arXiv:2603.17147v1 [math.CA] 17 Mar 2026

海森堡群中的芬纳型不等式

KAIYI HUANG

Abstract. 我们完全刻画了涉及海森堡群中垂直投影的某些多线性类 Radon 变换的 L^p-有界性范围。

1. Introduction

在 [15], 中，Finner 刻画了该多线性形式的 L^p-有界性范围

$$\mathcal{M}(f_1,\dots,f_M) \coloneqq \int_{\Sigma}\prod_{j=1}^{M} f_j\circ\pi_j(x)dx, \tag{1.1}$$

其中 $\Sigma=\mathbb{R}^n$ 和 π_j 为坐标投影，即到由标准基的某些子集张成的子空间上的正交投影（这样的子空间称为坐标子空间）。这已被推广到 Brascamp–Lieb 不等式，其中 π_j 为任意线性满射 [2, 3] （另见 [25]）。

与此同时，如何刻画广义多线性 Radon 型变换 $\mathcal{M}$ 的 L^p-有界性范围，已引起广泛关注；其中 Σ 是黎曼流形，且 π_j 是非线性的。特别值得关注的是，集合 $\{\pi_j\}_{j=1}^m$ 在 [7, 31, 30], 意义下呈现“曲率”，从而可能比 π_j 为线性时得到更好的估计。受这些问题启发，我们改进了 [24] 中的若干结果，并证明了海森堡群背景下的 Finner 不等式类比，完全刻画了 $\mathcal{M}$ 的 L^p-有界性范围，其中 $\Sigma=\mathbb{H}^n$ 是海森堡群，而 π_j 是垂直投影，其线性部分为坐标投影。海森堡群 $\mathbb{H}^n=(\mathbb{R}^{2n+1},\bullet)$ 是一个 $(2n+1)$ 维欧几里得空间，并赋有一种非阿贝尔群运算 $\bullet$，其定义为

$$(x,y,t)\bullet(x',y',t')=(x+x',y+y',t+\tfrac{1}{2}(x\cdot y'-y\cdot x')), \tag{1.2}$$

其中 (x,y,t)，$(x',y',t')\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$。与 $\mathbb{R}^{2n}$ 的任意子空间 V 相关联的垂直投影 $\pi_V\colon \mathbb{H}^n\longrightarrow V\times\mathbb{R}$定义为

$$\pi_V(x,y,t)\coloneqq(x,y,t)\bullet((x,y)_{V^\perp},t)^{-1}, \tag{1.3}$$

其中 $(x,y)_{V^\perp}$ 是 $(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}$ 在 V的正交补 $V^\perp$中的正交分量。 $\mathbb{H}^n$ 上唯一（相差一个比例因子）的左 Haar 测度是 $\mathbb{R}^{2n+1}$上的勒贝格测度。

尽管在 π_j 为余秩 1（即，π_j 的纤维为 1 维） [6, 31, 30, 11], 的情形下，广义多线性 Radon 型变换的界已得到充分理解，但对于任意余秩的情形，我们在很大程度上仍束手无策，部分原因在于这些纤维可能以复杂的方式相互作用。本文将介绍解决这一问题的新工具。

令 n, m, M为正整数，且满足 $m < M$。设给定 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标子空间 V_1、.....、V_M及其相应的正交补 $K_j = V_j^{\perp}$。令 $L_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_j$ 为到 V_j 上的正交投影，其中每个 j均如此。对于每个$x \in \mathbb{R}^n$，令 x_{K_j} 表示其在 K_j中的正交分量。本文考虑 (1.1) 的一个类比，其中 $\Sigma = \mathbb{H}^n$ 以及垂直投影

$$\pi_j(x,y,t) \coloneqq \begin{cases} (L_j x, y, t + \frac{1}{2} x_{K_j} \cdot y_{K_j}), & 1 \le j \le m, \\ (x, L_j y, t - \frac{1}{2} x_{K_j} \cdot y_{K_j}), & m < j \le M. \end{cases} \tag{1.4}$$

我们的主要结果如下：

定理 1.1。对于形如 *(1.4)* 的 π_j，存在一个仅依赖于 n、π_j、p_j 的 $0 < C < \infty$，使得

$$\mathcal{M}(f_1, \dots, f_M) \le C \prod_{j=1}^{M} \|f_j\|_{L^{p_j}} \tag{1.5}$$

当且仅当对所有 $1 \le j \le M$ 都有 $p_j \in [1, \infty]$ 时，对于具有紧支集的连续函数 f_1、.....、f_M，该式一致成立，并且

$$n + 1 = \sum_{j=1}^{m} \frac{\dim V_j + 1}{p_j} + \sum_{j=m+1}^{M} \frac{n+1}{p_j}, \tag{A}$$

$$\dim V + 1 \le \sum_{j=1}^{m} \frac{\dim V_j \cap V + 1}{p_j} + \sum_{j=m+1}^{M} \frac{\dim V + 1}{p_j} \tag{B}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\dim K_i \cap V}{p_i} = \sum_{j=m+1}^{M} \frac{\dim K_j \cap V}{p_j}, \tag{C}$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 的任意坐标子空间 V。

注记。尽管 (*A*) 和 (*B*) 中关于 $\{p_j\}_{j=1}^{m}$ 和 $\{p_j\}_{j=m+1}^{M}$ 的条件看起来并不对称，但 (*C*) 进一步意味着，对于 $\mathbb{R}^n$ 的每个坐标子空间 V，

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\dim V_j \cap V + 1}{p_j} + \sum_{j=m+1}^{M} \frac{\dim V + 1}{p_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\dim V + 1}{p_j} + \sum_{j=m+1}^{M} \frac{\dim V_j \cap V + 1}{p_j}.$$

2. Prior results and innovation

2.1. 历史概述。对于一般的 π_j，关于寻找满足下式的 p_j，已有悠久的历史：

$$\mathcal{M}(f_1, \dots, f_M) \le C \prod_{j=1}^{M} \|f_j\|_{p_j} \tag{2.1}$$

对某些仅依赖于 Σ, π_j, p_j 的正常数 C，该式对 f_j 一致成立。本节回顾与我们的问题最直接相关的一些既有文献。

当 π_j 是线性满射时，(2.1) 已得到充分研究。例子包括 H¨older 不等式[29, 23], 、Loomis–Whitney 不等式[27], 和 Finner 不等式[15]。这方面的研究最终 culminates 于 Brascamp–Lieb

不等式[4, 2, 3, 25], ，该不等式涉及欧几里得空间中任意数量的线性满射 π_j ，并刻画了使得(2.1)成立的 p_j 。

既然线性情形已经彻底解决，研究非线性情形便顺理成章。沿着这一方向有两条研究路线。如果对线性满射 π_j进行扰动，那么 L^p 的 $\mathcal{M}$ 不等式仍然成立，正如 [1]所示。然而，扰动可能会引入 [7, 31, 30], 意义下的“曲率”，这在某些情况下可能带来新的不等式，不过目前尚未建立一般理论。

当 π_j 的纤维是曲线时，我们称π_j 具有 余秩 1。对于余秩 1 情形，(1.5) 的有界性已证明至端点[6, 31, 30], ；当 X_j 满足某些幂零条件且具有次数有界的多项式积分流时，端点情形也已得到解决[11]。此外，Hickman 在 [22] 刻画了一类沿曲线的膨胀平均算子的 L^p-有界性。

除了某些特殊情形（见 [9, 16, 17, 18, 19, 20]）外，对于余秩任意的 p_j 当 π_j ，目前仍不清楚应如何刻画。 [9] 引入了一种膨胀映射来处理维数不匹配。Gressman 将一类多线性类 Radon 变换的变体转化为次水平集估计问题，并借鉴几何不变理论的思想，证明了一类具有混合余秩的双线性类 Radon 变换[27, 19, 20]。此外，Duncan 在 [12] 中证明了一类处于缩放直线上的代数 Brascamp–Lieb 不等式。

真正非线性的 Brascamp–Lieb 型不等式源于向量场的不交换性，而这些向量场的积分流在 π_j 下保持不变。 [31] 提出，应当研究幂零李群等模型情形，其中海森堡群是最简单的非平凡情形。（关于类 Radon 变换与海森堡群之间的更多联系，见 [24] 。） [14] 和 [32] 分别在海森堡群和余秩 1 Carnot 群中表述并证明了 Loomis–Whitney 不等式；这两种情形仍属于余秩 1 的情况。在 [24], 中，作者研究了（1.5）的一个对称版本，称为 $\mathbb{H}^n$ 中的 Brascamp–Lieb 不等式，其中 π_j 的余秩可以任意。文中给出了充分条件和必要条件，但一般而言二者并不相同。充分性的证明通过改造一种归纳论证实现，该论证依赖于 [2, 3] 中的“临界子空间”。去掉对称性假设后，我们发现，归纳法的基础情形由一类新的多线性类 Radon 变换构成。目前没有现成的方法可以直接研究这些形式，因此需要新的思路。

2.2. **论文创新点**。 在既有文献中，证明强型不等式 (2.1)的一种常见方案是从限制弱型不等式开始

$$|\Omega| \lesssim \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}} \tag{2.2}$$

然后，我们研究满足以下条件的(2.2)的拟极值函数的几何结构

$$|\Omega| \geq \varepsilon \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{2.3}$$

通常，这样的 Ω 可以用 Carnot–Carath´eodory 球（本文称为抛物球）来逼近。这些球是次黎曼背景下椭球的类似物。最后，通过用几乎不相交的抛物球逼近$\mathcal{M}($ f_1，……， f_M)，我们可以得到 (2.1)。（见 [6, 31, 30, 9, 11]。）

然而，在我们的背景下，即使证明 (2.2) 也十分困难。混合余秩（即 $\ker D\pi_j$ 变化）往往会导致 π_j 纤维（即 $\ker D\pi_j \cap \ker D\pi_{j'} \neq 0$）之间出现非平凡的交。因此，很难构造一个从 π_j 纤维的“乘积”集到 Ω 的乘积集的“近似”微分同胚，而这正是上述文献中常用的技巧。

本文首先通过引入一些具有以下性质的辅助映射 $\widetilde{\pi}_j$（见第 5 节），研究一类“正则”集合（见第 10 节）：

(1) $\widetilde{\pi}_j$ 具有嵌套核，也就是说，对于每个 j，$\ker d\widetilde{\pi}_j$ 是 $\ker d\widetilde{\pi}_{j+1}$ 的真子空间。(2) 将 π_j 限制在 $\widetilde{\pi}_j$ 的纤维上后，得到的是坐标投影。

得益于嵌套核，通过 $\widetilde{\pi}_j$ 的纤维构造近似微分同胚要容易得多（见第 8 节）。因此，我们首先证明涉及 $\widetilde{\pi}_j$ 的“正则”集合所满足的限制弱型不等式：

$$|\Omega| \lesssim \prod_{j=1}^{M} |\widetilde{\pi}_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{2.4}$$

然后，我们将注意力转向 $\widetilde{\pi}_j$ 的纤维，在这些纤维上，π_j 本质上是坐标投影。我们推广 Finner 不等式[15] 中关于坐标投影的结论，从而由 (2.4) 推出 (2.2)（见第 6 节）。在“正则”集合这一类中，我们用抛物球逼近 (2.3) 中的拟极值函数，并将一般可测集划分为对应于不同 ε 的准极值“正则”集合。借鉴 [9], 中的方法，我们得以证明一般 Ω 满足 (2.2)。再一次采用这一方案，最终可以得到 (2.1)。

希望这种方法能够应用于海森堡群之外的情形。

概要。 第 3 节中，我们介绍定理 3.1——定理 1.1 一个表面上较弱的版本，并通过一些例子概述其证明。第 4 节中，我们假设定理 3.1 成立，并通过归纳法证明定理 1.1。为证明定理 3.1，我们从关于可测集示性函数的限制弱型不等式入手。首先，我们在第 5 节介绍一类具有嵌套核的辅助映射$\widetilde{\pi}_j$ 以及其他记号。为说明这一做法的动机，我们回顾 Finner 不等式，并在第 6 节证明其一个推广版本。第 7 节中，我们通过修剪 $\Omega \cap \widetilde{\pi}_j^{-1}(z)$ 来细化 Ω。第 8 节中构造一个近似微分同胚膨胀映射。估计膨胀映射的像的一个关键要素，是用椭球逼近任意集合；这将在第 9 节介绍。第 10 节中，我们引入半正则集、正则集和准极值集合的概念。第 11 节中，我们利用膨胀映射证明半正则集的限制弱型不等式。第 12 节中，我们引入抛物球的概念；其一项重要性质是，如果两个抛物球的π_j 像或 $\widetilde{\pi}_j$ 纤维差异悬殊，那么它们几乎不相交。同一节中，我们用抛物球逼近准极值正则集。第 13 节介绍一种二进制方案，用于对几乎不相交的集合求和。第 14 节的第一部分通过对几乎不相交的正则集求和，得到准极值半正则集的类抛物球结构；本节第二部分通过对几乎不相交的准极值半正则集求和，证明任意可测集的限制弱型不等式，其一个副产品是所有准极值集合都可以用抛物球逼近；最后一部分则通过对几乎不相交的准极值集合求和，将限制弱型不等式推广为针对一般函数的强型不等式

通过对几乎互不相交的准极值集合求和，将不等式推广为关于一般函数的强型不等式。

记号。设 V，W 是两个向量空间。若 V 是 W 的子空间，我们记作 $V \leq W$；若 V 是 W 的真子空间，则记作 $V < W$。若 $V \leq \mathbb{R}^d$，则用 $V^\perp$ 表示 V 在 $\mathbb{R}^d$ 中的正交补。对于 $x \in \mathbb{R}^d$，分别用 x_V，$x_{V^\perp}$ 表示 V，$V^\perp$ 中满足 $x = x_V + x_{V^\perp}$ 的唯一元素。

对于 $1 \leq j \leq M$，令 $V_j \leq \mathbb{R}^n$，并令 $L_j\colon\ \mathbb{R}^n \longrightarrow V_j$ 为第1节中所述的正交投影。我们记 $\dim V_j$ 为 $n_j =$，$\ker L_j$ 为 $K_j = V_j^\perp =$，$\dim K_j$ 为 $k_j =$。

$A \lesssim B$（分别为 $A \gtrsim B$）表示 $A \leq CB$（分别为 $A \geq CB$），其中某个有限常数 $C > 0$ 仅依赖于 n，π_j，p_j。

对于 $x \in \mathbb{R}^d$，$|x|$ 表示其欧几里得范数。假设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是自然嵌入到 $\mathbb{R}^d$ 中的 $\mathbb{R}^k$ 的一个勒贝格可测子集，其中 $k \leq d$。那么，对于 $k > 0$，$|E|_k$表示其 k维勒贝格测度。$|\cdot|_0$ 表示计数测度。上下文明确时，我们可以放心地省略下标 k。

对于任意集合 S，$\#S$ 表示 S的基数。

致谢。本研究部分得到了美国国家科学基金会 DMS-2246906、威斯康星校友研究基金会（WARF）、Bung-Fung Lee Torng 研究生暑期奖学金基金（112550007）以及威斯康星大学麦迪逊分校数学希施费尔德奖学金的资助。作者谨此感谢导师 Betsy Stovall 向她介绍这一课题，在讨论问题时慷慨地拨出时间，仔细阅读手稿的多个版本，并提出许多有助于提升其可读性的建议。作者还要感谢 Philip Gressman 对手稿早期版本提出的宝贵意见。

3. Proof overview

本节概述定理 1.1 的证明。由于必要性的证明可以很容易地从 [24]，改编而来，本文省略该证明。我们将按照 [2, 3, 24] 对 n, M 使用归纳法证明充分性。基础情形包含在下面这个表面上更弱的结果中：

定理 3.1。沿用定理 *1.1* 中的记号，假设 $(p_1, \dots, p_M) \in ([1,\infty] \cap \mathbb{Q})^M$，并且

$$n+1 = \sum_{j=1}^{m} \frac{\dim V_j + 1}{p_j} + \sum_{j=m+1}^{M} \frac{n+1}{p_j}, \tag{A}$$

$$\dim V + 1 < \sum_{j=1}^{m} \frac{\dim V_j \cap V + 1}{p_j} + \sum_{j=m+1}^{M} \frac{\dim V + 1}{p_j}, \tag{$\widetilde{B}$}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\dim K_i \cap V}{p_i} = \sum_{j=m+1}^{M} \frac{\dim K_j \cap V}{p_j}, \tag{C}$$

对于任意真坐标子空间 $V < \mathbb{R}^n$。于是

$$\mathcal{M}(f_1, \dots, f_M) \leq C \prod_{j=1}^{M} \|f_j\|_{L^{p_j}} \tag{3.1}$$

对于所有连续紧支撑函数 $f_1, \dots, f_M$，存在某个有限常数 $C > 0$，它仅依赖于 n, π_j, p_j。

我们对定义 (1.4) 作一项技术性修改：将每个 π_j 的最后一个坐标中的 $x \cdot y$ 替换为 $x_{K_j} \cdot y_{K_j}$。从现在起，π_j 指的是：

$$\pi_j(x,y,t) \coloneqq \begin{cases} (L_j x, y, t + \frac{1}{2} x \cdot y), & 1 \le j \le m, \\ (x, L_j y, t - \frac{1}{2} x \cdot y), & m < j \le M. \end{cases} \tag{3.2}$$

由 (1.4) 和 (3.2) 给出的 π_j 所对应的不等式 (3.1) 是等价的。对 f_j 的定义域作变量替换即可看出这一点，在该替换下，$\|f_j\|_{p_j}$ 保持不变。

我们的第一步是证明以下限制弱型不等式

$$|\Omega| \lesssim \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}} \tag{3.3}$$

对于有界勒贝格可测集 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$。这是 (3.1) 的一个特例，其中 f_j 是示性函数。一旦得到限制弱型不等式，就可以利用 (3.3) 的准极值函数的几何性质以及细致的二进分析，推出强型不等式 (3.1)（见 [9]）。我们想指出，多线性类 Radon 变换存在一些例子，它们仅满足限制型弱型不等式，而不满足强型不等式（见 [11]）；但我们的情形并非如此。

3.1. **例子**。基础情形涉及一大类多线性类 Radon 变换，而这些变换此前似乎尚未得到系统研究。在每种情形下，条件（A）-（C）确定唯一的 M 元组（p_1、……、p_M），它也属于$\widetilde{\ }$（B）。我们不知道如何直接应用已有方法得到（3.3）。为便于说明，我们在此列出基础情形的四个例子。接下来，我们将概述其中两个例子的证明，以便读者更清楚地看到其中的新思路。首先介绍某些向量场的“权重”这一概念：

定义3.2。设 m、M、n 为正整数，且满足 $m < M$，并设 π_1、……、π_M如（3.2）中所定义。设 X 为一个向量场，其积分流在某个 π_j 下保持不变；或者等价地，$X \in$处处属于核 $D\pi_j$。设 $\mathbf{p} \in [1,\infty]^M$。那么，$X$ 关于$\mathbf{p}$的权重定义为

$$w(X) \coloneqq \sum_{j : X \in \ker D\pi_j} \frac{1}{p_j}. \tag{3.4}$$

例 3.3. 设 $\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{R}^5$、$m = 2, M = 3$。令

$$\pi_j(x,y,t) = \begin{cases} (x_2, y, t + \frac{1}{2} x \cdot y), & j = 1, \\ (x_1, y, t + \frac{1}{2} x \cdot y), & j = 2, \\ (x, t - \frac{1}{2} x \cdot y), & j = 3. \end{cases}$$

我们注意到，对于每个$j = 1,2$，π_j 的纤维由向量场 X_j 叶状分解；而 π_3的纤维则由向量场 Y_1, Y_2叶状分解，其中

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2} y_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial t}, \qquad j = 1, 2,$$

π_1	X_1		$p_1 = \frac{7}{3}$
π_2		X_2	$p_2 = \frac{7}{3}$
π_3	Y_1	Y_2	$p_3 = \frac{7}{3}$
$w(X_i) = w(Y_i)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	

TABLE 1. 此图展示了例 3.3 中的权重。我们在第 j行列出处处构成核 $D\pi_j$ 的一组基的向量场，并注意到对于不同的j，j'，核 $D\pi_j \cap$核 $D\pi_{j'} = 0$。这些向量场的权重相同。

它们生成 $\mathbb{H}^2$的左不变向量场李代数。通过直接计算，唯一的可容许指数——即满足条件（A）、（B）和（C）的指数——为 $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{7}{3}$（它们也满足（$\widetilde{B}$））。注意，对于不同的 j, j'，$\ker D\pi_j \cap \ker D\pi_{j'} = 0$，且 X_j, Y_j的权重相同：$w(X_j) = w(Y_j) = \frac{3}{7}$（见表1）。

例3.4。令 $\mathbb{H}^3 \simeq \mathbb{R}^7$，$m = 3$，$M = 4$。定义

$$\pi_j(x, y, t) = \begin{cases} (x_1, y, t + \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 1, \\ (x_2, y, t + \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 2, \\ (x_3, y, t + \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 3, \\ (x, t - \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 4, \end{cases}$$

在这种情况下，对于 $j = 1$，2，3，π_j 的纤维由 $\mathbf{X}_j$ 叶状分解，而π_4 的纤维由 Y_1，Y_2，Y_3 叶状分解，其中

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2}y_j\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2}x_j\frac{\partial}{\partial t}, \qquad j = 1, 2, 3,$$

生成 $\mathbb{H}^3$ 的左不变向量场李代数，并且 $\mathbf{X}_j$ 是来自 X_1、X_2、X_3 的一对向量场，其中不包含 X_j。唯一的可容许指数为（p_1、p_2、p_3、p_4）=（7_2、7_2、7_2、7_4）。注意，每个 $\bar{X}_j$ 都具有在两个 π_j 下不变的积分流，因此对于某个 $j \neq j'$ 有 $\ker D\pi_j \cap \ker D\pi_{j'} \neq 0$（见表2），但这些向量场的权重均等于 4_7。

例3.5. 令 $\mathbb{H}^4 \simeq \mathbb{R}^9$, $m = 3, M = 5$. 定义

$$\pi_j(x, y, t) = \begin{cases} (x_2, y, t + \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 1, \\ (x_3, y, t + \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 2, \\ (x_4, y, t + \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 3, \\ (x, y_1, t - \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 4, \\ (x, y_2, y_3, y_4, t - \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 5. \end{cases}$$

