $f^{-1}(0) = \partial M$。如果满足以下条件，我们称 f 为莫尔斯支撑的：

($M1$) 限制 到 M 的内部 $\mathrm{int}\ M$ 上，映射 f 是一个莫尔斯函数（其临界点均为非退化 ）；

($M2$) $f|_{\mathrm{int}\ M}$仅有有限个临界点；并且

($M3$) 存在一个足够小的 $a > 0$，使得对于所有 $t \in [0, a]$，边界 $\partial\mathcal{M} = f^{-1}(0)$ 都是次水平集 $f^{-1}[0, a]$ 的变形收缩。

如果 0 是 f 的正则值，那么第二个条件 ($M3$) 可由关于正则水平集的莫尔斯理论标准变形引理推出（特别是带边界流形的相关表述，见 [8, 定理 3。20] ）。然而，我们将这一额外条件表述为：边界处的莫¨比乌斯带是弦距离变换 $\mathcal{T}_\gamma$ 的一个临界值为 0 的临界水平集。

在以下引理中，我们将 [58] 关于带边界流形上莫尔斯函数的持久同调的观察推广到莫尔斯支撑函数的情形。

引理 2.23。 设 f 是一个莫尔斯支撑函数，其临界值为 $0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_N = \infty$。对于每个临界值 a_i，令 C_i 为 $f^{-1}(a_i)$ 中的临界点集合。那么：

- *For* $a_i \le s \le t < a_{i+1}$, $H_\bullet(M_s) \xrightarrow{\cong} H_\bullet(M_t)$; *and*
- *For* $s \in (a_{i-1}, a_i]$, *and* $t \in (a_i, a_{i+1})$,

$$H_n(M_t, M_s) \cong \bigoplus_{p \in C_i} \tilde{H}_n(S^{\lambda(p)}). \tag{30}$$

因此，对于任意 n，持久模 H_n（$M_\bullet$）都是逐点有限维的，而 a_i 恰好是该滤过的同调临界值。

现在我们给出一个充分条件，使 $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ 具有有限多个非退化临界点；这也是函数为莫尔斯支撑的必要条件。回顾一下，若 M 是紧致且无边界的，那么莫尔斯函数 f 必定只有有限多个临界点。我们可以证明，对于带边界流形，只要能将内部的临界点与边界隔离开来，也能以类似方式控制流形内部临界点的基数。

引理 2.24. 考虑 $f \in C^2(M, \mathbb{R})$，其中 M 是带边界紧流形，边界为 ∂M。若存在 V 的一个邻域 V，在该邻域上，f 在 $V \setminus \partial M$ 上没有临界点，那么 f 在 M 的内部为莫尔斯函数，就意味着 M 的内部只有有限多个临界点。

证明。 证明与无边界紧流形的情形类似。假设 f 在内部有无限多个临界点。由于 M 是紧致的，我们可以取这些临界点构成的一个收敛序列 (p_n)；由 $\mathrm{d}f$ 的连续性，该序列必收敛到某个临界点 $p \in M$。由于 V 将边界隔离开来，该临界点必位于内部。由于 f 在内部是莫尔斯函数，p 是非退化的，因而是孤立的；然而，这与存在无限序列 $p_n \to p$ 矛盾。因此，内部不可能有无限多个临界点。 □

2.2.3 滤过单纯复形的莫尔斯理论

假设 X 是一个有限单纯复形，并且我们有一列子复形的滤过 $X^\bullet$，它们属于 X，定义在 $\mathbb{R}$上。如果该滤过是函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 的子水平集过滤，且该函数相对于单纯复形的面偏序集是单调的，我们称 f 为滤过函数。

考虑包含序列

$$\emptyset = X^{a_0} \subset \cdots \subset X^{a_i} \subset X^{a_n} = X^{a_{i+1}} \subset \cdots \subset X \tag{31}$$

其中 $a_0 < \cdots < a_n$ 是 $\mathbb{R}$ 的有限多个取值，在这些取值处会有新的单形加入滤过中。在这种情况下，每个次水平集 X^a 都是 X的子复形。为了描述持久模 $H_i(X^\bullet)$的同调临界值，我们需要考察滤过中逐个添加单形如何影响相对同调 $H_k(X^{a_i}, X^{a_{i-1}})$。我们回顾 Conley-Morse 理论中的一些观察，它们将相对同调与滤过中新增单形附着到已有复形的方式联系起来。

考虑有限单纯复形 $X^- \hookrightarrow X$的一个包含映射。令 $S = X \setminus X^-$，并将 $\mathrm{cl}(S)$ 记为 S 的闭包（即 X 中包含 S的最小子复形）。我们称 $L = \mathrm{cl}(S) \cap X^-$ 的链接；也就是说，它由 S 中单形的面组成，这些面属于 X^- 而非 S。借用组合动力学中的术语，我们称 $S = \bigsqcup_i S_i$ 的连通分支 S_i 为该滤过的*Morse* 集，并称 S_i的闭包 $\mathrm{cl}(S_i)$ 为 Morse 集 S_i的链接。根据定义可知，L_i 在 X 和 $L = \bigcup_i L_i$中是闭的。我们还有以下刻画。

引理 2.25。 设 S_i 是 $X \setminus X^-$ 的一个连通分支，其中 X^- 是有限单纯复形 X 的子复形。那么，对于 $L_i =$，$\mathrm{cl}(S_i) = S_i \sqcup L_i$；对于 $\cap X^-$，$\mathrm{cl}(S_i)$。

证明。 假设存在某个单纯形 $\sigma \in \mathrm{cl}(S_i) \setminus S_i$ 不属于 L_i。由于 $L_i = \mathrm{cl}(S_i) \cap X^-$ 且 X 是一个复形，因此 σ 必须属于集合 $S = X \setminus X^-$。此外，由于 σ 属于 S_i的闭包，σ 与 S_i相连。然而，由于 S_i 是一个连通分支，σ 也必须属于 S_i，这与 $\sigma \in \mathrm{cl}(S_i) \setminus S_i$ 但不属于 L_i相矛盾。因此，$\mathrm{cl}(S_i) \setminus S_i \subseteq L_i$。另一方面，由于 $S_i \cap X^- = \emptyset$且 $L_i \subseteq X^-$，我们有$L_i \subseteq \mathrm{cl}(S_i) \setminus S_i$。因此 $L_i = \mathrm{cl}(S_i) \setminus S_i$。 □

我们将相对同调群

$$\mathrm{Con}_\bullet(S_i) := H_\bullet(\mathrm{cl}(S_i), L_i) \tag{32}$$

作为莫尔斯集 S_i 的 *Conley* 指数。如果 S_i 的 Conley 指数是平凡的，那么我们也称 S_i 是正则的。否则，我们称 S_i 是一个临界集。特别地，如果 $H_\bullet(\mathrm{cl}(S_i)\ L_i) \cong \tilde{H}_\bullet(\mathbb{S}^n)$，那么按照光滑莫尔斯理论的思路，我们称莫尔斯集 S_i 为一个 n- 鞍点。我们令 $\lambda(S_i) = n$ 表示该鞍点的莫尔斯指标。注意，如果 $\mathrm{cl}(S_i)$ 可缩，那么 S_i 的 Conley 指数可由其链接的同调刻画：根据对偶对 $(\mathrm{cl}(S_i)\ L_i)$ 的约化同调长正合列，当同调次数为 $k \geq 1$ 时，我们有一个同构：

$$H_k(\mathrm{cl}(S_i), L_i) \cong \tilde{H}_k(\mathrm{cl}(S_i), L_i) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{k-1}(L_i). \tag{33}$$

对于 $k = 0$，如果 L_i 为空，那么 $H_0(\mathrm{cl}(S_i)\ L_i) = \mathbb{F}$；否则 $H_0(\mathrm{cl}(S_i)\ L_i) = 0$。

Usi通过切除型论证，我们将相对同调 $H_\bullet(X, X^-)$ 与 Conley 指数联系起来 s.

引理 2.26. 设(X, X^-) 是一对有限单纯复形。那么，这对复形的包含映射$(\mathrm{cl}(S)\ L) \hookrightarrow (X, X^-\ \ )$ 诱导一个同构

$$\bigoplus_i \mathrm{Con}_\bullet(S_i) \xrightarrow{\cong} H_\bullet(X, X^-). \tag{34}$$

其中，S_i 是 $X \setminus X^-$的连通分支。

证明。 考虑相对单纯链复形 $C_\bullet(X, X^-)$和 $C_\bullet(\mathrm{cl}(S)\ L)$。通过直接计算可验证，这对复形的包含映射 $(\mathrm{cl}(S)\ L) \hookrightarrow (X, X^-)$诱导链复形的同构$C_\bullet(\mathrm{cl}(S)\ L) \xrightarrow{\cong} C_\bullet(X, X^-)$。此外，通过直接计算还可验证，$C_\bullet(\mathrm{cl}(S)\ L)$同构于与莫尔斯集及其链接相关的相对链复形的直和 $\bigoplus_i C_\bullet(\mathrm{cl}(S_i)\ L_i)$。为证明这一点，我们首先注意到，对于 $i \neq j$，由于 $S_i \cap x_j = \emptyset$，有

$$\mathrm{cl}(S_i) \cap \mathrm{cl}(x_j) = (\mathrm{cl}(S_i) \setminus S_i) \cap (\mathrm{cl}(x_j) \setminus x_j) = L_i \cap L_j.$$

因此，若考虑链复形的相对 Mayer-Vietoris 短正合列

$$0 \to C_\bullet(\mathrm{cl}(S_i) \cap \mathrm{cl}(x_j), L_i \cap L_j) \to C_\bullet(\mathrm{cl}(S_i), L_i) \oplus C_\bullet(\mathrm{cl}(x_j), L_j) \to C_\bullet(\mathrm{cl}(S_i) \cup \mathrm{cl}(x_j), L_i \cup L_j) \to 0$$

这一事实表明，hat $C_\bullet(\mathrm{cl}(S_i) \cap \mathrm{cl}(x_j)\ L_i \cap L_j)$ 是平凡的，因此我们得到链复形之间的一个同构 s

$$C_\bullet(\mathrm{cl}(S_i), L_i) \oplus C_\bullet(\mathrm{cl}(x_j), L_j) \xrightarrow{\cong} C_\bullet(\mathrm{cl}(S_i) \cup \mathrm{cl}(x_j), L_i \cup L_j).$$

由此，通过归纳可得链复形 $\bigoplus_i C_\bullet(\mathrm{cl}(S_i)\ L_i) \to C_\bullet(\mathrm{cl}(S)\ L)$ 之间的一个同构，它诱导出同调群之间的一个同构。 □

因此，若某个滤过的所有临界莫尔斯集都是鞍点，那么 $H_n(X,\ X^-)$ 的秩由 n 个鞍点的数量给出。借助相对同调长正合序列，我们由此可以将每个莫尔斯集对一个次数上的同调变化 $H_\bullet(X^-) \to H_\bullet(X)$ 的贡献联系起来，其秩恰为一。我们用以下术语来称呼这一滤过。

注 2.27。 在组合动力学的 Conley-Morse 理论框架中，将复形X 划分为 $S,\ X^-$，并将 S 划分为不交并 S_i，构成一个 组合多向量场；也就是说，这是将复形划分为局部闭子集。各个划分元素 S_i 属于 X^-，称为 多向量，而链接也称为口。我们对 Conley 指数的定义与他们的定义一致；关于组合框架下 Conley 理论的详细介绍，请参阅 [49, §2] 。

2.3 微分拓扑

函数空间拓扑 现在我们定义 $C^k(M,N)$上的弱拓扑和强（Whitney）拓扑，遵循 [35, §2。1]。我们用 $C^k_W(M,N)$ 和 $C^k_S(M,N)$ 分别表示赋予弱拓扑和强拓扑的函数空间。

我们引入一个（子）基来定义这些拓扑。设 M,N 为 C^k 流形。考虑 $U\subset M$ 和 $V\subset N$ 的局部坐标图 $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^m$ 和 $\psi\colon V\to\mathbb{R}^n$，并设 $K\subset U$ 紧致。若 $f\in C^k(M,N)$ 满足 $f(K)\subset V$，则考虑映射 $g\in C^k(M,N)$，使得 $g(K)\subset V$，且对于 $\epsilon>0$

$$\left\|D^r(\psi f\varphi^{-1})|_x - D^r(\psi g\varphi^{-1})|_x\right\|\le\epsilon \qquad \forall x\in K,\quad r=0,\dots,k. \tag{35}$$

那么，f [35, P. 35, §2.1]中的弱子基邻域定义为

$$\mathcal{N}(f;(\varphi,U),(\psi,V),K,\epsilon):=\{g\in C^k(M,N)\ :\ g(K)\subset V,\ \text{and } g \text{ satisfies eq. (35)}\}. \tag{36}$$

$C^k(M,N)$上的弱（或 C^k 紧致开）拓扑以集合 $\{\mathcal{N}(f;(\varphi,U),(\psi,V)\ K,\epsilon)\}$ 作为映射子集的子基（其中 U,V 取遍开集，K 取遍紧致集，$\epsilon>0$）。换言之，任意 f 都有一个邻域，它由有限个弱子基邻域的交集组成。若 $C^k(M,N)$中的映射序列（f_i）在弱拓扑下收敛到 $C^k(M,N)$中的另一个 f，则对于任意由有限个弱子基邻域交集构成的 W，都存在某个 j，使得对于 $i\ge j$，$f_i\in W$ 成立。换言之，弱拓扑下的收敛等价于：对于任意选取的紧致 K 和相容坐标图 φ,ψ，$D^r(\psi f_i\varphi^{-1})$在紧子集 $\varphi(K)\subset\mathbb{R}^m$ 上一致收敛到 $D^r(\psi f\varphi^{-1})$，其中 $r=0,\dots,k$。

另一方面，$C^k(M,N)$ 上的惠特尼拓扑或强拓扑由以下形式的子集构成一组基：$\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{N}(f;(\varphi_i,U_i),(\psi,V_i)\ K_i,\epsilon_i)$，其中 $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$和 $\{V_i\}_{i\in\mathcal{I}}$是 M和 N的局部有限覆盖。由于指标集仅局部有限，强拓扑比弱拓扑更精细。在强拓扑下收敛的条件更严格，要求映射在紧子集 K之外处处相同，并在该 K 上统一收敛（见 [41, 41.7 和 41.10]）。然而，如果 M 是紧致的，那么弱拓扑与强拓扑一致 [35, §2.1]。

注 2.28. 如果目标流形 N是某个欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$，那么我们将 $\mathcal{N}(f;(\varphi,U)\ K,\epsilon)$ 记作弱子基邻域，其中 ψ在 $\mathbb{R}^n$上是恒等映射，且邻域 V由满足以下条件的映射 g构成：在所有 K上，$\|f-g\|<\epsilon$。

注记 2.29. 我们回顾一下 $C^r_S(M,N)$ 的子集的拓扑性质中一些其他重要事实。回顾一下，拓扑空间的余集 是开稠密子集的可数交。

1. $C^r_S(M,N)$ 是贝尔空间：任何余集都是稠密的（[35, 定理 2.4.4]）。
2. 对于 $r\ge1$，C^r 嵌入的集合 $\mathrm{Emb}^r(M,N)$ 在 $C^r_S(M,N)$ 中是开集（[35, 定理 2.1.4]）.
3. 若 U是流形 M 的开集，则限制映射 $f\mapsto f|_U$作为从 $C^r(M,N)$ 到 $C^r(U,N)$ 的函数，在弱拓扑下是连续的，但在强拓扑下未必连续（[35, 问题 2.1.16]）。

射流 我们还可以用射流来描述 $C^r(M,N)$ 上的弱拓扑与强拓扑；射流为处理流形之间光滑映射的导数提供了一个方便的框架。我们沿用 [28, §2] 和 [35, §4] 的阐述，并请读者参阅其中的完整形式化阐述。设 M和 N为 C^k流形；对于 $x\in M$和 $y\in N$，考虑映射集合

$$C^k(M,N)_{x,y}=\Big\{f\in C^k(M,N)\ :\ f(x)=y\Big\}. \tag{37}$$

对于 $r\le k$ 个正整数，以及（任意且所有）局部坐标图 $\varphi\colon(U,\ x)\to(\mathbb{R}^m,\ 0)$ 和 $\psi\colon(V,\ y)\to(\mathbb{R}^n,\ 0)$，分别在 $x,\ y$ 处，考虑 $C^k(M,\ N)_{x,\ y}$ 上的等价关系

$$f\sim_{x,r}g \quad\text{if}\quad D^j(\psi f\varphi^{-1})|_0=D^j(\psi g\varphi^{-1})|_0 \quad\forall\, j\in0,\dots,r. \tag{38}$$

注意，该等价关系不依赖于坐标图的选择。我们将从 x 到 y 的 r-射流集合 $J^r(M,\ N)_{x,\ y}$ 定义为 $C^k(M,\ N)_{x,\ y}/\sim_r$，而从 M 到 N 的 r-射流集合定义为

$$J^r(M,N)=\bigsqcup_{x\in M,\ y\in N} J^r(M,N)_{x,y}. \tag{39}$$

我们可以将 $J^r(M,N)$ 中的任意元素写作 $(x,y,[f]_{x,r})$，其中 x 和 y 分别是 f 的源与目标，而 $[f]_{x,r}$ 是 f 在 $\sim_{x,r}$ 下的等价类。对于任意 $f\in C^k(M,N)$，f 的 r-延拓是映射 $j^rf\in C^{k-r}(M,J^r(M,N))$，其中 $j^rf(x)=(x,f(x)[f]_{x,r})$。我们赋予 $J^r(M,N)$ 如下拓扑：开集为 $J^r(U,V)=\bigsqcup_{x\in U,y\in V}J^r(M,N)_{x,y}$，其中 $U\subseteq M,V\subseteq N$ 为开集。

现在，我们根据 M 和 N 分别的图册 $\{\varphi_a\colon U_a\to\mathbb{R}^m\}$ 和 $\{\psi_b\colon V_b\to\mathbb{R}^n\}$，明确推导出 $J^r(M,N)$ 的典范图册。对于 $(x,y,[f])\in J^r(U_a,V_b)$，我们可以将 $[f]$ 指定为 $f_{ab}:=\psi_bf\varphi_a^{-1}\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 在 $\varphi(x)$ 处截至 r 阶的泰勒多项式展开的截断。令 A^j_m 为由 m 个变量构成的、次数为 $\leq j$ 且常数项为 $=0$ 的实系数多项式的 $\mathbb{R}$-向量空间，并定义 $B^j_{m,n}=\bigoplus_{i=1}^n A^j_m$。我们有一个双射$\zeta_{ab}\colon J^r(U_a,V_b)\to\varphi_a(U_a)\times\psi_b(V_b)\times B^j_{m,n}$，其中

$$(x,y,[f]_{x,r})\mapsto(\varphi_a(x),\psi_b(y),Df_{ab}|_{\varphi(x)},\dots,D^rf_{ab}|_{\varphi(x)}). \tag{40}$$

事实上，按照我们为 $J^r(M,\ N)$所选取的拓扑，ζ_{ab}是 $J^r(U_a,\ V_b)$与欧几里得空间之间的一个同胚。映射 $\{\zeta_{ab},J^r(U_a,V_b))\}$的集合满足图册的公理，因此这为 $J^r(M,\ N)$赋予了流形结构（详情请参阅 [28, §2]和 [35, §4]）。

由于射流包含高阶导数的信息，因此也可用于定义弱拓扑和强 C^k拓扑。将 $f\in C^k(M,\ N)$延拓为一个从 $C^k(M,\ N)$到 M与 $J^k(M,\ N)$之间连续映射集合的赋值。

$$\begin{aligned} j^k:C^k(M,N)&\to C^0(M,J^k(M,N))\\ f&\mapsto j^kf. \end{aligned} \tag{41}$$

$C^k(M,\ N)$上的强（弱）拓扑，恰好是使延拓 j^k连续的最粗拓扑；此时 $C^0(M,\ J^k(M,\ N))$赋予强（弱）拓扑 [41, 41。9-10]。

多重射流 s重 r射流的集合 $C^k(M,\ N)$定义为

$$J^r_s(M,N):=\{(j^rf(x_1)\dots,j^rf(x_s))\ :\ f\in C^k(M,N),(x_1,\dots,x_s)\in\mathrm{Conf}_n(M)\}. \tag{42}$$

s重 r射流的集合是 $J^r(M,\ N)^s$的一个子流形，其坐标图继承自 $J^r(M,\ N)^s$作为乘积流形的坐标图：

$$\{(\zeta_{a_1,b_1},\dots,\zeta_{a_s,b_s}),J^r(U_{a_1},V_{b_1})\times\ldots\times J^r(U_{a_s},V_{b_s})\}.$$

同样，我们可以将 $f\in C^k(M,\ N)$延拓为 n重 r射流 $j^r_sf\colon\mathsf{Conf}_s(M)\to J^r_s(M,\ N\quad)$:

$$j^r_sf:(x_1,\dots,x_s)\mapsto(j^rf(x_1)\dots,j^rf(x_s)). \tag{43}$$

横截性 我们遵循 [35, §2]和 [28, §4]中关于横截性的阐述。设 M和 N为可微流形。若可微映射 f在 $V\subseteq M$上与 N的子流形 W横截相交，则或者 $f(V)\cap W=\emptyset$，或者 $x\in V$被映入 W，

$$T_{f(x)}W+\mathrm{d}f_x\left(T_xM\right)=T_{f(x)}M. \tag{44}$$

我们将此记为 $f\pitchfork_V W$。若 $V=M$，则简记为 $f\pitchfork W$。若 W是惠特尼分层空间，则当对所有分层 W_i，$f\pitchfork_V W_i$作为流形时，我们称 $f\pitchfork_V W$。

注意，如果秩 $\mathrm{d}f$小于 W在 N中的余维，其中 $f(M)\cap W$，那么 $f\pitchfork W$意味着 $f(M)\cap W=\emptyset$。我们在命题 4.15 的证明中利用了这一事实：由于这一维数论证，横截条件的一般性意味着由空交集定义的性质具有一般性。

本文所用横截理论中的主要定理出自 Damon： [21, 推论 1。11]；我们陈述该定理的一个特定版本，见 [5](定理 9.1)。

定理 2.30 (Damon)。 设 $k \geq r+1$ 和 $s \geq 2$。令 M、 N 为流形，其中 M 是紧致的，并且 $V \subset \mathrm{Conf}_s(M)$ 和 $W \subset J_s^r(M, N)$ 是闭的惠特尼分层子集。则在 *Whitney* C^k-拓扑下， $C^k(M, N)$ 的以下子集是 余集：

$$\Gamma = \left\{ f \in C^k(M,N) \,:\, j_s^r f \pitchfork_V W \right\}. \tag{45}$$

此外，如果 V 是紧致的，那么 Γ 在 *Whitney* C^{k+1}-拓扑中也是开集。

由于 $\mathrm{Emb}^k(M,N)$ 在 $C_S^k(M,N)$ [41, 5 中是开集，3], 如果 Γ 在 $C_S^k(M,N)$ 中是余集，那么 $\Gamma \cap \mathrm{Emb}^k(M,N)$ 在 $\mathrm{Emb}^k(M,N)$ 中也为余集。

2.4 正可达子集

欧几里得空间中闭子集 $A \subset \mathbb{R}^d$ 的可达半径由 [25] 引入，用于量化 A 的管状邻域的大小。令 $A^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : \ d(x, A) \leq \epsilon\}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中 A 的 ϵ-邻域。 A 的管状邻域是 A 的一个 ϵ-邻域，且满足：对于其中的任意点 x，在 A 上都有唯一的最近点。 A 的可达半径 记为 τ，定义为所有满足 A^ϵ 是 A 的管状邻域的 ϵ 中的上确界。如果 $\tau > 0$，我们就称 A 具有正可达半径。

正可达子集包括凸子集（其中 $\tau = \infty$），以及紧致 C^2-子流形 [25, 备注 4.20-21]。我们回顾文献中的一些结果，其中 τ 被证明是闭子集 A的一个有用特征长度尺度；在该尺度以下， A 的局部几何可以用欧几里得数据进行良好近似。首先，我们注意到 [12], 中的一个结果，该结果描述了欧几里得距离如何界定 d_A 中的测地距离，而后者由环境欧几里得距离诱导。

引理 2.31 ([12, 引理 3])。 如果 $A \subset \mathbb{R}^d$ 是一个闭集，且 p、 $q \in A$ 之间的欧几里得距离为 $\|p-q\| < 2\tau$，那么

$$\|p-q\| \leq d_A(p,q) \leq 2\tau \arcsin \frac{\|q-p\|}{2\tau}. \tag{46}$$

Federer 在引入可达半径 [25], 时指出，可达半径还控制着：随着邻域大小增加，流形在一点处的切平面近似发生劣化的速率。

定理 2.32 ([25, 定理 4.18])。 设 τ 为子流形 $M \subset \mathbb{R}^d$ 的可达半径。对于 T_p 在 p 处的切平面 M， $q \in M$ 到 T_p 的距离上界为

$$d(q, T_p) \leq \frac{\|q-p\|^2}{2\tau}. \tag{47}$$

注意， $d(q, T_p)$ 是向量 $q-p$ 到平面 $-p+T_p$ 的正交投影长度。由于 $d(q, T_p) \leq \|q-p\|$，因此该界仅在 $\|q-p\| \leq 2\tau$ 时有意义。

在 $M = \gamma(S^1)$ 是 C^1 到 S^1 的嵌入的像的情况下，我们可以得到以下表达式，该表达式有助于控制 $\mathcal{T}_\gamma$ 的临界点。由于 $d(q, T_p) = \|p-q\| |\sin \measuredangle(q-p, \dot\gamma(p))|$,

$$\langle \dot\gamma(p), \gamma(q)-\gamma(p) \rangle^2 = \|\dot\gamma(p)\|^2 \|\gamma(q)-\gamma(p)\|^2 \cos^2 \measuredangle(q-p, \dot\gamma(p)) \geq 1 - \left(\frac{\|\gamma(q)-\gamma(p)\|}{2\tau} \right)^2. \tag{48}$$

3 一般性质 弦距离变换持久同调的性质 s

本小节将介绍一般圆的拓扑嵌入的弦距离变换的一些一般性质。我们证明， $\mathcal{T}$: $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^d)$ $\to C^k(\mathbf{F}_2(S^1)\ \mathbb{R})$ 是一个将圆嵌入变换为满足良好对称性性质的函数的连续变换。我们还将讨论持久同调所选取的域系数如何影响持久图 $\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$。