π_1		X_2	X_3	$p_1 = \frac{7}{2}$
π_2	X_1		X_3	$p_2 = \frac{7}{2}$
π_3	X_1	X_2		$p_3 = \frac{7}{2}$
π_4	Y_1	Y_2	Y_3	$p_4 = \frac{7}{4}$
$w(X_i) = w(Y_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	

TABLE 2. 这张图展示了例3.4中的权重。我们在第 j行列出处处构成 ker $D\pi_j$的一组基的向量场，并注意到，对于某个$j \neq j'$，ker $D\pi_j \cap \ker D\pi_{j'} \neq 0$。所有向量场的权重都相等。

π_1	X_1		X_3	X_4	$p_1 = \frac{31}{5}$
π_2	X_1	X_2		X_4	$p_2 = \frac{31}{5}$
π_3	X_1	X_2	X_3		$p_3 = \frac{31}{5}$
π_4		Y_2	Y_3	Y_4	$p_4 = \frac{31}{10}$
π_5	Y_1				$p_5 = \frac{31}{15}$
$w(X_i) = w(Y_i)$	$\frac{15}{31}$	$\frac{10}{31}$	$\frac{10}{31}$	$\frac{10}{31}$	

TABLE 3. 这张图展示了例3.5中的权重。我们在第 j行列出处处构成 ker $D\pi_j$的一组基的向量场，并注意到，对于某个$j \neq j'$，ker $D\pi_j \cap \ker D\pi_{j'} \neq 0$。此外，向量场的权重并不总是相同的。

$\widehat{\ }$在这种情况下，对于每个 $j = 1,2,3$，π_j 的纤维由 $\mathbf{X}j$ 叶状分解，而 π_4 的纤维由 Y_2, Y_3, Y_4 叶状分解，π_5 的纤维由 Y_1 叶状分解，其中

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2} y_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial t}, \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

生成 $\mathbb{H}^4$ 的左不变向量场李代数，而 $\widehat{\mathbf{X}}j$ 是来自 $X_1, \ldots, X_4$ 且不包含 X_{j+1} 的三元向量场组。唯一的可容许指数为 $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (\frac{31}{5}, \frac{31}{5}, \frac{31}{5}, \frac{31}{10}, \frac{31}{15})$。注意，对于 $j = 2,3,4$，$w(X_j) = \overline{w(Y_j)} = \overline{\frac{10}{31}}$，而 $w(X_1) = w(Y_1) = \frac{15}{31}$（见表3）$\overline{\ }$。

π_1	X_1	X_2		X_4	X_5	$p_1 = \frac{43}{6}$
π_2	X_1		X_3		X_5	$p_2 = \frac{43}{6}$
π_3	X_1	X_2				$p_3 = \frac{43}{6}$
π_4			X_3	X_4		$p_4 = \frac{43}{6}$
π_5		Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	$p_5 = \frac{43}{18}$
π_6	Y_1					$p_6 = \frac{43}{12}$
$w(X_i) = w(Y_i)$	$\frac{18}{43}$	$\frac{12}{43}$	$\frac{12}{43}$	$\frac{12}{43}$	$\frac{12}{43}$	

TABLE 4. 此图展示了例 3.6 中的权重。我们在第 j行列出处处构成核 $D\pi_j$ 的一组基的向量场，并注意到核 $D\pi_j \cap$ 核 $D\pi_{j'} \neq 0$ 对于某些互不相同的 $j,\ j'$。此外，向量场的权重不一定相同。

例 3.6. 令 $\mathbb{H}^5 \simeq \mathbb{R}^{11}$, $m = 4, M = 6$。定义

$$\pi_j(x,y,t) = \begin{cases} (x_3, y, t + \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 1, \\ (x_2, x_4, y, t + \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 2, \\ (x_3, x_4, x_5, y, t + \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 3, \\ (x_1, x_2, x_5, y, t + \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 4, \\ (x, y_1, t - \frac{1}{2}x \cdot y), & y = 5, \\ (x, y_2, y_3, y_4, y_5, t - \frac{1}{2}x \cdot y), & j = 6. \end{cases}$$

唯一可容许的指数为 $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{43}{6}$，$p_5 = \frac{43}{18}$,—$p_6 = \frac{43}{12}$。令 —

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2}y_j\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2}x_j\frac{\partial}{\partial t}, \qquad j = 1,2,3,4,5.$$

注意，对于 $2 \leq j \leq 6$，$w(X_j) = w(Y_j) = \frac{12}{43}$；而 $w(X_1) = w(Y_1) = \frac{18}{43}$（见表 4）。

我们将看到，当 X_i, Y_i 的权重对所有 i都相同时，如例3.3和例3.4所示，我们可以轻松调整 [9]中的细化技术，并应用 Finner 不等式[15] 来证明（3.3）。然而，权重通常并不相同，如例3.5和例3.6所示；在这些例子中，似乎没有任何现有方法可以直接调整来证明（3.3）。

为了更好地理解 $w(X_i)$ 变化所造成的困难，我们将概述例3.4和例3.5中限制型弱型不等式 (3.3) 的证明。

3.2. **例3.4的证明概要**。 不失一般性，假设 Ω 有界且具有有限测度。我们注意到，(3.3) 等价于

$$|\Omega|^3 \gtrsim \left(\prod_{j=1}^{3} \alpha_j^2\right) \alpha_4^4, \qquad \alpha_j = \frac{|\Omega|}{|\pi_j(\Omega)|}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{3.5}$$

注意， α_j 是 $\Omega \cap \pi_j^{-1}(z)$ 的平均大小。

受 [31]和 [9], 的启发，我们或许可以构造一个近似微分同胚膨胀映射，将由 π_j 纤维组成的"乘积"集映射到 Ω 的一个乘积。作者不知道在 $\ker D\pi_j \cap \ker D\pi_{j'} \neq 0$ 时如何构造这样的近似微分同胚，但借助 Finner 不等式，我们可以通过研究以下辅助投影来绕过这一问题:

$$\pi(x, y, t) \coloneqq (y, t + \frac{1}{2} x \cdot y), \qquad \pi_*(x, y, t) \coloneqq (x, t - \frac{1}{2} x \cdot y).$$

（注意， $\pi_* = \pi_4$。）记

$$\alpha = \frac{|\Omega|}{|\pi(\Omega)|}, \qquad \alpha_* = \frac{|\Omega|}{|\pi_*(\Omega)|}. \tag{3.6}$$

$\mathbb{R}^4$ 上的类Radon变换的标准 $L^{\frac{5}{4}} \longrightarrow L^5$ 估计推出了以下不等式[9, 10]:

$$|\Omega|^3 \gtrsim \alpha^4 \alpha_*^4. \tag{3.7}$$

这可以通过细化 Ω 来实现，使得只要 $|\Omega \cap \pi^{-1}(z)| \gtrsim \alpha$， $|\Omega \cap \pi_*^{-1}(z)| \gtrsim \alpha_*$ 非空，它们就满足相应条件。我们用这些细化纤维来构造一个类乘积集

$$\Omega^\flat \coloneqq \{(s, \mathbf{u}, \mathbf{v}) : s \in S; \forall 1 \leq i \leq 3, u^i \in \mathcal{F}(s), v^i \in \mathcal{G}(s, u^i)\}, \tag{3.8}$$

其中 $s \in \mathbb{R}^3$， $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$， $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$， S， $\mathcal{F}(s)$ $\mathcal{G}(s, u) \subset \mathbb{R}^3$ 本质上是 $\pi^{-1}(z) \cap \Omega$ $\pi_*^{-1}(z) \cap \Omega$，并且满足

$$|S|, |\mathcal{G}(s, u)| \gtrsim \alpha, \quad |\mathcal{F}(s)| \gtrsim \alpha_*. \tag{3.9}$$

令 $\Phi : \Omega^\flat \longrightarrow \Omega^3$ 定义为

$$\Phi(s, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \coloneqq (e^{v^i \cdot \mathbf{X}} e^{u^i \cdot \mathbf{Y}} e^{s \cdot \mathbf{X}}(z))_{i=1}^3 \tag{3.10}$$

对某个 $z \in \Omega$。这里， $e^V(z)$ 表示从 z 出发沿向量场 V 的指数流（见第 7 节）。 Φ 是一个二次多项式，几乎处处是 $\Omega^\flat$ 上的局部微分同胚，其雅可比行列式为 $D\Phi(s, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det(\mathbf{u})$，其中 $\mathbf{u}$视为一个矩阵， u^i 为其列。由 B´ezout 定理以及 $\mathcal{G}(s, u^i)$ 的下界，

$$|\Omega|^3 \geq |\Phi(\Omega^\flat)| \gtrsim \alpha^3 \int_S \int_{(\mathcal{F}(s))^3} |\det(\mathbf{u})| d\mathbf{u} ds.$$

然后，通过用椭球逼近 $\mathcal{F}(s)$，并利用 S， $\mathcal{F}(s)$ 的下界，即可得到 (3.7)。

注意，当限制在 $\omega \coloneqq \pi^{-1}(z) \cap \Omega$ 上时， $\pi_1|_\omega$， $\pi_2|_\omega$， $\pi_3|_\omega$ 是仿射坐标投影，而 $w(X_j)$ 相等则意味着满足 Finner 不等式成立的条件（参见定理6.1）。若 $|\omega| = \alpha$，且对每个ω 都有 $|\omega|/|\pi_j|_\omega(\omega)| = \alpha_j$ （这里稍微有点不实，但有助于说明 Finner 不等式如何发挥作用），那么我们有 $\alpha \gtrsim \prod_{j=1}^3 \alpha_j^{\frac{1}{2}}$。因此，可以由 (3.7) 推出 (3.5)。

3.3. **例3.5的证明概要**。例3.4中，(3.10) 里的膨胀映射以及 Finner 不等式之所以有效，是因为对所有 i，权重$w(X_i)$ $w(Y_i)$相等。事实上，小节3.2中的证明概要可以推广到权重相等的任意情形，但无法应用于例3.5或3.6，因为这些情形中的权重会变化。因此，需要新的膨胀映射以及 Finner 不等式的推广。主要障碍在于，细化技术只能给每个 $\pi_j^{-1}(z)\cap\Omega$ 一个下界 α_j，而上界则可能任意大。为了解决这个问题，我们首先证明满足某个正则性假设的 Ω 的受限弱型不等式 (3.3)。然后，我们可以调整小节 [9] 中的二进方法，以去除这一额外假设。

同理，例3.5中的 (3.3) 等价于

$$|\Omega|^9 \gtrsim \left(\prod_{j=1}^{3}\alpha_j^5\right)\alpha_4^{10}\alpha_5^{15}, \qquad \alpha_j=\frac{|\Omega|}{|\pi_j(\Omega)|}. \tag{3.11}$$

回忆 $w(X_i)=w(Y_i)=\frac{10}{31}$，$i=1,2,3$，而 $w(X_4)=w(Y_4)=\frac{15}{31}$。注意，$\{X_i\}$（分别为 $\{Y_i\}$）是可交换的。记 $x=(x_1,x')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$。考虑

$$\begin{aligned}
\widetilde{\pi}_1(x,y,t)&=(x',y,t+\frac{1}{2}x\cdot y),\\
\widetilde{\pi}_2(x,y,t)&=(y,t+\frac{1}{2}x\cdot y),\\
\widetilde{\pi}_1^*(x,y,t)&=\pi_6(x,y,t)=(x,y',t-\frac{1}{2}x\cdot y),\\
\widetilde{\pi}_2^*(x,y,t)&=(x,t-\frac{1}{2}x\cdot y).
\end{aligned}$$

于是，$\ker d\widetilde{\pi}_1=\operatorname{span}\{X_1\}<\ker d\widetilde{\pi}_2=\mathbf{X}$，$\ker d\widetilde{\pi}_1^*=\operatorname{span}\{Y_1\}<\ker d\widetilde{\pi}_2^*=\mathbf{Y}$。令

$$\beta_j=\frac{|\Omega|}{|\widetilde{\pi}_j(\Omega)|}, \qquad \beta_j^*=\frac{|\Omega|}{|\widetilde{\pi}_j^*(\Omega)|}, \qquad j=1,2.$$

我们首先沿着 $\widetilde{\pi}_j$ 的纤维流动，构造一个膨胀映射，以证明

$$|\Omega|^9\gtrsim\beta_1^5\beta_2^{10}\alpha_4^{10}\alpha_5^{15}, \tag{3.12}$$

或者等价地，

$$|\Omega|\lesssim|\widetilde{\pi}_1(\Omega)|^{\frac{5}{31}}|\widetilde{\pi}_2(\Omega)|^{\frac{10}{31}}|\pi_4(\Omega)|^{\frac{10}{31}}|\pi_5(\Omega)|^{\frac{15}{31}}. \tag{3.13}$$

注意，(3.13) 中的指数满足定理 3.1 的条件。此外，例3.5 中 $w(X_i)$ 的比值为 $w(X_1):w(X_2):w(X_3):w(X_4)=3:2:2:2$，与 (3.13) 中的相同。

为证明 (3.12)，令 $\mathbf{s}=(s^i)_{i=1}^9$，其中 $s^i\in\mathbb{R}^4$。膨胀映射的定义域 $\Omega^\flat$ 具有如下形式

$$\Omega^\flat:=\{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})\in\Xi\times\mathbb{R}^{2\times4\times9}:u^i\in\mathcal{F}(s^i),v^i\in\mathcal{G}(s^i,u^i)\},$$

其中 $\Xi\subset S^9$，而 S，$\mathcal{F}(s^i)$ $\mathcal{G}(s^i,u^i)\subset\mathbb{R}^4$ 本质上是 $(\widetilde{\pi}_2)^{-1}(z)\cap\Omega$，$(\widetilde{\pi}_2^*)^{-1}(z)\cap\Omega$，并且经过细化后，大小为

$$\frac{|S|}{|L_j(S)|}\gtrsim\alpha_j, \quad \frac{|\mathcal{G}|}{|L_j(\mathcal{G})|}\gtrsim\alpha_j, \qquad 1\le j\le3; \tag{3.14}$$

$$\frac{|\mathcal{F}|}{|L_j(\mathcal{F})|}\gtrsim\alpha_j, \qquad j=4,5; \tag{3.15}$$

$$\begin{pmatrix} s^1 & s^2 & s^3 & s^4 & s^5 & s^6 & s^7 & s^8 & s^9 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 & \xi^5 & (\xi^6)_1 & (\xi^6)_1 & (\xi^6)_1 & (\xi^6)_1 \\ (\xi^6)' & (\xi^6)' & (\xi^6)' & (\xi^6)' & (\xi^6)' & (\xi^6)' & (\xi^6)' & (\xi^6)' & (\xi^6)' \end{pmatrix} \in S^9$$

MATRIX 1

$$\frac{|S|}{|P_1(S)|} \gtrsim \beta_1, \qquad \frac{|\mathcal{G}|}{|P_1(\mathcal{G})|} \gtrsim \beta_1; \tag{3.16}$$

$$\frac{|\mathcal{F}|}{|P_1(\mathcal{F})|} \gtrsim \beta_1^*; \tag{3.17}$$

$$|\mathcal{F}(s^i)| \gtrsim \beta_2^*, |\mathcal{G}(s^i, u^i)| \gtrsim \beta_2. \tag{3.18}$$

$L_j(x) = x_{j+1}$ 是 π_j 的线性部分，而 P_1 是 $\widetilde{\pi}_1$ 的线性部分，或者等价地说，是投影到最后 3 个坐标上的正交投影。 Ξ 是将 $\mathbb{R}^9$ 中某个类乘积集嵌入 S^9 的映射，该集合的 9 维豪斯多夫测度为 $|\Xi| \gtrsim \beta_1^5 \beta_2$。具体而言，该嵌入将 $\xi = (\xi^i)_{i=1}^6 \in \Xi$ 映射到矩阵 1，其中 $\xi^i \in \mathbb{R}^1$ 适用于 $1 \le i \le 5$ 和$\xi^6 \in \mathbb{R}^4$ 。

新的膨胀映射 $\Phi\colon \Omega^\flat \longrightarrow \Omega^9$ 定义为

$$\Phi(s, \mathbf{u}, \mathbf{v}) := (e^{v^i \cdot \mathbf{X}} e^{u^i \cdot \mathbf{Y}} e^{s^i \cdot \mathbf{X}}(z))_{i=1}^9 \tag{3.19}$$

对某个 $z \in \Omega$。 Φ 是一个二次多项式，几乎处处是 $\Omega^\flat$ 上的局部微分同胚，其雅可比行列式为 $D\Phi(s, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det(\mathbf{u}') \prod_{i=1}^5 (u^i)_1$，其中 $\mathbf{u}'$ 是列向量为 $\{u^i\}_{i=6}^9$ 的矩阵。B´ezout 定理给出

$$|\Omega|^9 \ge |\Phi(\Omega^\flat)| \gtrsim \beta_2^9 \int_\Xi \prod_{i=1}^5 \left(\int_{\mathcal{F}(s^i)} |u^i| du^i \right) \left(\int_{(\mathcal{F}(s^6))^4} |\det(\mathbf{u}')| d\mathbf{u}' \right) ds.$$

若 $\mathcal{F}$是椭球且 $s^1 = s^2 = \cdots = s^9$，那么被积函数为 $\sim |\mathcal{F}|^{10} |P_1^\perp(\mathcal{F})|^5$，其中 $P_1^\perp(x) = x_1$。Finner 不等式（见推论 6.2）以及 $\mathcal{F}$的下界意味着被积函数为 $\gtrsim \alpha_4^{10} \alpha_5^{15}$。对于一般的 $\mathcal{F}$，我们用椭球对其进行逼近。新的障碍在于，一般来说 $s^1, \ldots, s^9$ 并不相同。如果进一步假设“正则性”——即在 (3.16)-(3.18) 中用 $\sim$ 替换 $\gtrsim$，那么通过反复应用 Hölder 不等式（见引理 8.6）即可解决这一问题。

要从 (3.12) 推导出 (3.11)，还需证明

$$\frac{|S|}{|P_1(S)|} |S|^2 \gtrsim \prod_{j=1}^3 \frac{|S|}{|L_j(S)|}, \tag{3.20}$$

我们注意到，(3.20) 可以由 Finner 不等式推出

$$|P_1(S)| \lesssim \prod_{j=1}^3 |L_j(S)|, \tag{3.21}$$

而在这种情况下不需要正则性。不过，其他情况下对应于（3.21）的结论，例如例 3.6，无法轻易从 Finner 不等式推导出来。

这需要广义 Finner 不等式（见引理 6.3）。由于 $\widetilde{\pi}_j$ 的嵌套核和正则性，这种推广才得以实现。

4. Reduce Theorem 1.1 to a base case

在本节中，我们假设定理 3.1 成立，并通过归纳法证明定理 1.1。注意，条件 $p_j \in [1,\infty]$、(*A*)、(*B*) 和 (*C*) 刻画了一个紧凸多胞体

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{p^{-1}} \in [0,1]^M : (p_1, \ldots\ldots, p_M) \text{ 满足条件 } (A)、(B) \text{ 和 } (C)\}.$$

对于 $\mathbf{p} = (p_1, \ldots\ldots, p_M)$，记作 $\mathbf{p^{-1}} = (p_1^{-1}, \ldots\ldots, p_M^{-1})$。

定义 4.1. $\mathbf{p^{-1}} \in \mathcal{P}$ 称为极端，如果 $\{\mathbf{p^{-1}} + r\mathbf{v} : |r| < 1\} \not\subseteq \mathcal{P}$ 对于任意 $\mathbf{v} \in R^M \setminus \{0\}$。

定义 4.2。坐标子空间 $V \leq \mathbb{R}^n$ 在 (*B*) 中等号成立时称为临界的。

引理 4.3。若 $\{0\}$ 是临界的，则 *(1.5)* 成立。

证明。 $\{0\}$ 是临界的意味着 $\sum_{j=1}^{M} p_j^{-1} = 1$。将其与 C 代入 (*A*)，得到

$$\sum_{j=1}^{M} \frac{n}{p_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{p_j} + \sum_{j=m+1}^{M} \frac{n}{p_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{n}{p_j} + \sum_{j=m+1}^{M} \frac{n_j}{p_j}.$$

因此，对每个 $1 \leq j \leq M$，都有 $p_j = \infty$ 或 $n_j = n$。在前一种情况下，$\mathcal{M}$可化简为一个 $(M-1)$-线性算子。若对所有 j都有 $p_j < \infty$，则有$L_j = \mathbb{I}_n$，因此 (1.5) 就成为 H¨older 不等式。□

因此，我们可以假设 $\{0\}$ 不是临界子空间。

引理 4.4。假设 $\mathcal{P} \neq \emptyset$，且不存在真临界子空间$W < \mathbb{R}^n$，则以下两者必有其一

- $\mathcal{P} = \{\mathbf{p^{-1}}\}$ 是一个单元素集合，其中 $\mathbf{p}$ 满足定理 *3.1* 的假设；或者
- 对于 $\mathcal{P}$ 的每个极点 $\mathbf{p}^{-1}$，$p_j = \infty$ 存在某个 $1 \leq j \leq M$。

证明。假设不存在真临界子空间，且 $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}^{-1}\}$ 是一个单元素集合。那么 $\mathbf{p} \in \mathbb{Q}^M$。此外，根据临界子空间的定义，$\mathbf{p}$满足定理 3.1 中的假设。

假设 $\mathcal{P} \neq \emptyset$ 不是一个单元素集合。我们注意到 $\mathcal{P}$ 包含在该集合的内部

$$\{\mathbf{p^{-1}} \in [0,1]^M : \mathbf{p} \text{ satisfies } (B) \text{ for all coordinate subspaces } V < \mathbb{R}^n\}.$$

根据连续性以及 $\mathcal{P}$ 是闭集这一事实，我们有

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{p^{-1}} \in [0,1]^M : \mathbf{p} \text{ satisfies } (A) \text{ and } (C)\},$$

它是 $\mathbb{R}^M$ 的有限多个仿射子空间与单位立方体 $[0,1]^M$ 的交。由于 $\mathcal{P}$ 不是单元素集合，(*A*) 和 (*C*) 的解并不唯一。因此，任何极点 $\mathbf{p^{-1}}$ 都必须位于单位立方体 $[0,1]^M$ 的边界上；也就是说，存在某个 $1 \leq j \leq M$ 使得 $p_j^{-1} \in \{0,1\}$。假设对于某个 $1 \leq j \leq M$，有 $p_j = 1$。那么由 (*A*) 和 (*C*) 可推出，对于所有 $i \neq j$，都有 $p_i = \infty$。□