我们首先指出，对于持久图 $\mathrm{PH}\,\mathcal{T}_\gamma)$ 证明的任何性质，同样适用于 $\mathrm{PH}(\mathrm{T}\gamma)$，因为这两个持久图之间存在双射。

引理 3.1. 由 $\Phi\colon(s,t)\mapsto(\frac{1}{2}s^2,\frac{1}{2}t^2)$ 给出的同胚 $\Phi\colon\mathbb{R}^2_{\geq 0}\to\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ 在持久图 $\mathrm{PH}\circ\mathcal{T}(\gamma)$ 与 $\mathrm{PH}\circ\mathsf{T}(\gamma)$之间诱导出一个双射。

证明。 根据定义，对于所有 $t\geq 0$，次水平集 $\{w\in\mathbf{F}_2(S^1):\mathsf{T}\gamma(w)\leq t\}$ 和 $\{w\in\mathbf{F}_2(S^1):\ \mathcal{T}_\gamma(w)\leq\frac{1}{2}t^2\}$均相等，因此相应的持久模及其持久图仅相差一个单调重参数化 $s\mapsto s^2/2$ of $[0,\infty)$。 □

3.1 连续性

我们首先证明，如果 $\gamma\colon S^1\to X$ 连续，那么 $\mathcal{T}_\gamma$ 和 $\mathsf{T}\gamma$ 在 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 上也是连续函数。我们分别在 $C(S^1,X)$ 和 $C(\mathbf{F}_2(S^1)\ \mathbb{R})$ 上赋予度量

$$d(\gamma,\tilde{\gamma})=\sup_{z\in S^1}d_X(\gamma(z),\tilde{\gamma}(z)),\quad d(f,\tilde{f})=\sup_{\{z_1,z_2\}\in\mathbf{F}_2(S^1)}|f(\{z_1,z_2\})-\tilde{f}(\{z_1,z_2\}|.$$

这些度量分别刻画了 $C(S^1,X)$ 和 $C(\mathbf{F}_2(S^1)\ \mathbb{R})$ 的弱拓扑（又称紧致开拓扑）。利用三角不等式这一简单应用，我们可以证明 T 是 Lipschitz 连续的。

引理 3.2. 距离变换 T $\mathcal{T}\colon C(S^1,X)\to C(\mathbf{F}_2(S^1)\ \mathbb{R})$ 是函数空间之间的连续映射。特别地，T 是一个 *2-Lipschitz* 映射。

证明. 考虑

$$d(\mathsf{T}\gamma,\mathsf{T}\tilde{\gamma})=\sup_{\{z_1,z_2\}\in\mathbf{F}_2(S^1)}|d_X(\gamma(z_1),\gamma(z_2))-d_X(\tilde{\gamma}(z_1),\tilde{\gamma}(z_2))|.$$

上确界中的项可以通过两次应用三角不等式来界定，从而得到 T 是 2-Lipschitz 连续的：

$$\begin{aligned}d(\mathsf{T}\gamma,\mathsf{T}\tilde{\gamma})&\leq\sup_{\{z_1,z_2\}\in\mathbf{F}_2(S^1)}(d_X(\gamma(z_1),\tilde{\gamma}(z_1))+d_X(\gamma(z_2),\tilde{\gamma}(z_2)))\\&=2\sup_{z\in S^1}d_X(\gamma(z),\tilde{\gamma}(z))=2d(\gamma,\tilde{\gamma}).\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{T}$ 是 T 与一个连续映射的复合，因此 $\mathcal{T}$ 也连续。 □

定义了连续函数 $\mathcal{T}_\gamma\colon\mathrm{F}_2(S^1)\to\mathbb{R}$ 后，我们可以构造次水平集滤过，并考察其持久同调。由于 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 是一个带边界流形，因而可有限三角剖分，$\mathrm{F}_2(S^1)$ 上的连续函数总具有 q-温和的持久同调 [16, 定理 2.22]。因此，我们可以考虑度量空间 Dgm 中的持久图 $\mathrm{PH}_i(\mathcal{T}_\gamma)$，该空间配备了瓶颈距离。根据引理 3.2，映射 PH 是从函数到图空间的连续变换；再由稳定性定理（定理 2.20），$\mathcal{T}\colon C(S^1,X)\to C(\mathrm{F}_2(S^1)\ \mathbb{R})$ 与 PH_i 的复合给出了一个从嵌入到持久图的连续函数 $\mathrm{PH}_i\circ\mathcal{T}$。

推论 3.3. 持久同调 $\circ\mathcal{T}\colon\ C(S^1,X)\to\mathbf{Dgm}$ 关于 **Dgm** 上的瓶颈距离是连续的。此外，持久同调 $\circ\,\mathsf{T}\colon C(S^1,X)\to\mathbf{Dgm}$ 是 *2-Lipschitz* 的。

3.2 对称不变性

由于 $\mathcal{T}_\gamma$ 纯粹是欧几里得空间中点之间距离的函数，因此它具有等距不变性：任意等距变换 $\omega\colon\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 都会使弦距离变换保持不变。如果 γ 经过欧几里得空间中的等距变换 $\alpha\colon\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$，则变换后的映射 $\alpha\circ\gamma\colon\ S^1\to\mathbb{R}^d$ 与 $\mathcal{T}_\gamma=\mathcal{T}_{\alpha\circ\gamma}$ 具有相同的弦距离变换，因为后者仅取决于距离。明确地说，

$$\mathcal{T}_{\alpha\circ\gamma}(\{z_1,z_2\})=\frac{1}{2}\|\alpha\circ\gamma(z_1)-\alpha\circ\gamma(z_2)\|^2=\frac{1}{2}\|\gamma(z_1)-\gamma(z_2)\|^2=\mathcal{T}_\gamma(\{z_1,z_2\}).\tag{49}$$

对于应用而言，重要的是，这些观察意味着，两个不同的圆嵌入无需在环境欧几里得空间中以中心对齐，也无需通过旋转进行对齐，就能获得能够有意义地比较其几何性质的几何特征。

然而，弦距离变换仍会受到 γ 重参数化的影响。重参数化是指一个同胚 $\omega\colon\ S^1 \to S^1$。在此变换下，我们可以对曲线 $\gamma \circ \omega\colon\ S^1 \to \mathbb{R}^d$ 重新参数化，从而得到一个不同的嵌入 $\gamma \circ \omega$。它具有相同的像，但弦距离变换可能不同：$\mathcal{T}_{\gamma\circ\omega}$ 可能不等于 $\mathcal{T}_\gamma$。尽管如此，由于函数 $\mathcal{T}_\gamma$ 和 $\mathcal{T}_{\gamma\circ\omega}$ 的次水平集彼此同胚，弦距离变换的持久同调不受参数化方式的影响。

引理 3.4. 设 $\omega\colon\ S^1 \to S^1$ 是一个同胚。那么，ω 在 $\mathcal{T}_{\gamma\circ\omega}$ 和 $\mathcal{T}_\gamma$ 的次水平集滤过之间诱导出一个持久模同构。因此，持久同调$_\bullet(\mathcal{T}_{\gamma\circ\omega})$ = 持久同调$_\bullet(\mathcal{T}_\gamma)$。

证明。根据商映射的泛性质，在积空间 $\omega \times \omega$ 上由 ω 诱导的同胚也会诱导一个同胚 $\tilde{\omega}\colon \mathbf{F}_2(S^1) \to \mathbf{F}_2(S^1)$，其定义为

$$\tilde{\omega}(\{z_1, z_2\}) = \{\omega(z_1), \omega(z_2)\}. \tag{50}$$

于是我们可以写成 $\mathcal{T}_{\gamma\circ\omega} = \mathcal{T}_\gamma \circ \tilde{\omega}$。这意味着，对于任意满足 $\mathcal{T}_{\gamma\circ\omega} \le a$ 的点 $\{z_1, z_2\}$，都存在另一个点 $\tilde{\omega}(\{z_1, z_2\})$，使得 $\mathcal{T}_\gamma$ 小于 a，反之亦然。换句话说，$\tilde{\omega}\colon \mathbf{F}_2(S^1) \to \mathbf{F}_2(S^1)$ 限制为 $\mathcal{T}_{\gamma\circ\omega}$ 和 $\mathcal{T}_\gamma$ 在同一水平上的次水平集之间的一个同胚。由于 $\tilde{\omega}$ 是整个 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 上的同胚，经过限制可得交换图，其中垂直映射是同态：

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{T}_{\gamma\circ\omega})^{-1}[0,a] & \hookrightarrow & (\mathcal{T}_{\gamma\circ\omega})^{-1}[0,b] \\ \downarrow{\scriptstyle \omega} & & \downarrow{\scriptstyle \omega} \\ \mathcal{T}_\gamma^{-1}[0,a] & \hookrightarrow & \mathcal{T}_\gamma^{-1}[0,b] \end{array}. \tag{51}$$

将奇异同调函子应用于此图表，我们得到由 $\mathcal{T}_{\gamma\circ\omega}$ 和 $\mathcal{T}_\gamma$ 的次水平集滤过所产生的持久模之间的一个同构。因此，映射 $\mathrm{PH} \circ \mathcal{T}\colon C^k(S^1,\ \mathbb{R}^d) \to \mathbf{Dgm}$ 在对 S^1 进行同胚重参数化时保持不变。

□

我们用以下命题总结 $\mathrm{PH} \circ \mathcal{T}$ 的这些不变性质。

命题 3.5. 设 $\mathcal{T}, \mathsf{T} : \mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^d) \to C(\mathbf{F}_2(S^1)\ \mathbb{R})$ 为欧几里得空间中圆的拓扑嵌入上的弦距离变换。若 $\alpha\colon S^1 \to S^1$ 是一个同胚，且 $\omega\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是一个欧几里得等距变换，则特征映射 $\mathrm{PH} \circ \mathcal{T}$ 和 $\mathrm{PH} \circ \mathsf{T}$ 在此类变换下保持不变：

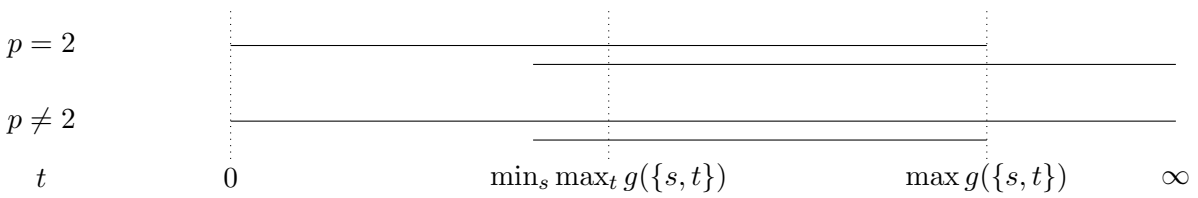
$$\mathrm{PH}(\mathcal{T}_{\omega\circ\gamma\circ\alpha}) = \mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma), \quad \mathrm{PH}(\mathsf{T}_{\omega\circ\gamma\circ\alpha}) = \mathrm{PH}(\mathsf{T}_\gamma). \tag{52}$$

3.3 持久同调对系数域的依赖。

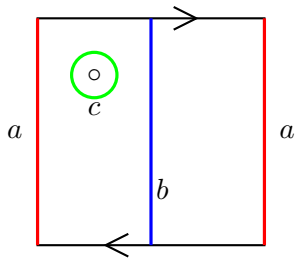
由于莫比乌斯带与圆同伦等价，其相对同调群为 $H_i(\mathcal{M}; \mathbb{Z}_p)$，当 $\mathbb{Z}_p$ 时为 $i = 1$，否则为 0，且与 p 无关。然而，与莫比乌斯带的中心线相比，边界 $\partial\mathcal{M}$ 绕行了两次，因此莫比乌斯带的持久同调对 p 敏感，下一条命题将对此加以说明。

命题 3.6。 设 $g\colon\ \mathbf{F}_2(S^1) \to [0, \infty)$ 是一个莫尔斯支撑函数。考虑持久图 持久同调$_1(g;\ \mathbb{Z}_p)$，其中同调取系数于域 $\mathbb{Z}_p$，其中 p为某个素数。

有两个特定点$(0, d_1)$、$(l, d_2) \in$持久同调$_1(g; \mathbb{Z}_p)$，在这些点处，$l \le$最小值$_s$极大值$_t\, g(\{s,t\})$。如果 $p = 2$，那么 $d_1 =$极大值 g，且 $d_2 = \infty$。否则，$d_1 = \infty$，且 $d_2 =$极大值 g。



证明。 在下文中，我们将记 $\mathcal{M} = \mathbf{F}_2(S^1)$。暂且假设 g 有唯一的全局极大值。令 t_* 为该全局极大值之前的一个值，使得 $\mathcal{M}_{t_*}$ 是一个去心 $\mathcal{M}$。考虑下图所示的 $H_1(M_{t_*})$ 的同调类$[a], [b], [c]$：



这给出了将持久模限制在 $0, t_*$ 和 $\max g$ 上的一个子模，如下方交换图所示：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}\,[a] & \xrightarrow{\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^T} & \mathbb{Z}[b] \oplus \mathbb{Z}[c] & \xrightarrow{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}} & \mathbb{Z}[b]. \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_1(\mathcal{M}_0) & \xrightarrow{H_1(\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_{t_*})} & H_1(\mathcal{M}_{t_*}) & \xrightarrow{H_1(\mathcal{M}_{t_*} \subset \mathcal{M}_{\max g})} & H_1(\mathcal{M}_{\max g}). \end{array}$$

根据 $\mathbb{Z}_p$ 上的万能系数定理，对于 $p \neq 2$，我们有

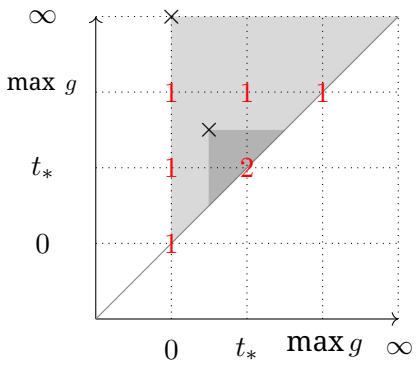
$$\mathbb{Z}_p \xrightarrow[\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^T]{} \mathbb{Z}_p^2 \xrightarrow[\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}]{} \mathbb{Z}_p \quad (\text{composite } 2)$$

对于 $p = 2$，我们有

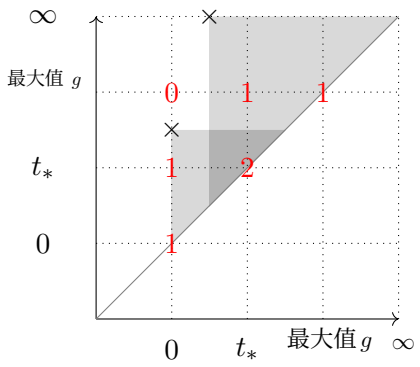
$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow[\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T]{} \mathbb{Z}_2^2 \xrightarrow[\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}]{} \mathbb{Z}_2\,. \quad (\text{composite } 0)$$

这给出了限制在 $0, t_*, \max g$ 上的秩函数：

$p \neq 2$



$p = 2$



在这两种情况下，这意味着存在两点 $(0, d_1)$ 和 (l, d_2)，其中某个 $l \leq t_*$。若 $p = 2$，则 $d_1 =$ 最大值 g 且 $d_2 = \infty$，反之对于 $p = 2$ 也成立。现在我们只需证明 $l \leq$ 最小值 $_s$ 最大值 $_t\, g(\{s, t\})$。

令 x_* 满足 $\max_t g(\{s, t\})$ 取最小值。考虑 $\mathcal{M}$ 的子集（在与$\mathbf{F}_2(S^1)$ 的等同关系下），定义为

$$d = \{\{x, y\} \in \mathbf{F}_2(S^1) : x = x_* \text{ or } y = x_*\}.$$

若 $\min_s \max_t g(s,\ t) = \max\ g$，则结论成立；否则，$[d]$ 是 $H_1(\mathcal{M}_{\min_s \text{极大值点}_t\, g\,(\{s,t\})})$ 中的一个圈，不等于 $[a]$，且在 $H_1(\mathcal{M}_{\max g})$ 中等于 $[b]$。因此我们有 $r^{\min\max g}{}_{\text{极小值点 极大值点}\, g} \geq 2$、$r^{t*}{}_{\text{极小值点 极大值点}\, g} = 2$，以及 $r^{\max g}{}_{\text{极小值点 极大值点}\, g} = 1$，这表明 $l \geq \min_s \max_t g(\{s,t\})$。多个全局极大值点的证明类似。

因此，对于 $p \neq 2$，具有 $\mathbb{Z}_p$ 系数的持久模的条形码，是将 g（根据假设，位于内部）的所有鞍点和极大值点配对而成的有限长度条。这使其成为更方便的选择，因为大多数持久模的向量化方法都假设持久模只有有限长度条；这里的无限条 $[0,\infty)$ 本质上不包含任何相关的几何信息，因此可以舍弃。

例 3.7。 正如我们将在例 4.17中看到的，对于长轴为 $2a$ 且短轴为 $2b$的椭圆，其唯一的内部临界点位于短轴处，其距离为 $2b$，严格小于 $\min_s \max_t \mathsf{D}(\{s,t\})$，这表明命题 3.6 中的上界并非总是等式。

4 欧几里得空间中的光滑圆嵌入

现在我们将讨论范围限定在闭曲线被光滑映射到某个欧几里得空间 $\gamma \in C^k(S^1,\mathbb{R}^d)$ 的情形。在命题 4.1 中，我们证明 $\mathcal{T}$ 是从 $C^k(S^1,\mathbb{R}^d)$ 到 $C^k(\mathcal{M},\mathbb{R})$ 的连续映射。本节的其他结果聚焦于嵌入 $\mathrm{Emb}^2(S^1,\mathbb{R}^d) \subset C^k(S^1,\mathbb{R}^d)$，即将 S^1 嵌入欧几里得空间。在第 4.2 节中，我们将光滑嵌入 γ 的距离函数 $\mathcal{T}_\gamma$ 的非退化临界点与 γ的局部几何量（如局部曲率）联系起来。此外，我们证明 γ 的局部几何性质决定了此类临界点的莫尔斯指标。随后，我们在第 4.1 节中证明，第 4.2 节对临界点的分析适用于一类一般位置的（开且稠密的）光滑嵌入；对于这些嵌入，其距离函数均为莫尔斯支撑的（定义 2.22）。这一结果总结于定理 4.3。我们在第 4.1.2 节和第 4.1.3 节中分别讨论开性和稠密性条件。

在本小节的技术讨论中，我们经常会用到这样一个事实：我们可以为 $\mathcal{M}$ 选择一个图册，使其与 S^1的一个图册相容；我们已在命题 2.18 中证明了这一点。这使我们能够在一组共享的局部坐标中，用 γ的导数来处理 $\mathcal{T}_\gamma$的导数。回顾一下，由于 $\mathcal{T}_\gamma$是由 $S^1\times S^1$上的一个对称函数诱导的，因此我们有一个 S^1的图册 $\Theta = \{(\vartheta_i, U_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$，以及一个 $\mathcal{M}$的图册 $\Phi = \{(\varphi_j, W_j)\}_{j\in\mathcal{J}}$，使得在 $\varphi_j(W_j) \subset \mathbb{R}^2$上，存在 i_1、$i_2 \in \mathcal{I}$，其中

$$\mathcal{T}_\gamma \circ \varphi_j^{-1}(t_1,t_2) = \left\|\gamma\circ\vartheta_{i_1}^{-1}(t_1) - \gamma\circ\vartheta_{i_2}^{-1}(t_2)\right\|^2 \tag{53}$$

由于 $\gamma \in C^k(S^1,\mathbb{R}^d)$，$\mathcal{T}_\gamma \circ \varphi_j^{-1}$ 是 k 次连续可微的，因此 $\mathcal{T}_\gamma \in C^k(\mathcal{M},\mathbb{R})$，其导数也都是 $(k-1)$-次连续可微的。

有了这些图册，我们便可以在局部坐标中计算 $\mathcal{T}_\gamma$ 的梯度和海森矩阵。为简化记号，对于 $W_j \subset \mathcal{M}$ 上的局部坐标 (t_1,t_2)，我们记

$$\frac{\partial \mathcal{T}_\gamma}{\partial t_a} := \frac{\partial}{\partial t_a}\left(\mathcal{T}_\gamma \circ \varphi_j^{-1}\right), \tag{54}$$

高阶导数也类似。对于 t 的局部坐标 $U_i \subset S^1$，我们同样记作

$$\gamma(t) := (\gamma\circ\vartheta_i^{-1})(t), \quad \dot\gamma(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma\circ\vartheta_i^{-1}\right) \quad \text{and} \quad \ddot\gamma(t) := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\gamma\circ\vartheta_i^{-1}\right). \tag{55}$$

使用这种记法，我们可以将梯度和海森矩阵表示如下：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1}\mathcal{T}_\gamma \\ \frac{\partial}{\partial t_2}\mathcal{T}_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \dot\gamma(t_1), \gamma(t_1)-\gamma(t_2)\rangle \\ \langle \dot\gamma(t_2), \gamma(t_2)-\gamma(t_1)\rangle \end{pmatrix} \tag{56}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\mathcal{T}_\gamma}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2\mathcal{T}_\gamma}{\partial t_1\partial t_2} \\ \frac{\partial^2\mathcal{T}_\gamma}{\partial t_1\partial t_2} & \frac{\partial^2\mathcal{T}_\gamma}{\partial t_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\gamma(t_1)-\gamma(t_2), \dot\gamma(t_1), \ddot\gamma(t_1)) & r(\dot\gamma(t_1), \dot\gamma(t_2)) \\ r(\dot\gamma(t_1), \dot\gamma(t_2)) & q(\gamma(t_1)-\gamma(t_2), \dot\gamma(t_2), \ddot\gamma(t_2)) \end{pmatrix}, \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \text{where } p(v, x_1', x_1'') &= \left\|x_1'\right\|^2 + \langle x_1'', v\rangle \\ q(v, x_2', x_2'') &= \left\|x_2'\right\|^2 - \langle x_2'', v\rangle \\ r(x_1', x_2') &= -\langle x_1', x_2'\rangle. \end{aligned} \tag{58}$$

坐标图册的相容性 Θ 使得 Φ 我们能够关联C^k 定义在 $C^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 和 $C^k(\mathcal{M}, \mathbb{R})$上的惠特尼拓扑。回顾第 2.3 节，紧流形上光滑函数的惠特尼拓扑是通过在流形的紧子集上，相对于（任意选取的）坐标图的一致收敛来定义的。通过关联 $\mathcal{T}_\gamma$ 在来自 Φ 的坐标图上的导数与 γ 在来自 Θ的坐标图上的导数，我们能够证明 $\mathcal{T}$在惠特尼拓扑下是连续的。

命题 4.1。 $\mathcal{T}\colon\ C^k(S^1, \mathbb{R}^d) \to C^k(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ 在惠特尼 C^k 拓扑下是连续的。

证明。 我们要证明，对于每个开子集 $\mathsf{U} \subset C^k(\mathcal{M}, \mathbb{R})$，其原像 $\mathcal{T}^{-1}(\mathsf{U})$ 在 $C^k(S^1, \mathbb{R})$ 中是开的。只需证明，对于任意的 $\mathcal{T}_\gamma \in \mathsf{U}$ 以及 $\mathsf{U}(\mathcal{T}_\gamma) \subseteq U$ 的一个足够小的邻域，存在 γ 的某个邻域 $\mathsf{V}(\gamma)$，使得 $\mathsf{V}(\gamma) \subseteq \mathcal{T}^{-1}(\mathsf{U}(\gamma))$。若确实如此，则我们可以写出

$$\mathcal{T}^{-1}(\mathsf{U}) = \bigcup_{\gamma\in\mathcal{T}^{-1}(\mathsf{U})} \mathsf{V}(\gamma),$$

因此 $\mathcal{T}^{-1}(\mathsf{U})$ 是开集。

考虑坐标图 $\Theta = \{(\theta_i,\ U_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$的 S^1，以及图册 $\Phi = \{(\varphi_j,\ W_j)\}_{j\in\mathcal{J}}$的 $\mathcal{M}$，如命题 2.18所述。由于 $\mathcal{M}$ 是紧致的，弱拓扑与强拓扑一致。因此，在 U 的$\mathcal{T}_\gamma$中，$C^k(\mathcal{M},\ \mathbb{R})$ 中的一个开邻域可以表示为有限个弱子基邻域（式（36））的交集

$$\mathsf{U}(\mathcal{T}_\gamma) = \bigcap_{a=1}^{m} \mathsf{U}_a, \quad \mathsf{U}_a = \mathcal{N}(\mathcal{T}_\gamma, (\varphi_a, W_a), (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}, O_a), K_a, \epsilon_a) \tag{59}$$

我们注意到，邻域内映射的像必须包含于 $O_a \subset \mathbb{R}$ 这一限制，已由对 K_a 的界 $\|f - \mathcal{T}_\gamma\| < \epsilon_a$ 所涵盖。包含于 我们声称可以找到一个邻域

$$\mathsf{V}_a = \mathcal{N}(\gamma, (\theta_b, U_b), (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}, V_b), Q_b, \delta_a) \cap \mathcal{N}(\gamma, (\theta_c, U_c), (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}, V_c), Q_c, \delta_a), \tag{60}$$

使得 $\mathcal{T}(\mathsf{V}_a) \subset \mathsf{U}_a$。若确实如此，那么以下有限个开集的交集就是一个开集，并满足 $\mathsf{V}(\gamma) \subseteq \mathcal{T}^{-1}(\mathsf{U}(\gamma))$：

$$\mathsf{V}(\gamma) := \bigcap_{a=1}^{m} \mathsf{V}_a \subset \bigcap_{a=1}^{m} \mathcal{T}^{-1}(\mathsf{U}_a) = \mathcal{T}^{-1}(\mathsf{U}(\gamma)).$$

现在证明存在 V_a，使得 $\mathsf{V}_a \subset \mathcal{T}^{-1}(\mathsf{U}_a)$。我们先回顾弱子基邻域的定义：$\mathcal{T}_{\tilde\gamma} \in \mathsf{U}_a$ 当且仅当对于所有 $(t_1,\ t_2) \in K_a \subset \varphi_a(W_a)$，以及 $r = 0,\ \ldots,\ k$

$$\left\|D^r(\mathcal{T}_\gamma \circ \varphi_a^{-1})|_{(t_1,t_2)} - D^r(\mathcal{T}_{\tilde\gamma} \circ \varphi_a^{-1})|_{(t_1,t_2)}\right\| < \epsilon_a \tag{61}$$