在定理 3.1 的假设下，引理 4.4 表明，当不存在真临界子空间时，(1.5) 成立。为完成归纳法，还需考虑存在非零真临界子空间的情形。回顾欧几里得 Brascamp–Lieb 不等式。对于每个 j，我们在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上定义线性映射 $\pi_j^\flat$，如下：

$$\pi_j^\flat(x,y) \coloneqq \begin{cases} (L_j x, y), & 1 \le j \le m; \\ (x, L_j y), & m < j \le M. \end{cases}$$

相应的多线性形式为

$$\mathcal{M}^\flat(f_1,\dots,f_M) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \prod_{j=1}^{M} f_j \circ \pi_j^\flat(x,y)\,dx\,dy.$$

在这个特殊的 Finner 情形下，Brascamp–Lieb 不等式可改写如下：

命题 4.5 ([15, 2, 3])。设 $p_j \in [1,\infty]$ 且

$$2n = \sum_{j=1}^{M} \frac{n+n_j}{p_j}; \tag{$A^\flat$}$$

$$\dim V \le \sum_{j=1}^{m} \frac{\dim L_j V_1 + \dim V_2}{p_j} + \sum_{j=m+1}^{M} \frac{\dim V_1 + \dim L_j V_2}{p_j}, \tag{$B^\flat$}$$

其中 $V = V_1 \times V_2 \le \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 对任意坐标子空间 $V_1, V_2 \le \mathbb{R}^n$ 均成立。于是

$$\mathcal{M}^\flat(f_1,\dots,f_M) \le \prod_{j=1}^{M} \|f_j\|_{p_j} \tag{4.1}$$

对紧支撑的非负连续函数 f_j 一致成立。

引理 4.6。如果 $W < \mathbb{R}^n$ 是非零真临界子空间，并且将 $\mathbb{R}^n$ 替换为 W 后定理 *1.1* 成立，那么 *(1.5)* 对于 $L_j\colon\ \mathbb{R}^n \longrightarrow V_j$ 成立。

证明。根据定义，W 是一个坐标子空间；对于任意坐标投影 $L \longrightarrow V$，限制 $L' = L|_W\colon\ W \longrightarrow V'$，$L'' = L|_{W^\perp}\colon\ W^\perp \longrightarrow V''$ 分别是将 L 限制到 W，$W^\perp$ 上的坐标投影。我们注意到 $V = V' \oplus V''$。

对于 $x \in \mathbb{R}^n$，记 $x = (x',\ x'') \in W \times W^\perp$。于是有 $Lx = (L'x',\ L''x'')$。对于 $1 \le j \le M$，记为 $x_j' = L_j' x'$，$x_j'' = L_j'' x''$。此外，W 的坐标子空间也是 $\mathbb{R}^n$ 的坐标子空间。因此，将 R^n 替换为 W 后，给定数据 $\mathbf{p}$ 满足 (A)、(B) 和 (C)。于是 $\mathcal{M}(f_1、\dots\dots、f_M)$ 可以表示为

$$\int_{W^\perp \times W^\perp} \int_{W \times W \times \mathbb{R}} \prod_{j=1}^{m} f_j(x_j', x_j'', y, t + \frac{1}{2} x \cdot y) \prod_{j=m+1}^{M} f_j(x, y_j', y_j'', t - \frac{1}{2} x \cdot y) dx' dy' dt dx'' dy''$$

定义辅助函数

$$\begin{aligned} f_j^{x'',y''}(x_j', y', t) &\coloneqq f_j(x_j', x_j'', y, t + \tfrac{1}{2} x'' \cdot y''), \quad 1 \le j \le m, \\ f_j^{x'',y''}(x', y_j', t) &\coloneqq f_j(x, y_j', y_j'', t - \tfrac{1}{2} x'' \cdot y''), \quad m < j \le M. \end{aligned}$$

根据假设，有

$$\mathcal{M}(f_1,\dots,f_M)\lesssim\int_{W^\perp\times W^\perp}\prod_{j=1}^{M}\|f_j^{x'',y''}\|_{p_j}dx''dy''$$

由于 x''，y'' 是 L^{p_j} 范数中的常数，因此对于 $1\le j\le m$

$$\begin{aligned}\|f_j^{x'',y''}\|_{p_j}&=\left(\int_{V_j'\times W\times\mathbb{R}}|f_j(x_j',x_j'',y,t+\frac{1}{2}x''\cdot y'')|^{p_j}dx_j'dy'dt\right)^{\frac{1}{p_j}}\\&=\left(\int_{V_j'\times W\times\mathbb{R}}|f_j(x_j',x_j'',y,t)|^{p_j}dx_j'dy'dt\right)^{\frac{1}{p_j}}=:\widetilde{f}_j(x_j'',y'').\end{aligned}$$

我们注意到，$\widetilde{f}_j$是定义在 $L_j''W^\perp\times W^\perp$上的函数。类似地，我们可以将$\|f^{x'',y''}_j\|_{p_j}$改写为定义在 $W^\perp\times L_j''W^\perp$上的函数 $\widetilde{f}_j$，对于 $m<j\le M$。

我们将命题 4.5应用于线性坐标投影

$$\pi_j^\flat=\begin{cases}L_j''\times\mathrm{Id}_{W^\perp},&1\le j\le m,\\\mathrm{Id}_{W^\perp}\times L_j'',&m<j\le M,\end{cases}$$

在 $W^\perp\times W^\perp$上。由于 W是临界的，从 (A)中减去带有 W的 (B)，得到 $(A^\flat)$

$$2\dim W^\perp=\sum_{j=1}^{M}\frac{\dim L_j''W^\perp+\dim W^\perp}{p_j}$$

设 V_1,V_2 为 $W^\perp$的任意坐标子空间。那么 $V_1\oplus W\le\mathbb{R}^n$ 是满足 (B) 的坐标子空间：

$$\dim V_1+\dim W+1\le\sum_{j=1}^{m}\frac{\dim L_jV_1+\dim L_jW+1}{p_j}+\sum_{j=m+1}^{M}\frac{\dim V_1+\dim W+1}{p_j}.$$

另一方面，将 W 代入 (B) 得到

$$\dim W+1=\sum_{j=1}^{m}\frac{\dim L_jW+1}{p_j}+\sum_{j=m+1}^{M}\frac{\dim W+1}{p_j}.$$

两式相减得

$$\dim V_1\le\sum_{j=1}^{m}\frac{\dim L_jV_1}{p_j}+\sum_{j=m+1}^{M}\frac{\dim V_1}{p_j}.\tag{4.2}$$

同理可得

$$\dim V_2\le\sum_{j=1}^{m}\frac{\dim V_2}{p_j}+\sum_{j=m+1}^{M}\frac{\dim L_jV_2}{p_j}.\tag{4.3}$$

将 (4.2) 和 (4.3) 相加，得到 $(B^\flat)$。然后由命题 4.5，可得

$$\mathcal{M}(f_1,\dots,f_M)\lesssim\int_{W^\perp\times W^\perp}\prod_{j=1}^{M}\|f_j^{x'',y''}\|_{p_j}dx''dy''$$

$$= \int_{W^\perp \times W^\perp} \prod_{j=1}^{M} \widetilde{f}_j \circ \pi_j^\flat(x'', y'') dx'' dy''$$

$$\lesssim \prod_{j=1}^{M} \|\widetilde{f}_j\|_{p_j} = \prod_{j=1}^{M} \|f_j\|_{p_j}.$$

□

5. Auxiliary maps with nested kernels

本文其余部分将用于证明定理 3.1。本节将介绍具有嵌套核的辅助映射。由于论证可能会非常技术性，阅读时不妨牢记例3.5。

回顾定理 1.1 和定理 3.1 中的记号。不失一般性，我们可以假设 $p_j < \infty$。由于 $p_j \in \mathbb{Q}$，我们可以写成 $p_j^{-1} = q_j/q$ ，其中 q_j为正整数， q 且 $\gcd(q_1, \dots, q_M, q) = 1$。令 $N = (\sum_{j=1}^{M} q_j) - q$。(*A*) 推出$N = (\sum_{j=1}^{m} k_j q_j)/(n+1) \geq 0$，其中 $k_j =$维数 K_j。

若 $N = 0$，则 π_j是微分同胚，且 $|\det D\pi_j| \equiv 1$。于是 (3.1) 化为 Hölder 不等式。因此，我们可以假设 $N > 0$，即，

$$\sum_{j=1}^{M} \frac{1}{p_j} > 1. \tag{5.1}$$

我们注意到，相应的限制弱型不等式为

$$|\Omega|^N \gtrsim \prod_{j=1}^{M} \alpha_j^{q_j}, \qquad \alpha_j = \frac{|\Omega|}{|\pi_j(\Omega)|}. \tag{5.2}$$

~而条件 (*A*)、(*B*) 和 (*C*) 变为

$$\sum_{j=1}^{m} k_j q_j = \sum_{j=m+1}^{M} k_j q_j = (n+1)N; \tag{A'}$$

$$N \dim V < \sum_{i: e_i \in V} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ e_i \in K_j}} q_j = \sum_{i: e_i \in V} \sum_{\substack{m < j \leq M \\ e_i \in K_j}} q_j < N(\dim V + 1); \tag{B'}$$

$$\sum_{j=1}^{m} q_j \dim(K_j \cap V) = \sum_{j=m+1}^{M} q_j \dim(K_j \cap V), \tag{C'}$$

对于任意坐标子空间 $V < \mathbb{R}^n$，其中 e_i 是第 i 个坐标。令

$$Q_i \coloneqq \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ e_i \in K_j}} q_j = \sum_{\substack{m < j \leq M \\ e_i \in K_j}} q_j, \tag{5.3}$$

我们注意到，(*B′*) 意味着

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad N < Q_i < 2N. \tag{5.4}$$

设 $\widetilde{m}$ 为 $\{Q_i\}_{i=1}^n$ 中不同取值的个数。不失一般性，我们可以假设

$$Q_1 = \cdots = Q_{\widetilde{k}_1} > Q_{\widetilde{k}_1+1} = \cdots = Q_{\widetilde{k}_2} > \cdots > Q_{\widetilde{k}_{\widetilde{m}-1}+1} = \cdots = Q_{\widetilde{k}_{\widetilde{m}}}, \tag{5.5}$$

其中 $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_{\widetilde{m}} = n$。$k_j$ 将是我们辅助映射的余秩映射。

以下两个垂直投影 π, π_*：$\mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是我们证明的关键：

$$\pi(x,y,t) = (y, t + \frac{1}{2}x\cdot y), \qquad \pi_*(x,y,t) = (x, t - \frac{1}{2}x\cdot y). \tag{5.6}$$

定义 P_j：$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k_j}$，使得 $P_j(x) = (x_{\widetilde{k}_j+1}, \ldots, x_n)$，其中 $j = 1, \ldots, \widetilde{m}$，并定义辅助映射

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}_j(x,y,t) &= (P_j(x), y, t + \tfrac{1}{2}x\cdot y), \\ \widetilde{\pi}_j^*(x,y,t) &= (x, P_j(y), t - \tfrac{1}{2}x\cdot y). \end{aligned} \tag{5.7}$$

考虑以下左不变向量场：$\mathbb{H}^n$

$$\forall 1 \le i \le n \qquad X_i(x,y,t) \coloneqq \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{2}y_i\frac{\partial}{\partial t},$$

$$Y_i(x,y,t) \coloneqq \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{1}{2}x_i\frac{\partial}{\partial t}.$$

记 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n), \mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$。我们观察到，这些左不变向量场唯一非平凡的李括号为

$$T \coloneqq \frac{\partial}{\partial t} = [X_i, Y_i], \qquad 1 \le i \le n, \tag{5.8}$$

而 $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, T$ 构成 $\mathbb{H}^n$ 的整体标架。

注意，$\widetilde{\pi}_j, \widetilde{\pi}_j^*$ 的纤维分别具有标架 $\{X_1, \ldots, X_{\widetilde{k}_j}\}, \{Y_1, \ldots, Y_{\widetilde{k}_j}\}$，而 π_j 的纤维具有标架 $\{X_i : \text{对 } 1 \le j \le m \text{ 而言为 } e_i \in K_j\}$，对 $m < j \le M$ 而言为 $\{Y_i : \sim e_i \in K_j\}$。于是 $\ker d\widetilde{\pi}_j < \ker d\widetilde{\pi}_{j+1}$。由于 $k_{\widetilde{m}} = n$，对每个 $1 \le j \le m$，都有 $\ker D\pi_j \le \ker d\widetilde{\pi}_{\widetilde{m}} = \ker D\pi$。关于 $\widetilde{\pi}_*, \widetilde{\pi}_j^*$ 和 $\pi_j, m < j \le M$ 也有类似的观察。

Let

$$\widetilde{q}_j = \begin{cases} Q_{\widetilde{k}_j} - Q_{\widetilde{k}_{j+1}}, & 1 \le j < \widetilde{m} \\ Q_{\widetilde{k}_{\widetilde{m}}} & j = \widetilde{m}. \end{cases} \tag{5.9}$$

注意，对于每个 $1 \le j \le \widetilde{m}$，$\widetilde{q}_j > 0$。此外，指数 $\{q'/\widetilde{q}_j\}_{j=1}^{\widetilde{m}} \cup \{q'/q_j\}_{j=m+1}^{M}$（其中 $q' = Q_1 + \sum_{j=m+1}^M q_j - N$（由 (5.4) 可得 $q' > 0$））满足定理 3.1 中关于 $\{\widetilde{\pi}_j\}_{j=1}^{\widetilde{m}} \cup \{\pi_j\}_{j=m+1}^{M}$ 的假设。这对应于限制弱型不等式

$$|\Omega|^N \gtrsim \prod_{j=1}^{\widetilde{m}} \beta_j^{\widetilde{q}_j} \prod_{j=m+1}^{M} \alpha_j^{q_j}, \qquad \beta_j = \frac{|\Omega|}{|\widetilde{\pi}_j(\Omega)|}, \tag{5.10}$$

这将在后文作为通向 (5.2) 的一个中间步骤加以证明。在 $\widetilde{\pi}_j$，$\widetilde{\pi}_j^*$ 上进行研究的主要优势在于，它们的核 $\ker P_1 < \ker P_2 < \cdots < \ker P_{\widetilde{m}} = \mathbb{R}^n$ 之间具有严格的线性序关系，而与 $K_j = \ker L_j$ 相关的核一般并不具备这种关系

与 π_j相关。这种序关系被证明非常有力，使得 Finner 不等式的推广以及近似微分同胚膨胀映射的构造成为可能。

注记。 回顾定义3.2中向量场的权重 X_i， Y_i 我们注意到，对于每个 $i = 1, \ldots, n$，都有 $w(X_i) = w(Y_i) = \frac{Q_i}{q}$。在例3.3和例3.4中， $\widetilde{m} = 1$；而在例3.5和例3.6中， $\widetilde{m} = 2$。此外，小节3.3中定义的 $\widetilde{\pi}_j$， $\widetilde{\pi}_j^*$ 与（5.7）一致。在小节3.3中，我们有 $\widetilde{q}_1 = 5$， $\widetilde{q}_2 = 10$。

6. Finner's inequality and generalization thereof

本节将给出一个广义 Finner 不等式。下面简要说明它的重要作用。为了从（5.10）推导出（5.2），我们需要

$$\prod_{j=1}^{\widetilde{m}} \beta_j^{\widetilde{q}_j} \overset{?}{\gtrsim} \prod_{j=1}^{m} \alpha_j^{q_j}, \tag{6.1}$$

这一般并不成立（见例 A.1）。现在来看 $\pi^{-1}(z)$ 内的纤维（见 (7.3)）。考虑 $\omega = \pi^{-1}(z) \cap \Omega \neq \emptyset$。由于 $\{\pi_j|_\omega\}_{j=1}^m$， $\{\widetilde{\pi}_j|_\omega\}_{j=1}^{\widetilde{m}}$ 本质上分别是 $\{L_j\}_{j=1}^m$， $\{P_j\}_{j=1}^{\widetilde{m}}$（见 (7.4)），证明 (6.1) 归结为证明

$$\prod_{j=1}^{\widetilde{m}} \left(\frac{|\omega|}{|P_j(\omega)|}\right)^{\widetilde{q}_j} \overset{?}{\gtrsim} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{|\omega|}{|L_j(\omega)|}\right)^{q_j}, \qquad \omega \in \mathbb{R}^n. \tag{6.2}$$

我们注意到，(6.2) 等价于

$$|\omega| \overset{?}{\lesssim} \prod_{j=1}^{m} |L_j(\omega)|^{\frac{q_j}{N'}} \prod_{j=1}^{\widetilde{m}} \left(\frac{|\omega|}{|P_j(\omega)|}\right)^{\frac{\widetilde{q}_j}{N'}}, \qquad N' = \sum_{j=1}^{m} q_j. \tag{6.3}$$

我们稍后将在推论 6.2 中证明，(6.3) 几乎可以由 Finner 不等式推出，但并非完全如此，因为这里出现的是 $|\omega|/|P_j(\omega)|$，而非 $|P^\perp(\omega)|$。首先，回顾一下限制弱型Finner不等式。

定理6.1 （[15]的定理2.1）。 设 n、d 为正整数，设 $\{e_i\}_{i=1}^n$为 $\mathbb{R}^n$的标准基。对于 $1 \leq j \leq d$，令 $l_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow W_j$ 为坐标投影。若 $p_j \in [1, \infty]$ 且

$$\forall 1 \leq i \leq n \qquad \sum_{j : e_i \in W_j} \frac{1}{p_j} = 1, \tag{6.4}$$

则对于任意可测集 $\omega \subset \mathbb{R}^n$，

$$|\omega| \leq \prod_{j=1}^{d} |l_j(\omega)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{6.5}$$

推论 6.2。 回顾 *(3.2)* 和 *(5.7)* 中的线性映射 $\{L_j\}_{j=1}^M$、$\{P_j\}_{j=1}^{\widetilde{m}}$。令$P_j^\perp$表示从 $\mathbb{R}^n$ 投影到前 $\widetilde{k}_j$ 个坐标的正交投影。令$p_j = q/q_j$ 如第 *5* 节中所述，并令 $\widetilde{q}_j$ 如 *(5.9)* 中所述。则对于任意可测子集 $\omega \subset \mathbb{R}^n$，

$$|\omega| \leq \left(\prod_{j=1}^{\widetilde{m}} |P_j^\perp(\omega)|^{\frac{\widetilde{q}_j}{N'}}\right) \left(\prod_{j=1}^{m} |L_j(\omega)|^{\frac{q_j}{N'}}\right), \qquad N' = \sum_{j=1}^{m} q_j. \tag{6.6}$$

如果将 $\{(L_j, q_j)\}_{j=1}^m$ 替换为 $\{(L_j, q_j)\}_{j=m+1}^M$，我们也有类似的结果。

证明。注意，对于 $1 \le i \le n$，我们有 $\sum_{j=1}^{m} q_j = \sum_{j:\ e_i \in V_j} q_j + \sum_{j:\ e_i \in K_j} q_j$（回想一下第1节中的 V_j，K_j）。于是，由 (5.3)、(5.5) 和 (5.9)，我们推得 (6.4) 的以下等价形式：

$$\forall 1 \le i \le n \qquad \sum_{\substack{j: e_i \in V_j \\ 1 \le j \le m}} q_j + \sum_{\substack{j: \widetilde{k}_j \ge i \\ 1 \le j \le \widetilde{m}}} \widetilde{q}_j = \sum_{j=1}^{m} q_j. \tag{6.7}$$

关于 $\{(L_j,\ q_j)\}_{j=m+1}^{M}$ 的论证几乎完全相同。 □

现在我们看到，(6.3) 看起来与 (6.6) 相似，只差一个隐含常数，并且将 $|P_j^{\perp}(\omega)|$ 替换为 $|\omega|/|P_j(\omega)|$。一般来说，我们可以提出以下问题：如果将其中一些 $|l_j(\omega)|$ 替换为 $|\omega|/|l_j^{\perp}(\omega)|$，其中 $l_j^{\perp}$ 是到 $\ker l_j$ 上的正交投影，那么 (6.5) 是否仍然成立？主要障碍在于，$|\omega|/|l_j^{\perp}(\omega)|$，即 $(l_j^{\perp})^{-1}(x) \cap \omega$ 的平均大小，相较于 $l_j(\omega)$（所有此类纤维的投影；见例 A.2）可以任意小。以下引理针对替换后的 l_j 具有嵌套核并满足某种“正则性”条件的情形，对这个问题给出了肯定回答。证明改编自 [27, 15]。

引理 6.3. 设 n、k、d 是正整数，且 $k \le d$；设 $\varepsilon \in (0,\ 1)$，并设 $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基。对于 $1 \le j \le d$，设 l_j 是 $\mathbb{R}^n$ 上满足下列条件的坐标投影

$$\ker l_{\sigma(1)} \le \ker l_{\sigma(2)} \le \cdots \le \ker l_{\sigma(k)} \tag{6.8}$$

其中 σ 是 $\{1, 2, \ldots, k\}$ 的某个置换。设对于 $1 \le j \le d$，$p_j \in [1, \infty]$，并且

$$\forall 1 \le i \le n \qquad \sum_{\substack{1 \le j \le k \\ e_i \in \ker l_j}} \frac{1}{p_j} + \sum_{\substack{k < j \le d \\ e_i \notin \ker l_j}} \frac{1}{p_j} = 1. \tag{6.9}$$

则存在一个仅依赖于 n、p_j 的常数 $C > 1$，使得对任意有界的 $\omega \subset \mathbb{R}^n$，

$$\forall 1 \le j \le k \quad \forall x \in l_j(\omega) \qquad |l_j^{-1}(x) \cap \omega| \lesssim \varepsilon^{-1} \frac{|\omega|}{|l_j(\omega)|}, \tag{6.10}$$

$$\Downarrow$$

$$|\omega| \lesssim \varepsilon^{-C} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{|\omega|}{|l_j(\omega)|} \right)^{\frac{1}{p_j}} \prod_{j=k+1}^{d} |l_j(\omega)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{6.11}$$

注记. 假设 (6.8) 和 (6.10) 不可省略。（参见例 A.3 和 A.4。）

证明. 我们将对 n 使用归纳法证明 (6.11)。若 $n = 1$，则 l_j 或为零映射，或为恒等映射。若 $l_j = 0$，则 $|l_j(\omega)|_0 = \#\{0\} = 1$；若 l_j 是恒等映射，则 $l_j(\omega) = \omega$。直接验证可知，(6.9) 蕴含 (6.11)。

现在考虑 $n > 1$。假设 (6.11) 对于 $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$成立。不失一般性，我们可以假设

$$\ker l_1 \le \ker l_2 \le \cdots \le \ker l_k \le \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle. \tag{6.12}$$