由于坐标图 Θ 和 Φ 按照命题 2.18 所述的方式耦合，因此在 Θ中存在一对坐标图 (θ_b, U_b) 和 (θ_c, U_c)，使得对于 $(t_1, t_2) \in \varphi_a(W_a) \subset \theta_b(U_b) \times \theta_c(U_c) =:\ \vartheta_{bc}(U_{bc})$，

$$\mathcal{T}_\gamma \circ \varphi_a^{-1}(t_1, t_2) = \left\|\gamma \circ \theta_b^{-1}(t_1) - \gamma \circ \theta_c^{-1}(t_2)\right\|^2. \tag{62}$$

我们作两点观察。首先，由于 $K_a \subset \varphi_a(W_a) \subset \vartheta_{bc}(U_{bc})$，我们可以得到子集 $Q_b \subset \theta_b(U_b)$ 和 $Q_c \subset \theta_c(U_c)$，它们是 K_a 在相应因子上的投影；由于 K_a 是紧致的且投影是连续的，这些子集也是紧致的。此外，$K_a \subseteq Q_b \times Q_c$。其次，我们观察到 $D^r(\mathcal{T}_\gamma \circ \varphi_a^{-1})$ 是关于 $D^l(\gamma \circ \theta_b^{-1})$ 和 $D^l(\gamma \circ \theta_c^{-1})$ 的多项式，其中 $l = 0, \ldots, r$。因此，存在一个充分小的 $\delta_a > 0$，使得若对于$r = 0, \ldots, k$

$$\left\| D^r(\gamma \circ \theta_b^{-1})|_x - D^r(\tilde{\gamma} \circ \theta_b^{-1})|_t \right\| < \delta_a, \quad \forall x \in Q_b$$
$$\left\| D^r(\gamma \circ \theta_c^{-1})|_x - D^r(\tilde{\gamma} \circ \theta_c^{-1})|_t \right\| < \delta_a, \quad \forall x \in Q_c,$$

那么，61式中的条件对于 $\mathcal{T}_{\tilde{\gamma}} \subset \mathsf{U}_a$ 成立。满足这些条件的 $\tilde{\gamma}$ 集合恰好是式（V_a60）中定义的邻域内的那些元素。因此，我们证明了存在一个 V_a，它是 γ的开邻域，且 $\mathsf{V}_a \subset \mathcal{T}^{-1}(\mathsf{U}_a)$。

□

注4.2。 请注意，当定义域流形非紧致时，弱拓扑和强（Whitney）拓扑并不相同。考虑限制在内部 int $\mathcal{M}$ 上的距离变换，其中 $\gamma \mapsto \mathcal{T}_{\gamma|_{\text{int}\,\mathcal{M}}}$给出该内部。由于定义域限制在弱拓扑下是连续的，该函数在弱拓扑下连续。然而，C^k_S(int $\mathcal{M}$, $\mathbb{R}$)的拓扑对 $\mathcal{T}$而言过于精细，因而无法使其连续。

4.1 具有莫尔斯支撑的弦距离变换的嵌入一般性

现在我们证明本文的主要贡献之一。我们证明，从 S^1 嵌入到欧几里得空间、且其弦距离变换为莫尔斯支撑（定义 2.22）的光滑嵌入构成一般位置的子集：也就是说，对于 $k \geq 2$，该子集在 Whitney C^k拓扑下既开又稠密。回顾一下，莫尔斯支撑条件包含两个约束：前两个条件 (M1) 和 (M2) 要求内部的临界点非退化，且临界点的数量有限；最后一个条件 (M3) 则确保，当 $\mathcal{T}_\gamma$的次水平集从边界 $\partial\mathcal{M}$（在此处 $\mathcal{T}_\gamma$为零）向外延伸时，其同伦类型保持不变。我们首先在第4.1.1节说明，将弦距离变换限制到嵌入上如何约束这一问题。若对于 $k \geq 2$，有 $\gamma \in \mathsf{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$，则 (M3) 自动满足（命题 4.8），而 (M1) 蕴含 (M2)（推论 4.5）。因此，莫尔斯支撑的 $\mathcal{T}_\gamma$的一般性仅取决于 (M1) 的一般性。随后，我们分别在第 4.1.2 节和第 4.1.3 节证明，对于一个开稠子集上的嵌入，其弦距离变换满足 (M1)，从而完成定理 4.3 的证明。

定理 4.3。 考虑 C^k-嵌入 $\mathrm{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 对于 $k \geq 2$。设 Ξ 为嵌入的子集 $\mathrm{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 其中的弦距离变换是莫尔斯支撑的（定义 *2.22*）：

$$\Xi := \{\gamma \in \mathrm{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d) \,:\, \mathcal{T}_\gamma \textit{ satisfies (M1) to (M3)}\}. \tag{63}$$

那么 Ξ 在 $\mathrm{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 的 ***Whitney*** C^k-拓扑中是开且稠密的。此外，这意味着在 Ξ 上，$\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$ 和 $\mathrm{PH}(\mathsf{T}\gamma)$ 是逐点有限维的（温和的）。

证明。 我们将 为开且稠密的证明分别推迟到命题 4.11 和命题 4.16 。若 Ξ是满足 *(M1)* 至 *(M3)* 的嵌入集合，那么根据引理 2.23中对莫尔斯支撑函数的刻画，$\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$ 是温和的。注意，根据引理 3.1所述的 $\mathrm{PH}(\mathcal{T}_\gamma)$ 与 $\mathrm{PH}(\mathsf{T}\gamma)$ 之间的对应关系，这也意味着 $\mathrm{PH}(\mathsf{T}\gamma)$ 是温和的。

□

4.1.1 边界附近的临界点

我们首先考察距离函数在 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 的边界附近的行为。在引理 4.4 中，我们首先证明，对于 C^2-嵌入，不存在任意接近边界的 $\mathcal{M}$ 内部临界点。因此，我们可以应用引理 2.24 来证明，(M1) 为 (M2) 提供了充分条件。我们还使用引理 4.4，并在命题 4.8 中证明，对于所有嵌入 γ，(M3) 都得到满足：存在某个正则水平集 $a > 0$，使得 $\mathcal{T}_\gamma^{-1}(0)$ 是 $\mathcal{T}_\gamma^{-1}(-\infty, a]$ 的一个变形收缩。

为了建立 $\mathcal{T}_\gamma$的内部临界值下界，我们利用以下事实： C^2 欧几里得空间中的紧子流形具有正可达半径 $\tau > 0$ [25, 备注 4.20-21]。这限制了闭曲线在任意给定点处与切平面之间的分离程度，也限制了闭曲线上两个不同点彼此接近到可以配对形成距离函数内部临界点的程度。

引理 4.4。 考虑对于 $k \geq 2$ 一个嵌入 $\gamma \in \mathrm{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$，其可达半径为 $\tau > 0$。那么区间 $(0,\ 2\tau)$ 是 $\mathcal{T}_\gamma$的正则值。

证明。 由于 γ 是一个 C^2 紧流形的嵌入，因此具有正可达半径 [25, 备注 4.20-21]。我们先回顾可达半径如何约束分离向量 $\gamma(t_2) - \gamma(t_1)$ 偏离由 $\dot{\gamma}(t_1)$ 在 t_1处张成的曲线切空间的变化：根据 [25, 定理 4.18]，我们回顾方程（48）：当 $t_1 \neq t_2$时，欧几里得内积满足如下界

$$\left\langle \frac{\dot{\gamma}(t_i)}{\|\dot{\gamma}(t_i)\|}, \frac{\gamma(t_2)-\gamma(t_1)}{\|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\|} \right\rangle^2 \geq 1 - \left(\frac{\|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\|}{2\tau} \right)^2, \quad \text{for } i = 1, 2. \tag{64}$$

如果 $\mathcal{T}_\gamma(t_1, t_2) = \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\| \in (0, 2\tau)$，则右侧有一个正下界。由此不等式可知，结合方程（d($\mathcal{T}_\gamma$) 有一个正下界。根据方程（56），因此不存在属于 $\mathcal{T}_\gamma$的临界值，且其位于 $(0, 2\tau)$。 □

推论 4.5。 如果 $k \geq 2$ 是一个嵌入 $\gamma \in \mathrm{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$，且 $\mathcal{T}_\gamma$ 在内部 $\operatorname{int}\mathcal{M}$ 上的所有临界点都是非退化的 (M1)，那么 $\mathcal{T}_\gamma$ 在内部 $\operatorname{int}\mathcal{M}$ (M2)上的临界点只有有限多个。

证明。 我们应用引理 2.24：若存在 $\partial\mathcal{M}$ 的一个邻域，其中 $\mathcal{T}_\gamma$没有内部临界点，且 $\mathcal{T}_\gamma$在内部是 Morse 函数，那么 $\mathcal{T}_\gamma$的内部临界点只有有限个。根据引理 4.4，我们可以取 $\mathcal{T}_\gamma^{-1}[0, 2\tau)$ 作为 $\partial\mathcal{M} = \mathcal{T}_\gamma^{-1}(0)$的这样一个邻域。 □

注 4.6。 引理 4.4 中关于非零正则值的下界是紧的。考虑 γ 为半径恒定的圆 r。那么可达半径为 $\tau = r$，且唯一的非零临界值是极大值 $\max \mathcal{T}_\gamma = 2r$。注意，对于所有的点对 $\{(z, -z)\colon\ \ z \in S^1\}$ 属于 $\mathrm{UConf}_2(S^1)$ 且构成该圆的直径时，极大值都能取到。

现在我们证明，边界附近不存在内部临界点，足以说明 (M3) 对所有嵌入的 $\mathcal{T}_\gamma$ 都成立：对于 $a < 2\tau$，边界 $\mathcal{T}_\gamma^{-1}(0) = \partial\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{T}_\gamma^{-1}(-\infty, a]$的一个变形收缩。我们注意到一个技术上的困难：0 是 $\mathcal{T}_\gamma$的临界值，这限制了在正则值的次水平集之间应用标准变形引理 [8, 定理 3。20]；尽管如此，我们仍能找到一个辅助函数 h，使得 h 的次水平集在边界附近与 f 的次水平集重合，并且该函数在边界上及其附近也是正则的。将标准变形引理应用于 h 的次水平集，便可得到边界附近 $\mathcal{T}_\gamma$ 的次水平集的变形收缩。

引理 4.7. 设 $\gamma \in \mathrm{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 适用于 $k \geq 2$。若对某个 $a > 0$，存在一个正则值区间 $(0, a]$，适用于 $\mathcal{T}_\gamma$，则 $\mathcal{T}_\gamma^{-1}(0) = \partial\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{T}_\gamma^{-1}(-\infty, a]$ 的变形收缩。

证明。 简记为 $f = \mathcal{T}_\gamma$。我们首先构造辅助函数 $h\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$。

首先注意，$\nu\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 到边界的距离函数，在无限条带 $[0,1] \times \mathbb{R}$ 的对称轴在商空间 $[0,1] \times \mathbb{R} \twoheadrightarrow [0,1] \times \mathbb{R}\,/\,\mathbb{Z} = \mathcal{M}$ 下的像之外是光滑函数。下面构造函数 $h = f + \sigma \circ \nu$，其中 σ 是一个光滑、单调非减的鼓包函数，使得 $\sigma(0) = 0, \sigma'(0) = 1, \sigma(y) = 1$ 适用于 $y \geq \epsilon$，且 $\sigma(y) \in (0,1)$ 适用于 $y \in (0, \epsilon)$。这里我们将 $\epsilon > 0$ 选得足够小，使得 ν 在次水平集 $\nu^{-1}(-\infty, \epsilon]$ 上光滑，且在该次水平集上满足 $\mathcal{T}_\gamma < a$。后一条件之所以可行，是因为 f连续，这意味着存在足够小的 $\epsilon > 0$，使得 $f([p, q]) < a$。

现在我们断言 $h^{-1}(-\infty, a+1] = f^{-1}(-\infty, a]$。首先，$f \leq a$推出 $h \leq a + \sigma \circ \nu \leq a + 1$。反过来，$h \leq a+1$ 推出 $f \leq a + (1 - \sigma \circ \nu)$。上界严格大于 a 的唯一条件是 $\sigma \circ \nu < 1$，而这只有在 $\nu < \epsilon$ 时才可能。然而，我们已将 ϵ选得足够小，使得 $\nu < \epsilon$ 推出 $f < a$。因此 $h \leq a + 1$ 推出 $f \leq a$。

由于 $\sigma(\nu(x)) = 0$ 当且仅当 $x \in \mathcal{M}$，我们也有 $h^{-1}(0) = f^{-1}(0) = \partial\mathcal{M}$。

现在我们证明，可以进一步调整参数 ϵ，使得 $[0, a+1]$ 是 h 的正则值。不失一般性，我们考虑坐标图 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^2$，使得到 $\partial\mathcal{M}$ 的距离表示为到无限条带 $[0,1] \times \mathbb{R}$ 的对角边界 $t_1 = t_2$ 的距离，即 $\nu = t_2 - t_1$。于是，

$$\|\nabla h\|^2 = \|\nabla f\|^2 + (2\sigma')(-1, 1) \cdot \nabla f + 2(\sigma')^2. \tag{65}$$

在 $f^{-1}[0,a]$ 上，当 $\nu>0$ 时，第一项为正；最后一项在 $\nu\in[0,\epsilon$ 上处处为正）。为了确保 $\|\nabla h\|^2$ 在 $\nu\in[0,\epsilon]$ 上为正，我们需要选择足够小的 ϵ，使得在 $\nu^{-1}[0,\epsilon]$ 上有（-1，1）$\cdot\nabla f>0$（因为根据构造，$\sigma'>0$）。通过泰勒展开，我们得到

$$\frac{\partial h}{\partial t_1}=\langle\dot\gamma(t_1),\gamma(t_1)-\gamma(t_2)\rangle=-\|\dot\gamma(t_1)\|^2(t_2-t_1)+\frac{(t_2-t_1)^2}{2}M \tag{66}$$

在泰勒展开的余项中，M 的大小仅受 $\dot\gamma$ 和 $\ddot\gamma$ 范数的有限全局界约束。因此，对于足够小的 $\epsilon_1>0$ 和 t_2-t_1，我们可以将 $\frac{\partial h}{\partial t_1}$ 界定为远离零。根据对称性，同样的分析适用于 $\frac{\partial h}{\partial t_2}$，并且我们可以找到足够小的 $\epsilon_1>0$ 和 t_2-t_1，使 $\frac{\partial h}{\partial t_2}$ 远离零。由于 t_2-t_1 在局部坐标中表示到边界的距离，取 $\epsilon=\epsilon_1$ 即可满足此坐标图上的 $\|\nabla h\|^2>0$。由于 $\mathcal{M}$ 是紧致的，我们可以取一个有限开覆盖，并将 $\epsilon>0$ 取为各坐标图上所有此类 ϵ_1 中的最小值，从而确保 $f^{-1}[0,a]=h^{-1}[0,a+1]$ 上的 $\nabla h\neq 0$。

由于 $[0,a+1]$ 是 h 的正则值，正则次水平集的标准 Morse 变形引理 [8, 定理 3.2] 0] h^{-1} 0 $h^{-1}[0,a+1]$ h^{-1} 0 $=f^{-1}$ 0 $h^{-1}[0,a+$ 蕴含 () 是 的变形收缩。由于 () () 且，我 1] $=f^{-1}[0,a]$ 们得到所需结果。 □

命题 4.8。对于 $k\geq 2$ 和 $\gamma\in\mathrm{Emb}^k(S^1,\mathbb{R}^d)$，存在一个充分小的 $a>0$，使得对于所有 $t\in[0,a]$，边界 $\partial\mathcal{M}=\mathcal{T}_\gamma^{-1}(0)$ 都是次水平集 $\mathcal{T}_\gamma^{-1}(-\infty,t]$（条件 (M3)，定义 2.22）的变形收缩。

证明。由引理 4.4可知，对于 $k\geq 2$，存在一个 $(0,a]$ 的正则区间 $\mathcal{T}_\gamma$。引理 4.7 于是推出 $\mathcal{T}_\gamma^{-1}(0)$ $=\partial\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{T}_\gamma^{-1}(-\infty,a]$的变形收缩。 □

4.1.2 开性

我们现在转而证明，具有莫尔斯支撑距离函数的 C^2-嵌入在惠特尼拓扑中是开的（命题 4.11）。我们通过用边界 $\partial\mathcal{M}$ 的一个邻域 L 以及内部的一个紧子集 K 覆盖 $\mathcal{M}$ 来处理这个问题。随后，我们分别考察边界附近和内部的距离临界点。我们在引理 4.9 中处理边界附近的临界点，其中证明可以固定 L，使得在莫尔斯支撑嵌入的某个邻域 U 中，嵌入的距离函数在 L 上没有临界点。因此，对于 U 中的嵌入，内部唯一的临界点都包含在某个固定的 $K\subset\mathrm{int}\ \mathcal{M}$ 中。接着，我们在引理 4.10 中证明，对于一个莫尔斯支撑嵌入，可以找到嵌入的一个邻域 W，使得 K 中的临界点均为非退化的。在 γ 的邻域 U∩W 上，这两个引理的结合便涵盖了嵌入的所有分离临界点，并证明它们是有限且非退化的。

引理 4.9. 设 $k\geq 1$。假设对于 $\gamma\in\mathrm{Emb}^k(S^1,\mathbb{R}^d)$，距离变换 $\mathcal{T}_\gamma\in C^k(\mathcal{M},\mathbb{R})$ 在内部内点集 $\mathcal{M}$中只有有限个临界点。那么存在 γ 的一个开邻域U $\subset\mathrm{Emb}^k(S^1,\mathbb{R}^d)$，使得以下结论成立：存在 $\partial\mathcal{M}$ 的一个邻域 $L\subset\mathcal{M}$，使 $\mathcal{T}_{\tilde\gamma}$ 在 L 中没有临界点，对所有 $\tilde\gamma\in$ U 均成立。

证明. 令 $\{\lbag a_1,b_1\rbag,\dots,\lbag a_n,b_n\rbag\}$ $\mathcal{T}_\gamma$ $\mathcal{M}$ $R=$ 为在 的 $\{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\}\subset S^1$ S^1 R 内部上的临界点集，并考虑，即临界点在 上的投影。我们通常将 γ 的临界位置称为临界位置。由于 R 是有限集，我们可以用具有非空内部的闭区间 $J_1,\dots,J_m$ 覆盖 S^1，使得每个 J_i 至多包含 R 的一个元素，且 $S^1=\bigcup_{i=1}^m\mathrm{int}\ J_i$。

令 $q:\ S^1\times S^1\twoheadrightarrow\mathcal{M}$ 为商映射，并考虑

$$L=q\left(\bigcup_{i=1}^m(J_i\times J_i)\right)=\{\{u,v\}\ :\ \exists i\in[m],\ \text{s.t. } u,v\in J_i\}=\bigcup_{i=1}^m L_i$$
$$L_i=q(J_i\times J_i)=\{\{u,v\}\ :\ u,v\in J_i\}$$

现在我们说明，根据构造，$\partial\mathcal{M}\subset L$，且 L 是 $\partial\mathcal{M}$的一个邻域。对于任意 $\lbag u\rbag\in\partial\mathcal{M}$，点 $u\in S^1$ 位于某个 J_i 的内部，因此存在某个 δ，使得邻域 $\{\{v_1,v_2\}:\ d(u,\ v_1)\ d(u,\ v_2)<\delta\}$ 包含于 L_i中。因此，L 是 $\partial\mathcal{M}$的一个邻域。

此外，点 $\wr u,\ v\int \in L \setminus \partial\mathcal{M}$ 不可能是 $\mathcal{T}_\gamma$的临界点，原因如下。根据构造，存在某个 J_i 使得 $u,\ v \in J_i$，并且 J_i 至多只能有一个临界位置。因此，$v_1,\ v_2$ 不可能同时是临界点位，而这是 $\wr u,\ v\int \notin \partial\mathcal{M}$ 成为 $\mathcal{T}_\gamma$的内部临界点的必要条件。

现在证明存在一个开邻域 U，它是 $\mathrm{Emb}^k(S^1,\mathbb{R}^d)$ 中 γ 的开邻域，使得对于 $\tilde{\gamma} \in U$，$\mathcal{T}_{\tilde{\gamma}}$ 的内部临界点不在 L 中。我们用反证法证明这一点。假设 $\mathrm{Emb}^k(S^1,\mathbb{R}^d)$ 中 γ 的开邻域不存在。于是存在一个嵌入序列 $\gamma_n \to \gamma$，其中每个元素都属于 $\mathrm{Emb}^k(S^1,\mathbb{R}^d)$，并且对于每个 γ_n，都有某个内部临界点 $\wr u_n, v_n\int \in L \setminus \partial\mathcal{M}$ 属于 $\mathcal{T}_{\gamma_n}$。根据构造，存在某个 $i(n)$，使得 $\wr u_n, v_n\int \in L_{i(n)}$。此外，由于 L 的覆盖元素数量 m 有限，因此存在某个固定的 $i \in [m]$，以及 (γ_n) 的一个子序列，使得该子序列中的每个 γ_n 都有一个内部临界点 $\wr u_n, v_n\int \in L_i$。此外，由于 q 连续且 $J_i \times J_i$ 紧致，$L_i = q(J_i \times J_i)$ 是紧致的，因此我们可以从 γ_n 中再抽取一个子序列，使得 $\wr u_n, v_n\int$ 收敛到 L_i 中的某个点。由于 $u_n \neq v_n$，且 u_n, v_n 位于区间 J_i 上，我们不妨对所有 n 取 $u_n < v_n$；而 $\wr u_n, v_n\int$ 的收敛性意味着，对于某些 $u, v \in J_i$，有 $u_n \to u$ 和 $v_n \to v$。

那么，假设 $u \neq v$，即序列 $\wr u_n,\ v_n\int \to \wr u,\ v\int$ 收敛到 $\mathcal{M}$ 内部的某个点。由于 $\wr u_n,\ v_n\int$ 是 $\mathcal{T}_{\gamma_n}$ 的内部临界点，

$$\langle \gamma_n(u_n) - \gamma_n(v_n), \dot{\gamma_n}(u_n)\rangle = \langle \gamma_n(u_n) - \gamma_n(v_n), \dot{\gamma_n}(v_n)\rangle = 0. \tag{†}$$

回忆一下，在 $\gamma_n \to \gamma$ 的 Whitney C^k 拓扑下。这意味着 γ_n 和 $\dot{\gamma_n}$ 在 J_i 上一致收敛于 γ 和 $\dot{\gamma}$；因此

$$\langle \gamma(u) - \gamma(v), \dot{\gamma}(u)\rangle = \langle \gamma(u) - \gamma(v), \dot{\gamma}(v)\rangle = 0.$$

这意味着 $\wr u,\ v\int \in \operatorname{int}\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{T}_\gamma$ 的内部临界点。然而，由于 $\wr u,\ v\int \in L_i$，它不可能是内部临界点。因此我们得出结论，$\wr u_n,\ v_n\int \to \wr u\int$ 在 $\partial\mathcal{M}$ 上。

现在我们证明，该序列与 γ 是一个嵌入相矛盾。令 $\gamma^{(j)} \in C^k(S^1,\ \mathbb{R})$ 表示 γ 的 j^{th}-连通分支。于是我们可以将 (†) 改写为

$$\sum_{j=1}^{d} (\gamma_n^{(j)}(u_n) - \gamma_n^{(j)}(v_n))\dot{\gamma}_n^{(j)}(u_n) = \sum_{j=1}^{d} (\gamma_n^{(j)}(u_n) - \gamma_n^{(j)}(v_n))\dot{\gamma}_n^{(j)}(u_n) = 0. \tag{‡}$$

由于 $u_n,\ v_n \in J_i$ 且 J_i 是一个闭区间，中值定理表明存在某个 $x_{n,\ j} \in (u_n,\ v_n)$，使得 $\gamma_n^{(j)}(u_n) - \gamma_n^{(j)}(v_n) = \dot{\gamma}_n^{(j)}(x_{n,\ j})(u_n - v_n)$。注意，对所有 j，都有 $x_{n,\ j} \to u$。由于 $u_n \neq v_n$，因此我们可以将 (‡) 重写为

$$\sum_{j=1}^{d} \dot{\gamma}_n^{(j)}(x_{n,j})\dot{\gamma}_n^{(j)}(u_n) = \sum_{j=1}^{d} \dot{\gamma}_n^{(j)}(x_{n,j})\dot{\gamma}_n^{(j)}(v_n) = 0$$

由于 $\dot{\gamma}_n \to \dot{\gamma}$ 在 J_i上一致收敛，我们由此得出 $\sum_{j=1}^{d}(\dot{\gamma}^{(j)}(u))^2 = 0$，这与 γ 是一个嵌入相矛盾。因此，在 $\mathrm{Emb}^k(S^1,\ \mathbb{R}^d)$ 中，γ 存在一个开邻域，在该邻域内，距离变换的临界点在 L中不能是内部临界点。 □

引理 4.10. 设 $k \geq 2$，并考虑 $\gamma \in \mathrm{Emb}^k(S^1,\mathbb{R}^d)$，使得 $\mathcal{T}_\gamma|_{\operatorname{int}\mathcal{M}}$ 在 内部 $\mathcal{M}$上是 *Morse*。对于任意紧致的 $K \subset$ 内部 $\mathcal{M}$，存在一个开邻域 $\mathsf{W} \subset \mathrm{Emb}^2(S^1,\mathbb{R}^d)$，它包含 γ，且对于所有 $\tilde{\gamma} \in W$，$\mathcal{T}_{\tilde{\gamma}}$ 在 K 上的临界点都是非退化的。

证明。考虑命题 2.18 中所述的相容图册对 $\Theta = \{(\theta_i, U_i)\}$ for S^1 和 $\Phi = \{(\varphi_j, W_j)\}$ for $\mathcal{M}$。回想一下，对于任意 j，都存在一对 i, i'，使得 $\varphi_j(W_j) \subset \theta_i(U_i) \times \theta_j(U_j) \subset \mathbb{R}^2$。对于 $f \in C^k(\mathcal{M},\mathbb{R})$，令 $f_j = f \circ \varphi_j^{-1}\colon \varphi_j(W_j) \to \mathbb{R}$。映射 f 在 $\mathcal{M}$ 的内部上为 Morse，这意味着在 $W_j \cap \operatorname{int}\mathcal{M}$ 上，

$$\mu_j(t_1,t_2) := (\det H_{f_i}|_{(t_1,t_2)})^2 + \|\nabla f_j\|^2 > 0. \tag{⋆}$$

由于 W_j 是 $\mathcal{M}$的开覆盖，考虑由 $K_j = W_j \cap K$和 $\varphi_j(K_j)$ 给出的 K 的覆盖。因为 K_j 是紧致的，且 φ_j 是一个微分同胚，所以 $\varphi_j(K_j)$ 是紧致的。由于 f_j 属于 C^2，且 (⋆) 的右端是一个多项式

是 f_j的一阶和二阶导数，因此函数 μ_j 也是连续的。由于 $\varphi(K_j)$ 是紧致的，μ_j 在 $\varphi_j(K_j)$ 上的最小值可由某个 $\eta_j > 0$ 取到。

考虑另一个映射 $\tilde{f} \in C^2(\mathcal{M},\ \mathbb{R})$，并以类似方式定义 $\tilde{\mu}_j$。由于 μ_j 是 f_j的一阶和二阶导数的多项式，因此存在某个 $\epsilon_i > 0$，使得如果

$$\left\| D^r f_j - D^r \tilde{f}_j \right\| < \epsilon_i,\ \text{on}\ \varphi_j(K_j),\ r = 1, 2 \tag{$\star\star$}$$

那么 $\tilde{\mu}_j > \eta_j/2 > 0$在 $\varphi_j(K_j)$ 上成立。

接下来考虑 $f = \mathcal{T}_\gamma$。由命题 2.18 可知，f_j的 r^{th} 阶导数也是γ_i的分量：$= \gamma \circ \theta_i$和$\gamma_{i'}$的分量：$= \gamma \circ \theta_{i'}$的多项式，以及它们直到 r 阶的导数。由于$\varphi_j(K_j) \subset \theta_i(U_i) \times \theta_{i'}(U_{i'})$，考虑 $Q_{jl} \subset \theta_l(U_l)$，它是将 $\varphi_j(K_j)$ 投影到 $\theta_i(U_i) \times \theta_{i'}(U_{i'})$ 中的一个因子上所得的投影，其中 $l = i, i'$。注意，Q_{jl} 是紧致的，因为 $\varphi_j(K_j)$ 是紧致的，且 θ_l 是连续的。由多项式的连续性，存在某个 $\delta_j > 0$，使得如果

$$\| D^r \gamma_l - D^r \tilde{\gamma}_l \| < \delta_j,\ \text{on}\ Q_{jl},\ r = 0, 1, 2,\ l = i, i', \tag{$\star\star\star$}$$

于是，($\star\star$)成立。这进而推出，对于 $\tilde{f} = \mathcal{T}_{\tilde{\gamma}}$，$\tilde{\mu}_j > 0$成立；这等价于说，$K_j$ 中 $\mathcal{T}_{\tilde{\gamma}}$ 的所有临界点都是非退化的。

现在我们注意到，满足($\star\star\star$)的嵌入集合 $\tilde{\gamma}$构成一个 $C^{k\geq 2}$弱次基邻域 W_j，它属于 γ，且其中 K_j内 $\mathcal{T}_{\tilde{\gamma}}$的所有临界点都是非退化的。由于 K是紧致的，它可由有限多个 $K_j = K \cap W_j$覆盖。因此，在有限交集 $\mathsf{W} = \cap_{i\in\mathcal{I}}$ W_j上（它同样是 γ在 Whitney C^k拓扑中的一个邻域），对于所有 $\tilde{\gamma} \in \mathsf{W}$，$K$内 $\mathcal{T}_{\tilde{\gamma}}$的所有临界点都是非退化的。 □

命题 4.11. 对于 $k \geq 2$，距离变换为 *Morse*-支撑的嵌入子集 $\Xi \subset \mathrm{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 在 *Whitney* C^k拓扑中是开集。

证明。由于 $\mathcal{T}_\gamma$的 $\gamma \in \Xi$距离变换在 int $\mathcal{M}$上只有有限个临界点，考虑引理 4.9 中所述的 γ的开邻域 U $\subset \mathsf{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$：对所有 $\tilde{\gamma} \in \mathsf{U}$，都存在 $\partial\mathcal{M}$ 的一个邻域 L，使得 $\mathcal{T}_{\tilde{\gamma}}$在 L上没有临界点。接着考虑 $K \subset \mathsf{int}\ \mathcal{M}$，使得 $\mathsf{int}\ L \cup \mathsf{int}\ K = \mathsf{int}\ \mathcal{M}$。由于 $\mathcal{T}_\gamma|_{\mathrm{int}\,\mathcal{M}}$由 $\gamma \in \Xi$可知是 Morse 的，根据引理 4.10，存在 γ的一个开邻域 $\mathsf{W} \subset \mathsf{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$，使得对所有 $\tilde{\gamma} \in \mathsf{W}$，$\mathcal{T}_{\tilde{\gamma}}$在 K中的所有临界点都是非退化的。于是，考虑 $\mathsf{Emb}^2(S^1, \mathbb{R}^d)$ 中 γ的开邻域 $\mathsf{U} \cap \mathsf{W}$，并令 $\tilde{\gamma} \in \mathsf{U} \cap \mathsf{W}$。由于 $\mathsf{int}\ L \cup \mathsf{int}\ K = \mathsf{int}\ \mathcal{M}$，且 $\mathcal{T}_{\tilde{\gamma}}$在 L上没有临界点，因此 $\mathcal{T}_{\tilde{\gamma}}$在 int $\mathcal{M}$ 中的所有临界点都是非退化的，从而 $\mathcal{T}_{\tilde{\gamma}|_{\mathrm{int}\,\mathcal{M}}}$是 Morse 的。于是，对于任意 $\gamma \in \mathsf{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$，都存在一个开邻域 $\mathsf{U} \cap \mathsf{W}$，在此邻域上，当 $\tilde{\gamma} \in \mathsf{U} \cap \mathsf{W}$ 时，$\mathcal{T}_{\tilde{\gamma}}$满足 (M1)。由于 (M3) 自动成立（命题 4.8），且 (M1) 蕴含 (M2)（推论 4.5），因此我们得出结论：对于其距离变换，(M1) 至 (M3) 均成立的子集 Ξ 在 Whitney C^k-拓扑下是开集。

□

4.1.3 稠密性

既然已经证明莫尔斯支撑嵌入构成嵌入空间中的一个开子集，现在我们将借助定理 2.30 的多重射流横截定理证明它们是稠密的。我们应用该定理，证明其弦距离变换没有内部退化临界点（满足 (M1)）的嵌入在 Whitney C^k-拓扑中稠密。回顾一下，定理 2.30 涉及这样的映射：其多重射流与多重射流空间中的一个 Whitney 分层空间横截相交。我们的证明将弦距离变换违反 (M1) 的嵌入描述为与多重射流空间 $J^2_2(S^1, \mathbb{R}^d)$ 中的一个惠特尼分层子集 χ_0 相交的嵌入。我们称之为退化轨迹 χ_0。通过在引理 4.12 中证明这一点，我们将问题转化为证明其多重射流避开 $J^2_2(S^1, \mathbb{R}^d)$ 中的 χ_0 的嵌入是稠密的。利用维数论证，我们随后在命题 4.15 中证明，对于嵌入，避开 χ_0 等价于其多重射流与 χ_0 横截相交。最后，由于命题 4.15 蕴含与 χ_0 横截相交的嵌入是稠密的，我们在命题 4.16 中证明，其多重射流避开 χ_0 的嵌入在 Whitney C^k-拓扑中稠密，因此，具有莫尔斯支撑的弦距离变换的嵌入子集在 Whitney C^k-拓扑中稠密。

退化轨迹 考虑映射在 (,) 中的二阶喷射丛 $J_2^2\ S^1\ \mathbb{R}^d$ $C^k\ S^1\ \mathbb{R}^d$ $k \geq$(,)。设 (,) 是由 上的图册 (,) 诱导 2 $Z = \{\ \zeta_i\ Z_i\ \}$ $J_2^2\ S^1\ \mathbb{R}^d$ $\Theta = \{\ \theta_i\ U_i\ \}$ S^1 的 (,) 的一个图册。考虑映射 $f \in C^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 的延拓 $j_2^2 f$: $\mathrm{Conf}_2(S^1) \to J_2^2(S^1, \mathbb{R}^d)$。在坐标图 ζ_i: $Z_i \to \mathbb{R}^{6d+2}$ 上，我们可以用局部坐标将 $j_2^2 f$ 表示为

$$\zeta((j_2^2 f)(\theta_1^{-1}(t_1), \theta_1^{-1}(t_1)) = (t_1, f(t_1), \dot{f}(t_1), \ddot{f}(t_1), f(t_2), f(t_2), \dot{f}(t_2), \ddot{f}(t_2)), \tag{67}$$

（这里我们滥用记号，令 $f(t_i) := f \circ \theta^{-1}(t_i)$，导数也类似；参见式（55）。我们令$(t_1, x_1, x_1', x_1'', t_2, x_2, x_2', x_2'')$ 表示任意此类坐标图上的局部坐标，其中 $t_i \in \mathbb{R}$ 是 S^1的局部坐标，而 $x_i, x_i', x_i'' \in \mathbb{R}^d$。

我们旨在将退化轨迹 χ_0表示为每个坐标图上的一组多项式约束。首先考虑 $\mathcal{T}_f$的临界点，并将其表示为 $j_2^2 f$的像与临界轨迹 C_0的交集。根据式（56）中对梯度的刻画，考虑局部映射 C_i: $\zeta_i(Z_i) \to \mathbb{R}^2$，其在局部坐标中表示为

$$C_i(t_1, x_1, x_1', x_1'', t_2, x_2, x_2', x_2'') = \begin{pmatrix} x_1' \cdot v \\ x_2' \cdot v \end{pmatrix} \quad \text{where} \quad v = x_1 - x_2. \tag{68}$$

固定 $f \in C^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 后，在 S^1 上对 $j_2^2 f$ 求值，得到 $\mathcal{T}_f$ 在局部坐标中的梯度，由 S^1 上的图册 Θ 给出。注意，梯度 $C_i^{-1}(0)$ 的零点集与 Z_i 上所选的坐标图 ζ_i 无关。

我们也可以将海森矩阵的退化表示为每个坐标图上的一个多项式约束。记 $\mathcal{T}_f$ 在局部坐标下的海森矩阵为每个坐标图 H_i 上的映射： $\zeta_i(Z_i) \to \mathbb{R}^3$，其值域为实对称 2×2 矩阵构成的空间：

$$H_i(t_1, x_1, x_1', x_1'', t_2, x_2, x_2', x_2'') = \begin{pmatrix} p(v, x_1', x_1'') & r(x_1', x_2') \\ r(x_1', x_2') & q(v, x_2', x_2'') \end{pmatrix} \tag{69}$$

其中函数 p、q、r 在式（58）中定义。对于固定的 $f \in C^k(S^1, \mathbb{R}^d)$，在 $j_2^2 f$ 上取 $H_i \circ \zeta_i^{-1}$的值，即得到 $\mathcal{T}_f$在局部坐标下的海森矩阵。令 $D_i :=$ det $\circ H_i$: $\zeta_i(Z_i) \to \mathbb{R}$，其中 $\det(p, q, r) = pq - r^2$。那么，零点集 $D_i^{-1}(0)$刻画了映射具有退化海森矩阵的位置，并且与坐标图 ζ_i 在 V_i上的选取无关。

在汇集了映射 C_i，D_i之后，这些映射刻画了 V_i上的临界点和海森矩阵的退化，我们可以定义退化轨迹 χ_0。考虑 $\chi_i = (C_i,\ D_i) \to \mathbb{R}^2$。$j_2^2 f$与 $\chi_i^{-1}(0,\ 0)$的交集刻画了射流空间局部坐标片 Z_i 上 $\mathcal{T}_f$的退化临界点。给定一个图册$Z = \{(\zeta_i,\ Z_i)\}$，我们通过将每个 Z_i上的零点集粘合起来，定义整个 $J_2^2(S^1,\ \mathbb{R}^d)$上的退化轨迹：

$$\chi_0 = \bigcup_i \zeta_i^{-1}(\chi_i^{-1}(0)) \tag{70}$$

我们注意到 χ_0与图册的选择无关。由于 χ_0在任意坐标图上都是一个代数集，因此它是$J_2^2(M,\ \mathbb{R}^d)$[60, p.36-38]的一个惠特尼分层子集。

引理 4.12。 对于 $k \geq 2$和 $f \in C^k(S^1,\ \mathbb{R}^d)$，其弦距离变换 $\mathcal{T}_f$: $\mathbf{F}_2(S^1) \to \mathbb{R}$ 在其内部 $\mathrm{UConf}_2(S^1)$ *((M1))* 上没有退化临界点，当且仅当 $j_2^2 f \cap \chi_0 = \emptyset$。

证明。回忆一下，$\mathrm{UConf}_2(S^1) \subset \mathrm{F}_2(S^1)$ 是由 $\mathrm{Conf}_2(S^1)$ 双覆盖的。点 $\wr z_1, z_2 \int \in \mathrm{UConf}_2(S^1) =$int $\mathrm{F}_2(S^1)$ 是 $\mathcal{T}_f$ 的退化临界点，当且仅当 $\mathcal{T}_f$ 在 $\mathrm{Conf}_2(S^1)$ 中的提升以 (z_1, z_2) 为退化临界点。因此，考虑 $j_2^2 f$: $\mathrm{Conf}_2(S^1) \to J_2^2(S^1, \mathbb{R}^d)$。于是我们观察到，$(z_1, z_2)$ 是 $\mathcal{T}_f$ 在 $\mathrm{Conf}_2(S^1)$ 上的提升的退化临界点，当且仅当在 (z_1, z_2) 的一个坐标图上，

$$\chi_i(\zeta((j_2^2 f)(z_1, z_2)) = 0. \tag{71}$$

这可直接由 $\chi_i^{-1}(0)$的构造得出。由于 χ_0 是 χ_i 式（70）所有纤维的并集，多重射流 $j_2^2 f$ 与 χ_0交集为空，当且仅当 $\mathcal{T}_f$ 没有退化临界点。 □

嵌入多重射流附近的退化轨迹现在我们将证明，若 f 是 C^2-嵌入，则退化轨迹 χ_0 与射流 $j_2^2 f$ 的横截相交为空。我们通过描述 χ_0 在点 $\xi \in \chi_0 \cap j_2^2 f$ 附近的局部拓扑来进行论证。只需考虑局部坐标图 $\zeta_i\colon Z_i \to \mathbb{R}^{6d+2}$，其中 $\chi_0 \cap V_i$ 可由 $C_i = D_i = 0$ 描述。我们首先关注 $D_i = 0$ 的情形，它表示 $\mathcal{T}_f$ 的海森矩阵退化。由于海森矩阵是一个 2×2 矩阵，退化的海森矩阵要么为零，要么秩为一。我们分别考虑这两种情况。

引理4.13。 假设 $f \in \mathrm{Emb}^k(S^1,\mathbb{R}^d)$ 对于 $k \geq 2$成立，并考虑 $\xi \in \chi_0 \cap j_2^2 f \cap V_i$。若 $H_i(\xi) \neq 0$，则 χ_0在 ξ的某个邻域上是 $J_2^2(S^1,\mathbb{R}^d)$的余维为3的子流形。

证明。 由于 H_i在 ξ上退化且非零，我们将考虑范围限制为交集 $\xi \in \chi_0 \cap j_2^2 f$，在这些交集处 H_i的秩为1。 χ_i在 ξ处的雅可比矩阵为

$$\mathrm{d}\chi_i = \begin{pmatrix} \mathrm{d}C_i \\ \mathrm{d}D_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & v & 0 & 0 & 0 \\ x_2' & 0 & v & 0 & 0 \\ qx_1'' - px_2'' & 2(qx_1' - rx_2') & 2(px_2' - rx_1') & qv & -pv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}x_1' \\ \mathrm{d}x_2' \\ \mathrm{d}x_1'' \\ \mathrm{d}x_2'' \end{pmatrix} \tag{72}$$

由于 $H(\xi) \neq 0$，约束条件 $D_i(\xi) = \det H_i(\xi) = pq - r^2 = 0$ 意味着 $p,\ q \neq 0$中至少有一个成立。此外，由于 $v \neq 0$，雅可比矩阵中的行向量线性无关，因此雅可比矩阵在 ξ处的秩为3。由于 $H \neq 0$ 是一个开条件，$\chi_i\colon \zeta_i(Z_i) \to \mathbb{R}^3$ 在 ξ周围的某个开球 U 上是浸没。根据浸没定理， $\chi_i^{-1}(0) \cap U$ 是一个余维为3的子流形。 □

接下来描述 $H_i(\xi) = 0$ 对于 $\xi \in \chi_0 \cap j_2^2 f \cap V_i$的情况。由于 $H(\xi) = 0$ 当且仅当 $p = q = r = 0$ 72 2 $(\xi)\,(\xi)\,(\xi)$，将其代入方程（）可知其为$\mathrm{d}\chi$ 在 ξ处的秩，且不再是满射，因此 ξ不再是 χ的正则点，引理4.13 中的论证在此情形下不再适用。我们通过明确描述 χ_0 在 ξ的某个邻域上的局部分层来处理这一问题。

引理4.14。考虑 $\xi \in \chi_0 \cap V_i \cap j_2^2 f$对于 $f \in \mathrm{Emb}^k(S^1,\mathbb{R}^d)$，对于 $k \geq 2$。若海森矩阵 $H_i(\xi) = 0$ 在 ξ处为零，则 ξ位于 χ_0的余维为5的分层上，并且是 χ_0的奇异点。

证明。 在此证明中，令 $n = 6d+2$ 为 $J_2^2(S^1,\mathbb{R}^d)$ 的维数。考虑 $\xi \in \chi_0 \cap V_i \cap j_2^2 f$，它等价于 $\xi \in \chi_i^{-1}(0) \cap j_2^2 f$。将映射 $\chi_i\colon V_i \to \mathbb{R}^3$ 改写为以下复合

$$\chi_i : V_i \xrightarrow{(H_i,C_i)} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(\det,\mathrm{id})} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 .$$

令 $\Upsilon = (H_i, C_i)$。于是我们可以将 $\chi_i^{-1}(0)$ 写成

$$\chi_i^{-1}(0) = ((\det,\mathrm{id}) \circ \Upsilon)^{-1}(0) = \Upsilon^{-1}\big((\det,\mathrm{id})^{-1}(0)\big) = \Upsilon^{-1}\big(\det^{-1}(0) \times \{(0,0)\}\big).$$

此外，若 $H_i(\xi) = 0$，则 $\xi \in \Upsilon^{-1}(0)$。我们证明 Υ 在 ξ 的一个邻域 U 上是浸没。首先计算 Υ 的雅可比矩阵：

$$\mathrm{d}\Upsilon = \begin{pmatrix} \mathrm{d}H_i \\ \mathrm{d}C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}q \\ \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}(x_1' \cdot v) \\ \mathrm{d}(x_2' \cdot v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'' & 2x_1' & 0 & v & 0 \\ -x_2'' & 0 & 2x_2' & 0 & -v \\ 0 & -x_2' & -x_1' & 0 & 0 \\ x_1' & v & 0 & 0 & 0 \\ x_2' & 0 & v & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}v \\ \mathrm{d}x_1' \\ \mathrm{d}x_2' \\ \mathrm{d}x_1'' \\ \mathrm{d}x_2'' \end{pmatrix}. \tag{73}$$

由于对于嵌入 f，$\xi \in \chi_i^{-1}(0) \cap j_2^2 f$，我们有 $v \neq 0$ 和 $x_1',\ x_2' \neq 0$，它们位于 ξ 的一个邻域 U 内。我们证明这意味着在 U 上，雅可比矩阵满秩，因此 $\Upsilon|_U$ 是浸没。我们用反证法证明：假设这些行线性相关；也就是说，存在系数 $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) \neq 0$，使得

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' & 2x_1' & 0 & v & 0 \\ -x_2'' & 0 & 2x_2' & 0 & -v \\ 0 & -x_2' & -x_1' & 0 & 0 \\ x_1' & v & 0 & 0 & 0 \\ x_2' & 0 & v & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{74}$$

由于在 ξ 处 $v \neq 0$，雅可比矩阵右下角的 3×2 个块为零这一事实意味着 $a_0 = a_1 = 0$。这样我们得到方程组

$$\begin{aligned} a_3 x_1' + a_4 x_2' &= 0 \\ a_2 x_2' - a_3 v &= 0 \\ a_2 x_1' - a_4 v &= 0 \end{aligned}$$

由于在 ξ 处，$x_1', x_2', v \neq 0$，要么 $a_2 = a_3 = a_4 = 0$，要么它们全都非零。若在顶部的方程中用 x_1' 和 x_2' 代替 v，则剩下 $2(a_3 a_4 / a_2)v = 0$。由于 $v \neq 0$ 和 a_2, a_3, a_4 全都非零，因此产生矛盾。因此，Υ 在 ξ 的某个邻域 U 上是浸没。

若我们选取的 U 足够小，那么根据浸没定理，我们可以选取一个满射坐标图 $\mu\colon (U, \xi) \to (\mathbb{R}^n, 0)$，使得 $\Upsilon|_U \circ \mu^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^5$ 是到前五个坐标上的正交投影。因此，$\chi_i^{-1}(0) \cap U$ 在局部上与 $\mathbb{R}^n$ 中的以下子集同胚：

$$\begin{aligned} \mu(\chi_i^{-1}(0) \cap U) &= \mu\big(\Upsilon|_U^{-1}\big((\det{}^{-1}(0) \times \{(0,0)\}) \cap \Upsilon(U)\big)\big) \\ &= (\Upsilon|_U \circ \mu^{-1})^{-1}\big((\det{}^{-1}(0) \times \{(0,0)\}) \cap \Upsilon(U)\big) \\ &= \big(\big(\det{}^{-1}(0) \times \{(0,0)\}\big) \times \mathbb{R}^{n-5}\big) \cap \mu(U) = \big(\det{}^{-1}(0) \times \{(0,0)\}\big) \times \mathbb{R}^{n-5} \end{aligned}$$

其中，最后一个等式是因为 μ 是满射。

现在我们给出 $\det^{-1}(0)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的一个显式惠特尼分层。回顾一下，它是多项式 $\det(w) = w_1 w_2 - w_3^2 = 0$。我们断言 $\det^{-1}(0)$ 存在一个惠特尼分层 $\{0\} \subset \det^{-1}(0)$；换言之，$\det^{-1}(0)$ 分解为若干分层 $\det^{-1}(0) = W^{(0)} \sqcup W^{(2)}$，其中 $W^{(2)} = \det^{-1}(0) \setminus \{0\}$，且 $W^{(0)} = \{0\}$。微分

$$\mathrm{d}(\det) = w_2\,\mathrm{d}w_1 + w_1\,\mathrm{d}w_2 - 2w_3\,\mathrm{d}w_3$$

仅在原点 $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ 处是奇异的；因此 $W^{(2)} = \det^{-1}(0) \cap \{w \neq 0\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个局部闭二维子流形。根据定义，$W^{(0)}$ 是零维的。我们证明在这种情况下满足惠特尼条件（B）。在此情形下，这相当于证明如下结论：对于一个序列 $y_i \in W^{(2)}$，若 $y_i \to 0$ 使得连接直线 ℓ_i（经过线 y_i 与 0）趋于某条直线 ℓ，且 y_i 处的切平面 T_i 收敛于某个平面 T，则 $\ell \subset T$。事实上，在我们的情形中，割线 ℓ_i 始终包含于切平面 T_i 中。首先，对于任意点 $w = (w_1, w_2, w_3) \in W^{(2)}$，注意，沿着从该点到原点的割线 $t \cdot (w_1, w_2, w_3)$ 上的点也属于 $W^{(2)}$（当 $t \neq 0$ 时），因为条件 $w_1 w_2 - w^3 = 0$ 在缩放下保持不变。因此，(w_1, w_2, w_3) 是 $T_w W^{(2)} \subset T_w \mathbb{R}^3$ 中的一个切向量，而整条割线 $t \cdot (w_1, w_2, w_3)$ 都位于 w 处 $W^{(2)}$ 的切平面 T_w 中。因此，对于任意序列 $y_i \in W^{(2)}$，连接 y_i 与 0 的割线 ℓ_i 位于 y_i 处的切平面 T_i 中；于是若 $\ell_i \to \ell$ 且 $T_i \to T$，则有 $\ell \subset T$。

得到 $\det^{-1}(0)$ 的分层后，我们可以对 ξ 的邻域 U 上的嵌入 χ_0 进行分层，注意到 μ 是一个微分同胚：

$$\begin{aligned} \mu(\chi_i^{-1}(0) \cap U) &= \big(\det{}^{-1}(0) \times \{(0,0)\}\big) \times \mathbb{R}^{n-5} \\ &= \Big(\big(W^0 \sqcup W^{(2)}\big) \times \{(0,0)\}\Big) \times \mathbb{R}^{n-5} \\ &= \big((0,0,0,0,0) \times \mathbb{R}^{n-5}\big) \sqcup \Big(W^{(2)} \times \{(0,0)\} \times \mathbb{R}^{n-5}\Big). \end{aligned}$$

其中，最后一个等式是由于 $W^{(0)} = (0,\ 0,\ 0) \in \mathbb{R}^3$。由于 $\mu(\xi) = 0$，我们得出 ξ 位于 χ_0 的余维 5 分层上。 □

命题 4.15. 设 $k \geq 2$。若 $f \in$嵌入$^k(S^1, \mathbb{R}^d)$，则 $j_2^2 f$ 与 $J_2^2(S^1, \mathbb{R}^d)$ 中的退化轨迹 $j_2^2 f \pitchfork \chi_0$ 横截，当且仅当 $j_2^2 f \cap \chi_0 = \emptyset$。

证明。回顾一下，χ_0 是一个惠特尼分层空间。在引理 4.13 和 4.14 中，我们已经证明，$j_2^2 f$ 与 χ_0 相交于余维至少为三的分层处。如果该交集非空且横截，那么在此类交集处，秩 $\mathrm{d}\big(j_2^2 f\big)$ 必须大于或等于 χ_0 的分层在交集处的余维。由于 $j_2^2 f$ 是 $\mathrm{Conf}_2(S^1)$ 的浸入，这意味着秩 $\mathrm{d}\big(j_2^2 f\big)$ = 维数 $\mathrm{Conf}_2(S^1)$，= 2 这小于 χ_0 分层在交集处的余维。因此，横截性方程（44）施加的维数约束意味着交集 $j_2^2 f \cap \chi_0$ 为空。 □

我们已经将其弦距离变换满足(*M1*) 的嵌入刻画为：二重二阶喷射与临界轨迹横截相交的嵌入。于是，我们可以应用横截性定理 2.30 来证明，这类嵌入在惠特尼 C^k 拓扑中是稠密的，其中 $k \geq 2$。我们注意到，直接应用定理2.30 会推出 $k \geq 3$的稠密性；我们借用 $k = 2$ 中定理 9.25 的证明所采用的论证，将这一结论扩展到 [5]。