令 P 表示到最后一个坐标的正交投影。注意，对于每个$x_n \in \mathbb{R}$，l_j 限制在 $P^{-1}(x_n)$上时，是满足 (6.12) 和 (6.9)（对于 $1 \le i \le n-1$）的 $\mathbb{R}^{n-1}$上的（仿射）坐标投影。一般而言，$P^{-1}(x_n) \cap \omega$ 不一定满足 (6.10)，但可以通过对 ω进行如下细化来解决这一问题。

将 $\beta_j \coloneqq |\omega|/|l_j(\omega)|$ 记作 $1 \le j \le k$。令 $\omega_0 \coloneqq \omega$，并令

$$\omega_j \coloneqq \{x \in \omega_{j-1} : |l_j^{-1}(l_j(x)) \cap \omega_{j-1}| \ge c\beta_j\}, \qquad 1 \le j \le k \tag{6.13}$$

对某个充分小的常数 $c > 0$。然后

$$|\omega_0 \setminus \omega_1| = \int_{l_1(\omega_0 \setminus \omega_1)} |l_1^{-1}(x_j)| dx_j < c\beta_1 |l_1(\omega)| = c|\omega|. \tag{6.14}$$

于是，$|\omega_1| \ge (1-c)|\omega|$ 且 $|\omega_1|/|l_j(\omega_1)| \gtrsim \beta_j$ 对 $1 \le j \le k$成立。对 $\omega_j, 2 \le j \le k$重复上述论证，可得 $|\omega_k| \sim |\omega|$。此外，(6.12) 表明，对任意 $x \in \omega$ 和 $1 \le j \le k$，以下两者必有其一成立：$l_j^{-1}(l_j(x)) \subset \omega_k$ 或 $l_{j'}^{-1}(l_{j'}(x)) \cap \omega_k = \emptyset$。因此，对所有 $1 \le j \le k$，都有 $|l_j^{-1}(x_j) \cap \omega_k| \ge c\beta_j$。

注意，对任意 $x_n \in P(\omega)$ 和 $1 \le j \le k$,

$$\begin{aligned}
&\frac{|P^{-1}(x_n) \cap \omega_k|}{|l_j(P^{-1}(x_n) \cap \omega_k)|} \\
=&\frac{1}{|l_j(P^{-1}(x_n) \cap \omega_k)|} \int_{l_j(P^{-1}(x_n) \cap \omega_k)} |l_j^{-1}(x_j) \cap (P^{-1}(x_n) \cap \omega_k)| dx_j,
\end{aligned}$$

且对任意 $x_j \in l_j(P^{-1}(x_n) \cap \omega_k)$,

$$|l_j^{-1}(x_j) \cap \omega_k| = |l_j^{-1}(x_j) \cap (P^{-1}(x_n) \cap \omega_k)| \le |l_j^{-1}(x_j) \cap \omega| \lesssim \varepsilon^{-1}\beta_j, \tag{6.15}$$

其中等号由 (6.12) 得出，最后一个不等式由 (6.10) 得出。因此,

$$c\beta_j \le \frac{|P^{-1}(x_n) \cap \omega_k|}{|l_j(P^{-1}(x_n) \cap \omega_k)|} \lesssim \varepsilon^{-1}\beta_j. \tag{6.16}$$

根据归纳假设，对每个 $x_n \in P(\omega_k)$,

$$\begin{aligned}
|P^{-1}(x_n) \cap \omega_k| \lesssim& \varepsilon^{-C} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{|P^{-1}(x_n) \cap \omega_k|}{|l_j(P^{-1}(x_n) \cap \omega_k)|} \right)^{\frac{1}{p_j}} \prod_{j=k+1}^{d} |l_j(P^{-1}(x_n) \cap \omega_k)|^{\frac{1}{p_j}} \\
\lesssim& \varepsilon^{-C} \left(\prod_{j=1}^{k} \beta_j^{\frac{1}{p_j}} \right) \prod_{j=k+1}^{d} |l_j(P^{-1}(x_n) \cap \omega_k)|^{\frac{1}{p_j}}.
\end{aligned}$$

如果 $e_n \in \ker l_j$，那么 $|l_j(P^{-1}(x_n) \cap \omega_k)| \le |l_j(P^{-1}(x_n) \cap \omega)| \le |l_j(\omega)|$。因此,

$$|\omega| \sim |\omega_k| = \int_{P(\omega_k)} |P^{-1}(x_n) \cap \omega_k| dx_n \tag{6.17}$$

$$\lesssim \varepsilon^{-C} \left(\int_{P(\omega)} \prod_{\substack{k<j\le d \\ e_n \notin \ker l_j}} |l_j(P^{-1}(x_n) \cap \omega)|^{\frac{1}{p_j}} dx_n \right) \left(\prod_{\substack{k<j\le d \\ e_n \in \ker l_j}} |l_j(\omega)|^{\frac{1}{p_j}} \right) \prod_{j=1}^{k} \beta_j^{\frac{1}{p_j}}.$$

此外，由（6.9）和（6.12）可得

$$\sum_{\substack{k<j\le d \\ e_n \notin \ker l_j}} \frac{1}{p_j} = 1. \tag{6.18}$$

由 H¨older 不等式,

$$\int_{P(\omega)} \prod_{\substack{k<j\le d\\ e_n\notin\ker l_j}} |l_j(P^{-1}(x_n)\cap\omega)|^{\frac{1}{p_j}}\,dx_n$$

$$\le \prod_{\substack{k<j\le d\\ e_n\notin\ker l_j}} \left(\int_{P(\omega)} |l_j(P^{-1}(x_n)\cap\omega)|\right)^{\frac{1}{p_n}} = \prod_{\substack{k<j\le d\\ e_n\notin\ker l_j}} |l_j(\omega)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{6.19}$$

结合 (6.17) 和 (6.19) 得到 (6.11)。 □

推论 6.4。 令 $\varepsilon\in(0,1)$。回顾 *(3.2)* 和 *(5.7)* 中的线性映射 $\{L_j\}_{j=1}^{M}$, $\{P_j\}_{j=1}^{\widetilde{m}}$。令 $p_j=q/q_j$ 如第 *5* 节所述，并令 $\widetilde{q_j}$ 如 *(5.9)* 中所述。那么存在一个常数 $C>1$，它仅依赖于 n, p_j，使得对于任意有界的 $\omega\subset\mathbb{R}^n$,

$$\forall 1\le j\le k \quad \forall x\in\omega \qquad |P_j^{-1}(x)\cap\omega| \lesssim \varepsilon^{-1}\frac{|\omega|}{|P_j(\omega)|},$$

$$\Downarrow$$

$$|\omega| \lesssim \varepsilon^{-C}\left(\prod_{j=1}^{m}|L_j(\omega)|^{\frac{q_j}{N'}}\right)\prod_{j=1}^{\widetilde{m}}\left(\frac{|\omega|}{|P_j(\omega)|}\right)^{\frac{\widetilde{q}_j}{N'}}, \qquad N'=\sum_{j=1}^{m}q_j. \tag{6.20}$$

同样，将 $\{(L_j,q_j)\}_{j=1}^{m}$ 替换为 $\{(L_j,q_j)\}_{j=m+1}^{M}$，*(6.20)* 仍然成立。

证明。 我们验证 $\{(L_j,q_j)\}_{j=1}^{m}$ 的情形。对 $\{(L_j,q_j)\}_{j=m+1}^{M}$ 的论证几乎完全相同。根据构造，我们有 $\ker P_1<\ker P_2<\cdots<\ker P_{\widetilde{m}}$。由推论 6.2 的证明中相同的论证，可得 (6.7)。因此，结论由引理 6.3 得出。□

本节最后，我们用椭球逼近 Finner 不等式的凸拟极值函数。

定义 6.5。 设 $n,d,\widetilde{d}$ 为正整数，且 $\{l_j\}_{j=1}^{d}$ 为 $\mathbb{R}^n$上的坐标˛投影。若 $\{U_a\}_{a=1}^{\widetilde{d}}$ 由$\{l_j\}_{j=1}^{d}$ 给出，且满足下列条件，则称其为 $\mathbb{R}^n$ 的极大划分：

- U_a 是满足 $\mathbb{R}^n=\oplus_{a=1}^{\widetilde{d}}U_a$的 $\mathbb{R}^n$ 的坐标子空间;
- 对每个 $1\le j\le d$,

$$\text{either } U_a\le\ker l_j \text{ or } U_a\le l_j(\mathbb{R}^n) \text{ holds true; and} \tag{6.21}$$

- 该划分是极大的，即若子空间 $V\le\mathbb{R}^n$ s 满足 (6.21) 对每个 $1\le j\le d$ 均成立，则 $V\le U_a$ 对某个 $1\le i\le d$ 成立。

我们称一个椭球 $\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^n$ 适配于 $\{l_j\}_{j=1}^{d}$，如果其主轴˛沿着正交归一基 $\cup_{a=1}^{\widetilde{d}}\{\widetilde{e}_{ab}\}_{b=1}^{\dim U_a}$，其中 $\{\widetilde{e}_{ab}\}_{b=1}^{\dim U_a}$对每个 a 都构成 U_a 的一组基。

引理 6.6. 设 n、d、$\widetilde{d}$ 是正整数，且 $\{l_j\}_{j=1}^{d}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的坐标投影。由 $\{l_j\}_{j=1}^{d}$ 给出的 $\mathbb{R}^n$ 的极大划分存在，且在置换意义下唯一。

证明。 定义 $f\colon \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \{0,1\}^d$ 为

$$(f(j))_i = \begin{cases} 1, & e_i \in \ker l_j; \\ 0, & e_i \notin \ker l_j. \end{cases} \tag{6.22}$$

将 $f(\{1,2,\dots,n\}) = \{w_1, w_2, \dots, w_{\widetilde{d}}\}$ 写作互不相同的元素，并定义

$$U_a \coloneqq \operatorname{span}\{e_i : f(i) = w_a\}, \qquad 1 \le a \le \widetilde{d}. \tag{6.23}$$

容易验证， $\{U_a\}_{a=1}^{d}$ 是 $\mathbb{R}^n$的极大划分。

假设 $\{U_a\}_{a=1}^{d_1}, \{V_b\}_{b=1}^{d_2}$ 都是由 $\{l_j\}_{j=1}^{d}$给出的 $\mathbb{R}^n$ 的极大划分。那么 U_a, V_b 满足 (6.21)。根据 $\{U_a\}_{a=1}^{d_1}, \{V_b\}_{b=1}^{d_2}$的极大性，必有$U_a = V_b$ ，其中 $1 \le b \le d_2$。由对称性，每个 V_b 都等于某个 U_a ，其中$1 \le a \le d_1$。 □

引理 6.7。 设 $\varepsilon \in (0,1)$，且 n, d 为正整数。对于 $1 \le j \le d$，设 l_j为满足 *(6.4)* 的坐标投影，并设 $\{U_a\}_{a=1}^{d}$ 为由 $\{l_j\}_{j=1}^{d}$给出的 $\mathbb{R}^n$ 的极大划分。假设 $\omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界且凸，并满足

$$|\omega| \ge \varepsilon \prod_{j=1}^{d} |l_j(\omega)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{6.24}$$

那么，存在一个常数 $C > 0$ ，它仅取决于 n ，以及一个适配于 $\{l_j\}_{j=1}^{d}$ 的椭球 $\mathcal{C}$ ，使得

$$\forall A \subset \{1,2,\dots,\widetilde{d}\} \qquad P_A(\omega) \subset P_A(\mathcal{C}), \qquad |P_A(\mathcal{C})| \lesssim \varepsilon^{-C} |P_A(\omega)|, \tag{6.25}$$

其中 $P_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \oplus_{a \in A} U_a$ 是正交投影。特别地，当$A = \{1,2,\dots,d\}$时，

$$\omega \subset \mathcal{C}, \qquad |\mathcal{C}| \lesssim \varepsilon^{-C} |\omega|, \tag{6.26}$$

，并且当对任意 $1 \le a \le d$有 $A = \{a\}$ 时，我们可以写作 $P_a \coloneqq P_{\{a\}}$，且

$$P_a(\omega) \subset P_a(\mathcal{C}), \qquad |P_a(\mathcal{C})| \lesssim \varepsilon^{-C} |P_a(\omega)|. \tag{6.27}$$

如果 ω 还满足平衡性，即，当且仅当 $-x \in \omega$时有 $x \in \omega$ ，那么 $\mathcal{C}$ 还可以选为以原点为中心。

在证明引理 6.7 之前，我们先回顾凸集的一些有用性质。

引理 6.8。 设 n 为正整数。设 l 为坐标投影，且$U \le l(\mathbb{R}^n)$。假设 $\omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界且凸。那么

$$\frac{|l(\omega)|}{|P(l(\omega))|} \gtrsim \frac{|\omega|}{|P(\omega)|}, \tag{6.28}$$

其中 $P\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow U^{\perp}$是到 $U^{\perp}$上的坐标投影。

证明。 设 $U \le l(\mathbb{R}^n)$。我们首先注意到，由于凸性， ω 中 l 的每个纤维都不超过 l 纤维的平均大小。具体而言，

$$\forall x' \in l(\omega) \qquad |l^{-1}(x') \cap \omega| \lesssim \frac{|\omega|}{|l(\omega)|}. \tag{6.29}$$

此外， $l(\omega)$ 也是凸的。导出 (6.29) 的同一论证给出

$$\forall \widetilde{x} \in P(l(\omega)) \qquad |\widetilde{P}^{-1}(\widetilde{x}) \cap l(\omega)| \lesssim \frac{|l(\omega)|}{|P(l(\omega))|}. \tag{6.30}$$

取满足 $|(P)^{-1}(x_0) \cap \omega| \geq |\omega|/|P(\omega)|$ 的 $x_0 \in P(\omega)$。（由 Fubini 定理可保证此类 x_0 的存在。）回想 $\ker P = U \leq l(\mathbb{R}^n)$，我们有 $|P^{-1}(x_0) \cap \omega|_{\dim U} = |l(P^{-1}(x_0) \cap \omega)|_{\dim U}$。注意，$l(P^{-1}(x_0) \cap \omega) \subset \widetilde{P}^{-1}(l(x_0)) \cap l(\omega)$，且 $\ker \widetilde{P} = U$。因此，$|P^{-1}(x_0) \cap \omega|_{\dim U} \leq |\widetilde{P}^{-1}(l(x_0)) \cap l(\omega)|_{\dim U}$。于是，由 (6.30)、$x_0 \in P(\omega)$ 和 $P \circ l = l \circ P$，我们推得

$$\frac{|l(\omega)|}{|P(l(\omega))|} \gtrsim |\widetilde{P}^{-1}(l(x_0)) \cap l(\omega)| \geq |P^{-1}(x_0) \cap \omega| \geq \frac{|\omega|}{|P(\omega)|}. \tag{6.31}$$

□

引理 6.9. 设 $\varepsilon \in (0,1)$，且 n, d 为正整数。对于 $1 \leq j \leq d$，设 l_j 为满足 *(6.4)* 的坐标投影，并设 $\{U_a\}_{a=1}^d$ 为由 $\{l_j\}_{j=1}^d$ 给出的 $\mathbb{R}^n$ 的极大划分。假设 $\omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界且凸，并满足 *(6.24)*。设 $A \subset \{1, 2, \ldots, d\}$，并设 P_A 为到 $\oplus_{a \in A} U_a < \mathbb{R}^n$ 上的坐标投影。则 $P_A(\omega)$ 是凸的，并且存在一个仅依赖于 n 的常数 C，使得

$$|P_A(\omega)| \geq C\varepsilon \prod_{j=1}^d |l_j \circ P_A(\omega)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{6.32}$$

证明。只需证明引理对 $A = \{2, \ldots, d\}$ 成立即可。不失一般性，我们可以假设 $l_j \neq \mathbb{I}_n$。设 $\omega \subset \mathbb{R}^n$ 是满足 (6.24) 的有界凸集。注意，$\{U_a\}_{a=2}^d$ 是由 $\{l_j \circ P_A\}_{j=1}^d$ 给出的 $U_1^\perp$ 的极大划分。由 (6.24),

$$|\omega| \geq \varepsilon \prod_{j=1}^d |l_j(\omega)|^{\frac{1}{p_j}} = \varepsilon \left(\prod_{j: U_1 \leq \ker l_j} |l_j(\omega)|^{\frac{1}{p_j}} \right) \left(\prod_{j: U_1 \leq l_j(\mathbb{R}^n)} |l_j(\omega)|^{\frac{1}{p_j}} \right). \tag{6.33}$$

应用引理 6.8，并取 $P = P_A$，$U = U_1$ 以及 $l = l_j$，对于 $U_1 \leq l_j(\mathbb{R}^n)$可得

$$\begin{aligned} |\omega| \geq & \varepsilon \left(\prod_{j: U_1 \leq \ker l_j} |P_1^\perp(l_j(\omega))|^{\frac{1}{p_j}} \right) \prod_{j: U_1 \leq l_j(\mathbb{R}^n)} \left(|P_1^\perp(l_j(\omega))| \frac{|l_j(\omega)|}{|P_1^\perp(l_j(\omega))|} \right)^{\frac{1}{p_j}} \\ \gtrsim & \varepsilon \left(\prod_{j=1}^d |l_j(P_1^\perp(\omega))|^{\frac{1}{p_j}} \right) \frac{|\omega|}{|P_1^\perp(\omega)|}, \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式源于 (6.4) 和 $l_j \circ P_1^\perp = P_1^\perp \circ l_j$。另一方面，我们有 $|\omega| = |P_1^\perp(\omega)|(|\omega|/|P_1^\perp(\omega)|)$。因此，

$$|P_1^\perp(\omega)| \gtrsim \varepsilon \prod_{j=1}^d |l_j(P_1^\perp(\omega))|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{6.34}$$

□

引理 *6.7* 的证明。我们对 d 使用归纳法来证明该引理。若 $d = 1$，则对所有 j都有 $l_j = \mathbb{I}_n$。令 $\mathcal{C}$ 为包含 ω 的最小椭球。约翰椭球定理蕴含 $|\mathcal{C}| \sim |\omega|$。因此，不妨设 $d > 1$。

令 $\{U_a\}_{a=1}^d$ 是由 $\{l_j\}_{j=1}^d$ 给出的 $\mathbb{R}^n$ 的极大划分。不失一般性，我们可以假设对于任意 j，都有 $l_j \neq \mathbb{I}_n$。设 $\omega \subset \mathbb{R}^n$ 是满足 (6.24) 的有界凸集。令 $P_a, P_a^\perp$ 表示到 $U_a, U_a^\perp$ 上的坐标投影，

分别。于是 $\{U_a\}_{a=2}^d$ 是由 $\{P_1^\perp \circ l_j\}_{j=1}^d$ 给出的 $U_1^\perp$ 的极大划分。~应用引理 6.9，并取 $A=\{2,\dots,d\}$，可得

$$|P_1^\perp(\omega)| \gtrsim \varepsilon \prod_{j=1}^d |l_j(P_1^\perp(\omega))|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{6.35}$$

根据归纳假设，存在一个仅取决于 n 的常数 $C>0$ 以及一个适配于 $\{P_1^\perp \circ l_j\}_{j=1}^d$ 的椭球 $\mathcal{C}_1^\perp \subset U_1^\perp$，使得

$$\forall A' \subset \{2,\dots,\widetilde{d}\} \qquad P_{A'}(\omega) \subset P_{A'}(\mathcal{C}_1^\perp), \qquad |P_{A'}(\mathcal{C}_1^\perp)| \lesssim \varepsilon^{-C}|P_{A'}(\omega)|. \tag{6.36}$$

在假设 (6.4) 下，定理6.1给出

$$\begin{aligned}
|\omega| =& |P_1^\perp(\omega)| \frac{|\omega|}{|P_1^\perp(\omega)|} \\
\le& \left(\prod_{j=1}^d |l_j(P_1^\perp(\omega))|^{\frac{1}{p_j}} \right) \frac{|\omega|}{|P_1^\perp(\omega)|} \\
=& \left(\prod_{\substack{j:1\le j\le d \\ U_1 \le \ker l_j}} |l_j(P_1^\perp(\omega))|^{\frac{1}{p_j}} \right) \left(\prod_{\substack{j:1\le j\le d \\ U_1 \le l_j(\mathbb{R}^n)}} |l_j(P_1^\perp(\omega))|^{\frac{1}{p_j}} \right) \frac{|\omega|}{|P_1^\perp(\omega)|} \\
=& \left(\prod_{\substack{j:1\le j\le d \\ U_1 \le \ker l_j}} |l_j(\omega)|^{\frac{1}{p_j}} \right) \left[\prod_{\substack{j:1\le j\le d \\ U_1 \le l_j(\mathbb{R}^n)}} \left(|l_j(P_1^\perp(\omega))| \frac{|\omega|}{|P_1^\perp(\omega)|} \right)^{\frac{1}{p_j}} \right],
\end{aligned}$$

利用 (6.24)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\prod_{\substack{j:1\le j\le d \\ U_1 \le l_j(\mathbb{R}^n)}} \left(|l_j(P_1^\perp(\omega))| \frac{|\omega|}{|P_1^\perp(\omega)|} \right)^{\frac{1}{p_j}} \\
\gtrsim& \varepsilon \prod_{\substack{j:1\le j\le d \\ U_1 \le l_j(\mathbb{R}^n)}} |l_j(\omega)|^{\frac{1}{p_j}} = \varepsilon \prod_{\substack{j:1\le j\le d \\ U_1 \le l_j(\mathbb{R}^n)}} \left(|P_1^\perp(l_j(\omega))| \frac{|l_j(\omega)|}{|P_1^\perp(l_j(\omega))|} \right)^{\frac{1}{p_j}}.
\end{aligned}$$

应用引理 6.8，其中 $U=U_1$，$l=l_j$ 取 $U_1 \le l_j(\mathbb{R}^n)$，得到

$$\frac{|l_j(\omega)|}{|P_1^\perp(l_j(\omega))|} \lesssim \varepsilon^{-C} \frac{|\omega|}{|P_1^\perp(\omega)|}. \tag{6.37}$$

回顾假设 $l_j \neq \mathbb{I}_n$ 以及 $\{U_a\}$ 的极大性，我们注意到，$l_j(\mathbb{R}^n)$~是 $\{U_a\}_{a=1}^d$ 的某个真子集的直和。再次应用引理 6.9和归纳假设，得到一个适配于 $\{l_{j'} \circ l_j\}_{j'=1}^d$ 的椭球 $\mathcal{C}' \subset l_j(\mathbb{R}^n)$，满足

$$l_j(\omega) \subset \mathcal{C}', \qquad |\mathcal{C}'| \le \varepsilon^{-C}|l_j(\omega)|. \tag{6.38}$$