命题 *4.16.* 对于 $k \geq 2$，满足其弦距离变换满足 *(M1)* 的嵌入子集 $\mathit{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 在 *Whitney* C^k 拓扑下于 $\mathit{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 中稠密。因此，弦距离变换具有莫尔斯支撑的嵌入子集 $\Xi \subset \mathit{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$（式 *(63)*）在 *Whitney* C^k 拓扑下于 $\mathit{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 中稠密。

证明. 首先回顾，对于每个 $1 \leq k \leq r$， C^r-嵌入 $\mathrm{Emb}^r(S^1, \mathbb{R}^d)$ 是 C^k-嵌入 $\mathrm{Emb}^r(S^1, \mathbb{R}^d)$ 的稠密子集，[35, 定理 2.7], ，且采用 Whitney C^k 拓扑。假设 $k \geq 2$；由稠密性可知，对于 $\mathrm{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 的任意开 Whitney-C^k 邻域 U，我们都可以选取某个 $f_1 \in U$，使得 $f_1 \in \mathrm{Emb}^r(S^1, \mathbb{R}^d)$（当 $k \geq 3$ 时，我们选取 $f_1 = f$）。接下来考虑 $r \geq 3$。由于余集在 Whitney C^r 拓扑下稠密， [35, 定理 4.4], 定理 2.30 意味着，在 f_1 的任意开 Whitney-C^r 邻域 V 中，我们都可以选取某个 $f_2 \in \mathrm{Emb}^r(S^1, \mathbb{R}^d)$，使得 $j_2^2 f_2$ 与 χ_0 横截相交。根据命题 4.15 和引理 4.12，这等价于说 $\mathcal{T}_{f_2}$ 在 $\mathcal{M}$ 的内部没有非退化临界点。因为$k \leq r$， f_1 的任意 Whitney C^r 邻域 V（作为一个 C^r-嵌入）也是 f_1 的 Whitney C^k 邻域（作为一个 C^k-嵌入）。由于 $f_1 \in U$，且 U 是 Whitney C^k 开的，我们可以选取 f_1 的 Whitney C^k 邻域 V，使得 $V \subset U$，这意味着 $f_2 \in U$。因此，对于任意 $f \in \mathrm{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 以及 f 的任意 Whitney C^k 邻域 U，我们都可以找到一个 $f_2 \subset U$、一个 C^k-嵌入，使得 $\mathcal{T}_{f_2}$ 在内部只有非退化临界点。根据命题 4.8 和推论 4.5，$\mathcal{T}_{f_2}$ 也满足 (M2) 和 (M3)。因此， Ξ 在 Whitney C^k 拓扑下于 $\mathrm{Emb}^k(S^1, \mathbb{R}^d)$ 中稠密。 □

4.2 临界点的几何刻画

假设 $\mathcal{T}_\gamma$ 对于嵌入 $\gamma \in \mathrm{Emb}^2(S^1, \mathbb{R}^d)$ 是莫尔斯支撑的，我们可以根据梯度和海森矩阵公式（56）和（57），将 $\mathcal{T}_\gamma$ 的内部临界点的莫尔斯指标与曲线的几何特征联系起来。在这种情况下，海森矩阵公式（ 58 ）在 $\wr z_1, z_2 \int$ 处的各项可简化为

$$p = 1 - \kappa_{12}, \tag{75}$$

$$q = 1 - \kappa_{21}, \tag{76}$$

$$r = -\cos\theta_{12}, \tag{77}$$

其中 $v_{ij} = x_j - x_i$, $\kappa_{ij} := \langle x_i'', \ v_{ij} \rangle$ 且 $\cos\ \theta_{12} = \langle x_1', \ x_2' \rangle$。

内部 $\mathrm{UConf}_2(S^1)$ 中的临界点 $\wr z_1, \ z_2 \int$（属于 $\mathcal{M}$）的莫尔斯指标可由海森矩阵行列式的各项判定。若 $\det H < 0$，则 $\wr z_1, \ z_2 \int$ 是鞍点；若 $\det\ H > 0$，则 p 和 q 同号；若该符号为正，则 $\wr z_1, \ z_2 \int$ 是最小值；若该符号为负，则 $\wr z_1, \ z_2 \int$ 是极大值。现在我们将对这些临界点给出几何解释。

临界点条件

$$\langle x_1', v_{12} \rangle = \langle x_2', v_{21} \rangle = 0 \tag{78}$$

表明 x_1' 和 x_2' 垂直于 $v_{12} = -v_{21} = x_2 - x_1$。若此条件成立，我们就称以 x_1 和 x_2 为中心的两条线段是相对的 。现在，我们只需将讨论限制在 $\{x_1', x_2', v_{12}\}$张成的三维空间中。海森矩阵 $pq - r^2$ 的行列式为

$$\frac{1}{\|x_1'\| \|x_2'\|} \left[(1 - \kappa_{12})(1 - \kappa_{21}) - \cos^2\theta_{12} \right]. \tag{79}$$

其中 $\kappa_{ij} = \langle x_i''/\|x_i'\|, \ v_{12} \rangle$ 和 θ_{12} 是 x_1' 与 x_2'之间的角。

为使以下分析简洁明了，我们假设 $|\kappa_{12}| = |\kappa_{21}| =: \kappa$。现在（去掉正比例因子后），表达式 79变为

$$\mathrm{sgn}(\kappa_{12})\,\mathrm{sgn}(\kappa_{21})\kappa^2 - (\mathrm{sgn}(\kappa_{12}) + \mathrm{sgn}(\kappa_{21}))\kappa + \sin^2\theta_{12}. \tag{80}$$

现在我们可以对临界点进行几何刻画，如图所示7。

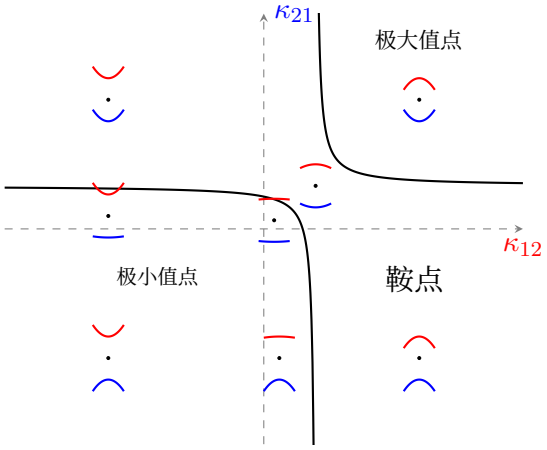


图7：根据 κ_{12} 和 κ_{21} 对 $\theta_{12} = \pi/3$ 进行临界点分类，其中 $d > 2$（方程（79））。图中展示了9类临界点的二维示意图，按 $\operatorname{sgn}(\kappa_{ij})$ 和莫尔斯指标进行排列。

向外弯曲： $\operatorname{sgn}\kappa_{12} = \operatorname{sgn}(\kappa_{21}) = -1$。这种情况尤为简单；表达式 80 始终为正，$p$ 为正，因此所有向外弯曲的对置线段都是局部极小值点。

相向弯曲： $\operatorname{sgn}(\kappa_{12}) = \operatorname{sgn}(\kappa_{21}) = 1$。当两个对置线段相向弯曲时，就会出现这种情况。此时，对于 $0 \le \kappa < 1 - \cos\theta_{12}$，我们得到一个局部最小值；对于 $\kappa > 1 + \cos\theta_{12}$，我们得到一个局部最大值；而对于 $1 - \cos\theta_{12} < \kappa < 1 + \cos\theta_{12}$，我们得到一个鞍点。

共同弯曲： $\operatorname{sgn}(\kappa_{12}) = -\operatorname{sgn}(\kappa_{21})$。不失一般性，假设 $\operatorname{sgn}(\kappa_{12}) = 1$。若 $-\sin\theta_{12} < \kappa < \sin\theta_{12}$，我们得到一个局部最小值；若 $\kappa < -\sin\theta_{12}$ 或 $\kappa > \sin\theta_{12}$，则得到一个鞍点。

对于 $\theta = 0$ 情形，其中 x_1'，x_2' 与 v_{12} 共面，我们可以进一步直观地理解。将相对曲率半径定义为 $\rho = \|v_{12}\|/\kappa = |\langle x_1''/\|x_1'\|,\ v_{12}/\|v_{12}\|\rangle|^{-1}$。考虑一个以 x_1 和 x_2 的中点为中心、半径为 $\frac{1}{2}\|v_{12}\|$ 的圆。如果曲率半径 ρ 小于半径 $\frac{1}{2}\|v_{12}\|$，则我们有一个局部极大值；如果大于，则有一个鞍点。

例4.17。 考虑嵌入在 $\mathbb{R}^2$ 中的一个椭圆，其长轴为 $2a$，短轴为 $2b$。在 $\mathrm{UConf}_2(S^1)$ 中，恰有两个临界点，分别对应长轴和短轴。长轴两侧的曲率半径分别为 b^2/a，而短轴两侧的曲率半径为 a^2/b。由于 $b^2/a < a$，长轴对应一个局部（且全局）极大值；由于 $a^2/b > b$，短轴对应一个鞍点。

我们在以下定理中总结这些观察。

定理 4.18. 设 $\mathcal{T}_\gamma$ 对于嵌入 $\gamma \in \mathrm{Emb}^2(S^1, \mathbb{R}^d)$ 是莫尔斯支撑。对于一点 $\{z_1, z_2\} \in \mathcal{M}$ 定义 $x_i = \gamma(z_i)$，$v_{ij} = x_j - x_i$，$\kappa_{ij} := \langle x_i''/\|x_i'\|, v_{ij}\rangle$ 以及 余弦 $\theta_{12} = \langle x_1', x_2'\rangle$。那么，当满足以下条件时，$\{z_1, z_2\}$ 是 $\mathcal{T}_\gamma$ 的临界点

$$\langle x_1', v_{12}\rangle = \langle x_2', v_{21}\rangle = 0$$

若 $(1-\kappa_{12})(1-\kappa_{21}) <$ 余弦$^2\,\theta_{12}$，则这是一个鞍点。否则，根据非退化性，$(1-\kappa_{12})(1-\kappa_{21}) >$ 余弦$^2\,\theta_{12}$。那么，若 $\kappa_{12}, \kappa_{21} > 1$，这是一个局部极大值；若 $\kappa_{12}, \kappa_{21} < 1$，则这是一个局部最小值。

5 分段线性回路

本节中，我们考虑 γ 为有限分段线性的情形。与第 4 节对光滑情形的分析类似，我们希望通过将此类特征的出生与消亡关联到 持久同调$_*(\mathcal{T}_\gamma)$ 中的非退化临界点，从而对一般位置嵌入 γ 下的这些特征作出几何解释，并从几何上刻画这些非退化点。然而，分段线性闭曲线的弦距离变换仅为分段光滑函数，因此第 4 节中使用的光滑莫尔斯理论无法应用于分段线性情形。尽管存在一种莫尔斯理论

适用于分段光滑函数 [9, 3] 及广义（Clarke）临界点 [17, 18]，$\mathcal{T}_\gamma$ 可能存在退化临界点，而 [9, 3] (参见备注 5.3) 的分析排除了这类点。我们还要指出，尽管 γ 是分段线性的，但 $\mathrm{T}\gamma$ 和 $\mathcal{T}_\gamma$ 本身都不是分段线性的，因此无法应用分段线性 Morse 理论 [7, 26]。

因此，我们采用离散方法，构造一个过滤单纯复形 $\mathrm{N}(\mathcal{V}^\bullet)$，使其与 $\mathcal{T}_\gamma$ 的次水平集滤过 $\Gamma^\bullet$ 同伦等价。过滤复形 $\mathrm{N}(\mathcal{V}^\bullet)$ 是次水平集的过滤覆盖 $\mathcal{V}^\bullet$ 的神经，而这些次水平集取自 $\mathcal{T}_\gamma$。这样，我们便能运用 Conley 指标理论（见第 2.2.3 节），通过 $\mathrm{N}(\mathcal{V}^\bullet)$ 的莫尔斯集描述持久同调 $\mathrm{PH}_*(\mathcal{T}_\gamma)$ 中特征的诞生与消亡。在第 5.1 节中，我们首先将研究范围限定于有限分段线性嵌入 $\gamma\colon S^1 \to \mathbb{R}^d$，并要求其中没有两条边相互平行（见条件 (C1) 至 (C3)）。这使我们随后能够用光滑非退化临界点的类似物——n-鞍点（见第 2.2.3 节）来刻画滤过 $\mathrm{N}(\mathcal{V}^\bullet)$ 的莫尔斯集。因此，我们能够通过组合对象 $\mathrm{N}(\mathcal{V}^\bullet)$ 计算 $\mathcal{T}_\gamma$ 的同调临界值。在第 5.3 节中，我们明确描述单纯复形 $\mathrm{N}(\mathcal{V}^\bullet)$ 的滤过，从而能够利用持久同调计算算法精确计算持久图 $\mathrm{PH}_*(\mathcal{T}_\gamma)$。随后在第 5.4 节中，我们证明，对于满足非退化条件 (C1)–(C3) 的嵌入，除取值为 0 的情形外，所有莫尔斯集都是单纯形及其部分面，因此可以类比光滑情形，将它们视为临界点。最后，在第 5.4.1 节中，我们在这类临界单纯形与 $\mathrm{UConf}_2(S^1)$ 中的点之间建立双射对应关系；这些点在 γ 下的像满足一个局部几何条件（定义 5.13）。该条件根据分离（弦）向量所形成的四个角的锐性或钝性来表述，并据此可以确定临界单纯形的指标。这些临界单纯形的莫尔斯类型与光滑情形相似：若局部的对置线段彼此向外弯曲，则该单纯形的 Conley 指数为 0；若它们相向弯曲，则其指标为 2；若它们共同弯曲，则其指标为 1。

5.1 分段线性回路

假设给定一组点 $x_i \in \mathbb{R}^d$，其指标在 $i = 0$、……、$n-1 \in \mathbb{Z}_n$ 上按循环方式排列。我们考虑一条对这些点进行分段线性插值的闭曲线 $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^d$。为了明确地参数化 f，我们先介绍一些记号。令 $u_i = x_{i+1} - x_i$ 表示圈中相邻点之间的有限差分向量 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}$。我们定义 $l_i = \|u_i\|$ 为在 x_i 与 x_{i+1} 之间插值得到的每条线性线段的长度。我们还考虑沿闭曲线 $L = \sum_{i=0}^{n-1} l_i$ 的总长度以及部分长度 $L_i = \sum_{j<i} l_i/L$。此外，我们还记得 S^1 的万有覆盖 $\mathsf{e}(t)\colon = e^{2\pi i t}$。

于是，$(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 的分段线性插值是一个映射 $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^d$，它将 $f(\mathsf{e}(L_i)) = x_i$ 发送到，并且

$$f \circ e(t) = \frac{L}{l_i}((t - L_i)x_{i+1} - (t - L_{i+1})x_i) = \frac{L}{l_i}(t - L_i)u_i + x_i \quad \text{for } t \in [L_i, L_{i+1}]. \tag{81}$$

非退化分段线性环 我们将范围限定为满足以下性质的分段线性插值 $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^d$ 若一个数据点循环序列 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 非退化，则

(C1) 序列中任意两个不同的点都不相同：$x_i \neq x_j$ 对于 $i \neq j$；

(C2) f 是一个拓扑嵌入：插值线段的内部不能彼此交叉；并且

(C3) 任意两条不同的线段都不平行或反平行：$|\langle u_i,\ u_j\rangle| < \|u_i\|\|u_j\|$ 对于 $i \neq j$。

对于 $d > 2$，任意“一般位置的”循环序列 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 都是非退化的：我们只要求集合 $\{x_0, \ldots, x_n\}$ 处于一般位置：这些点中没有 k 个点位于$(k-2)$维仿射子空间中，该子空间属于 $\mathbb{R}^d$ 对于 $k = 2$，……，$d+1$。一般位置要求立即推出(C1) 与维数 d无关，因为一对点若位于一个0维仿射子空间上，就意味着这两点相同。以下引理表明，若(C2) 和 (C3) 也可由一般位置假设推出。事实上，这些观察也适用于点 x_i 作为几何图顶点、且顶点之间的边由线性线段插值的情形。

引理 5.1. 考虑 $\mathbb{R}^d$ 中的一个分段线性几何图，其顶点集为 $X = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \subset \mathbb{R}^d$。若 $d > 2$，且顶点集 X 处于一般位置，则该分段线性几何图是底层图的一个嵌入——也就是说，一条边的相对内部不会与另一条边相交。

证明。若 $n=1$（只有一个顶点），则将顶点映射到 $\mathbb{R}^d$ 显然是一个嵌入；若 $n=2$（两个顶点），则一般位置要求意味着这两个顶点必须互不相同，因此插值 x_0x_1 是只有一条边的图的嵌入。

接下来考虑 $n>2$ 的情形。首先，我们注意到，一般位置要求意味着 X 中的所有点均不相同。因此，对于 $i<j$，两条闭线段 x_ix_{i+1} 和 x_jx_{j+1} 要么仅在单个端点 x_j 处相交（$j=i+1$ 位于线段末端）；要么一条线段的相对内部与另一条线段上的一个点相交，而该点可能位于另一条线段的相对内部或端点处（$j>i+1$）。后一种情况要求四个不同的点 x_i、x_{i+1}、x_j、x_{j+1} 位于 $\mathbb{R}^d$ 的一个二维仿射子空间中，这与 $D>2$ 上 X 的一般位置要求相矛盾。 □

引理 5.2。如果 $d>2$，则处于一般位置的 $\mathbb{R}^d$ 中的分段线性几何图没有两条边平行。

证明。假设我们有一个分段线性几何图，其边 x_ix_{i+1} 和 x_jx_{j+1} 平行。那么对于某个 $\lambda\in\mathbb{R}$、$x_{j+1}=x_j+\lambda(x_{i+1}-x_i)$，因此 x_{i+1} 位于 x_i、x_{i+1} 和 x_j 的仿射张成中，而该仿射张成的仿射维数不超过 2，所以该图不处于一般位置，矛盾。 □

5.2 距离函数

现在我们考虑分段线性插值闭环 $\gamma\colon S^1\to\mathbb{R}$ 的弦距离变换 $\mathcal{T}_\gamma$，它满足嵌入条件 (C1) 和 (C2)。由于 γ 是分段线性的，$\mathcal{T}_\gamma$ 在 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 上是分段光滑的。这里，我们在与来自线段 x_i,x_{i+1} 和 x_j,x_{j+1} 的点对相关联的片段 $V_{ij}\subset\mathrm{F}_2(S^1)$ 上显式定义 $\mathcal{T}_\gamma$。鉴于我们已选取 $\mathcal{U}$ 作为良好的开覆盖，令 Φ 和 Θ 分别为命题 2.18 中给出的 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 和 S^1 的相容图册。在坐标图 $\varphi_{ij}\colon W_{ij}\to\mathbb{R}^2$ 上，回顾上一小节，我们可以用局部坐标 (t_1,t_2) 表示 $\mathcal{T}_\gamma$，如下所示

$$\mathcal{T}_\gamma(t_1,t_2):=\frac{1}{2}\|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)\|^2$$

我们可以将 $V_{ij}\subset W_{ij}$ 定义为由局部坐标中的 $t_1\in[L_i,L_{i+1}]$ 和 $t_2\in[L_j,L_{j+1}]$ 描述的子集：

$$V_{ij}=\varphi_{ij}^{-1}(([L_i,L_{i+1}]\times[L_j,L_{j+1}])\cap[0,1]\times\mathbb{R}). \tag{82}$$

因此，距离变换 $\mathcal{T}_\gamma$ 在 V_{ij} 上计算分别来自线段 x_i、x_{i+1} 和 x_j、x_{j+1} 的一对点之间的距离。我们在图8中示意了元素 V_{ij}。如果 $i=j$，我们观察到 $V_{ii}=\mathrm{F}_2([L_i,L_{i+1}])$ 是一个三角形；否则，它是一个矩形。如果 i 和 j 在圈 $\mathbb{Z}_n$ 上相邻，那么它与边界 $\partial\mathrm{F}_2(S^1)$ 相交于其中一个角点，该角点对应于 $\wr z_i=z_j\wr$。如果 i 和 j 在圈 $\mathbb{Z}_n$ 上至少相隔一个元素，那么 $V_{ij}\subset\mathrm{UConf}_2(S^1)$。注意，$\bigcup_{ij\in\mathbb{Z}_n}V_{ij}=\mathrm{F}_2(S^1)$。也就是说，子集 $\mathcal{V}=\{V_{ij}\}_{ij\in\mathbb{Z}_n}$ 构成了 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 的一个闭覆盖。

现在，我们可以通过指定它在每个带有局部坐标的部分 V_{ij} 上的定义来描述 $\mathcal{T}_\gamma$。如果我们考虑 $t_1\in[L_i,L_{i+1}]$ 和 $t_2\in[L_j,L_{j+1}]$，

$$\mathcal{T}_\gamma(t_1,t_2)=\frac{L^2}{2}\left\|s_1\tau_i-s_2\tau_j+\frac{x_i-x_j}{L}\right\|^2 \tag{83}$$

其中，为简洁起见，我们将 $s_1=t_1-L_i$、$s_2=t_2-L_j$ 记作……，并令 $\tau_k=u_k/l_k$ 表示单位切向量。

注5.3。请注意，虽然 $\mathcal{T}_\gamma$ 是分段光滑的，但无法应用 [9, 3] 的分段光滑莫尔斯理论来刻画 $\mathcal{T}_\gamma$ 的所有 Clarke 临界点。如果（L_i,L_j）是 f 的 Clarke 临界点，那么它同时属于 4 个光滑片段 $V_{i-1,j-1}$,$V_{i-1,j}$, $V_{i,j-1}$, V_{ij}，这违反了非退化性的条件；该条件要求，在 $V_{i-1,j-1}$,$V_{i-1,j}$,$V_{i,j-1}$, V_{ij} 上定义的光滑函数的四个梯度中，任意三个在（L_i,L_j）处取值时都线性无关（见 [3, 定义2.2 ND1] 或 [9, 定义1.3（ND1）]）。由于 F_2（S^1）是一个二维流形，这三个梯度不可能线性无关。因此，如果（L_i,L_j）是一个 Clarke 临界点，那么在 [9, 3] 的框架下，它不可能是非退化的。

距离函数的次水平集 在每个闭覆盖元素 V_{ij}上定义了分段函数 $\mathcal{T}_\gamma$ 之后，我们现在通过将次水平集 Γ^a 限制到每个片段 V_{ij}来描述它们

$$V_{ij}^a := \Gamma^a \cap V_{ij}. \tag{84}$$

注意， $\mathcal{V}^a := \{V_{ij}^a\}_{i,\ j\in\mathbb{Z}_n}$构成 Γ^a的一个覆盖。回顾一下，存在将 V_{ij}映至$\mathbb{R}^2$的一个凸子集的坐标图。我们将在下面的引理中证明，这对于次水平集 V_{ij}^a以及它们与 $\mathcal{V}^a$的其他覆盖元素的交集也同样成立。回顾一下，良覆盖是指任意有限个覆盖元素的交集均为可缩的覆盖。

引理 5.4. $\mathcal{V}^a$ 是由闭子集构成的 Γ^a 的一个良覆盖；此外，存在一个图册 $\Phi = \{(\varphi_{ij}, W_{ij})\}$，它是$\mathbf{F}_2$ (S^1) 的图册，并将任意非空交集 $V_{i_1j_1}^a \cap \cdots \cap V_{i_mj_m}^a$ 同胚地映至一个闭凸子集

$$\varphi_{i_1j_1}(V_{i_1j_1}^a \cap \cdots \cap V_{i_mj_m}^a) \subset \mathbb{R}^2 .$$

证明。 不失一般性，我们将 $L = 1$归一化。首先证明每个V_{ij}^a都是凸的。按照命题2.18中所述，选择相容图册$\Theta = \{(\vartheta_i, U_i)\}$ 和 $\Phi = \{(\varphi_{ij}, W_{ij})\}$，其中每个 $[L_i, L_{i+1}]$ 都包含于某个唯一的开弧 $U_i \in \mathcal{U}$中。在局部坐标 s_i下计算 $\mathcal{T}_\gamma$，参见式(83)，$\mathcal{T}_\gamma$ 的导数和海森矩阵为

$$\frac{\partial \mathcal{T}_\gamma}{\partial s_i} = s_i - \langle \tau_i, \tau_j\rangle s_j + \langle x_i - x_j, \tau_i\rangle \tag{85}$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}_\gamma}{\partial s_j} = -\langle \tau_i, \tau_j\rangle s_i + s_j + \langle x_j - x_i, \tau_j\rangle \tag{86}$$

$$H_{\mathcal{T}_\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & -\langle \tau_i, \tau_j\rangle \\ -\langle \tau_i, \tau_j\rangle & 1 \end{pmatrix}. \tag{87}$$

由于 $|\langle \tau_i,\ \tau_j\rangle| \le 1$，平方距离函数的海森矩阵处处半正定； $\mathcal{T}_\gamma(s_i,\ s_j)$ (式（83）作为扩展到 $\mathbb{R}^2$的函数)的次水平集是凸子集。因此， $\mathcal{T}_\gamma$ 在闭凸子集$\varphi_{ij}(V_{ij})$ 上的非空次水平集的限制也是闭且凸的。

考虑 m 覆盖元素之间的一个非空交集。回忆一下，图册的过渡映射由产生覆盖 q 的 $\mathbb{Z}$作用给出：$[0,1]\times\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbf{F}_2(S^1)$。于是存在元素 k_2、.....、 $k_m \in\mathbb{Z}$，使得

$$\varphi_{i_1j_1}(V_{i_1j_1}^a \cap \cdots \cap V_{i_mj_m}^a) = \varphi_{i_1j_1}(V_{i_1j_1}^a) \cap \left(k_2 \cdot \varphi_{i_2j_2}(V_{i_2j_2}^a)\right) \cap \cdots \cap \left(k_m \cdot \varphi_{i_mj_m}(V_{i_mj_m}^a)\right). \tag{88}$$

由于 $\mathbb{Z}$作用是 $\mathbb{R}^2$中的仿射变换，每个 $\left(k_l \cdot \varphi_{i_lj_l}(V_{i_lj_l}^a)\right)$ 仍然是闭凸子集，因此该交集仍然是闭且凸的。由于$\varphi_{i_1,\ j_1}$ 是一个同胚，我们可以得出结论： $\mathcal{V}^a$ 中覆盖元素的任意非空交集都是可缩的，因此 $\mathcal{V}^a$ 是 Γ^a的良覆盖。 □

由神经得到的次水平集的同伦类型 次水平集的描述 Γ^a 具有满足 $\mathcal{V}^a$ 引理 5.4 所述性质的覆盖 [10, 定理 5.9]，使我们能够应用 统一神经定理 [10, 定理 5.9]，利用一种称为神经的离散构造推导次水平集的同伦类型。回忆一下，神经 $\mathsf{N}(\mathcal{V})$ 是 $\mathcal{V}$ 的单纯复形，其 k维单形是覆盖元素的非空 k重交集。记 $|\mathsf{N}(\mathcal{V})|$ 为该神经的几何实现。

现在我们陈述统一神经定理的一个专门版本 [10,定理 5.9],，它由该定理在 [10,表 1]中的简化形式推导而来。首先回顾一些技术术语，以便陈述该定理。对于空间 X的覆盖 $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in\mathcal{I}}$，记作 $V_J = \cap_{j\in J} V_j$。对于 V_J，其闭锁空间 $L(V_J) \subset V_J$是并集$\cup_{I\supsetneq J} V_I$。如果对于任意 $J \subset \mathcal{I}$，偶对 $(V_J, L(V_J))$ 满足同伦扩张性质（例如参见 [33,§0]），我们就称覆盖 $\mathcal{V}$满足搭接条件。

定理 5.5 ([10, 定理 5.9])。 设 X 是一个局部紧豪斯多夫空间。假设 $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 是 X 的一个有限良覆盖，由满足搭接条件的闭子集构成。那么存在一个函子同伦等价 $X \simeq |$神经$(\mathcal{V})|$。

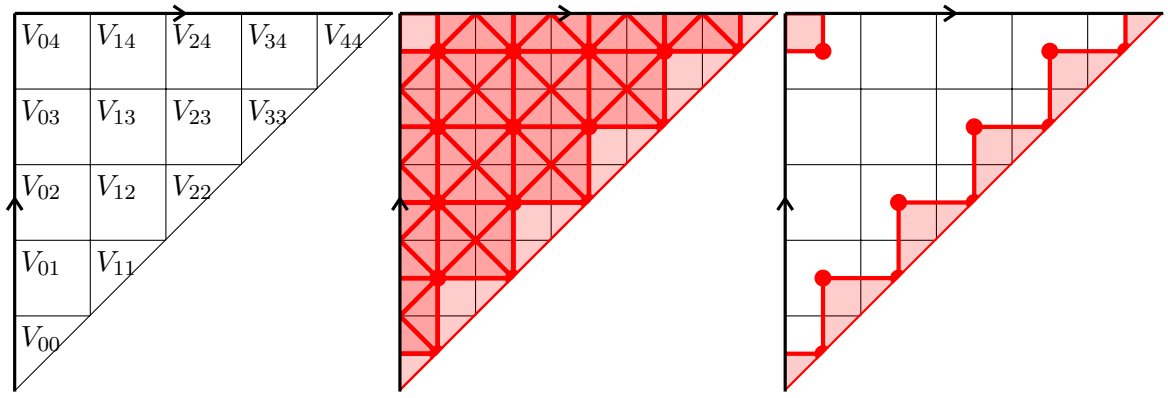


图8：左：莫比乌斯带 $\mathbf{M}^{\cdot}$ 的闭覆盖 $\mathcal{V}\mathbf{F}_2(S^1)$。中心：其神经 $\mathsf{N}(\mathcal{V})$。右：水平集 $\mathcal{T}_\gamma = 0$ 的神经，由 $\mathsf{N}(\mathcal{V}^0)$ 给出。

我们在引理 $\mathcal{V}^a$ 中证明的关于 5.4 的性质足以满足神经定理的条件，因为欧几里得空间中的闭凸覆盖满足搭接条件 [10,命题 5.15&18]。

命题 5.6. 存在函子同伦等价 $\Gamma^a \simeq |\mathsf{N}(\mathcal{V}^a)|$。

证明。 回顾引理5.4 指出 $\mathcal{V}^a$ 是一个闭良覆盖。根据构造，它也是有限的。回顾搭接空间条件。由于存在一个坐标图 φ_{ij}，它将 V^a 及其与其他覆盖元素的交集映到一个同胚的闭凸子集，因此该坐标图将这一对 $(V_j^a, L(V_j^a))$ 映到由 $\mathbb{R}^2$中的闭凸子集覆盖所生成的同胚对，我们可以应用 [10, 命题 5.15&18] 并推得 $\mathcal{V}^a$ 满足搭接条件。因此定理 5.5 表明存在函子同伦等价 $\Gamma^a \simeq |\mathsf{N}(\mathcal{V}^a)|$。 □

因此，可以从神经复形的过滤中恢复由 $\mathcal{T}_\gamma$ 确定的$\mathbf{F}_2(S^1)$ 的子水平集过滤的持久同调。对于 $a \le b$，将 $\mathcal{V}^a$ 的覆盖元素包含到 $\mathcal{V}^b$ 中，会诱导出一个单纯复形的滤过

$$\mathsf{N}(\mathcal{V}^\bullet): \quad \mathsf{N}(\mathcal{V}^0) \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{N}(\mathcal{V}^a) \subseteq \mathsf{N}(\mathcal{V}^b) \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{N}(\mathcal{V}^\infty) := \mathsf{N}(\mathcal{V}). \tag{89}$$

取神经的几何实现后，我们得到一个类似的拓扑空间滤过。由于单纯同调与奇异同调之间存在函子等价，上述滤过的持久单纯同调等价于滤过神经的几何实现的持久奇异同调持久同调$_i(\mathsf{N}(\mathcal{V}^\bullet)) \cong$ 持久同调$_i(|\mathsf{N}(\mathcal{V}^\bullet)|)$。根据命题 $\Gamma^a \simeq |\mathsf{N}(\mathcal{V}^a)|$ 5.6，我们得出结论：神经滤过的持久同调同构于由 确定的$\mathbf{F}_2(S^1)$ 滤过 $\mathcal{T}_\gamma$:

$$\mathrm{PH}_i(\mathsf{N}(\mathcal{V}^\bullet)) \cong \mathrm{PH}_i(\Gamma^\bullet) =: \mathrm{PH}_i(\mathcal{T}_\gamma). \tag{90}$$

由于有限单纯复形 $\mathsf{N}(\mathcal{V}^a)$ 的同调是有限维的，命题 5.6 直接表明 持久同调$_i(\mathcal{T}_\gamma)$是温和的。

推论 5.7. 若 γ 是 S^1 的分段线性嵌入（即满足条件*(C1)*和***(C²)***），则 持久同调$_i(\mathcal{T}_\gamma)$ 是温和的。

5.3 神经的滤过

在上一小节中，我们已经证明，借助 $\mathcal{T}_\gamma$ 对$\mathbf{F}_2(S^1)$进行滤过所得的持久同调，与 $\mathsf{N}(\mathcal{V}^\bullet)$的某个滤过的持久同调同构。为了说明 $\mathsf{N}(\mathcal{V}^\bullet)$，我们首先明确描述完整的神经 $\mathsf{N}(\mathcal{V})$。接着，我们展示分段线性回路的几何形状如何决定神经中的每个单形进入滤过的时刻。最后，我们展示神经滤过中的同调临界莫尔斯集如何对应于底层子水平集滤过 $\Gamma^\bullet$中的“临界点”。

5.3.1 神经

现在，我们通过考察这类正方形与三角形之间的交集（见图 神经的 $\mathcal{V}$）来描述8。回顾一下，神经的单形由覆盖元素的有限子集生成。我们先考察覆盖元素的两两交集。覆盖元素 V_{ij} 与 $V_{i'j'}$ 只有在每对索引中至少有一个相同，或在 $\mathbb{Z}_n$中相邻时，交集才非空。排除平凡情形 $\{ij\} = \{i', j'\}$后，需考虑两种交集非空的情况：

(E1) $j = j'$，且 i，i' 在 $\mathbb{Z}_n$ 中不同且相邻；或者

(E2) j，j' 在 $\mathbb{Z}_n$ 中不同且相邻，并且 i，i' 在 $\mathbb{Z}_n$ 中也不同且相邻。

回顾商映射 $q\colon [0,1] \times \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbf{F}_2(S^1)$，并将这些交集描述为 $[0,1] \times \mathbb{R}$ 的子集的同胚像。在 (E1) 所描述的情形中，共享一个指标元素，交集沿着闭区间形成：

$$V_{ij} \cap V_{i+1,j} = q(\{L_i\} \times [L_j, L_{j+1}]) \tag{91}$$

注意，这里的指标相加按模 n 运算。另需指出，除 V_{ij} 和 $V_{i+1、\ j}$ 之外，覆盖元素之间的交集都不等于 $q_2(\{L_i\} \times [L_j, L_{j+1}])$。在 (E2) 所描述的第二种情形中，两个覆盖元素在其中一个角点处相交：

$$V_{ij} \cap V_{i+1,j+1} = q(L_{i+1}, L_{j+1}). \tag{92}$$

(E1)、(E2) 以及等式 (91) 和 (92) 对两两交集的刻画，将三个和四个元素之间的交集限制为仅发生在点 $q(L_i, L_j)$ 处（见图8）。若 $i \neq j$，则 $q(L_i, L_j)$ 位于 $\mathrm{UConf}_2(S^1)$ 的内部。否则，$q(L_i, L_i)$ 是一个边界点。对于一个内部点 $i \neq j$，点 $q(L_{i+1}, L_{j+1}) \in \mathrm{UConf}_2(S^1)$ 也是四重交集

$$V_{ij} \cap V_{i+1,j} \cap V_{ij+1} \cap V_{i+1,j+1} = q(L_{i+1}, L_{j+1}), \tag{93}$$

$\{\{i,j\},\{i+1,j\},\{i,j+$

以及由 $1\},\{i+1,j+1\}\}$ $\quad i=j \quad q\ L_{i+1}\ L_{i+1}$ 的三元子集所索引的覆盖元素之间的三重交集。否则，如果，那么 (，) 属于唯一的 三重交集

$$V_{ii} \cap V_{i,i+1} \cap V_{i+1,i+1} = q(L_{i+1}, L_{i+1}). \tag{94}$$

在完整描述了 $\mathcal{V}$ 的覆盖元素之间可能的交集模式后，我们可以构造神经 $\mathrm{N}(\mathcal{V})$：

1. 我们有顶点，它们对应于 $\mathcal{V}$ 的单个覆盖元素，并通过 (i, j) 与 $0 \leq i \leq j \leq n-1$ 进行索引；2. 在 (i, j) 和 (i', j') 之间有一条边，对应于成对覆盖元素之间的交集；当 (E1) 和 (E2) 得到满足时，此类边出现在复形中；3. 对于 $i = 0$，……，$n-1$，在 (i, i)、$(i, i+1)$、$(i+1, i+1)$ 之间有一个二维单纯形，对应于 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 边界处覆盖元素的交集（见图8右侧面板）。4. 对于 $i \neq j$，我们在 (i, j)、$(i+1, j)$、$(i, j+1)$、$(i+1, j+1)$ 之间添加一个三单形及其所有面。

注记 **5 8** $i\ j\ ,\ i+1\ j\ ,\ i\ j+$。我们可以 $1\ ,\ i+1\ j+1 \quad i \neq j \quad i\ j+1\ \ i+1\ j \quad i\ j\ ,$ 进一步简化每个三单形的神经，其中 (,) (,) (,) (,) 满足 。注意，反对角边 (,)(,) 是 N( ) 中 (,)($1\ j\ ,\ i\ j+1\ ,\ i+1\ j+1 \quad \mathcal{V}$,) (,) (,) 的一个自由面。因此，我们可以进行单纯形塌缩，移除同时为 $(i, j+1)(i+1, j)$ 的余面且为 (i, j)、$(i+1, j)$、$(i, j+1)$、$(i+1, j+1)$ 的面的单形，而不改变 $\mathrm{N}(\mathcal{V})$ 的同伦类型。(i, j)、$(i+1, j)$、$(i, j+1)$、$(i+1, j+1)$ 的面中，剩下的是一对二单形 $(i, j)(i, j+1)(i+1, j+1)$ 和 $(i, j)(i+1, j)(i+1, j+1)$，以及它们的所有面。因此，在上述步骤 (4) 中，我们可以不再在 (i, j)、$(i+1, j)$、$(i, j+1)$、$(i+1, j+1)$ 之间添加一个三单形及其所有面，而是针对 $i \neq j$ 仅添加一对二单形 $(i, j)(i, j+1)($ $i+1, j+1)$ 和 $(i, j)(i+1, j)(i+1, j+1)$，从而构造一个更小的单纯复形，因为这些单形的面已在步骤 (1)–(3) 中添加。

5.3.2 滤过

现在我们给出滤过神经 $(\mathsf{N}(\mathcal{V}^a))_{a\in\mathbb{R}}$ 的显式描述。对于神经 $\mathsf{N}(\mathcal{V})$ 中的单形 $J=(i_0,\ j_0)\ldots,\ (i_m,\ j_m)$，考虑由 $F\colon \mathsf{N}(\mathcal{V})\ \to \mathbb{R}$ 给出的映射

$$F(J)=\inf\{a\in\mathbb{R}\ :\ J\in\mathsf{N}(\mathcal{V}^a)\} \tag{95}$$

回顾一下，任意单纯形 $J\in\mathsf{N}(\mathcal{V}^a)$ 都对应于覆盖元素 V_J^a 的一个非空交集
根据定义，V_J^a 是由以下内容生成的紧集

$$V_J^a=V_J\cap\Gamma^a. \tag{96}$$

由紧致性可知，$\mathcal{T}_\gamma$ 在 V_J 上取得最小值。因此，单纯形 J 存在于 $\mathsf{N}(\mathcal{V}^a)$ 中，当且仅当 $a\geq\min_{V_J}\mathcal{T}_\gamma$。换言之，

$$F(J)=\min_{V_J}\mathcal{T}_\gamma. \tag{97}$$

注意，F 关于神经的面偏序集是单调的：对于作为 J 的面的 $I\subset J$，由于 $V_J\subseteq V_I$，根据将 F 定义为最小值可得 $F(I)\ \leq\ F(J)$。特别地，这意味着 F 是滤过 $(\mathsf{N}(\mathcal{V}^a))_{a\in\mathbb{R}}$ 的滤过函数，而单形的次水平集 $F^{-1}(-\infty,\ a]$ 给出了神经 $\mathsf{N}(\mathcal{V}^a)$。

在通过方程 (91) 至 (94) 刻画了覆盖元素的交集后，我们可以计算每个单形上的最小值 $\min_{V_J}\mathcal{T}_\gamma$，并推导出 F。下面将说明这些情况。

0-单形 对于一个 0-单形 $J=(i,j)$，其滤过值 $F((i,j))$ 可以直接根据两条线段之间的最小距离推得 x_ix_{i+1} 和 x_jx_{j+1}：

$$F((i,j))=\frac{1}{2}d(\overline{x_ix_{i+1}},\overline{x_jx_{j+1}})^2. \tag{98}$$

我们指出，如果 V_{ij} 与边界相交，即 $j=i$ 或 $j=i+1$，那么两条线段会在一点处重叠，并且 $F((i,j))=0$。

1-单形 我们从等式（91）和（92）回顾得知，两个相邻覆盖元素的交集可能沿着一条边或一个角点形成。对于等式（91）中的边的情况，$\mathcal{T}_\gamma$ 的最小值可以根据 x_i 与线段 x_j、x_{j+1}之间的距离推得。若覆盖元素在一个角点处相交，则可直接根据点间距离推得：

$$\text{(E1)}:\quad F((i,j)(i+1,j))=\frac{1}{2}d(x_i,\overline{x_jx_{j+1}})^2 \tag{99}$$

$$\text{(E2)}:\quad F((i,j)(i+1,j+1))=\frac{1}{2}\|x_{i+1}-x_{j+1}\|^2. \tag{100}$$

2-单形和3-单形 对于 J一个 2-单形或 3-单形，交集 V_J是一个单点，见等式（93）和（94）。对于等式（93）所述的内部情况 $i\neq j$，一个 3-单形 $J=(i,j),\ (i+1,j),\ (i,j+1),\ (i+1,j+1)$及其面中的所有 2-单形都在该值处进入滤过

$$F((i,j),(i+1,j),(i,j+1),(i+1,j+1))=\frac{1}{2}\|x_{i+1}-x_{j+1}\|^2. \tag{101}$$

在边界处，$i=j$ 如公式（94）所述，由于 q（L_{i+1}，L_{i+1}）位于边界上 y,

$$F((i,i),(i,i+1),(i+1,i+1))=0. \tag{102}$$

因此，这涵盖了 $\mathsf{N}(\mathcal{V})$ 中的所有单形，我们将滤过 $\mathsf{N}(\mathcal{V}^\bullet)$ 定义为滤过函数 F 的子水平集过滤。

5.4 持久同调

接下来，我们关注由 $\mathcal{T}_\gamma$ 给出的 $\mathrm{F}_2(S^1)$ 的子水平集过滤的持久同调；该过滤与神经复形的过滤 $\mathrm{PH}_i(\mathrm{N}(\mathcal{V}^\bullet)) \cong \mathrm{PH}_i(\Gamma^\bullet)$（式 (90)）同构。我们关注神经过滤 $\mathrm{N}(\mathcal{V}^\bullet)$ 的同调临界值。由于我们有一个有限单纯复形，过滤 $\mathrm{N}(\mathcal{V}^\bullet)$ 中只有有限个值会使单纯复形因添加单形而实际发生变化。我们将这些互不相同的值记为 $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = \max F$，它们组成有序集 $a \in \mathbb{R}$，其中 $F^{-1}(a) \neq \emptyset$。对于所有满足 $a_i \leq s \leq t < a_{i+1}$ 的值 s, t，神经保持不变，因此 $t \in (a_i, a_{i+1})$ 显然是同调正则值。因此，我们可以将关注范围限制在 $a_0, \ldots, a_m$。

类比于光滑情形，在光滑情形中，莫尔斯理论描述了光滑函数的临界点如何改变次水平集的同伦类型；现在我们讨论在滤过$\mathrm{N}(\mathcal{V}^\bullet)$ 中加入单个单形如何改变次水平集的同调。我们回顾第2.2.3 节中如何利用莫尔斯集的 Conley 指数刻画它们。下文中，我们称单纯复形中的莫尔斯集 S_i 由一个生成 k-单纯形，如果$\mathrm{cl}(S_i)$ 是一个 k-单纯形的闭包。我们还将子复形 $S_{\partial\mathcal{M}}$ 定义为所有非3-单形面之2-单形（闭包）的并，即位于边界 $\partial\mathcal{M}$上的那些单形。

命题5.9。考虑 $\mathbb{R}^d$ 中的一个满足*(C1)* 至*(C3)*的分段线性嵌入环，其对应的滤过为$(\mathrm{N}(\mathcal{V}^a))_{a\in\mathbb{R}}$。对于值 $a < 0$，不存在莫尔斯集。对于 $a = 0$，唯一的莫尔斯集是 $S_{\partial\mathcal{M}}$。对于值 $a > 0$，所有莫尔斯集均由*0*、*1*或*3*-单纯形生成。

对于 $a > 0$ 的情形，我们将按照所添加单纯形的维数将其分情况讨论。下文中，如果某个顶点所对应的覆盖元素不与边界 $\partial\mathcal{M}$ 相交，我们称 $\mathrm{N}(\mathcal{U})$ 的该顶点为 内部顶点。

第一个引理表明，顶维数为 1 的 Morse 集（仅包含边和顶点）至多由一条边组成。

引理5.10。 如果一对边 e、e' 连接于同一个内部顶点 v，并且同时加入滤过中，那么以下两种情况之一成立：

- v 同时位于两条边的链接中；或
- 边 e、e' 是一个 *3*-单形的面，并且 v、e、e' 与包含 e、e' 作为其面的唯一三单形一起加入。

证明。假设 v 不在 $e =$（v、w）和 $e' =$（v、w'）的链接中。那么，同时将 e、e' 加入滤过意味着，与 v 对应的覆盖元素上的凸函数的唯一最小值（由于 v 位于内部，并满足 (C3) 条件）包含在属于 v、w、w' 的正方形的交集中。由于该交集是一个单点，对应于与 v、w、w' 对应的覆盖元素和某个其他顶点 w'' 所对应的覆盖元素之间的交集，因此包含 e、e' 作为其面的 3-单形会同时被加入。

□

上面的引理表明，如果在滤过的某一步添加一条边，同时还添加了其他单形，那么这条边要么属于所添加的某个 3-单形的面，要么同一时刻添加的其他单形（顶点除外）都与这条边不相连。对于 2-单形的情形，我们注意到，根据覆盖的结构，2-单形总是作为 3-单形的面添加。下面的引理将讨论 3-单形的情形。

引理 5.11. 如果同时添加一对具有同一条关联边 e 的内部 *3*-单形 σ、σ'，那么这条边属于 σ 和 σ' 的链接。

证明。考虑 $\sigma = uvab$和 $\sigma' = uva'b'$。覆盖元素 u和 v相交于一条闭线段，其端点分别是覆盖元素 u、v、w、z与 u、v、w'、z'的四重交集。若端点具有相同的函数值 a，则根据距离函数在各个覆盖元素上的凸性，该线段相对内部上的函数值要么等于 a，要么严格小于 a。由于距离函数限制在每个覆盖元素上时是正定二次函数（这是由 (C3) 条件所致），距离函数不可能沿线段保持常数，因此该线段的相对内部上的函数值必定严格小于 a。由于该线段是由指标为 u和 v的覆盖元素相交得到的，神经中的边 uv必定在滤过中早于 a被加入。因此，边 uv同时属于 σ和 σ'的链接。

□

命题的证明5.9。对于 $a < 0$，由于滤过非负，$\mathsf{N}(\mathcal{V}^a)$ 为空。对于 $a = 0$，如图8所示，唯一的连通分支 S 是 $S_{\partial\mathcal{M}}$。对于 $a > 0$上述引理限制了滤过的莫尔斯集。这两个观察表明，当单形加入滤过时，若其不是作为面加入，或者加入的是一条边或一个 3-单形，那么该单形与同时加入的其他单形不连通，但其各个面中的单形除外。因此，滤过每一步的莫尔斯集 S_i（所加入单形的连通分支）要么是单个顶点、边或 3-单形，并附带其各个面中的单形的一个子集。 □

对于 $S_{\partial\mathcal{M}}$，其链接为空，并且 $S_{\partial\mathcal{M}}$ 与 S^1同伦等价，因此其 Conley 指数同构于 $H_\bullet(S^1)$。注意，这不是约化同调，所以 $S_{\partial\mathcal{M}}$ 不是一阶鞍点。

如果莫尔斯集在 $a > 0$ 时进入滤过，由于每个莫尔斯集的闭包都是闭单纯形，因此它是可缩的。由此，我们可以通过莫尔斯集的链接推断其 Conley 指数。设 $\sigma \in \mathsf{N}(\mathcal{V}^a)$。我们描述可实现为 $\mathsf{cl}(\sigma) \cap \mathsf{N}(\mathcal{V}^{a-\varepsilon})$ 的可能子复形 $K \leq \mathsf{cl}(\sigma)$，其中 ε 满足在 $(a-\varepsilon, a)$ 中没有加入任何单形。对于顶点和边，所有可能的子复形都可以实现。设 (i,j)、$(i+1,j)$、$(i,j+1)$ 和 $(j+1,j+1)$ 是在神经中生成一个 3-单形的覆盖的指标。除了 $\mathsf{cl}(\sigma)$ 之外，我们需要考虑的可能子复形是这些顶点上的完全图的子图。包含孤立顶点的子图无法实现：顶点 v 孤立意味着限制在 V_v 上的距离函数的最小值位于 V_v的内部。根据条件(C3)，限制在U^v上的次水平集是一个非退化椭圆（与 V_v相交），因此它们不可能在未先与某条线段相交的情况下与角点 $V_{ij} \cap V_{i+1,j} \cap V_{ij+1} \cap V_{i+1,j+1}$相交（例如线段 $(V_{ij} \cap V_{i+1,j}$ 等），所以 3-单形不可能紧接在某个顶点之后加入。任何包含对角边 (i,j)、$(i+1,j+1)$ 或 $(i+1,j)$、$(i,j+1)$ 的子图也无法实现，因为这些边的存在意味着 3- 单形也存在。其余子图均可实现。表 2 中列出了这些结果，据此可见这些莫尔斯集是一阶鞍点。

5.4.1 临界点的几何刻画

本节将说明 $\mathrm{UConf}_2(S^1)$ 中的某些点与 γ 在嵌入下的像满足特定几何条件（见定义5.13）的点之间存在双射对应；这些点对应于n-鞍点）。$\mathsf{N}(\mathcal{V}^\bullet)$中的同调临界单形。

分段线性回路的局部几何 在后续讨论中，我们发现使用以下量描述分段线性闭曲线的局部几何很有帮助，这些量如图9所示。对于 $\vartheta_i\colon U_i \to \mathbb{R}$ 的每个坐标图 S^1，我们将单侧单位“切向量”定义为极限切向量：

$$\tau^{\pm}(t) = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f \circ \vartheta_i^{-1}(t + h/L) - f \circ \vartheta_i^{-1}(t)}{h} \in \mathbb{R}^d. \tag{103}$$

若 $t \in (L_i, L_{i+1})$，即 $f \circ \vartheta_i^{-1}$不是顶点 x_j之一，则极限相同 $\tau^+(t) = \tau^-(t)$。此外，若假设 f的顶点处于一般位置（C3），则当且仅当 $f(z)$ 位于线段内部时，极限相同，因为不允许三个顶点共线。注意，由于 f 的参数化方程（ 81 ），对于某个 i，有 $\tau^{\pm} = u_i/l_i$，因此 $\|\tau^{\pm}\| = 1$ 始终是单位切向量。在后续讨论中，对于给定的循环数据，我们可以假设图册 Θ固定，并滥用记号，对于 $t = \vartheta_i(z)$，记 $\tau^{\pm}(z) = \tau^{\pm}(t)$。