在假设 $U_1 \le l_j(\mathbb{R}^n)$ 的条件下，我们有

$$\frac{|l_j(\omega)|}{|P_1^\perp(l_j(\omega))|} \gtrsim \varepsilon^C \frac{|\mathcal{C}'|}{|P_1^\perp(\mathcal{C}')|} \sim \varepsilon^C |P_1(\mathcal{C}')| \gtrsim \varepsilon^C |P_1(\omega)|. \tag{6.39}$$

令 $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_1^{\perp}$，其中 $\mathcal{C}_1$ 是包含 $P_1(\omega)$ 的最小椭球。则 $|\mathcal{C}_1|\sim|P_1(\omega)|$，并且 $\omega\subset\mathcal{C}$；结合约翰椭球定理、(6.37) 和 (6.39)，可得

$$|\mathcal{C}|\sim|\mathcal{C}_1^{\perp}||\mathcal{C}_1|\lesssim\varepsilon^{-C}|P_1^{\perp}(\omega)|\frac{|\omega|}{|P_1^{\perp}(\omega)|}=\varepsilon^{-C}|\omega|. \tag{6.40}$$

~令 $\{1\}\subsetneqq A\subsetneqq\{1,2,\dots,d\}$。利用引理 6.8 和 $U=P_1$，$l=P_A$ 可得

$$\frac{|\omega|}{|P_1^{\perp}(\omega)|}\lesssim\frac{|P_A(\omega)|}{|P_{A'}(\omega)|}. \tag{6.41}$$

Then

$$|P_A(\mathcal{C})|\sim|\mathcal{C}_1||P_{A'}(\mathcal{C}_1^{\perp})|\lesssim\varepsilon^{-C}\frac{|\omega|}{|P_1^{\perp}(\omega)|}|P_{A'}(\omega)|\lesssim\varepsilon^{-C}|P_A(\omega)|. \tag{6.42}$$

再次应用约翰椭球定理，我们可以用包含 $\mathcal{C}$ 且适配于 $\{l_j\}_{j=1}^{d}$ 的最小椭球替换它。若 ω 还平衡，即 $x\in\omega$ 当且仅当 $-x\in\omega$，则还可以进一步选取 $\mathcal{C}$，使其以原点为中心。□

~**推论 6.10.** 假设满足推论 *6.2* 中的条件。令 $\{U_a\}_{a=1}^{d}$ 为由 $\{L_j\}_{j=1}^{m}$ 给出的 $\mathbb{R}^n$ 的极大划分。令 $\varepsilon\in(0,1)$。设

$$|\omega|\geq\varepsilon\left(\prod_{j=1}^{\widetilde{m}}|P_j^{\perp}(\omega)|^{\frac{\tilde{q}_j}{N'}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}|L_j(\omega)|^{\frac{q_j}{N'}}\right),\qquad N'=\sum_{j=1}^{m}q_j$$

对某个有界凸子集 $\omega\subset\mathbb{R}^n$ 成立。那么存在一个仅依赖于 n 的常数 $C>0$，以及一个适配于 $\{L_j\}_{j=1}^{m}$ 的椭球 $\mathcal{C}$，使得

$$\forall A\subset\{1,2,\dots,\widetilde{d}\}\qquad P_A(\omega)\subset P_A(\mathcal{C}),\qquad |P_A(\mathcal{C})|\lesssim\varepsilon^{-C}|P_A(\omega)|, \tag{6.43}$$

其中 $P_A:\ \mathbb{R}^n\longrightarrow\oplus_{a\in A}U_a$ 是正交投影。特别地，当~$A=\{1,2,\dots,d\}$时，

$$\omega\subset\mathcal{C},\qquad |\mathcal{C}|\lesssim\varepsilon^{-C}|\omega|, \tag{6.44}$$

~并且当对任意 $1\leq a\leq d$都有 $A=\{a\}$ 时，我们可以写作 $P_a:=P_{\{a\}}$，且

$$P_a(\omega)\subset P_a(\mathcal{C}),\qquad |P_a(\mathcal{C})|\lesssim\varepsilon^{-C}|P_a(\omega)|. \tag{6.45}$$

若 ω 还满足平衡的条件，即当且仅当 $-x\in\omega$ 时 $x\in\omega$，那么还可以进一步选取 $\mathcal{C}$ 使其以原点为中心。

若将 $\{(L_j,q_j)\}_{j=1}^{m}$ 替换为 $\{(L_j,q_j)\}_{j=m+1}^{M}$，也可得到类似结论。

证明。我们验证 $\{(L_j,\ q_j)\}_{j=1}^{m}$ 的情形。对于 $\{(L_j,\ q_j)\}_{j=m+1}^{M}$，论证几乎完全相同。按照推论 6.2 的证明中的相同论证，可得 (6.7)。此外，我们注意到，$\{L_j\}_{j=1}^{m}\cup\{P_j^{\perp}\}_{j=1}^{\widetilde{m}}$给出的极大划分与 $\{L_j\}_{j=1}^{m}$给出的极大划分相同。因此，结论由引理 6.7 得出。□

7. 精化 Ω

在接下来的两节中，我们旨在通过沿着 $\widetilde{\pi}_j,\widetilde{\pi}_j^{*}$ 的纤维流动来构造一个膨胀映射。给定一个光滑流形，沿某个向量场 V 在小邻域内的流映射由常微分方程唯一确定

$$\frac{d}{d\tau}\theta(t,z)=V_{\theta(t,z)},\qquad\theta(0,z)=z.$$

对于每个 z， $\theta(t,z)$ 是 V 下的不变曲线，即它始终与 V 相切。沿 V 的指数流定义为 $e^V(z) = \theta(1,z)$。沿用第 5 节中的记号，我们分别考察由$\mathbf{X},\mathbf{Y}$张成的向量场所对应的指数流。具体而言，对于 $s \in \mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned} e^{s\cdot\mathbf{X}}(x,y,t) &\coloneqq (x+s, y, t-\tfrac{1}{2}s\cdot y) \in \pi^{-1}(\pi(x,y,t)), \\ e^{s\cdot\mathbf{Y}}(x,y,t) &\coloneqq (x, y+s, t+\tfrac{1}{2}x\cdot s) \in \pi_*^{-1}(\pi_*(x,y,t)). \end{aligned} \tag{7.1}$$

对于 $z \in \mathbb{H}^n$， $l \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们进一步定义 $\Phi_l(z) : \mathbb{R}^{ln} \longrightarrow \mathbb{H}^n$ 如下：

$$\begin{aligned} \Phi_1(s)(z) &\coloneqq e^{s\cdot\mathbf{X}}(z), \\ \Phi_{2l}(s,u)(z) &\coloneqq e^{u\cdot\mathbf{Y}}\Phi_{2l-1}(s)(z), \\ \Phi_{2l+1}(s,u)(z) &\coloneqq e^{u\cdot\mathbf{X}}\Phi_{2l}(s)(z). \end{aligned} \tag{7.2}$$

类似地，交换 $\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$ 即可定义 Φ_l^*。如果不会引起歧义，我们可以省略 z。注意，

$$\begin{aligned} &\forall 1 \le j \le m && \pi_j^{-1}(\pi_j(z)) \subset \pi^{-1}(\pi(z)); \\ &\forall m < j \le M && \pi_j^{-1}(\pi_j(z)) \subset \pi_*^{-1}(\pi_*(z)); \\ &\forall 1 \le j \le \widetilde{m} && \widetilde{\pi}_j^{-1}(\widetilde{\pi}_j(z)) \subset \pi^{-1}(\pi(z)), \\ & && (\widetilde{\pi}_j^*)^{-1}(\widetilde{\pi}_j^*(z)) \subset \pi_*^{-1}(\pi_*(z)). \end{aligned} \tag{7.3}$$

此外，限制在 π 的一个纤维上时， $\{\pi_j\}_{j=1}^m$， $\{\widetilde{\pi}_j\}_{j=1}^{\widetilde{m}}$ 是仿射坐标投影。具体来说，

$$\begin{aligned} \pi_j|_{\pi^{-1}(y,t)}(s,y,t-\frac{1}{2}s\cdot y) &= (L_j s, y, t), && 1 \le j \le m, \\ \widetilde{\pi}_j|_{\pi^{-1}(y,t)}(s,y,t-\frac{1}{2}s\cdot y) &= (P_j s, y, t), && 1 \le j \le \widetilde{m}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

对于限制在 π_* 的纤维上的 $\{\pi_j\}_{j=m+1}^M, \{\widetilde{\pi}_j^*\}_{j=1}^{\widetilde{m}}$，也有类似的结论。因此，采用参数化方式描述 $\pi_j, \widetilde{\pi}_j, \widetilde{\pi}_j^*$ 的纤维会比较方便。对于 $\Omega \subset \mathbb{H}^n, z \in \mathbb{H}^n$，定义

$$\begin{aligned} T^\Omega(z) &\coloneqq \{s \in \mathbb{R}^n : e^{s\cdot\mathbf{X}}(z) \in \Omega\}; \\ T_*^\Omega(z) &\coloneqq \{s \in \mathbb{R}^n : e^{s\cdot\mathbf{Y}}(z) \in \Omega\}; \\ T_j^\Omega(z) &\coloneqq \begin{cases} \{s_j \in K_j : e^{s_j\cdot\mathbf{X}}(z) \in \Omega\}, & 1 \le j \le m, \\ \{s_j \in K_j : e^{s_j\cdot\mathbf{Y}}(z) \in \Omega\}, & m < j \le M; \end{cases} \\ \widetilde{T}_j^\Omega(z) &\coloneqq \{s \in \mathbb{R}^{\widetilde{k}_j} : e^{(s,0)\cdot\mathbf{X}}(z) \in \Omega\}; \\ (\widetilde{T}_j^*)^\Omega(z) &\coloneqq \{s \in \mathbb{R}^{\widetilde{k}_j} : e^{(s,0)\cdot\mathbf{Y}}(z) \in \Omega\}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

在不会引起歧义时，我们可以省略 Ω 和 z。于是，$\pi_j|_{\pi^{-1}(\pi(z))\cap\Omega}$ $1\le j\le m$ 可以与 $L_j|_{T^\Omega(z)}$ 等同，而 $\widetilde{\pi}_j|_{\pi^{-1}(\pi(z))\cap\Omega}$ 可以与 $P_j|_{\widetilde{T}^\Omega(z)}$ 等同。对于 $\pi_j, m<j\le M$ 和 $\widetilde{\pi}_j^*$，也有类似的观察。

定义 7.1。设 $\varepsilon>0$。 $\widetilde{\Omega}$ 称为 Ω 的 ε-细化 $\subset\mathbb{R}^d$，如果 $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$ 且 $|\widetilde{\Omega}|\gtrsim\varepsilon|\Omega|$。若 $\varepsilon=1$，则称 $\widetilde{\Omega}$ 是 Ω 的一个细化。

下面的引理改编自 [6] 的引理 1 和 [9]的引理 3.1。不同于 [6, 31, 9], , 在 $|\pi_j^{-1}(\pi_j(z))\cap\Omega|\gtrsim\alpha_j$ 对细化后的所有 $z\in\Omega$ 都成立的情形，我们细化较大的纤维 $\pi^{-1}(\pi(z))\cap\Omega$，使得在每个较大纤维内，对于每个 $j\le m$，π_j纤维（$|T^\Omega(z)|/|L_j(T\Omega(z))|$）的平均大小下界为 α_j；而某个特定的π_j 纤维可能很小（尽管这类π_j 纤维并不多）。类似地，对于 $j>m$，我们可以在每个 π_* 纤维内给出π_j 纤维平均大小的下界。然而，对于 Ω 与一个 $\widetilde{\pi}_j$ 或 $\widetilde{\pi}_j^*$ 纤维的每个交，细化分别保证其下界为 β_j 或 β_j^*，即 $|\widetilde{T}_j^\Omega(z)|\gtrsim\beta_j, |(\widetilde{T}_j^*)^\Omega(z)|\gtrsim\beta_j^*$。

引理 7.2. 设$\Omega\in\mathbb{H}^n$ 有界且可测，并设

$$\alpha_j=\frac{|\Omega|}{|\pi_j(\Omega)|},\qquad j=1,\dots,M; \tag{7.6}$$

$$\beta_j=\frac{|\Omega|}{|\widetilde{\pi}_j(\Omega)|},\quad \beta_j^*=\frac{|\Omega|}{|\widetilde{\pi}_j^*(\Omega)|},\qquad j=1,\dots,\widetilde{m}. \tag{7.7}$$

设 $A\in\mathbb{Z}_{>0}$.那么存在依赖于 n、M、A 的 $c>0$，以及一条细化链$\Omega_1\subset\Omega_2\subset\cdots\subset\Omega_A\subset\Omega$（隐含常数可能依赖于 A）、$z_0\in\mathbb{H}^n$，以及对于 $l=1$、2、.....、A 的集合 $S_l\in\mathbb{R}^{ln}$，使得

$$S_1=T^{\Omega_1}(z_0); \tag{7.8}$$

$$S_{l+1}=\begin{cases}\{(s',s)\in S_l\times\mathbb{R}^n : s\in T_*^{\Omega_{l+1}}(\Phi_l(s')(z_0))\}, & l\ is\ odd,\\ \{(s',s)\in S_l\times\mathbb{R}^n : s\in T^{\Omega_{l+1}}(\Phi_l(s')(z_0))\}, & l\ is\ even;\end{cases} \tag{7.9}$$

$$\frac{|S_1|}{|L_j(S_1)|}\ge c\alpha_j,\quad \frac{|\mathcal{G}_l(s)|}{|L_j(\mathcal{G}_l(s))|}\ge c\alpha_j,\qquad j=1,\dots,m, s\in S_{2l}; \tag{7.10}$$

$$\frac{|\mathcal{F}_l(s)|}{|L_j(\mathcal{F}_l(s))|}\ge c\alpha_j,\quad j=m+1,\dots,M, s\in S_{2l-1}; \tag{7.11}$$

$$\forall z\in\Omega_l\qquad\begin{cases}|\widetilde{T}_j^{\Omega_l}(z)|\ge c\beta_j, & l\ is\ odd,\\ |(\widetilde{T}_j^*)^{\Omega_l}(z)|\ge c\beta_j^*, & l\ is\ even.\end{cases} \tag{7.12}$$

这里，对于 $l\in\mathbb{Z}_{>0}$、$s\in S_{2l-1}$，

$$\mathcal{F}_l(s):=\{u\in\mathbb{R}^n : (s,u)\in S_{2l}\};$$

对于 $s\in S_{2l}$，

$$\mathcal{G}_l(s):=\{v\in\mathbb{R}^n : (s,v)\in S_{2l+1}\}.$$

我们称（z_0、S_1、$\mathcal{F}_l$、$\mathcal{G}_l$）为（Ω π、A）的精化流方案。类似地，将 Φ_l 替换为 Φ_l^*，即可得到（Ω π_*、A）的精化流方案。

证明。我们给出 A为奇数时的证明。A 为偶数时的情形可类似处理。设 $c>0$ 为一个小常数，其值将在后面确定。令

$$\Omega_j':=\left\{z\in\Omega : \frac{|T^\Omega(z)|}{|L_j(T^\Omega(z))|}\ge c\alpha_j\right\},\qquad 1\le j\le m;$$

$$\Omega'_{j+m} \coloneqq \left\{ z \in \Omega : \frac{|T^{\Omega}(z)|}{|P_j(T^{\Omega}(z))|} \geq c\beta_j \right\}, \qquad 1 \leq j \leq \widetilde{m}.$$

回忆 P_j 定义于式（5.7）。由余面积公式，

$$\begin{aligned} |\Omega \setminus \Omega'_j| &= \int_{\pi(\Omega \setminus \Omega'_j)} |T^{\Omega}(0,y,t)| dydt \\ &< c\alpha_j \int_{\pi(\Omega)} |L_j(T^{\Omega}(0,y,t))| dydt \\ &= c\alpha_j |\pi_j(\Omega)| \\ &= c|\Omega|, \end{aligned}$$

同样，对于 $m < j \leq m + \widetilde{m}$，$|\Omega \setminus \Omega'_j| < c|\Omega|$。取 $\Omega' = \cap_{j=1}^{m+\widetilde{m}} \Omega'_j$。选择充分小的 $c < \frac{1}{100(m+\widetilde{m})}$，我们有 $|\Omega'| \geq (1 - c(m+\widetilde{m}))|\Omega|$。注意，每个 $\pi^{-1}(\pi(z)) \cap \Omega \neq \emptyset$ 要么被完全舍弃，要么保持不变。在每个未受影响的纤维中，π_j 或 $\widetilde{\pi}_j$ 纤维的平均大小都很大。具体而言，

$$\frac{|T^{\Omega'}(z)|}{|L_j(T^{\Omega'}(z))|} \geq c\alpha_j, \quad 1 \leq j \leq m; \qquad \frac{|T^{\Omega'}(z)|}{|P_j(T^{\Omega'}(z))|} \geq c\beta_j, \quad 1 \leq j \leq \widetilde{m}. \tag{7.13}$$

令 $\Omega_{\widetilde{m}} \coloneqq \Omega'$。那么，对于某个依赖于 m，n 的小常数 $c_{\widetilde{m}} \in (0, 1)$，有 $|\Omega_{\widetilde{m}}| \geq (1 - c_{\widetilde{m}})|\Omega|$。假设对于 n，存在某个依赖于它的小常数 $c_j \in (0, 1)$，使得对 $j = \widetilde{m}, \widetilde{m}-1, \cdots, 1$，有 $|\Omega_j| \geq (1 - c_j)|\Omega|$。令

$$\widetilde{\Omega}_{j-1} \coloneqq \{ z \in \widetilde{\Omega}_j : |\widetilde{T}_j^{\widetilde{\Omega}_j}(z)| < c\beta_j \}.$$

注意到 $(0, x_j, y, t - \frac{1}{2}(0, x_j) \cdot y) \in \widetilde{\pi}_j^{-1}(x_j, y, t)$。余面积公式给出

$$\begin{aligned} |\widetilde{\Omega}_j \setminus \widetilde{\Omega}_{j-1}| &= \int_{\widetilde{\pi}_j(\widetilde{\Omega}_j \setminus \widetilde{\Omega}_{j+1})} |\{ s \in \mathbb{R}^{\widetilde{k}_j} : (s, x_j, y, t - \frac{1}{2}(s, x_j) \cdot y) \in \widetilde{\Omega}_j \}| dx_j dydt \\ &= \int_{\widetilde{\pi}_j(\widetilde{\Omega}_j \setminus \widetilde{\Omega}_{j-1})} |\widetilde{T}_j^{\widetilde{\Omega}_j}(0, x_j, y, t - \frac{1}{2}(0, x_j) \cdot y)| dx_j dydt \\ &< c|\widetilde{\pi}_j(\Omega)|\beta_j \\ &\leq c_{j-1}|\widetilde{\Omega}_j|, \end{aligned}$$

其中 $c_{j-1} = \frac{c}{1-c_j}$。此外，(7.3)、(7.13) 以及 $\ker P_j$ 的包含关系——即 $\ker P_1 < \ker P_2 < \cdots < \ker P_{\widetilde{m}} = \mathbb{R}^n$——意味着当 $c_{j-1} > 0$ 足够小时，

$$\forall z \in \widetilde{\Omega}_{l-1} \quad \forall j \leq l \leq \widetilde{m} \qquad |\widetilde{T}_l^{\widetilde{\Omega}_{j-1}}(z)| \geq c_{j-1}\beta_l,$$

且 (7.13) 得以保留。令 $\Omega_A = \Omega_0$。我们再重复这一过程 $A-1$ 次，得到 $\Omega_A \supset \Omega_{A-1} \supset \cdots \supset \Omega_1$。具体而言，我们细化 $T_*^{\Omega_{A-2l}}$，得到 $\Omega_{A-(2l+1)} \subset \Omega_{A-2l}$；并细化 $T^{\Omega_{A-(2l+1)}}$，得到 $\Omega_{A-2l+2} \subset \Omega_{A-(2l+1)}$。任取 $z_0 \in \Omega_1$，即可完成证明。□

8. An inflation map

回顾第 5 节中引入的记号。设

$$\widetilde{\widetilde{q}}_j = \begin{cases} \widetilde{q}_j, & 1 \leq j < \widetilde{m}, \\ \widetilde{q}_{\widetilde{m}} - N, & j = \widetilde{m}. \end{cases} \tag{8.1}$$

由 (5.4)、(5.5) 和 (5.9) 可推出 $\widetilde{\widetilde{q}}_j \geq 1$。此外，$(A')$ 蕴含

$$\sum_{j=1}^{\widetilde{m}} \widetilde{k}_j \widetilde{\widetilde{q}}_j = \left(\sum_{j=1}^{\widetilde{m}} \widetilde{k}_j \widetilde{q}_j \right) - nN = \left(\sum_{j=m+1}^{M} k_j q_j \right) - nN = N. \tag{8.2}$$

令 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$。由引理 7.2，对于任意 $A \geq 3$，存在 Ω π, A 的一个精化流方案（$z_0, S_1, \mathcal{F}_l, \mathcal{G}_l$）。记 $S = S_1, \mathcal{F} = \mathcal{F}_1, \mathcal{G} = \mathcal{G}_1$。记 $s = (s^{j,l}), \mathbf{u} = (u^{j,l,a})$，其中 $s^{j,l}, u^{j,l,a} \in \mathbb{R}^n$ 以及指标来自

$$1 \leq j \leq \widetilde{m}, \quad 1 \leq l \leq \widetilde{\widetilde{q}}_j, \quad 1 \leq a \leq \widetilde{k}_j. \tag{8.3}$$

膨胀映射的定义域 $\Omega^\flat$ 具有如下形式

$$\Omega^\flat := \{(s, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \Xi \times \mathbb{R}^{2nN} : u^{j,l,a} \in \mathcal{F}(s^{j,l}), v^{j,l,a} \in \mathcal{G}(s^{j,l}, u^{j,l,a})\}, \tag{8.4}$$

并且膨胀映射 $\Psi : \Omega^\flat \longrightarrow \mathbb{R}^{(2n+1)N}$ 定义为

$$\Psi(s, \mathbf{u}, \mathbf{v}) := (e^{v^{j,l,a} \cdot \mathbf{X}} e^{u^{j,l,a} \cdot \mathbf{Y}} e^{s^{j,l} \cdot \mathbf{X}}(z_0))_{1 \leq j \leq \widetilde{m}, 1 \leq l \leq \widetilde{\widetilde{q}}_j, 1 \leq a \leq \widetilde{k}_j}. \tag{8.5}$$

这里，$|\mathcal{F}(s^{j,l})| \gtrsim \beta^*_{\widetilde{m}}$、$|\mathcal{G}(s^{j,l}, u^{j,l,a})| \gtrsim \beta_{\widetilde{m}}$，且 Ξ 是通过 $\iota : \Xi \hookrightarrow \mathbb{R}^{n(\sum_{j=1}^{\widetilde{m}} \widetilde{\widetilde{q}}_j)}$ 将 $\mathbb{R}^N$ 的一个子集嵌入到 $\mathbb{R}^{n(\sum_{j=1}^{\widetilde{m}} \widetilde{\widetilde{q}}_j}$ 中的映射。ι、Ξ 是在更广泛的嵌入类 $\iota(\widetilde{k}, \widetilde{\widetilde{q}}, E, \tau)$ 和集合 $\Xi(\widetilde{k}, \widetilde{\widetilde{q}}, E, \tau)$ 中定义的。

定义 8.1。考虑一个参数类 $(k, \widetilde{\widetilde{q}}, E, \tau)$，其中

- $\widetilde{k} = (k_0, k_1, \ldots, k_{\widetilde{m}})$，其中 $\widetilde{m} > 0$ 满足 $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_{\widetilde{m}}$；
- $\widetilde{\widetilde{q}} = (\widetilde{\widetilde{q}}_1, \ldots, \widetilde{\widetilde{q}}_{\widetilde{m}}) \in \mathbb{Z}^{\widetilde{m}}_{>0}$；
- $E \subset \mathbb{R}^{k_{\widetilde{m}}}$；并且
- $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_d)$ 是某个 $d \geq 0$ 的实数 d-元组。如果 $d = 0$，那么 $\tau = ()$ 是空元组。

记 $\widetilde{Q}_j = \sum_{i=j}^{\widetilde{m}} \widetilde{\widetilde{q}}_i$，$\xi = (\xi^{j,l})$ $s = (s^{j,l})$，其中 $\xi^{j,l} \in \mathbb{R}^{\widetilde{k}_j}$，$s^{j,l} \in \mathbb{R}^{\widetilde{k}_{\widetilde{m}} + d}$ 对于 $1 \leq j \leq \widetilde{m}$，$1 \leq l \leq \widetilde{\widetilde{q}}_j$。

■ 按照矩阵 2 中的定义，定义 $\iota(\widetilde{k}, \widetilde{\widetilde{q}}, E, \tau) : (\xi^{j,l}) \mapsto (s^{j,l})$。（另见矩阵 3。）

取 $E = S, \tau = ()$ 的特殊情形，我们令 $\iota := \iota(k, \widetilde{\widetilde{q}}, S, ())$。

■ 定义 $\Xi(\widetilde{k}, \widetilde{\widetilde{q}}, E, \tau) := (\iota(\widetilde{k}, \widetilde{\widetilde{q}}, E, \tau))^{-1}((E \times \{\tau\}) \cap \widetilde{Q}_1)$。取 $E = S, \tau = ()$ 的特殊情形，我们令 $\Xi := \Xi(k, \widetilde{\widetilde{q}}, S, ())$。从现在起，我们将 ξ 与 s 视为相同；若需要 $\xi^{j,l} \in \mathbb{R}^{k_j}$，则用 ξ 指代；若需要 $s^{j,l} \in \mathbb{R}^{k_{\widetilde{m}} + d}$，则用 s 指代。

■ 令 $G_0 : \mathbb{R}^{\widetilde{k}_{\widetilde{m}}} \longrightarrow [0, \infty)$ 为有界可测函数。定义

$$G_j(s_j) := \left(\int_{P_{j-1}(P_j^{-1}(s_j) \cap E)} G_{j-1}^{\frac{1}{\widetilde{Q}_j}}(s) ds \right)^{\widetilde{Q}_j}, \qquad 1 \leq j \leq \widetilde{m}. \tag{8.6}$$

其中 s_j 是一个 $(k_{\widetilde{m}} - k_j)$ 元实数组，P_j 是从 $\mathbb{R}^{\widetilde{k}_{\widetilde{m}}}$ 到最后 $\widetilde{k}_{\widetilde{m}} - \widetilde{k}_j$ 个坐标的正交投影（$0 \leq j < \widetilde{m}$），$P_{\widetilde{m}}$ 是零映射，且 $P_{\widetilde{m}}^{-1}(s_{\widetilde{m}}) = \mathbb{R}^{k_{\widetilde{m}}}$。对于固定的 s_j，$s \in P_{j-1}(P_j^{-1}(s_j) \cap E)$ 的形式为 $s = (s', s_j)$。对 $P_{j-1}(P_j^{-1}(s_j) \cap E)$ 的积分，理解为关于 s' 的勒贝格积分。

注记。

(1) 尽管我们已在 (5.7) 中定义了 P_j，但当 $k_{\widetilde{m}} = n$ 时，它们与上述 P_j 一致，因此这种记号滥用是完全可以接受的。

$$s^{j,l} := \begin{pmatrix} \xi^{j,l} & \text{rows } 1 \text{ to } \widetilde{k}_j, \\ (\xi^{j+1,1})_{\widetilde{k}_j+1}, \cdots, (\xi^{j+1,1})_{\widetilde{k}_{j+1}}, & \text{rows } \widetilde{k}_j+1 \text{ to } \widetilde{k}_{j+1} \\ (\xi^{j+2,1})_{\widetilde{k}_{j+1}+1}, \cdots, (\xi^{j+2,1})_{\widetilde{k}_{j+2}}, & \text{rows } \widetilde{k}_{j+1}+1 \text{ to } \widetilde{k}_{j+2} \\ \cdots & \\ (\xi^{\widetilde{m},1})_{\widetilde{k}_{\widetilde{m}-1}+1}, \cdots, (\xi^{\widetilde{m},1})_{\widetilde{m}} & \text{rows } \widetilde{k}_{\widetilde{m}-1}+1 \text{ to } \widetilde{k}_{\widetilde{m}} \\ \tau & \text{rows } \widetilde{k}_{\widetilde{m}}+1 \text{ to } \widetilde{k}_{\widetilde{m}}+d \end{pmatrix}$$

MATRIX 2

(2) 在例3.4中，我们有 $\widetilde{m}=1$，$\widetilde{k}_1=3$，$\widetilde{\widetilde{q}}_1=1$，$E=S$，$\tau=()$。那么，本节中定义的 $\Omega^\flat$ 与小节3.2中的定义一致。在例3.5中，我们有 $\widetilde{m}=2$，$k=(0,1,4)$ $\widetilde{\widetilde{q}}=(5,1)$ $E=S$，$\tau=()$，并且可以看到，小节3.3中的 $\Omega^\flat$ 也与这里的定义相符。

下面记录参数 $(k,\widetilde{\widetilde{q}},E,\tau)$ 的一些性质。

性质8.2. 令 $(k,\widetilde{\widetilde{q}},E,\tau)$ 为一个长度为 $\widetilde{m}$ 的参数类。

(1) 若 $\widetilde{m}=1$，则 $\Xi(\widetilde{k},\widetilde{\widetilde{q}},E,\tau)=E^{\widetilde{\widetilde{q}}_1}$ 是一个乘积集。

(2) 对于 $1\le j\le\widetilde{m}$，考虑一个 $(\widetilde{k}_{\widetilde{m}}-\widetilde{k}_j)$ 元组 s_j 和

$$\Xi_j(s_j) := \Xi((\widetilde{k}_1,\dots,\widetilde{k}_j),(\widetilde{\widetilde{q}}_1,\dots,\widetilde{\widetilde{q}}_{j-1},\widetilde{\widetilde{q}}_j+\delta_{j-\widetilde{m}})\ E'(s_j),(s_j,\tau))$$

其中 $E'(s_j)=\{s\in\mathbb{R}^{\widetilde{k}_j}:(s,s_j)\in E\}$ 并且若 $\delta_{j-\widetilde{m}}=1$ $j=\widetilde{m}$，否则零。然后 $\Xi_1(s_1)=(P_1^{-1}(s_1)\cap E)^{\widetilde{\widetilde{q}}_1+1}$，而对于 $1<j\le\widetilde{m}$，

$$\Xi_j(s_j)=\left(\bigsqcup_{s_{j-1}\in P_{j-1}(P_j^{-1}(s_j))}\Xi_{j-1}(s_{j-1})\right)\times(P_j^{-1}(s_j)\cap E)\times\{\tau\})^{\widetilde{\widetilde{q}}_j-\delta_{j-\widetilde{m}}},$$

并且 $\Xi_{\widetilde{m}}(\tau_{\widetilde{m}})=\Xi(k,\widetilde{\widetilde{q}},E,\tau)$。（另见矩阵 3。）

(3) 令 $f:\mathbb{R}^{n-\widetilde{k}_{j-1}}\longrightarrow[0,\infty)$ 是任意有界可测函数。那么，

$$\int_{P_{j-1}(P_j^{-1}(s_j)\cap E)}\int_{P_{j-1}^{-1}(s_{j-1})\cap E}f(s)dsds_{j-1}=\int_{P_j^{-1}(s_j)\cap E}f(s)ds.$$

Let $\sigma\in(0,1)>0$. If E satisfies the following property:

$$\forall 1\le j<\widetilde{m}\quad\forall s_j\in P_j(E)\qquad\frac{|E|}{|P_j(E)|}\lesssim|P_j^{-1}(s_j)\cap E|\lesssim\sigma^{-1}\frac{|E|}{|P_j(E)|},\tag{8.7}$$

then

$$|P_j(P_{j+1}^{-1}(s_{j+1})\cap E)|\gtrsim\sigma\frac{|P_j(E)|}{|P_{j+1}(E)|},\qquad 1\le j<\widetilde{m}.\tag{8.8}$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
s^{j,1} & \cdots & s^{j,\widetilde{\widetilde{q}}_j} & s^{j+1,1} & s^{j+1,2} & \cdots & s^{j+1,\widetilde{\widetilde{q}}_{j+1}} \\
\left(\begin{array}{ccc} & & \\ \xi^{j,1} & \cdots & \xi^{j,\widetilde{\widetilde{q}}_j} \\ & & \end{array}\right) & & & \begin{array}{c} (\xi^{j+1,1})_1 \\ \vdots \\ (\xi^{j+1,1})_{\widetilde{k}_j} \\ (\xi^{j+1,1})_{\widetilde{k}_j+1} \\ \vdots \\ (\xi^{j+1,1})_{\widetilde{k}_{j+1}} \\ (\xi^{j+2,1})_{\widetilde{k}_{j+1}+1} \\ \vdots \\ (\xi^{j+2,1})_{\widetilde{k}_{j+2}} \\ \vdots \\ (\xi^{\widetilde{m},1})_{\widetilde{k}_{\widetilde{m}-1}+1} \\ \vdots \\ (\xi^{\widetilde{m},1})_{\widetilde{k}_{\widetilde{m}}} \end{array} & \begin{array}{c} (\xi^{j+1,2})_1 \\ \vdots \\ (\xi^{j+1,2})_{\widetilde{k}_j} \\ (\xi^{j+1,2})_{\widetilde{k}_j+1} \\ \vdots \\ (\xi^{j+1,2})_{\widetilde{k}_{j+1}} \\ (\xi^{j+2,1})_{\widetilde{k}_{j+1}+1} \\ \vdots \\ (\xi^{j+2,1})_{\widetilde{k}_{j+2}} \\ \vdots \\ (\xi^{\widetilde{m},1})_{\widetilde{k}_{\widetilde{m}-1}+1} \\ \vdots \\ (\xi^{\widetilde{m},1})_{\widetilde{k}_{\widetilde{m}}} \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} (\xi^{j+1,\widetilde{\widetilde{q}}_{j+1}})_1 \\ \vdots \\ (\xi^{j+1,\widetilde{\widetilde{q}}_{j+1}})_{\widetilde{k}_j} \\ (\xi^{j+1,\widetilde{\widetilde{q}}_{j+1}})_{\widetilde{k}_j+1} \\ \vdots \\ (\xi^{j+1,\widetilde{\widetilde{q}}_{j+1}})_{\widetilde{k}_{j+1}} \\ (\xi^{j+2,1})_{\widetilde{k}_{j+1}+1} \\ \vdots \\ (\xi^{j+2,1})_{\widetilde{k}_{j+2}} \\ \vdots \\ (\xi^{\widetilde{m},1})_{\widetilde{k}_{\widetilde{m}-1}+1} \\ \vdots \\ (\xi^{\widetilde{m},1})_{\widetilde{k}_{\widetilde{m}}} \end{array}
\end{array}
$$

Matrix 3. 这些是 $s^{j,l}$ 和 $s^{j+1,l}$ 在 $\tau = 0$时的形式。每个 $\xi^{j,l}$ 都用不同颜色标出。 Ξ_{j+1} 包含 $\xi^{r,l}$，适用于 $r \le j$ 或$r = j+1, l = 1$。

引理 8.3。 设 $(k, \widetilde{\widetilde{q}}, E, \tau)$ 是长度为 $\widetilde{m}$ 的参数类，并设 $\sigma \in (0,1)$ > 0。假设 *(8.7)* 和 $G_0 \equiv 1$ 成立。那么，存在某个常数 $C > 1$，它仅依赖于 $(k, \widetilde{q})$，使得

$$
G_{\widetilde{m}} \gtrsim \sigma^C \prod_{j=1}^{\widetilde{m}} \left(\frac{|E|}{|P_j(E)|} \right)^{\widetilde{\widetilde{q}}_j}. \tag{8.9}
$$

证明。 记 $\beta_j := |\omega|/|P_j(\omega)|$ 为 $1 \le j \le \widetilde{m}$，并且 $Q_j = \sum_{r=j}^{m} \widetilde{\widetilde{q}}_r$。注意，$G_1(s_1) = |P_1^{-1}(s_1) \cap E|^{\widetilde{Q}_1} \gtrsim \beta_1^{Q_1}$。如果 $\widetilde{m} = 1$，那么结论成立。否则，设

$$
G_j(s_j) \gtrsim \sigma^C \beta_j^{\widetilde{Q}_j} \prod_{r=1}^{j-1} \beta_r^{\widetilde{\widetilde{q}}_r}, \tag{8.10}
$$

对 $1 \le j < \widetilde{m}$ 成立。接下来要证明 (8.10) 对 $j+1$ 成立。由归纳假设和 (8.8),

$$
G_{j+1}(s_{j+1}) = \left(\int_{P_j(P_{j+1}^{-1}(s_{j+1}) \cap E)} G_j^{\frac{1}{\widetilde{Q}_{j+1}}}(s) ds \right)^{\widetilde{Q}_{j+1}}
$$

$$\gtrsim \sigma^C \left(\frac{\beta_{j+1}}{\beta_j}\right)^{\widetilde{Q}_{j+1}} \left[\beta_j^{\widetilde{Q}_j} \prod_{r=1}^{j-1} \beta_r^{\widetilde{\widetilde{q}}_r}\right]^{\frac{\widetilde{Q}_{j+1}}{\widetilde{Q}_{j+1}}}$$

$$= \sigma^C \beta_{j+1}^{\widetilde{Q}_{j+1}} \prod_{r=1}^{j} \beta_r^{\widetilde{\widetilde{q}}_r}.$$

常数 C 可能逐行变化，但它始终依赖于 $\widetilde{m}$, $\widetilde{\widetilde{q}}$。 □

引理 8.4. 设 $(k, \widetilde{\widetilde{q}}, E, \tau)$ 是长度为 $\widetilde{m}$ 的参数类。假设对于某个 $\sigma \in (0, 1)$，*(8.7)* 成立。令 $\varepsilon \in (0, \sigma]$。假设

$$G_{\widetilde{m}} \lesssim \varepsilon^{-C_{\widetilde{m}}} \prod_{j=1}^{\widetilde{m}} \left(\frac{|E|}{|P_j(E)|}\right)^{\widetilde{\widetilde{q}}_j}. \tag{8.11}$$

存在某个常数 $C_{\widetilde{m}} > 1$，它仅依赖于 $(k, \widetilde{q})$ 和 ε。那么存在 E 的一个细化，使得在其上 $G_0 \lesssim \varepsilon^{-C}$。如果 E 还满足

$$\forall 1 \le j \le \widetilde{m} \quad \forall x \in P_j(E) \qquad |P_j^{-1}(x) \cap E| \gtrsim \frac{|E|}{|P_j(E)|}, \tag{8.12}$$

那么可以选择该细化，使其保留 *(8.12)*。

证明。记 $\beta_j := |\omega|/|P_j(\omega)|$ 为 $1 \le j \le \widetilde{m}$，并且 $Q_j = \sum_{r=j}^m \widetilde{\widetilde{q}}_r$。令 $\beta_0 = 1$，并

$$B_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ \beta_j^{\widetilde{Q}_j} \prod_{i=1}^{i-1} \beta_i^{\widetilde{\widetilde{q}}_i}, & 1 \le j \le \widetilde{m}. \end{cases} \tag{8.13}$$

于是 $B_j/B_{j-1} = (\beta_j/\beta_{j-1})^{Q_j}$。于是 (8.11) 变为

$$G_{\widetilde{m}} \le C\varepsilon^{-C} B_{\widetilde{m}}. \tag{8.14}$$

对于 $1 < j \le \widetilde{m}$ 和一个 $(k_{\widetilde{m}} - k_j)$-元组 s_j，定义

$$E_{j-1}(s_j) := \left\{ s_{j-1} \in P_{j-1}(P_j^{-1}(s_j) \cap E) : G_{j-1}(s_{j-1}) \le C_{j-1}\varepsilon^{-C_{j-1}} B_{j-1} \right\}, \tag{8.15}$$

其中 $C_{j-1} \ge 1$ 是待确定的大常数。假设对于 $j \le r \le \widetilde{m}$，存在一个大常数 $C_r \ge 1$，使得

$$G_r(s_r) \le C_r \varepsilon^{-C_r} B_r. \tag{8.16}$$

（(8.14) 是基础情形。）由马尔可夫不等式、(8.16) 和 (8.8),

$$\begin{aligned} &|P_{j-1}(P_j^{-1}(s_j) \cap E) \setminus E_{j-1}(s_j)| \\ &\le \left(\frac{\varepsilon^{C_{j-1}}}{C_{j-1}B_{j-1}}\right)^{\frac{1}{Q_j}} \int_{P_{j-1}(P_j^{-1}(s_j)\cap E)} G_{j-1}(s_{j-1})^{\frac{1}{Q_j}} \, ds_{j-1} \\ &= \left(\frac{\varepsilon^{C_{j-1}}}{C_{j-1}B_{j-1}} G_j\right)^{\frac{1}{Q_j}} \le \varepsilon^{(C_{j-1}-C_j)/\widetilde{Q}_j - 1} |P_{j-1}(P_j^{-1}(s_j) \cap E)|. \end{aligned}$$

因此，当 C_{j-1} 足够大时，(8.7) 意味着 $E \cap (\sqcup_{s_j} P_j^{-1}(s_j))$ 是 E 的细化。令这一细化成为我们的新 E。特别地，对于每个 $j-1 \le r \le \widetilde{m}$ 以及 $P_r(E)$ 中的每个 s_r（即新 E 的 P_r 像），(8.16) 均成立。对 j 作（向下）归纳，我们得到 $G_0 \lesssim \varepsilon^{-C}$ 于 E 上（它至多经过了 $\widetilde{m}$ 次细化）。

如有必要，我们可以进一步细化 E，以保持 (8.12)。这得益于 P_j的嵌套核。（参见引理 7.2 中 (7.12) 的证明。）□

引理 8.5. 设$\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 有界且可测。则 $\Psi(\Omega^\flat) \subset \Omega^N$，并且

$$|\Omega|^N \geq |\Psi(\Omega^\flat)| \gtrsim \beta_{\widetilde{m}}^N \int_{\Xi} \prod_{j=1}^{\widetilde{m}} \prod_{l=1}^{\widetilde{\widetilde{q}}_j} f_{j,l}(s^{j,l}) ds, \tag{8.17}$$

其中，对 Ξ上的积分是指关于 ξ的勒贝格积分，

$$f_{j,l}(s) \coloneqq \int_{(\mathcal{F}(s))^{\widetilde{k}_j}} |\det(\mathbf{u}^{j,l})| \prod_{a=1}^{\widetilde{k}_j} du^{j,l,a}, \qquad s \in S,$$

且 $\mathbf{u}^{j,l}$ 是一个 $\widetilde{k}_j \times \widetilde{k}_j$ 矩阵，其第 a列为 $u^{j,l,a}$的前 $\widetilde{k}_j$ 个坐标。

证明。 根据 $\Omega^\flat$ 和 Ψ 的构造以及引理 7.2，我们有 $\Psi(\Omega^\flat) \subset \Omega$。展开 Ψ的定义可知，它是一个向量值函数，其各分量均为线性多项式或二次多项式。此外，

$$\det \Psi(s, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \prod_{j=1}^{\widetilde{m}} \prod_{l=1}^{\widetilde{\widetilde{q}}_j} \det(\mathbf{u}^{j,l}) \neq 0$$

几乎处处成立。根据贝祖定理，存在一个子流形 Γ，其维数为 $\dim \Gamma < (2n+1)N$，使得 $\#\Psi^{-1}(z) \lesssim 1$ for $z \notin \Gamma$。因此，(8.17) 成立。□

稍后我们将证明，在对角线上（即 $s^{j,l}$ 对所有 j,l 都取相同的值，记为 s），

$$\prod_{j,l} f_{j,l}(s) \gtrsim \prod_{j=m+1}^{M} \alpha_j^{q_j}.$$

然而， $s^{j,l}$ 通常并不相等。下面的引理将非对角项（即 $s^{j,l}$ 不取相同的值）与对角项联系起来。

引理 8.6。 考虑定义 *8.1* 中的一类参数 $(k, \widetilde{\widetilde{q}}, E, \tau)$ 及其相关的 ι, Ξ, G_j，其中 $G_0 = \prod_{j,l} f_{j,l}$，其中 G_j 定义于 *(8.6)* 中，且 $f_{j,l}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界可测非负函数，对于 $1 \leq j \leq \widetilde{m}, 1 \leq l \leq \widetilde{\widetilde{q}}_j$。那么，

$$\int_{\Xi(\widetilde{k}, \widetilde{\widetilde{q}}, E, \tau)} \prod_{j=1}^{\widetilde{m}} \prod_{l=1}^{\widetilde{\widetilde{q}}_j} f_{j,l}(s^{j,l}) ds \geq G_{\widetilde{m}}. \tag{8.18}$$