我们发现，描述闭曲线上两点 $z_1, z_2 \in S^1$ 之间的相对方向很有用。令$v_{1,2} = f(z_2) - f(z_1)$ 表示闭曲线上两点之间的相对位置，我们将 f在 z_1处相对于 z_2的切线角定义为角 $\theta_f^{\pm}(z_1, z_2) \in [0, \pi)$，即 $v_{1,2}$ 与 $\pm\tau^{\pm}(z_1)$ 之间的角，如图9所示：

$$\cos\Big(\theta_f^{\pm}(z_1, z_2)\Big) = \pm\langle \tau^{\pm}(z_1), v_{1,2}\rangle, \tag{104}$$

$$\cos\Big(\theta_f^{\pm}(z_2, z_1)\Big) = \pm\langle \tau^{\pm}(z_2), v_{2,1}\rangle = \mp\langle \tau^{\pm}(z_2), v_{1,2}\rangle. \tag{105}$$

定义 5.12. 如果 $\theta_f^+(z_1, z_2)$ 和 $\theta_f^-(z_1, z_2)$ 都是锐角，那么我们称 f朝 O 弯曲 于 $f(z_1)$。如果两者都不是锐角，那么我们称 f背离 O 弯曲 于 $f(z_1)$。

定义 5.13. 对于 $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^d$ 分段线性，我们为点 $\wr z_1, z_2 \int \in \mathrm{UConf}_2(S^1)$ 定义三个条件：

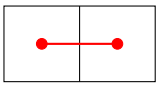
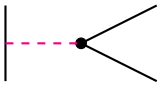
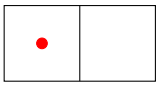
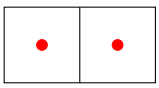
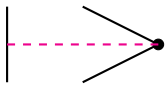
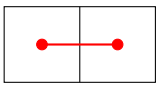
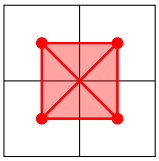
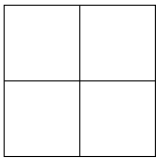
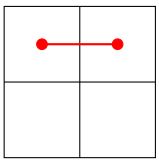
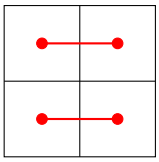
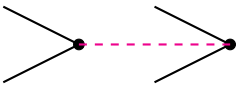
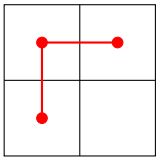
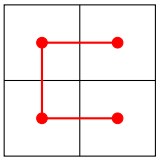
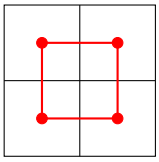
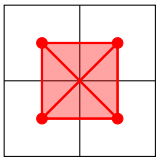
	dim	cl(σ)	cl(σ) $\cap \Gamma^a$	切线角	$\beta_\bullet$(cl(σ), cl(σ) $\cap \Gamma^a$	指标
1	0				1, 0, 0	0
2					0, 0, 0	–
3	1				1, 0, 0	0
4					0, 0, 0	–
5					0, 1, 0	1
6					0, 0, 0	–
7	3				1, 0, 0	0
8					0, 0, 0	–
9					0, 1, 0	1
10					0, 0, 0	–
11					0, 0, 0	–
12					0, 0, 1	2
13					0, 0, 0	–

表 2: 在 a 时仍存活的闭单形对 cl(σ) 及可能的子复形 cl(σ) $\cap \Gamma^a$，以及它们的 Conley 指数。

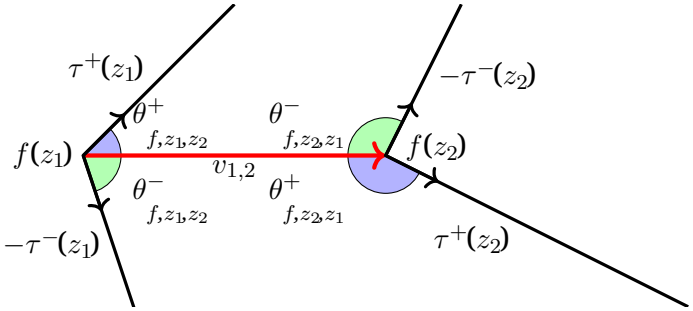


图9：f在z_1处相对于z_2的切线角，以及在z_2处相对于z_1的切线角（定义 5.12）。图中展示了顺时针定向闭曲线f的两条线段：$S^1 \to \mathbb{R}$对应于z_1, z_2。这里，f在f处朝f（z_2）弯曲，并在f处背离f（z_1）弯曲。因此，$\wr z_1, z_2 \int$满足定理 5.14 的条件（K1），因而对应于一个指标为1的同调临界点，即鞍点。

(K0) f在f处背离f（z_2）弯曲，并在f处背离f（z_1）弯曲；

(K1) f在 $f(z_1)$ 处向 $f(z_2)$弯曲，并在 $f(z_2)$ 处远离 $f(z_1)$，反之亦然；

(K2) f在 $f(z_1)$ 处向 $f(z_2)$弯曲，并在 $f(z_2)$ 处向 $f(z_1)$弯曲。

注意，这些条件中至多有一个成立。如果 (K0)、(K1)或(K2) 成立，我们分别将指标 $\lambda(\wr z_1, z_2 \int)$ 定义为 0、1 或 2。令 $C_a^i \subset f^{-1}(a)$ 表示水平集中的点 a，这些点满足条件 (Ki)。

定理 5.14。 设 $\gamma\colon \ S^1 \to \mathbb{R}^d$ 是循环数据 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_n}$ 的分段线性插值，满足非退化条件 *(C1)* 至 *(C3)*。当 $a > 0$ 和 $\epsilon > 0$ 足够小时，

$$H_\bullet(\Gamma^a, \Gamma^{a-\epsilon}) \cong \bigoplus_{i=0}^{2} \bigoplus_{w\in C_a^i} \tilde{H}_\bullet(S^i), \tag{106}$$

其中 C_a^i 是 $\mathcal{T}_\gamma^{-1}(a)$ 中的点，如定义 *5.13* 所述，并满足几何性质 *(K0)* 至 *(K2)*。对于 $a = 0$，我们还有 $H_\bullet(\Gamma^0, \Gamma^{-\epsilon}) \cong H_\bullet(S^1)$。

证明。 由 命题5.9可知，唯一的临界莫尔斯集是 $S_{\partial\mathcal{M}}$ 在 $a = 0$ 处的集，以及由 $a > 0$的单形生成的集。对于 $\wr z_1, \ z_2 \int \in \mathrm{UConf}_2(S^1)$ 定义

$$\sigma \wr z_1, z_2 \int = \bigcap_{V_{ij}:\wr z_1,z_2\int\in V_{ij}} V_{ij},$$

包含 $\wr z_1, z_2 \int$的最高维单纯形。设 $\mathcal{T}_\gamma(\wr z_1, z_2 \int) = a$，因此 $\sigma \wr z_1, z_2 \int$ 在滤过值 a 处属于滤过。我们将构造一个对应关系（见表 3），将 $\theta^\pm_{\gamma,z_1,z_2}, \theta^\pm_{\gamma,z_2,z_1}$ 与 $\sigma(z_1, z_2)$ 在滤过值 $a-\epsilon$ 处存在的子复形对应起来；其中 ϵ 足够小，使得 $[a-\epsilon, a$ 内不会添加任何单形。除非该子复形本身就是 $\sigma \wr z_1, z_2 \int$，否则 $\sigma \wr z_1, z_2 \int$ 也会首次出现在 a 处。在这种情况下，根据命题5.9的证明，$\sigma \wr z_1, z_2 \int$ 将是一个莫尔斯集。然后我们可以参照表 2，判断 $\sigma \wr z_1, z_2 \int$ 是否为临界集，并推导出其 Conley 指数。

现在我们将展示表3中的对应关系。设 $f(z_1) = x_i$以及 $f(z_2) = x_j$满足 $i \neq j$，即$\sigma \wr z_1, \ z_2 \int$是一个3-单形。根据余弦定理，对于 $0 < \delta \leq l_i$有

$$\mathcal{T}_\gamma(\wr \exp\left(2\pi\imath(\frac{\delta}{L} + L_i)\right), z_2 \int) = \frac{1}{2}\|\gamma(z_2) - (x_i + \delta\tau^+(z_1))\|^2 < \frac{1}{2}\|v_{1,2}\|^2 = \mathcal{T}_\gamma(\wr z_1, z_2 \int)$$

当且仅当 $\delta < 2\|v_{1\,2}\|$ $\theta^+_{f\,z_1\,z_2}$ $V_{i\,j-1} \cap V_{i\,j}$ $\sigma \wr z_1 \ z_2 \int =$, cos, , 。因此，单纯形，，严格早于，，，出生，当且仅当，，是锐角。同理，这些单形 $V_{i-1\,j-1} \cap V_{ij-1} \cap V_{i-1\,j} \cap V_{ij}$ $\theta^+_{\gamma\,z_1\,z_2}$

$$V_{i-1,j-1} \cap V_{i-1,j}, \quad V_{i-1,j} \cap V_{ij}, \quad \text{and} \quad V_{i-1,j-1} \cap V_{ij-1}$$

$\theta^{\pm}_{\gamma,z_1,z_2}$	$\theta^{\pm}_{\gamma,z_2,z_1}$	表2 行	指标
RR	RR	1, 3, 7	0
	AR	4, 8	–
	OR	3, 7	0
	AA	5, 9	1
	AO	2, 4, 8	–
	OO	3, 7	0
AR	AR	10	–
	OR	8	–
	AA	11	–
	AO	6, 10	–
	OO	8	–
OR	OR	7	0
	AA	9	1
	AO	6, 8	–
	OO	7	0
AA	AA	12	2
	AO	6, 11	–
	OO	9	1
AO	AO	2, 6, 10	–
	OO	8	–
OO	OO	7	0

指标 $\theta^{\pm}_{\gamma,z_2,z_1}$ / $\theta^{\pm}_{\gamma,z_1,z_2}$	AA	RR	OR	OO	AR	AO
AA	2	1	1	1	–	–
RR	1	0	0	0	–	–
OR	1	0	0	0	–	–
OO	1	0	0	0	–	–
AR	–	–	–	–	–	–
AO	–	–	–	–	–	–

表 3：切线角与 n-鞍点之间的对应关系。图例：R=直角，A=锐角，O=钝角。

分别在 $\sigma\wr z_1, z_2\int$之前出生，当且仅当 $\theta^{-}_{\gamma,z_1,z_2}, \theta^{+}_{\gamma,z_2,z_1}$ 和 $\theta^{-}_{\gamma,z_2,z_1}$ 分别为锐角。现在考虑 $\sigma(z_1, z_2)$ 的维数为 0 或 1 的情形，因此不失一般性， $f(z_1)$ 位于 $x_i x_{i+1}$和 $\tau_1^+ = \tau_1^-$的内部。此时，除非 $\theta^{\pm}_{\gamma,z_1,z_2}$均为直角，否则 $\sigma(z_1, z_2)$ 会在 a之前出现。这涵盖了维数为 0 的情形。对于维数为 1 的情形，利用类似的余弦定理论证可得：单形 U^{ij}和 U^{ij+1}严格早于 $U^{ij} \cap U^{ij+1}$出生，当且仅当 $\theta^{\pm}_{\gamma,z_1,z_2}$均为直角，且 $\theta^{\pm}_{\gamma,z_2,z_1}$分别为锐角。考虑切线角为锐角、直角或钝角的不同组合，可得表 2。 □

光滑闭环（定理 4.18）与分段线性闭环（定理 5.14）的临界点几何刻画有相似之处。对于满足 $\kappa_{12}, \kappa_{21} < 0$的光滑闭环，其弦距离变换的临界点若为局部极小值，也对应于[1] 分段线性情形中的局部极小值，并满足 (K0)。类似地，当 $|\kappa_{12}| \approx |\kappa_{21}| \gg 0$时，光滑闭环的局部极大值和鞍点对应于适当分段线性近似的局部极大值和鞍点。然而，当相对曲率κ_{12}/κ_{21} 非常大或非常小时，对置线段近似平行，因此这些点是鞍点；这一现象在分段线性情形中并未出现。

[1]在适当的离散化下，临界弦端点处均有一个顶点，且离散化足够精细。

6 高阶有限子集空间与体积变换

为了将我们的方法推广到高阶空间，我们需要进一步了解它们的拓扑结构。如果高阶有限子集空间可以进行三角剖分，那么它们将更便于计算，例如应用于我们为弦距离变换构建的流程。不过，要做到这一点，我们必须先弄清楚这些高阶有限子集空间是什么。困难在于，即使从一个流形M出发，高阶有限子集空间也未必是流形或带边界流形（见 [39] 第7节，以及 [54]第1.2节最后一条备注）。深入理解这些空间的拓扑结构，将使我们能够为弦距离变换的流程创建一种推广。

注 6.1。 需要注意的是，在广义方法中有两种选择：要么通过对称积进行分解，要么通过 n 阶有限子集空间进行分解。如果只通过对称积进行分解，那么对于仅取决于集合的函数，就会引入重复的计算，因为我们有 $\mathbf{F}_n(X)$ 是 $SP^n(X)$ 的商空间。

6.1 高阶有限子集空间的拓扑性质

在第 2.1.1 节中，我们讨论了有限子集空间如何进行分层，以及它们如何相互结合。我们还可能希望了解这些空间的整体拓扑结构。有关全面的概述，建议参阅 [39], [43], [32] 。我们发现，对于 $n \geq 3$，有 $\mathbf{F}_n(X)$ 是单连通的 [39]。Lazovskis 最近的一个结果 [43], 为 $n \geq 4$提供了另一种证明方法，该方法利用了以下事实：由空间的包含映射诱导的映射 $\pi_1 \quad _{n+2} X$ n $(\mathbf{F}(X)) (\mathbf{F}())$ 对所有 都是平凡的。

定理 6.2. *[39] [43]* 对于每个正整数 $n \geq 3$, $\pi_1(\mathbf{F}_n(X))$都是平凡的。

因此，在考虑高阶 n 阶有限子集空间的滤过时，持久图中不可能出现形如 (a, ∞) 的点。

如第 2.1 节所述，如果从一个流形开始 X 对于更高阶的情形，我们无法保证 $\mathbf{F}_n(X)$ 是流形或带边界流形。如果我们将范围限制为闭流形（紧致且无边界），那么可以得到如下完整描述：

定理 6.3. *[39]*设 X 是一个维数为 $d \geq 1$ 的闭流形，则$\mathbf{F}_n(X)$ 是闭流形，当且仅当 $d = 1$ 且 $n = 3$ 或且 $n = 2$。

该结果排除了 $n = 1$ 的平凡情形。为了证明这一结果，我们使用了一个不要求 X 是闭流形的引理。

引理 6.4。 *[39]*如果 X 是维数为 $d > 2$的流形，那么 $\mathbf{F}_n(X)$ 对于 $n \geq 2$从来不是流形。

对于高阶 n阶有限子集空间，我们可能没有流形结构，但仍然有如下结果：

引理 6.5。 *[39]*那么对于 X一个单纯复形，$\mathbf{F}_n(X)$ 具有一个 *CW* 分解，其顶层细胞的维数为 $n \dim(X)$，因此 $H_*(\mathbf{F}_n(X))$ 对于 $* > n \dim(X)$是平凡的。

此外，在 [56] 的第 5.3 节中，我们有：如果 X经过三角剖分，那么 $\mathbf{F}_n(X)$ 也经过三角剖分。因此，尽管在大多数情况下我们会失去流形结构，但从理论上讲仍然能够构造三角剖分。这将使我们能够在考虑高阶有限子集空间上的滤过时进行计算

6.2 体积函数

上文已经看到，我们可以将从弦距离变换到高阶空间的方法进行推广。为此，我们需要考虑高阶函数。在本小节中，我们展示高阶体积函数的连续性和稳定性，即 $k+1$ 个点的 k维单纯形的平方体积。

从弦距离变换自然推广而来的一种思路，是考虑将距离函数推广到满足 $k > 1$ 的 $(k+1)$ 个点上，使其在空间的等距变换下保持不变，并且

只取决于这些点的集合。我们将这类函数称为几何函数。一个自然的候选是 $(k+1)$ 个点的凸包的k维体积：对于一对点，这就简化为两点之间的距离。

我们首先说明这些几何函数如何在$\mathbf{F}_{k+1}(X)$上诱导出一个函数。设 X 是一个紧致空间， Y是一个度量空间，且 $\mathfrak{e}: X \to Y$是一个连续函数。考虑一个几何函数 $\Gamma^n_{\mathfrak{e}}: X^{k+1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，它由 $\mathfrak{e}$ 定义，并且在置换$(x_0, x_1, \ldots, x_k)$时保持不变，且只依赖于点的集合；那么它可经由一个商映射分解，该商映射从 X^{k+1} 映到第$(k+1)$个有限子集空间$\mathbf{F}_{k+1}(X)$（注意，如果我们不要求它只依赖于点的集合，那么也可以将其分解到对称积 $SP^{k+1}(X)$）：

$$\begin{array}{ccc} X^{k+1} & \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{e}}} & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & \nearrow_{\exists! g_{\mathfrak{e}}} & \\ \mathbf{F}_{k+1}(X) & & \end{array} \tag{107}$$

这里， $g_{\mathfrak{e}}: \mathbf{F}_{k+1}(X) \to [0, \infty)$是使图交换的唯一连续映射，其显式表达式为

$$g_{\mathfrak{e}}(\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}) = \Gamma_{\mathfrak{e}}(x_0, x_1, \ldots, x_k). \tag{108}$$

特别地，我们关注以下情形。对于空间 X上的 $k+1$ 个点，以及映射 $\mathfrak{e}: X \to \mathbb{R}^d$，我们可以考虑点集 $\{\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_k)\}$，并计算这些点的凸包的 k 维平方体积。对于 $k \leq d$，我们将此映射定义为 $\Gamma^k_{\mathfrak{e}}: X^{k+1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，如下：

$$\Gamma^k_{\mathfrak{e}}(x_0, \ldots, x_k) := Vol(\Delta^k(\mathfrak{e}(x_0), \ldots, \mathfrak{e}(x_k)))^2$$

接下来定义体积变换 $\mathsf{Vol}_k: C(X, \mathbb{R}^d) \to C(\mathbf{F}_{k+1}(X)\ \mathbb{R})$，定义为 $\mathfrak{e} \mapsto g_{\mathfrak{e}}$。若在由上确界范数诱导的函数空间上施加以下度量，则有如下连续性结果。由于 X和 $\mathbf{F}_{k+1}(X)$ 都是紧致的，因此上确界范数可由极大值点取得。对于 $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \in C(X, \mathbb{R}^d)$，我们定义 $d(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2) := \max_{x \in X} \|\mathfrak{e}_1(x) - \mathfrak{e}_2(x)\|_2$；对于 $h_1, h_2 \in C(\mathbf{F}_{k+1}(X)\ \mathbb{R})$，令 $d(h_1, h_2) := \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{F}_{k+1}(X)} |h_1(\mathbf{x}) - h_2(\mathbf{x})|$。

定理 6.6。 若 X 是一个紧空间，则体积变换

$$\mathsf{Vol}_k : C(X, \mathbb{R}^d) \to C(\mathbf{F}_{k+1}(X), \mathbb{R})$$

在 两个空间都赋予上确界范数时是连续的。特别地，若 $d(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2) \leq M$对于 $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \in C(X, \mathbb{R}^d)$，并且

$$D = \max(\mathrm{diam}(\mathfrak{e}_1), \mathrm{diam}(\mathfrak{e}_2)),$$

我们有一个界

$$d(\mathsf{Vol}_k(\mathfrak{e}_1), \mathsf{Vol}_k(\mathfrak{e}_2)) \leq \frac{(k+2)\sqrt{k(k+1)}}{(k!)^2 2^{k-2}} M(M+D)\left(\sqrt{(k^2+2k+2)D^2 + (2k+2)}\right)^{k+1}. \tag{109}$$

证明。 设 $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \in C(X, \mathbb{R}^N)$，其中 $\Gamma^k_{\mathfrak{e}}$和 $g_{\mathfrak{e}}$如上所述。体积的平方，即 $Vol(\Delta^k(\mathfrak{e}(x_0) \ldots, \mathfrak{e}(x_k)))^2$，可通过凯莱-门格尔矩阵的行列式给出：

$$A^k_{\mathfrak{e}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & d^2_{01} & d^2_{02} & \cdots & d^2_{0k} & 1 \\ d^2_{01} & 0 & d^2_{12} & \cdots & d^2_{1k} & 1 \\ d^2_{02} & d^2_{12} & 0 & \cdots & d^2_{2k} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d^2_{0k} & d^2_{1k} & d^2_{2k} & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{x} = (x_0, \ldots\ldots, x_k) \in X^{k+1}, d_{ij} = \|\mathfrak{e}(x_i) - \mathfrak{e}(x_j)\|_2$; 则 $Vol(\Delta^k(\mathfrak{e}(x_0) \ldots\ldots, \mathfrak{e}(x_k)))^2 = (-1)^{k+1}\frac{}{(k!)^2 2^k} \det\{A^k_{\mathfrak{e}}(\mathbf{x})\}$。

设 $B = A^k_{\mathfrak{e}_1}(\mathbf{x}) - A^k_{\mathfrak{e}_2}(\mathbf{x})$，则 B 至多有 $(k+2)^2 - 3k - 4 = k(k+1)$ 个非零项。因此，我们现在希望界定 $d_{ij} = \|\mathfrak{e}(x_i) - \mathfrak{e}(x_j)\|_2$ 对于 $\mathfrak{e}_1$ 和 $\mathfrak{e}_2$ 的平方差，也就是希望界定 $b_{ij} = \|\mathfrak{e}_1(x_i) - \mathfrak{e}_1(x_j)\|_2^2 - \|\mathfrak{e}_2(x_i) - \mathfrak{e}_2(x_j)\|_2^2$。若令 $M := \max_{x\in X} \|\mathfrak{e}_1(x) - \mathfrak{e}_2(x)\|_2$，则可得

$$|b_{ij}| \le 4M(M + \min\{\mathrm{diam}(\mathfrak{e}_1(X)), \mathrm{diam}(\mathfrak{e}_2(X))\})$$

So,

$$\|B\|_2 \le \sqrt{k(k+1)}\ 4M(M + \min\{\mathrm{diam}(\mathfrak{e}_1(X)), \mathrm{diam}(\mathfrak{e}_2(X))\})$$

于是，我们将 $d(\mathrm{Vol}_k(\mathfrak{e}_1), \mathrm{Vol}_k(\mathfrak{e}_2)) = \max_{\mathbf{x}\in X^{k+1}} |\Gamma^k_{\mathfrak{e}_1}(\mathbf{x}) - \Gamma^k_{\mathfrak{e}_2}(\mathbf{x})|$ 进行界定。

$$\begin{aligned}
\left|\Gamma^k_{\mathfrak{e}_1}(\mathbf{x}) - \Gamma^k_{\mathfrak{e}_2}(\mathbf{x})\right| &= \left|Vol\big(\Delta^k(\mathfrak{e}_1(x_0), \dots, \mathfrak{e}_1(x_k))\big)^2 - Vol\big(\Delta^k(\mathfrak{e}_2(x_0), \dots, \mathfrak{e}_2(x_k))\big)^2\right| \\
&= \left|\frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2 2^k} \det A^k_{\mathfrak{e}_1}(\mathbf{x}) - \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2 2^k} \det A^k_{\mathfrak{e}_2}(\mathbf{x})\right| \\
&= \frac{1}{(k!)^2 2^k}\left|\det A^k_{\mathfrak{e}_1}(\mathbf{x}) - \det A^k_{\mathfrak{e}_2}(\mathbf{x})\right| \\
&\le \frac{1}{(k!)^2 2^k}(k+2)\left\|A^k_{\mathfrak{e}_1}(\mathbf{x}) - A^k_{\mathfrak{e}_2}(\mathbf{x})\right\|_2 \max\left\{\left\|A^k_{\mathfrak{e}_1}(\mathbf{x})\right\|_2, \left\|A^k_{\mathfrak{e}_2}(\mathbf{x})\right\|_2\right\}^{k+1} \\
&\le \frac{1}{(k!)^2 2^k}(k+2)\sqrt{k(k+1)}\,4M\big(M + \min\{\mathrm{diam}(\mathfrak{e}_1(X)), \mathrm{diam}(\mathfrak{e}_2(X))\}\big) \\
&\quad \cdot \max\left\{\left\|A^k_{\mathfrak{e}_1}(\mathbf{x})\right\|_2, \left\|A^k_{\mathfrak{e}_2}(\mathbf{x})\right\|_2\right\}^{k+1} \\
&\le \frac{(k+2)\sqrt{k(k+1)}M\big(M + \min\{\mathrm{diam}(\mathfrak{e}_1(X)), \mathrm{diam}(\mathfrak{e}_2(X))\}\big)}{(k!)^2 2^{k-2}} \\
&\quad \cdot \max\Big\{\sqrt{(k^2+2k+2)\mathrm{diam}(\mathfrak{e}_1(X))^2 + (2k+2)^2}, \\
&\qquad \sqrt{(k^2+2k+2)\mathrm{diam}(\mathfrak{e}_2(X))^2 + (2k+2)^2}\Big\}^{k+1}.
\end{aligned}$$

第一个不等式来自 [37] 的定理 2.12。由此，$d(\mathrm{Vol}_k(\mathfrak{e}_1), \mathrm{Vol}_k(\mathfrak{e}_2))$ 的上界就是该不等式左侧的上确界。

固定 $\mathfrak{e}_1$。由于 $|\mathrm{diam}(\mathfrak{e}_1) - \mathrm{diam}(\mathfrak{e}_2)| \le 2M$，对于任意 $\epsilon > 0$，我们都可以找到充分小的 $M > 0$，使得对于所有 $\mathfrak{e}_2$，在以 $\mathfrak{e}_1$ 为中心、半径为 M 的球内，等式右侧都有下界 ϵ。因此，Vol 关于上确界范数度量是连续的。

令 $D = \max\{\mathrm{diam}(\mathfrak{e}_1(X)), \mathrm{diam}(\mathfrak{e}_2(X))\}$。于是我们可以将不等式化简为

$$d(\mathrm{Vol}_k(\mathfrak{e}_1), \mathrm{Vol}_k(\mathfrak{e}_2)) \le \frac{(k+2)\sqrt{k(k+1)}}{(k!)^2 2^{k-2}} M(M+D)\left(\sqrt{(k^2+2k+2)D^2 + (2k+2)}\right)^{k+1}.$$

□

定义了连续函数 $g_{\mathfrak{e}} : \mathrm{F}_{k+1}(X) \to \mathbb{R}$ 后，我们可以构造一个子水平集过滤，并考察其持久同调。由于 $\mathrm{F}_{k+1}(X)$ 是紧致且可三角剖分的（见 [56] 的 5.3 节“讨论”），$\mathrm{F}_{k+1}(X)$ 上的连续函数总具有 q-温和的持久同调 [16, 定理 2.22]。因此，我们可以在赋予瓶颈距离的图的度量空间中考察持久图 $\mathrm{PH}_i(g_{\mathfrak{e}})$。由于根据定理 6.6，映射 PH 是从函数到图的空间的连续变换，$\mathrm{Vol}_k : C(X, \mathbb{R}^d) \to C(\mathrm{F}_{k+1}(S^1), \mathbb{R})$ 与 PH 复合后得到的 $\mathrm{PH}_i(g_{\mathfrak{e}})$ 是一个连续函数。