证明。 我们将通过归纳法并反复应用 Hölder 不等式来证明该引理。注意， $P_0(P_1^{-1}(s_1) \cap E) = P_1^{-1}(s_1) \cap E$。如果 $\widetilde{m} = 1$，那么 (8.18) 就是 Hölder 不等式。否则，由 Hölder 不等式和性质 8.2.2 可得

$$G_1(s_1) = \left(\int_{P_1^{-1}(s_1) \cap E} \prod_{j=1}^{\widetilde{m}} \prod_{l=1}^{\widetilde{\widetilde{q}}_j} (f_{j,l}(s))^{\frac{1}{\widetilde{Q}_1}} ds \right)^{\widetilde{Q}_1}$$

$$\leq \left(\int_{P_1^{-1}(s_1) \cap E} \prod_{\substack{j=1, 1 \leq l \leq \widetilde{\widetilde{q}}_1; \\ \text{or } j=2, l=1}} (f_{j,l}(s))^{\frac{1}{\widetilde{q}_1+1}} ds \right)^{\widetilde{q}_1+1}$$

$$\times \prod_{\substack{j=2,1<l\le\widetilde{\widetilde{q}}_2;\\ \text{or } 2<j\le\widetilde{m},1\le l\le\widetilde{\widetilde{q}}_j}} \left(\int_{P_1^{-1}(s_1)\cap E} f_{j,l}(s)ds\right)$$

$$\le \prod_{j=1}^{\widetilde{m}}\prod_{l=1}^{\widetilde{\widetilde{q}}_j}\int_{P_1^{-1}(s_1)\cap E} f_{j,l}(s^{j,l})ds^{j,l}$$

$$= \left(\int_{\Xi_1(s_1)} \prod_{\substack{j=1,1\le l\le\widetilde{\widetilde{q}}_1;\\ \text{or } j=2,l=1}} f_{j,l}(s^{j,l})ds\right)$$

$$\times \prod_{\substack{j=2,1<l\le\widetilde{\widetilde{q}}_2;\\ \text{or } 2<j\le\widetilde{m},1\le l\le\widetilde{\widetilde{q}}_j}} \int_{P_1^{-1}(s_1)\cap E} f_{j,l}(s^{j,l})ds^{j,l}.$$

假设对于 $1\le j<\widetilde{m}$, 有

$$G_j(s_j)\le\int_{\Xi_j(s_j)} \prod_{\substack{1\le r\le j,1\le l\le\widetilde{\widetilde{q}}_r;\\ \text{or } r=j+1,l=1}} f_{r,l}(s^{r,l})ds \tag{8.19}$$

$$\times \prod_{\substack{r=j+1,1<l\le\widetilde{\widetilde{q}}_{j+1};\\ \text{or } j+1<r\le\widetilde{m},1\le l\le\widetilde{\widetilde{q}}_r}} \int_{P_j^{-1}(s_j)\cap E} f_{r,l}(s)ds.$$

由归纳假设和 H¨older 不等式,

$$G_{j+1}(s_{j+1}) = \left(\int_{P_j(P_{j+1}^{-1}(s_{j+1})\cap E)} G_j^{\frac{1}{\widetilde{Q}_{j+1}}}(s)ds\right)^{\widetilde{Q}_{j+1}} \tag{8.20}$$

$$\le \left(\int_{P_j(P_{j+1}^{-1}(s_{j+1})\cap E)} \left(\int_{\Xi_j(s_j)} \prod_{\substack{1\le r\le j,1\le l\le\widetilde{\widetilde{q}}_r;\\ \text{or } r=j+1,l=1}} f_{r,l}(s^{r,l})ds\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \prod_{\substack{r=j+1,1<l\le\widetilde{\widetilde{q}}_{j+1};\\ \text{or } j+1<r\le\widetilde{m},1\le l\le\widetilde{\widetilde{q}}_r}} \int_{P_j^{-1}(s_j)\cap E} f_{r,l}(s)ds\right)^{\frac{1}{\widetilde{Q}_{j+1}}} ds_j\right)^{\widetilde{Q}_{j+1}}$$

$$\le \int_{P_j(P_{j+1}^{-1}(s_{j+1})\cap E)}\int_{\Xi_j(s_j)} \prod_{\substack{1\le r\le j,1\le l\le\widetilde{\widetilde{q}}_r;\\ \text{or } r=j,l=1}} f_{r,l}(s^{r,l})dsds_j$$

$$\times \prod_{\substack{r=j,1<l\le\widetilde{\widetilde{q}}_j;\\ \text{or } j+1<r\le\widetilde{m},1\le l\le\widetilde{\widetilde{q}}_r}} \int_{P_j(P_{j+1}^{-1}(s_{j+1})\cap E)}\int_{P_j^{-1}(s_j)\cap E} f_{r,l}(s)dsds_j,$$

若 $j < \widetilde{m} - 1$，则根据性质8.2.2和8.2.3，可得 $j+1$ 的 (8.19)。由归纳法可知，(8.19) 对 $1 \le j < \widetilde{m}$成立。然后，在 (8.20) 中取 $j = \widetilde{m} - 1$，并再次应用性质8.2.2和8.2.3，即可得到 (8.18)。□

9. Approximation by ellipsoids

回忆一下，引理 8.5 中的 $f_{j,l}$ 具有以下形式

$$\int_{E^k} \det(\mathbf{u}') \prod_{j=1}^{k} du_i, \tag{9.1}$$

其中 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的测度有正的下界，$1 \le k \le n$，且$\mathbf{u}'$ 是 $k \times k$ 矩阵，其第 i 列由 u_i 的前 k 个坐标组成。在本小节中，我们旨在通过用某个平衡凸集（或等价地，以原点为中心的椭球）逼近 E，从而给出 (9.1) 的上界；也就是说，$x \in E$ 蕴含 $-x \in E$。

引理 9.1。设 $1 \le k \le d, \eta > 0$。假设 $P: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^k$ 是到前 k 个坐标的正交投影。那么存在 $c > 0$，具有以下性质。对于任意满足 $0 < |E| < \infty$ 的勒贝格可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$，存在一个有界平衡凸集 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$，使得 $|E \cap \mathcal{C}| \sim |E|$，并且

$$\int_{E^k} |\det(\mathbf{u}')| \prod_{i=1}^{k} du_i \ge c \left(\left(\frac{|E|}{|\mathcal{C}|} \right)^{\eta} |E| \right)^k |P(\mathcal{C})|, \tag{9.2}$$

其中，$\mathbf{u}'$ 表示一个 $k \times k$ 矩阵，其第 i列为 $P(u_i)$，其中 $1 \le i \le k$，且$c > 0$ 仅依赖于 d、η。

如果 E 是平衡且凸的，那么（9.2）右端就是 $|E|^k |P(E)|$。否则，我们可以用平衡凸集来逼近 E。这一思想源自 [31]中实数轴上的中心集。Christ 在 [8]中改进了这一结果。高维情形见 [9]中的引理 5.2。

引理 9.2（[9]中的引理 5.2）。对于任意 $d \ge 1$、$\eta > 0$，存在 $c \in (0, 1)$，具有如下性质。对于任意满足 $0 \lhd |S| < \infty$的勒贝格可测集 $S \subset \mathbb{R}^d$，存在一个有界平衡凸集 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$，使得 $|S \cap \mathcal{C}| \sim |S|$；并且对于任意平衡凸集 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$

$$|\mathcal{C}'| \le \frac{1}{2}|\mathcal{C}| \quad \Longrightarrow \quad |S \cap (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}')| \ge c \left(\frac{|S|}{|\mathcal{C}|} \right)^{\eta} |S|. \tag{9.3}$$

下面的引理是对 [9] 中引理 6.1 的推广。

引理 9.3。设 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ 为一个有界、平衡的凸集。设 μ 为一个支集在 $\mathcal{C}$上的正有限测度。设 $1 \le k \le d$。假设 $P: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^k$ 是到前 k 个坐标的正交投影。设 δ, $\lambda > 0$。假设对于任何满足 $|\mathcal{C}'| \le \delta |\mathcal{C}|$的平衡凸子集 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$，都有 $\mu(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}') \ge \lambda$。那么

$$\int_{\mathcal{C}^k} |\det(\mathbf{u}')| \prod_{i=1}^{k} d\mu(u_i) \ge c \delta^k \lambda^k |P(\mathcal{C})|, \tag{9.4}$$

其中$\mathbf{u}'$ 表示 $k \times k$ 矩阵，其第 i列为 $P(u_i)$，对于 $1 \le i \le k$而言；而$c > 0$ 仅取决于 d。

证明。 通过对 $\mathbb{R}^d$进行变量替换，我们可以假设 $P(\mathcal{C})$是 $\mathbb{R}^k$中的有界、平衡的凸集，且为以原点为中心的单位球。等式 (9.4) 右侧的因子 $|P(\mathcal{C})|$来自 $|\det(\mathbf{u}')|$的变换定律。

注意，$|\det(\mathbf{u}')| = \prod_{i=1}^{k} \operatorname{dist}(P(u_i)\ V_{i-1})$，其中 $V_0 = \{0\}$，而 V_i是 $\{P(u_1)\dots, P(u_i)\}$（$i = 1, \dots, k-1$）的线性张成。固定 $u_1, \dots, u_{k-1}$。令

$$\mathcal{C}_1 \coloneqq \{u_k \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(P(u_k), V_{k-1}) < c\delta\}, \tag{9.5}$$

其中 c 是一个常数，取值足够小，使得 $|\mathcal{C}_1| \le \delta|\mathcal{C}|$。我们注意到，$\mathcal{C}_1$ 是凸的且平衡的。于是

$$\int_{\mathcal{C}} \operatorname{dist}(u_k, V_{k-1}) d\mu(u_k) \ge c\delta\mu(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1) \ge c\delta\lambda. \tag{9.6}$$

固定 $u_1, \dots, u_{k-2}$。现在令

$$\mathcal{C}_2 \coloneqq \{u_k \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(P(u_k), V_{k-2}) < c\delta\}, \tag{9.7}$$

对于另一个足够小的常数 c。由同样的推理可得

$$\int_{\mathcal{C}} \operatorname{dist}(u_{k-1}, V_{k-2}) d\mu(u_{k-1}) \ge c\delta\mu(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_2) \ge c\delta\lambda. \tag{9.8}$$

将此论证再重复 $k-2$ 次，即可得到所需的界。 □

引理 *9.1* 的证明。 根据引理 9.2，可以找到一个常数 $c > 0$ 和一个有界平衡凸集 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$，使得 $|E \cap \mathcal{C}| \sim |E|$，并且对于任意平衡凸集 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$

$$|\mathcal{C}'| \le \frac{1}{2}|\mathcal{C}| \quad \Longrightarrow \quad |E \cap (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}')| \ge c\left(\frac{|E|}{|\mathcal{C}|}\right)^{\eta} |E|. \tag{9.9}$$

令 $\lambda = c(|E|/|\mathcal{C}|)^{\eta}|E|$、$\delta = \frac{1}{2}$ 和 μ 为限制在$E \cap \mathcal{C}$上的勒贝格测度，则可应用引理 9.3 得到

$$\begin{aligned} \int_{E^k} |\det(\mathbf{u}')| \prod_{i=1}^{k} du_i &\ge \int_{\mathcal{C}^k} |\det(\mathbf{u}')| \prod_{i=1}^{k} d\mu(u_i) \\ &\ge c_1 c^k 2^{-k} \left(\left(\tfrac{|E|}{|\mathcal{C}|}\right)^{\eta} |E|\right)^k |P(\mathcal{C})|. \end{aligned} \tag{9.10}$$

□

10. Semiregularity、 regularity、 and quasiextremality

本节将严格阐明“半正则性”和“正则性”的概念。我们将再次使用 (5.7) 和 (7.5) 中的记号。

定义 10.1（ε-半正则集）。 设 $\varepsilon > 0$。称正测度有界子集 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 关于 π 是 ε-半正则的，若对每个 $1 \le j \le \widetilde{m}$，$\Omega$ 中 $\widetilde{\pi}_j$ 的纤维大小可比（相差至多 ε）。具体而言，

$$\forall z \in \Omega, j = 1, \dots, \widetilde{m} \quad |\widetilde{T}_j(z)| \le 2\varepsilon^{-1} \frac{|\Omega|}{|\widetilde{\pi}_j(\Omega)|}. \tag{10.1}$$

Ω 被称为相对于 ε-半正则，如果

$$\forall z \in \Omega, j = 1, \dots, \widetilde{m} \quad |\widetilde{T}_j^*(z)| \le 2\varepsilon^{-1} \frac{|\Omega|}{|\widetilde{\pi}_j^*(\Omega)|}. \tag{10.2}$$

若不存在歧义，我们就简称 Ω 为 ε-半正则。

引理 10.2. 设 $\sigma, \varepsilon > 0$。相对于 π （分别相对于π_*）， ε-半正则集Ω 的任意 σ-细化（见定义 *7.1*）Ω'，对于某个只依赖于 n 的充分大的常数 $C > 0$，都是相对于π （分别相对于π_*）的$(C\varepsilon\sigma)$-半正则集。

证明。 设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 关于 π 是半正则的（关于 π_* 的情形论证几乎相同），并设 $\Omega' \subset \Omega$ 是一个 σ细化。那么存在一个较小的常数 $c > 0$，使得对所有 $z \in \Omega'$，$1 \le j \le \widetilde{m}$,

$$|\widetilde{T}_j^{\Omega'}(z)| \le |\widetilde{T}_j^{\Omega}(z)| \le 2\varepsilon^{-1}\frac{|\Omega|}{|\widetilde{\pi}_j(\Omega)|} \le 2c\sigma^{-1}\varepsilon^{-1}\frac{|\Omega'|}{|\widetilde{\pi}_j(\Omega')|}. \tag{10.3}$$

那么 Ω' 关于 π 是 $(c^{-1}\sigma\varepsilon)$-半正则的。 □

定义 10.3 （ε-拟极值性）。 我们称有界可测子集 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 为 ε-准极值，如果

$$|\Omega| \ge \varepsilon \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}}, \tag{10.4}$$

并且我们称函数 $\{f_j\}_{j=1}^M$ 是 ε-准极值 的，如果

$$\mathcal{M}(f_1, \dots, f_M) \ge \varepsilon \prod_{j=1}^{M} \|f_j\|_{p_j}. \tag{10.5}$$

注记。 注意，我们并未先验地 假设 (3.1) 或限制弱型不等式

$$|\Omega| \lesssim \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}} \tag{10.6}$$

分别称 $\{f_j\}$ 或 Ω 为 ε-准极值。

引理 10.4。 设 $\sigma, \varepsilon > 0$。任意 σ-细化Ω'，若它来自一个 ε-准极值集Ω，则它是 $C\varepsilon\sigma$-准极值的，其中某个常数 $C > 0$ 足够大。

定义 10.5 （ε-正则性）。 设 $\varepsilon > 0$，且 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$。若 Ω 关于 π, π_* 和 ε 均为 ε-半正则，则称 Ω 为 ε-正则。

引理 10.6。 设 $\sigma, \varepsilon > 0$。任意 σ-细化Ω'，若它来自一个 ε-正则集Ω，则它是 $C\varepsilon\sigma$-正则的，其中某个常数 $C > 0$ 足够大。

引理 10.7。 设 $0 < \sigma \le \varepsilon \le 1$，设$\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 关于π是 ε-半正则的，并设$\Omega' \subset \Omega$ 是一个 ε^C-细化，且关于 π_* 是 ε-半正则的。假设Ω是 ε-准极值的，并且

$$\Omega'' = \{z \in \Omega' : \forall 1 \le j \le \widetilde{m} \quad |(T_j^*)^{\Omega'}(z)| \le \varepsilon^{-C}\frac{|\Omega'|}{|\widetilde{\pi}_j(\Omega')|}\} \tag{10.7}$$

满足 $|\Omega'| \sim \sigma|\Omega$*{v7>*。那么，$\Omega'$ 是 σ^C-正则的。

11. The restricted weak-type inequality for semiregular sets

现在，我们已经具备了证明半正则集的 (5.2) 所需的全部条件。

命题 11.1。设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 是关于 π、对某个$\sigma \in (0,1)$而言的 σ-半正则集，并设 p_j 是满足定理 *3.1* 中假设的指数。那么，

$$|\Omega|^N \gtrsim \sigma^C \left(\prod_{j=1}^{\widetilde{m}} \beta_j^{\widetilde{q}_j} \right) \left(\prod_{j=m+1}^{M} \alpha_j^{q_j} \right) \gtrsim \sigma^C \prod_{j=1}^{M} \alpha_j^{q_j}, \tag{11.1}$$

其中

$$\alpha_j = \frac{|\Omega|}{|\pi_j(\Omega)|}, \quad 1 \le j \le M; \qquad \beta_j = \frac{|\Omega|}{|\widetilde{\pi}_j(\Omega)|}, \quad 1 \le j \le \widetilde{m}.$$

$N, q_j, \widetilde{q}_j, \widetilde{\pi}_j$ 与第 *5* 节中的相同。特别地，

$$|\Omega| \lesssim \sigma^{-C} \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{11.2}$$

设 L_j 与（*3.2*）中的相同。进一步假设Ω 对某个 $0 < \varepsilon \le \sigma$是 ε-准极值的。那么对于任意 $A \ge 3$，存在一个（$z_0, S_1, \mathcal{F}_l, \mathcal{G}_l$）的精化流方案（$\Omega$ π, A），满足以下性质。对每个 $s \in S_1$，存在一个椭球$\mathcal{C}$（s）$\subset \mathbb{R}^n$，其以原点为中心，并如定义 *6.5* 中那样适配于 $\{L_j\}_{j=m+1}^{M}$，使得

$$\mathcal{F}_1(s) \subset \mathcal{C}(s), \qquad |\mathcal{C}(s)| \lesssim \varepsilon^{-C} |\mathcal{F}_1(s)|. \tag{11.3}$$

隐含常数和 C仅依赖于 n, π_j, p_j。

~ ~ ~证明。回顾第 5 节和（8.1）中的记号。写作 $k = (0, k_1, \dots, k_{\widetilde{m}})$ $\widetilde{\widetilde{q}} = (\widetilde{\widetilde{q}}_1, \dots, \widetilde{\widetilde{q}}_{\widetilde{m}})$。设（$z_0, S_1, \mathcal{F}_l, \mathcal{G}_l$）是一个（$\Omega$ π, A）的精化流方案，其中 $A \ge 3$ 如引理 7.2 所述，并记 $S = S_1, \mathcal{F} = \mathcal{F}_1, \mathcal{G} = \mathcal{G}_1$。（7.10）—（7.12）以及 σ-半正则性意味着

$$\frac{|S|}{|L_j(S)|}, \frac{|\mathcal{G}|}{|L_j(\mathcal{G})|} \gtrsim \alpha_j, \qquad 1 \le j \le m; \tag{11.4}$$

$$\frac{|\mathcal{F}|}{|L_j(\mathcal{F})|} \gtrsim \alpha_j, \qquad m < j \le M; \tag{11.5}$$

$$\beta_j \lesssim |P_j^{-1}(s) \cap S|, \quad |P_j^{-1}(v) \cap \mathcal{G}| \lesssim \sigma^{-1}\beta_j, \qquad s \in P_j(S)\ v \in P_j(\mathcal{G})\ 1 \le j \le \widetilde{m}. \tag{11.6}$$

我们先证明一个中间结果：

$$|\Omega|^N \gtrsim \sigma^C \prod_{j=1}^{m} \beta_j^{\widetilde{q}_j} \prod_{j=m+1}^{M} \alpha_j^{q_j}. \tag{11.7}$$

回顾 (8.4) 和引理 8.5。于是

$$|\Omega|^N \gtrsim \beta_{\widetilde{m}}^N \int_{\Xi} \prod_{j=1}^{\widetilde{m}} \prod_{l=1}^{\widetilde{\widetilde{q}}_j} f_{j,l}(s^{j,l}) ds,$$

其中

$$f_{j,l}(s) := \int_{(\mathcal{F}(s))^{\widetilde{k}_j}} |\det(\mathbf{u}^{j,l})| \prod_{a=1}^{\widetilde{k}_j} du^{j,l,a}, \qquad s \in S.$$

暂时，我们考虑对角情形，即对所有 $s = s^{j,\,l}$ j，l，并旨在估计 $\prod_{j,\,l} f_{j,\,l}(s)$。令 $\eta > 0$ 为一个仅依赖于 n、稍后确定的小常数。根据引理 9.1，存在一个有界平衡凸集

$\mathcal{C}(s) \subset \mathbb{R}^n$，使得对某个 $|\mathcal{C}(s)| \sim 2^{r(s)}|\mathcal{F}(s)|$ $r(s) \geq 0$，$|\mathcal{F}(s) \cap \mathcal{C}(s)| \sim |\mathcal{F}(s)|$，并且

$$f_{j,l}(s) \gtrsim \begin{cases} 2^{-r(s)\widetilde{k}_j\eta}|\mathcal{F}(s)\cap\mathcal{C}(s)|^{\widetilde{k}_j}|P_j^{\perp}(\mathcal{F}(s)\cap\mathcal{C}(s))|, & 1 \leq j < \widetilde{m}, \\ 2^{r(s)(1-n\eta)}|\mathcal{F}(s)\cap\mathcal{C}(s)|^{n}|\mathcal{F}(s)\cap\mathcal{C}(s)|, & j = \widetilde{m}, \end{cases} \tag{11.8}$$

其中我们回顾第 5 节中的 $\widetilde{k}_{\widetilde{m}} = n$，以及 $P_j^{\perp}$：$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\widetilde{k}_j}$ 表示到前 k_j 个坐标的~正交投影。$k_{\widetilde{m}} = n$、(8.1) 和 (8.2) 得出

$$\prod_{j=1}^{\widetilde{m}}\prod_{l=1}^{\widetilde{\widetilde{q}}_j} f_{j,l}(s) \gtrsim 2^{r(s)(\widetilde{\widetilde{q}}_{\widetilde{m}}-N\eta)}\prod_{j=1}^{\widetilde{m}}|P_j^{\perp}(\mathcal{F}(s)\cap\mathcal{C}(s))|^{\widetilde{q}_j}. \tag{11.9}$$