推论 6.7。$\mathrm{PH} \circ \mathrm{Vol}_k : C(X, \mathbb{R}^d) \to \mathbf{Dgm}$ 相对于$\mathbf{Dgm}$上的瓶颈距离连续，对于 X 可三角剖分的。

7 讨论与未来工作

本工作的动机是寻找一种嵌入环的几何描述子，它在 S^1 的微分同胚等内部对称性以及欧几里得变换等外部对称性下保持不变，并且在扰动下稳定。本文证明了弦距离变换 $\mathcal{T}$ 与持久同调 PH 的复合 $\mathrm{PH}\circ\mathcal{T}$ 具备这些理想性质。此外，我们刻画了对于一般位置的 C^2 和有限分段线性嵌入，映射 $\mathrm{PH}\circ\mathcal{T}$ 的行为，并表明这类持久图通常是温和的。在一般位置的情形下，我们还给出了产生持久图 $\mathrm{PH}\circ\mathcal{T}(\gamma)$中同调特征出生与消亡的临界点的几何描述，使应用该方法的实践者能够根据嵌入环的几何来解释 $\mathrm{PH}\circ\mathcal{T}(\gamma)$。虽然弦距离变换捕捉了与嵌入环上一对点相关的几何特征，我们表明它是体积变换的一个特例；体积变换是一种推广，能够捕捉与沿环的多个点相关的高阶几何信息。我们证明，嵌入于欧几里得空间的紧空间的体积变换也是连续且稳定的。

作为未来的工作，我们希望应用类似的莫尔斯理论方法，研究弦距离变换推广到其他空间和更高阶点配置的情形。弦距离变换的一个直接推广 S^1 是将其推广到 S^2的情形，其中二点有限子空间是一个流形$\mathbf{F}_2(S^2) = \mathbb{C}P^2$；我们预计，本文中的许多莫尔斯理论技术都可以轻松转用来分析该情形。然而，对于其他空间而言，由于有限子集空间仅在少数特定情形下是流形，因此会面临一些挑战（见定理 6.3）。尽管如此，我们仍可以采用类似的方法，结合分层莫尔斯理论 [29] 或近期针对CW复形提出的类似理论 [51]。最后，我们希望在现实世界的科学问题上检验这一方法，例如分析细胞形态、环状聚合物和类器官形状；在这些问题中，弦距离变换的临界点的可解释性以及我们描述子的 不变性，可能会对分类任务有所帮助。

致谢

James Binnie：本研究得到了由英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）实施的数学科学额外资助计划（EP/V521917/1）以及海尔布隆数学研究所的支持。Ka Man Yim 在英国研究与创新署未来领袖奖学金支持下开展了本项目的研究 [资助编号 MR/W01176X/1；首席研究员：J Harvey]，，随后又获得英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）“智能的数学基础：人工智能的‘埃尔朗根纲领’”项目的资助 [资助编号 EP/Y028872/1]。Otto Sumray 得到了 ELBE博士后研究员计划的支持。

作者感谢 David Hien 在有关这一主题的讨论中分享见解。James Binnie 和 Ka Man Yim 感谢 John Harvey 提出的周到建议。Ka Man Yim 还要感谢 John Harvey 和 Gesine Reinert 在学术指导方面给予的建议。

Morton 的构造： 2nd S^1的对称积

在本节中，我们通过构造证明 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 与莫比乌斯带 ¨同胚， $\mathcal{M}$借助 Morton 的构造 [48] Morton 的构造涉及导出万有覆盖 ˜e 的 $\mathbf{F}_2(S^1)$ ，其覆盖空间为一条无限条带 $[0,1]\times\mathbb{R}$，通过 ˜e 的 $S^1\times S^1$ 覆盖 $\mathbb{R}^2$：它们由一个交换图关联起来

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\tilde{q}\ /(\mathbb{Z}\rtimes S_2)} & [0,1]\times\mathbb{R} \\ \tilde{e}\downarrow\ /\mathbb{Z}^2 & & \bar{e}\downarrow\ /\mathbb{Z} \\ S^1\times S^1 & \xrightarrow{q\ /S_2} & \mathbf{F}_2(S^1) \end{array} \qquad \text{(eq. (20))}$$

该构造背后的主要思路是将连续商 $q\circ\tilde{e}$ 分解为另一对连续商 ¯e $\circ\,\tilde{q}$，其中 ¯e 是通过 $\mathbb{Z}$-作用于 $[0,1]\times\mathbb{R}$ 而得到的 M¨obius 带 $\mathcal{M}$ 的万有覆盖。

我们利用这一构造，根据 -覆盖 e : 的图册，构造出 $\mathbb{Z}$ ¯ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{R}\to$-覆盖 e 的 S^1 S^1 ¯ 图册。e 的图册使我们能够为 提供局部坐标，而它在 e 上诱导出的图册则能用 S^1 的局部坐标来表示 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 的局部坐标。我们将在后续章节中证明这一点。此处我们简要介绍构造此类图册所需的技术工具。我们分两步展开 Morton 的构造。首先，我们证明 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 可以表示为 $\mathbb{R}^2$ 关于半直积 $G=\mathbb{Z}^2\rtimes S_2$ 作用的商空间。接着，我们证明该商空间是两个商映射 ¯e $\circ\,\tilde{q}$ 的复合。第一个是 $\mathbb{R}^2$ 关于 G 的正规子群 $N\cong\mathbb{Z}\rtimes S_2$ 作用所得的商空间。这产生了一个与对角条带 $[0,1]\times\mathbb{R}$ 同胚的轨道空间 $\mathbb{R}^2/N$。第二个商是对角条带关于 $\mathbb{Z}$-作用的商空间，由此得到 M¨obius 带 $\mathcal{M}$ 的万有覆盖，如图 6 所示。

$\mathbf{F}_2(S^1)$ 作为.....的商空间 $\mathbb{R}^2$，通过 $\mathbb{Z}^2\rtimes S_2$ 回顾一下，$\mathbf{F}_2(S^1)$ 是环面 $q\colon S^1\times S^1\twoheadrightarrow\mathbf{F}_2(S^1)$ 在对称群 S_2 的作用下得到的商空间。由于环面本身是 $\mathbb{R}^2$ 在 $\mathbb{R}^2\twoheadrightarrow S^1\times S^1$ 下通过 $\mathbb{Z}^2$ 重覆盖作用得到的商空间，我们可以将 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 表示为商空间 $p\colon\mathbb{R}^2\twoheadrightarrow\mathbf{F}_2(S^1)$，它由将商映射 $\mathbb{R}^2\twoheadrightarrow S^1\times S^1$ 与 q 复合得到。回顾一下，商映射 ˜e := e $\times$e : $\mathbb{R}^2\twoheadrightarrow S^1\times S^1$ 由 e : $\mathbb{R}\to S^1$ 的乘积给出，其中

$$e(t)=e^{2\pi\imath t}. \tag{110}$$

沿着 [48], ，我们首先证明商映射 p 等价于 $\mathbb{R}^2$ 在半直积 $G=\mathbb{Z}^2\rtimes S_2$ 的作用下得到的商空间。群 G 的表示为

$$G=\langle\alpha_1,\alpha_2,\rho\mid\rho^2=e,\ \rho\alpha_1=\alpha_2\rho,\ \alpha_1\alpha_2=\alpha_2\alpha_1\rangle \tag{111}$$

其中，我们将 $\alpha_i=(t_i,e)$ 与 $\mathbb{Z}^2$ 的生成元对应起来，

$$t_1=(1,0),\ t_2=(0,1),$$

以及由生成元 r 生成的 $\rho=(0,r)$ $S_2=\langle r\mid r^2=e\rangle$。由于由 α_1,α_2 生成的 $\mathbb{Z}^2$ 是 G 的正规子群，我们可以将任意元素 $g\in G$ 唯一地表示为 $g=\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\rho^{k_3}$，其中 $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}$。

定义 G 在 $\mathbb{R}^2$ 上的一个作用。用 (x_1,x_2) 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的坐标，我们有

$$\alpha_1\cdot(x_1,x_2)=(x_1+1,x_2),\quad \alpha_2\cdot(x_1,x_2)=(x_1,x_2+1),\quad \rho\cdot(x_1,x_2)=(x_2,x_1). \tag{112}$$

因此，对于任意元素 $g=\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\rho^{k_3}$,

$$g\cdot(x_1,x_2)=(x_{r^{k_3}(1)}+k_1,x_{r^{k_3}(2)}+k_2). \tag{113}$$

我们将 $\mathbb{R}^2$ 在 G-作用 p' 下的商空间记为： $\mathbb{R}^2\twoheadrightarrow\mathbb{R}^2/G$。我们断言 $p'=p$ 在同胚意义下成立。直接计算可知，商映射 $p=q\circ$ ˜e : $\mathbb{R}^2\to\mathbf{F}_2(S^1)$ 将同一轨道上的点$G\cdot(x_1,x_2)$映射到同一点 $\{\mathsf{e}(x_1),\mathsf{e}(x_2)\}\in\mathbf{F}_2(S^1)$，而纤维 $p^{-1}(\{\mathsf{e}(x_1),\mathsf{e}(x_2)\})$ 恰好是

轨道 $G\cdot(x_1,x_2)$。因此，根据商映射的泛性质，我们有一个同胚 $\mathbf{F}_2(S^1)\approx\mathbb{R}^2/G$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\tilde{e}} & S^1\times S^1 \\ {\scriptstyle /G}\downarrow{\scriptstyle p'} & \xrightarrow[/\mathbb{Z}^2]{} & {\scriptstyle /S_2}\downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathbb{R}^2/G & \xrightarrow{\approx} & \mathbf{F}_2(S^1).\end{array} \tag{114}$$

此后，我们将 $\mathbf{F}_2(S^1)$ 和 $\mathbb{R}^2/G$ 交替使用。

对角表示 我们给出 G 的另一种表示。若定义 $\mu=\rho\alpha_1$ and $\nu=\alpha_1^{-1}\alpha_2$，则可以写成

$$G=\langle\mu,\nu,\rho\mid\rho^2=e,\ \nu\rho\nu=\rho,\ \mu\rho=\rho\nu\mu\rangle \tag{115}$$

从 G 的这种表示可以看出，我们可以将 G 写成另一种半直积 $G\cong N\rtimes H$，其中 $N=\mathbb{Z}\rtimes S_2=\langle\nu,\rho\mid\nu\rho\nu=\rho\rangle$ 和 $G/N=H\cong\langle\mu\rangle\cong\mathbb{Z}$。我们还可以将 G 中的任意元素唯一地写成 $g=\mu^{n_1}\nu^{n_2}\rho^{n_3}$。

考虑 N 在 $\mathbb{R}^2$ 上的作用。通过考察 G-作用如何作用于 N-轨道，我们将 N 的作用与 G 的完整作用联系起来。G 在 N-轨道 $(N\cdot x)\subset\mathbb{R}^2$ 上的作用是一个良定义映射，它将 N-轨道映射到 N-轨道，因为 N 是 G 的正规子群，这意味着

$$g\cdot(N\cdot x)=N\cdot(g\cdot x). \tag{116}$$

此外，$\mathbb{R}^2/N$ 上的作用由$H\cong\langle\mu\rangle$的作用给出：因为我们可以将 G 的任意元素写成$g=\mu^k n$，其中 $n\in N$，所以 g 的作用将

$$g\cdot(N\cdot x)=\mu^k\cdot(N\cdot x)=N\cdot(\mu^k\cdot x). \tag{117}$$

这意味着，G在 N-轨道上的作用是一个 $\mathbb{Z}$作用。此外，由于 $\langle\mu\rangle\cap N=e$，当 $k\neq0$时，$\mu^k\cdot x$ 的 N-轨道与 x 的轨道不同，因此 $\mathbb{Z}$在 $\mathbb{R}^2/N$上是自由作用。此后，我们将$\mathbb{Z}$在 $\mathbb{R}^2/N$ 上的作用记为

$$k\star(N\cdot x):=\mu^k\cdot(N\cdot x). \tag{118}$$

由于 $\mathbb{Z}$在 N-轨道上的作用将 $\mathbb{R}^2$中的 $N\cdot x$映至 $G\cdot x$，所以 $\mathbb{Z}$作用与 N作用的复合就是 $\mathbb{R}^2$上的 G作用：

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathbb{R}^2/N & \xrightarrow[/\mathbb{Z}]{} & \mathbb{R}^2/G\end{array}\quad. \tag{119}$$

无限条带与莫比乌斯带的 $\mathbb{R}$ **"** $\mathbb{R}^2/N$ $[0,1]\times$ **莫比乌斯带** 现在我们证明轨道空间与以下空间同胚：$=[0,1]\times\mathbb{R}$。考虑生成元 $\mu,,\nu,G,\rho$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的作用。如果进行坐标变换$u=x_2-x_1$和 $v=x_1+x_2$，生成元 μ,ν,ρ的作用可表示为

$$\mu\cdot(u,v)=(1-u,v+1),\quad \nu\cdot(u,v)=(u+2,v),\quad \rho\cdot(u,v)=(-u,v). \tag{120}$$

由于 N由 ν和 ρ生成，其作用仅限于平凡丛 v 中的纤维 $v^{-1}(c)\approx\mathbb{R}$：$\mathbb{R}^2\twoheadrightarrow\mathbb{R}$，因为 ν和 ρ的作用保持 v坐标不变，只会平移用于参数化纤维 $v^{-1}(c)$的 u坐标。此外，每个纤维 $v^{-1}(c)$上的作用都与 c无关。将 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$写成第一因子为参数化纤维 $v^{-1}(c)$的 u坐标、第二因子为 v坐标的形式，我们便可将 N-轨道空间表示为

$$\mathbb{R}^2/N=\mathbb{R}/N\times\mathbb{R}.$$

读者可以验证，在每个纤维 $u \in [0,1]$ 中满足 $v^{-1}(c)$ 的子集是 N作用的基本域。事实上， [48,引理 1 和 2]表明 $[0,1] \approx \mathbb{R}/N$，并且我们有一个同胚

$$\zeta : [0,1] \times \mathbb{R} = u^{-1}[0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2/N = \mathbb{R}/N \times \mathbb{R} \tag{121}$$

正向映射 ζ将 $x \in u^{-1}[0,1]$ 映到 $N \cdot x$，其逆映射 ζ^{-1} 则将轨道 $N \cdot x$ 映到它与 $u^{-1}[0,1]$的唯一交点。

接下来我们 考虑 $[0,1] \times \mathbb{R}$上的 $\mathbb{Z}$-作用，其定义为 $k \star x := \zeta^{-1}(k \star \zeta(x))$：对于 $(u,v) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ ，

$$\begin{aligned} 1 \star (u,v) &= \zeta^{-1}(1 \star \zeta(u,v)) = \zeta^{-1}(1 \star (N \cdot (u,v))) = \zeta^{-1}(N \cdot (\mu \cdot (u,v))) \\ &= \zeta^{-1}(N \cdot (1-u, v+1)) = (1-u, v+1). \end{aligned} \tag{122}$$

注意到 $1 \star (u,v) \in [0,1] \times \mathbb{R}$，因此 $[0,1] \times \mathbb{R}$ 上的 $\mathbb{Z}$-作用是良定义的。此外， $\mathbb{Z}$-作用即为滑移反射；生成元 1 的作用限制为纤维 $v^{-1}(c) \cap u^{-1}[0,1]$ 与 $v^{-1}(c+1) \cap u^{-1}[0,1]$之间的一个同胚，其中 u 坐标在其像中被反射 $u \mapsto 1-u$。由此 $\bar{\mathbf{e}}$ 关于此 $\mathbb{Z}$- 作用的商空间 $[0,1] \times \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ 恰为莫比乌斯带 $\mathbf{M}$¨ $\mathcal{M}$。这意味着 $(\mathbb{R}^2/N)/\mathbb{Z} \approx ([0,1] \times \mathbb{R})/\mathbb{Z} = \mathcal{M}$。此外， $\bar{\mathbf{e}}$ 是莫比乌斯带的万有覆盖。

既然我们还证明了$\mathbf{F}_2(S^1) \approx \mathbb{R}^2/G$ 在式（114）中，以及 $\mathbb{R}^2/G \approx (\mathbb{R}^2/N)/\mathbb{Z}$ 在式（119）中，那么我们就得到了一系列同胚，证明二点有限子集空间与莫比乌斯带同胚：

$$\mathbf{F}_2(S^1) \approx \mathbb{R}^2/G \approx (\mathbb{R}^2/N)/\mathbb{Z} \approx ([0,1] \times \mathbb{R})/\mathbb{Z} = \mathcal{M}. \tag{123}$$

合并并概述交换图方程 (114) 和 (119)，我们得到一个 纤维丛态射 $\tilde{q} : \tilde{} \quad \bar{} e \to e$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[/(\mathbb{Z} \rtimes S_2)]{\tilde{q}} & u^{-1}[0,1] \\ \tilde{e}\downarrow & & \downarrow \bar{e} \\ /\mathbb{Z}^2 & & /\mathbb{Z} \\ S^1 \times S^1 & \xrightarrow[/S_2]{q} & \mathbf{F}_2(S^1) \end{array} \qquad \text{(eq. (20))}$$

参考文献

[1] Dean C. Adams、F. James Rohlf 和 Dennis E. Slice。几何形态计量学：继“革命”之后十年的进展。意大利动物学杂志，71(1):5–16，2004年。[2] Johann Adem、Alejandro Leida 和 Yongbin Ruan。轨形与弦拓扑。剑桥大学出版社，2009年。[3] A. A. Agrachev、D. Pallaschke 和 S. Scholtes。关于分段光滑函数的莫尔斯理论。动力与控制系统杂志，3(4):449–469，1997年。[4] Dashti Ali、Aras Asaad、Maria-Jose Jimenez、Vidit Nanda、Eduardo Paluzo-Hidalgo 和 Manuel Soriano- Trigueros。拓扑数据分析中向量化方法综述。*IEEE*模式分析与机器智能汇刊，45(12):14069–14080，2023年12月。[5] Charles Arnal、David Cohen-Steiner 和 Vincent Divol。一般子流形距离函数的临界点。*arXiv*预印本 *arXiv:2312.13147*，2023年。[6] David Ayala、John Francis 和 Hiro Lee Tanaka。分层空间上的局部结构。数学进展，307:903–1028，2017年。[7] Thomas Banchoff。嵌入多面体的临界点与曲率。微分几何杂志，1(3-4):245–256，1967年1月。[8] Augustin Banyaga 和 David Hurtubise。莫尔斯同调讲义。数学科学丛书。施普林格，纽约，2004年版，2004年10月。[9] Sven G. Bartels、Ludwig Kuntz 和 Stefan Scholtes。线性函数的连续选取与非光滑临界点理论。非线性分析：理论、方法与应用，24(3):385–407，1995年。[10] Ulrich Bauer、Michael Kerber、Fabian Roll 和 Alexander Rolle。函子化神经定理及其变体的统一视角。数学论述，41(4):125503，2023年。[11] Katherine Benjamin、Lamisah Mukta、Gabriel Moryoussef、Christopher Uren、Heather A Harrington、Ulrike Tillmann 和 Agnese Barbensi。同源打结蛋白质的同调。英国皇家学会界面杂志，20(201):20220727，2023年4月。[12] Jean-Daniel Boissonnat、Andr′e Lieutier 和 Mathijs Wintraecken。可达半径、度量畸变、测地凸性与切空间的变化。《应用与计算拓扑学期刊》，3(1):29–58，2019年。[13] Yossi Bokor Bleile、Pooja Yadav、Patrice Koehl 和 Florian Rehfeldt。持久图作为细胞的形态学特征：一种测量和比较群体内细胞的方法。*PLOS*计算生物学，22(1):e1013890，2026年。[14] Karol Borsuk 和 Stanislaw Ulam。关于拓扑空间的对称积。美国数学会通报，37(12):875–882，1931年12月。[15] R. Bott。关于 S1 的第三对称幂。数学基础，39，1952年。[16] Frederic Chazal、Vin de Silva、Marc Glisse 和 Steve Y Oudot。持久模的结构与稳定性。施普林格数学简明丛书。施普林格国际出版，瑞士沙姆，第一版，2016年10月。[17] Frank H Clarke。广义梯度及其应用。美国数学会汇刊，205:247–247，1975年。[18] Frank H Clarke。优化与非光滑分析。工业与应用数学学会，1990年。[19] Frederick R. Cohen。构形空间及其应用导论，第183–261页。世界科学出版公司，2009年。

[20] David Cohen-Steiner、Herbert Edelsbrunner 和 John Harer。持久性图的稳定性。《离散计算几何》，37(1):103–120，2007年1月。[21] James Damon。偏微分方程解的一般性质。《理性力学与分析档案》，140(4):353–403，1997年。[22] J-P Eckmann、S Oliffson Kamphorst 和 D Ruelle。动力系统的递归图。载于《湍流、奇异吸引子与混沌》，第441–445页。WORLD SCIENTIFIC，1995年9月。[23] Herbert Edelsbrunner 和 John Harer。《计算拓扑学：导论》。美国数学学会，2010年。[24] Herbert Edelsbrunner、John Harer 等。持久同调：综述。《当代数学》，453(26):257–282，2008年。[25] Herbert Federer。曲率测度。《美国数学学会汇刊》，93(3):418–491，1959年。[26] Ulderico Fugacci、Claudia Landi 和 Hanife Varlı。PL 临界集与离散莫尔斯理论：一种对应关系。《计算机图形学》，90:43–50，2020年8月。[27] Robert Ghrist。机器人学中的图上构形空间与辫群。arXiv预印本 math/9905023，1999年。[28] Martin Golubitsky 和 Victor Guillemin。《稳定映射及其奇异性》，第14卷。Springer Science & Business Media，2012年。[29] Mark Goresky 和 Robert MacPherson。《分层莫尔斯理论》。数学成果丛书。第3辑。施普林格，德国柏林，1988年版，1988年2月。[30] J. C. Gower。广义Procrustes分析。《心理测量学》，40(1):33–51，1975年3月。[31] Olympio Hacquard 和 Vadim Lebovici。用于拓扑数据分析的欧拉示性数工具。《机器学习研究杂志》，25:1–39，2024年7月。[32] D. Handel。拓扑空间有限子集空间的一些同伦性质。《休斯敦数学杂志》，2000年。[33] Allen Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，2002年。[34] David Thomas Hien。《用于分析采样动力学中递归的拓扑特征》。博士论文，慕尼黑工业大学，2025年。[35] Morris W Hirsch。《微分拓扑》，第33卷。Springer Science & Business Media，2012年。[36] Takashi Ichinomiya。使用持久同调对时间序列数据进行机器学习。《科学报告》，15(1):20508，2025年。[37] Ilse C. F. Ipsen 和 Rizwana Rehman。行列式与特征多项式的扰动界。《SIAM矩阵分析与应用杂志》，30(2):762–776，2008年。[38] Sadok Kallel。《点的构形空间：使用指南》。arXiv预印本 arXiv:2407.11092，2024年。[39] Sadok Kallel 和 Denis Sjerve。关于有限子集空间的评述。《同调、同伦与应用》，11(2):229–250，2009年。[40] Ben Knudsen。《代数拓扑中的构形空间》。arXiv预印本 arXiv:1803.11165，2018年。[41] Andreas Kriegl 和 Peter W Michor。《整体分析的便利框架》，第53卷。美国数学学会，1997年。

[42] Frank P Kuhl 和 Charles R Giardina。闭合轮廓的椭圆傅里叶特征。计算机图形学与图像处理，18(3):236–258，1982年。[43] J¯anis Lazovskis。Ran 空间的单连通性。*arXiv*预印本 *arXiv:2602.09815*，2026年。[44] Jacob Lurie。《高阶代数》，2017年。预印本。[45] Marco Mazzucchelli。拉格朗日系统的临界点理论。数学进展。施普林格，瑞士巴塞尔，2012年版，2011年11月。[46] Mark D Meyerson。平衡操作。载于拓扑学论文集，第6卷，第59–75页，1981年。[47] John Milnor。莫尔斯理论（*AM-51*），第*51*卷。数学年刊研究丛书。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1963年5月。[48] H R Morton。圆的对称积。《剑桥哲学学会数学论文集》，63(2):349–352，1967年4月。[49] Marian Mrozek 和 Thomas Wanner。组合多向量场的动力学。载于组合拓扑动力学中的连接矩阵，第105–118页。施普林格，2025年。[50] Elizabeth Munch。欧拉示性数变换简介。《美国数学月刊》，132(1):15–25，2025年。[51] Vidit Nanda 和 Francesca Tombari。胞腔复形的分层莫尔斯理论。*arXiv*预印本 *arXiv:2601.18343*，2026年。[52] Liviu I Nicolaescu。《莫尔斯理论导论》。大学文本丛书。施普林格，纽约，纽约州，第2版，2011年11月。[53] Mark Nixon 和 Alberto Aguado。《计算机视觉中的特征提取与图像处理》。爱思唯尔，英国牛津，2012年。[54] Christopher Tuffley。s1 的有限子集空间。代数与几何拓扑，2(2):1119–1145，2002年。[55] Christopher Tuffley。图与带孔曲面的有限子集空间。代数与几何拓扑，3(2):873–904，2003年。[56] Christopher Tuffley。图与曲面的有限子集空间，博士论文，2003年。[57] Katharine Turner、Sayan Mukherjee 和 Doug M. Boyer。用于形状与曲面建模的持久同调变换。《信息与推断：*IMA*期刊》，3:310–344，2014年。[58] Katharine Turner、Vanessa Robins 和 James Morgan。带边界流形的扩展持久同调变换。《应用与计算拓扑学期刊》，8(7):2111–2154，2024年。[59] H Vaughan。矩形与简单闭曲线。讲座，大学，1977年。[60] C T C Wall。正则分层。载于数学讲义，数学讲义，第332–344页。施普林格柏林海德堡，德国海德堡，1975年。[61] Haochen Yang、Vadim Lebovici、Andreas Tarcevski、Liliana Tchernev、Saulius Zuklys、Georg A Holl¨ander、Helen M Byrne 和 Heather A Harrington。胸腺结构的拓扑形状变换。*arXiv*预印本 *arXiv:2602.18889*，2026年。