回顾 (5.4)、(5.5)、(5.9) 和 (8.1)。由于 $\widetilde{\widetilde{q}}_{\widetilde{m}} \geq 1$，我们可以考虑 $\eta = (\widetilde{\widetilde{q}}_{\widetilde{m}} - 1)/N > 0$。（这是唯一需要使用严格不等式 (B) 而非 (B) 的地方。）现在我们将 $2r(s)(\widetilde{\widetilde{q}}_{\widetilde{m}} - N\eta)$ 称为新的 $r(s)$。

应用推论 6.2 和 $\omega = \mathcal{F}(s) \cap \mathcal{C}(s)$，得到

$$\prod_{j=1}^{\widetilde{m}}(|P_j^{\perp}(\mathcal{F}(s)\cap\mathcal{C}(s))|)^{\widetilde{q}_j} \geq \prod_{j=m+1}^{M}\left(\frac{|\mathcal{F}(s)\cap\mathcal{C}(s)|}{|L_j(\mathcal{F}(s)\cap\mathcal{C}(s))|}\right)^{q_j}. \tag{11.10}$$

Let

$$2^{\widetilde{r}(s)} := \frac{C\prod_{j=1}^{\widetilde{m}}|P_j^{\perp}(\mathcal{F}(s)\cap\mathcal{C}(s))|^{\widetilde{q}_j}}{\prod_{j=m+1}^{M}\alpha_j^{q_j}}. \tag{11.11}$$

$|\mathcal{F}(s) \cap \mathcal{C}(s)| \sim |\mathcal{F}(s)|$、(11.5) 和 (11.10) 推出：对于充分大的常数 C，有 $\widetilde{r}(s) \geq 0$。因此，

$$\prod_{j=1}^{\widetilde{m}}\prod_{l=1}^{\widetilde{\widetilde{q}}_j} f_{j,l}(s) \gtrsim 2^{r(s)+\widetilde{r}(s)}\prod_{j=m+1}^{M}\alpha_j^{q_j}. \tag{11.12}$$

由引理 8.6,

$$|\Omega|^N \gtrsim \beta_{\widetilde{m}}^N\prod_{j=m+1}^{M}\alpha_j^{q_j}G_{\widetilde{m}}, \tag{11.13}$$

其中 G_j 与 $(\widetilde{k},\ \widetilde{\widetilde{q}},\ S,\ \Omega)$ 相关，且 $g(s) = 2^{r(s)+\widetilde{r}(s)} \geq 1$。(11.6)、引理 8.3 和 (8.1) 推出 (11.7)。接着，由 (11.6) 和推论 6.4 可得 (11.1)。

进一步假设 Ω 对某个 $0 < \varepsilon \leq \sigma$ 是 ε-准极值的。那么，以下不等式链

$$|\Omega|^N \gtrsim \beta_{\widetilde{m}}^N\prod_{j=m+1}^{M}\alpha_j^{q_j}G_{\widetilde{m}} \gtrsim \sigma^C\prod_{j=1}^{M}\alpha_j^{q_j} \tag{11.14}$$

可以如下反向推导：

$$|\Omega|^N \lesssim \varepsilon^{-C_1}\beta_{\widetilde{m}}^N\prod_{j=m+1}^{M}\alpha_j^{q_j}G_{\widetilde{m}} \lesssim \varepsilon^{-C_2}\prod_{j=1}^{M}\alpha_j^{q_j} \tag{11.15}$$

对于充分大的常数 C_1，C_2，它们仅取决于 p_{j0}。应用引理 8.4，其中 $E = S$，$\tau = \Omega$，我们得到 $2^{r(s)+\widetilde{r}(s)} \leq C\varepsilon^{-C}$ 对所有 s 都成立，且可能取更小的$S = S_1$，但 $(z_0,\ S_1,\ \mathcal{F}_l,\ \mathcal{G}_l)$ 仍然是一个精化流方案。由于 $r(s)$ $\widetilde{r}(s) \geq 0$，我们

有 $2^{r(s)} \le C\varepsilon^{-C}$ 和 $2^{\widetilde{r}(s)} \le C\varepsilon^{-C}$。展开 $r(s)$ $\widetilde{r}(s)$ 的定义，并利用 $\mathcal{C}(s)$ 的凸性、$|\mathcal{F}(s)\cap\mathcal{C}(s)| \sim |\mathcal{F}(s)|$ 以及 (11.5)，我们得到

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{\widetilde{m}} |P_j^{\perp}(\mathcal{C}(s))|^{\widetilde{q}_j} &\lesssim \varepsilon^{-C} \prod_{j=1}^{\widetilde{m}} |P_j^{\perp}(\mathcal{C}(s)\cap\mathcal{F}(s))|^{\widetilde{q}_j} \\ &\lesssim \varepsilon^{-C} \prod_{j=m+1}^{M} \left(\frac{|\mathcal{F}(s)\cap\mathcal{C}(s)|}{|L_j(\mathcal{F}(s)\cap\mathcal{C}(s))|}\right)^{q_j} \\ &\lesssim \varepsilon^{-C} \prod_{j=m+1}^{M} \left(\frac{|\mathcal{C}(s)|}{|L_j(\mathcal{C}(s))|}\right)^{q_j},\end{aligned}$$

其中 C 可能随行变化，但仅取决于 n, π_j, p_j。根据推论 6.10，我们可以选取一个以原点为中心、适配于 $\{L_j\}_{j=m+1}^{M}$的椭球 $\mathcal{C}(s) \subset \mathbb{R}^n$，使其满足 (11.3)。□

推论 11.2。设 $\varepsilon > 0, A \ge 2$。假设 Ω 是 ε-正则的。设 L_j 如 *(3.2)* 中所述。则存在一个较大的常数 C，它仅取决于 n,π_j,p_j；还存在一个关于 (Ω, π, A) 的精化流方案 $(z_0, S_1, \mathcal{F}_l, \mathcal{G}_l)$，以及一个以原点为中心、适配于 $\{L_j\}_{j=1}^{m}$ （如定义 *6.5* 所述）的椭球 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$，使得

$$S_1 \subset \mathcal{C}, \qquad |\mathcal{C}| \lesssim \varepsilon^{-C}|S_1|. \tag{11.16}$$

证明。设 $\varepsilon > 0$。假设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 是 ε-正则的，也就是说，Ω 关于 π, π_* 是 ε-半正则的，并且是 ε-准极值的。根据命题 11.1，存在一个较大的常数，它仅取决于 n, π_j, p_j；还存在一个关于 $(\Omega, \pi_*, A+1)$ 的精化流方案 $(z_*, S_1^*, \mathcal{F}_l^*, \mathcal{G}_l^*)$，使得对于每个 $s \in S_1^*$，都存在一个以原点为中心、适配于 $\{L_j\}_{j=1}^{m}$ （如定义 6.5 所述）的椭球 $\mathcal{C}(s) \subset \mathbb{R}^n$，使得

$$\mathcal{F}_1^*(s) \subset \mathcal{C}(s), \qquad |\mathcal{C}(s)| \lesssim \varepsilon^{-C}|\mathcal{F}_1^*(s)|. \tag{11.17}$$

固定 $s_0 \in S_1^*$。那么 $(e^{s_0\cdot\mathbf{Y}}(z_*), \mathcal{F}_1^*(s_0), \mathcal{G}_l^*(s_0, \cdot), \mathcal{F}_{l+1}^*(s_0, \cdot))$ 和 $\mathcal{C}(s_0)$ 如所需。□

12. Quasiextremal regular sets

我们的下一个目标是去掉命题 11.1 中的半正则性假设。具体做法是将 Ω 划分为半正则集 $\{\Omega_\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}^{\widetilde{m}}}$，使得 Ω_ℓ 的 $\widetilde{\pi}_j$纤维与 2^{ℓ_j} 相当。然后，我们将对每个 Ω_ℓ 应用命题 11.1，希望得到以下结论：

$$|\Omega| = \sum_{\ell} |\Omega_\ell| \lesssim \sum_{\ell} \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega_\ell)|^{\frac{1}{p_j}} \overset{?}{\lesssim} \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{12.1}$$

最后一个不等式的主要障碍在于，对于 $\ell \ne \ell'$，$\pi_j(\Omega_\ell) \cap \pi_j(\Omega_{\ell'})$ 可能很大。在最坏情况下，若 Ω_ℓ 是限制弱型不等式的（准）极值函数（因此第一个不等式反向成立），我们将看到准极值函数可以用“抛物球”来近似。大多数抛物球看起来截然不同，因此它们的 π_j 像几乎互不相交。

在本节中，我们将采用 Christ 的论证（参见 [9]的第 7 节）来逼近正则准极值函数。

定义 12.1（抛物球）。设 $z=(x,\ y,\ t)\in\mathbb{H}^n,\ \rho>0$，设 $\{l_j\}_{j=1}^d$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的坐标投影。假设 $r,\ r^*\in(\mathbb{R}_{>0})^n$ 满足 $\rho=r_ir_i^*$，其中 $i=1,\ \ldots\ldots,\ n$。抛物球 $\mathcal{B}(z,\ \mathbf{e}\ r,\ r^*,\ \rho,\ \{l_j\}_{j=1}^d)$ 定义为

$$\{(x+s,y+u,t+\frac{1}{2}(-s\cdot y+x\cdot u)+\tau):s\in\mathcal{C},u\in\mathcal{C}_*,|\tau|<\rho\},$$

其中，$\mathcal{C},\ \mathcal{C}_*\subset\mathbb{R}^n$ 是以原点为中心、适配于 $\{l_j\}_{j=1}^d$ 的椭球，如定义 6.5 所述，其主轴沿 e_i 方向，长度分别为 $r_j,\ r_j^*$。在没有歧义时，我们可以简单地用 $\mathcal{B}$表示该抛物球。

性质 12.2（抛物球的性质）。

（1） $\mathcal{B}$ 在海森堡群运算下左不变，即：

$$\forall z_1,z_2\in\mathbb{H}^n\qquad z_1\bullet\mathcal{B}(z_2,\mathbf{e},r,r^*,\rho,\{l_j\}_{j=1}^d)=\mathcal{B}(z_1\bullet z_2,\mathbf{e},r,r^*,\rho,\{l_j\}_{j=1}^d).$$

（2）每个与 $\{L_j\}_{j=1}^M$ 相关的抛物球都是 C-正则的，其中某个 $C>0$ 仅依赖于 n、π_j、p_j。（3）每个与 $\{L_j\}_{j=1}^M$ 相关的抛物球都是尺度不变的，含义是

$$|\widetilde{\mathcal{B}}|=a^{n+1}|\mathcal{B}|;\tag{12.2}$$

$$|\pi_j(\widetilde{\mathcal{B}})|=\begin{cases}(\prod_{i:e_i\notin V_j}\lambda_i^*)a^{\dim V_j+1}|\pi_j(\mathcal{B})|, & 1\le j\le m,\\ (\prod_{i:e_i\notin V_j}\lambda_i)a^{\dim V_j+1}|\pi_j(\mathcal{B})|, & m<j\le M;\end{cases}\tag{12.3}$$

$$|\widetilde{\pi}_j(\widetilde{\mathcal{B}})|=(\prod_{i=1}^{\widetilde{k}_j}\lambda_i^*)a^{n-\widetilde{k}_j+1}|\pi_j(\mathcal{B})|,\qquad 1\le j\le\widetilde{m};\tag{12.4}$$

$$|\widetilde{\pi}_j^*(\widetilde{\mathcal{B}})|=(\prod_{i=1}^{\widetilde{k}_j}\lambda_i)a^{n-\widetilde{k}_j+1}|\pi_j^*(\mathcal{B})|,\qquad 1\le j\le\widetilde{m},\tag{12.5}$$

对于任意满足 $\lambda_i\lambda_i^*=a$（$1\le i\le n$ 时）的 λ、$\lambda^*\in\mathbb{R}_{>0}$，以及

$$\mathcal{B}=\mathcal{B}(z,r,r^*,\rho,\{L_j\}_{j=1}^M),\qquad\widetilde{\mathcal{B}}=\mathcal{B}(z,\lambda\otimes r,\lambda^*\otimes r^*,a\rho,\{L_j\}_{j=1}^M),$$

其中 $\lambda\otimes r=(\lambda_1r_1$、…、$\lambda_nr_n)$。

(4) 设 $\varepsilon\in(0,\ 1)$，并设 $\mathcal{B}$、$\mathcal{B}'$ 分别为与对偶椭球($\mathcal{C}$、$\mathcal{C}_*$) 和 ($\mathcal{C}'$、$\mathcal{C}_*'$)相关联的两个抛物球。假设 l 是到由满足以下条件的某些 e_i 张成的子空间上的正交投影

$$\max\{\frac{|l(\mathcal{C})|}{|l(\mathcal{C}')|},\frac{|l(\mathcal{C}')|}{|l(\mathcal{C})|},\frac{|l(\mathcal{C}_*)|}{|l(\mathcal{C}_*')|},\frac{|l(\mathcal{C}_*')|}{|l(\mathcal{C}_*)|}\}\gtrsim\varepsilon^{-A}.\tag{12.6}$$

那么存在一个依赖于 n、π_j、p_j、A 的 C_A，使得 $\lim_{A\to\infty}C_A=\infty$，且

$$|\pi_j(\mathcal{B})\cap\pi_j(\mathcal{B}')|\lesssim\varepsilon^{C_A}\max\{|\pi_j(\mathcal{B})|,|\pi_j(\mathcal{B}')|\},\qquad 1\le j\le M;\tag{12.7}$$

$$|\widetilde{\pi}_j(\mathcal{B})\widetilde{\cap}\pi_j(\mathcal{B}')|\lesssim\varepsilon^{C_A}\max\{|\widetilde{\pi}_j(\mathcal{B})|,|\widetilde{\pi}_j(\mathcal{B}')|\},\qquad 1\le j\le\widetilde{m};\tag{12.8}$$

$$|\widetilde{\pi}_j^*(\mathcal{B})\widetilde{\cap}\pi_j^*(\mathcal{B}')|\lesssim\varepsilon^{C_A}\max\{|\widetilde{\pi}_j^*(\mathcal{B})|,|\widetilde{\pi}_j^*(\mathcal{B}')|\},\qquad 1\le j\le\widetilde{m}.\tag{12.9}$$

证明。性质（1）和正则性可通过直接计算得出。根据初等微积分可知 $|\mathcal{B}|\sim\rho^{n+1}$ and

$$|\pi_j(\mathcal{B})|\sim\begin{cases}|L_j(\mathcal{C})||\mathcal{C}_*|\rho\sim(\prod_{i:e_i\notin V_j}r_i)\rho^{\dim V_j+1}, & 1\le j\le m,\\ |\mathcal{C}||L_j(\mathcal{C}_*)|\rho\sim(\prod_{i:e_i\notin V_j}r_i^*)\rho^{\dim V_j+1}, & m<j\le M.\end{cases}$$

根据第 5 节中 P_j 的构造， P_j 的像也由某些 e_i 张成。因此，我们同样可以得到 $\widetilde{\pi}_j(\mathcal{B})$ $\widetilde{\pi}_j^*(\mathcal{B})$ 的大小。由此可直接验证性质（3）。回想一下条件（A）和（C）以及 $V=\mathbb{R}^n$，可得 $\prod_{j=1}^M|\pi_j(\mathcal{B})|^{\frac{1}{p_j}}\sim\rho^{n+1}$，从而得到性质（2）。

设 $\rho^n=|\mathcal{C}||\mathcal{C}_*|$,$(\rho')^n=|\mathcal{C}'||\mathcal{C}'_*|$. (12.6)，且 $(\mathcal{C},\mathcal{C}_*),(\mathcal{C}',\mathcal{C}'_*)$ 的对偶性推出$|\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'|\lesssim\max\{|\mathcal{C}|,|\mathcal{C}'|\},|\mathcal{C}_*\cap\mathcal{C}'_*|\lesssim\max\{|\mathcal{C}_*|,|\mathcal{C}'_*|\}$。然后，由 $\pi_j(\mathcal{B})$ 的大小以及以下内容可推出性质（4）：

$$|\pi_j(\mathcal{B})\cap\pi_j(\mathcal{B}')|\le\begin{cases}|L_j(\mathcal{C}\cap\mathcal{C}')||\mathcal{C}_*\cap\mathcal{C}'_*|\min\{\rho,\rho'\}, & 1\le j\le m,\\ |L_j(\mathcal{C}_*\cap\mathcal{C}'_*)||\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'|\min\{\rho,\rho'\}, & m<j\le M.\end{cases}$$

对 $\widetilde{\pi}_j,\widetilde{\pi}_j^*$ 也有类似的估计。 □

本节的主要结果如下:

命题 12.3。 设 $\varepsilon>0$。假设 $\Omega\subset\mathbb{H}^n$ 是 ε-正则的，则存在一个与 $\{L_j\}_{j=1}^M$ 相关联的抛物球 $\mathcal{B}$，以及一个依赖于 ε、n、π_j、p_j 的 $C>0$，使得

$$\varepsilon^C|\mathcal{B}|\lesssim|\Omega|\lesssim\varepsilon^{-C}|\Omega\cap\mathcal{B}|, \tag{12.10}$$

and

$$\begin{aligned}&|\pi_j(\mathcal{B})|\le|\pi_j(\Omega)| &&j=1,\dots,M;\\ &|\widetilde{\pi}_j(\mathcal{B})|\le|\widetilde{\pi}_j(\Omega)| &&j=1,\dots,\widetilde{m};\\ &|\widetilde{\pi}_j^*(\mathcal{B})|\le|\widetilde{\pi}_j^*(\Omega)| &&j=1,\dots,\widetilde{m}.\end{aligned} \tag{12.11}$$

要证明命题 12.3，只需证明以下命题:

命题 12.4. 设 $\varepsilon>0$。假设 $\Omega\subset\mathbb{H}^n$ 是 ε-正则的。那么，存在一个与 $\{L_j\}_{j=1}^M$ 相关联的抛物球 $\mathcal{B}$，使得 *(12.10)* 成立，并且

$$\begin{aligned}&|\pi_j(\mathcal{B})|\lesssim\varepsilon^{-C}|\pi_j(\Omega)| &&j=1,\dots,M;\\ &|\widetilde{\pi}_j(\mathcal{B})|\lesssim\varepsilon^{-C}|\widetilde{\pi}_j(\Omega)| &&j=1,\dots,\widetilde{m};\\ &|\widetilde{\pi}_j^*(\mathcal{B})|\lesssim\varepsilon^{-C}|\widetilde{\pi}_j^*(\Omega)| &&j=1,\dots,\widetilde{m}.\end{aligned} \tag{12.12}$$

$0<C<\infty$ 是一个仅依赖于 n、π_j、p_j 的常数。

为证明这一点，我们需要以下引理，它改编自 [9] 中的引理 7.2:

引理 12.5。 对于每个 $1\le j\le M$，存在 $0<C$、A、$A_j<\infty$，使得对于任意 $\delta\in(0,1]$ 以及任意抛物球 $\mathcal{B}(z$、$\mathbf{e}$ r、r^*、ρ、$\{L_j\}_{j=1}^M)$，存在一个与 $\{L_j\}_{j=1}^M$ 相关联的抛物球族$\{\mathcal{B}_k\}_{k\in\mathcal{K}}$，满足

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}\subset\cup_{k\in\mathcal{K}}\mathcal{B}_k,\\ &\#\mathcal{K}\le C\delta^{-C},\\ \forall 1\le j\le M\quad&|\pi_j(\mathcal{B}_k)|=\delta^{A_j}|\pi_j(\mathcal{B})|,\\ \forall 1\le j\le\widetilde{m}\quad&|\widetilde{\pi}_j(\mathcal{B}_k)|=\delta^{\widetilde{A}_j^*}|\widetilde{\pi}_j(\mathcal{B})|,\\ \forall 1\le j\le\widetilde{m}\quad&|\widetilde{\pi}_j^*(\mathcal{B}_k)|=\delta^{\widetilde{A}_j}|\widetilde{\pi}_j^*(\mathcal{B})|.\end{aligned}$$

证明。根据性质 12.2，不妨设$\mathbf{e}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基，z 是原点，而 $\rho = r_j = r_j^* = 1$ 是 $j = 1$、.....、n。初等微积分表明 $|\mathcal{B}| \sim 1$。令 $\eta = c\delta^2$，其中 $c > 0$ 是一个较小的数，其值稍后确定。考虑 $\{z_k\}_{k\in\mathcal{K}} = \mathcal{B} \cap (\eta\mathbb{Z})^{2n+1}$。于是 $\#\mathcal{K} \lesssim \delta^{-C}$。

对于每个 $k \in \mathcal{K}$，定义 $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}(z_k, \mathbf{e}\, r, r^*, \delta^2, \{L_j\}_{j=1}^M)$，其中 $r_i = r_i^* = \delta$ 对 $1 \le i \le n$。于是 $|\pi_j(\mathcal{B}_k)| = \delta^{A_j}|\pi_j(\mathcal{B})|$，其中 $A_j =$ 维数为 $V_j + n + 2$，对于 $1 \le j \le M$。我们~~~~对 $\widetilde{\pi}_j$，$\widetilde{\pi}_j^*$ 也能得出类似结论，其中 $A_j = 2n - k_j + 2$。选取充分小的 $c > 0$ 即可得到 $\mathcal{B} \subset \cup_{k\in\mathcal{K}}\mathcal{B}_k$。□

假设命题 *12.4* 成立时命题 *12.3* 的证明。设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$。假设存在一个与 $\{L_j\}_{j=1}^M$ 相关联的抛物球 $\mathcal{B}$，满足 (12.10) 和 (12.12)。令$\delta = \varepsilon^C$。那么，根据引理 12.5，存在一个由与 $\{L_j\}_{j=1}^M$相关联的抛物球构成的覆盖 $\{\mathcal{B}_k\}_{k\in\mathcal{K}}$。选取充分大的 C，我们可以在该覆盖中找到一个满足 (12.10) 和 (12.11) 的抛物球。□

本节余下部分将通过改编 [9] 中的第 7 节来证明命题 12.4。我们先证明 [9] 中引理 4.1 的一个推广。

引理 12.6（切片引理）。设 $B \in \mathbb{R}^{2n+1}$ 为以 0 为中心的单位球。对于s、u、$v \in \mathbb{R}^n$，定义

$$\Phi(s,u,v) = (x_0 + s + v, y_0 + u, t_0 + \frac{1}{2}(-s\cdot y_0 + (x_0+s)\cdot u - v\cdot(y_0+u))).$$

设 $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个对称可逆线性变换。设 $s' \in \mathbb{R}^{n-k}$。假设 $\emptyset \ne \omega \subset \{$（$a$、$s'$、$b$）$\in A$（$B$）$\times \mathbb{R}^{2n}$：$a \in \mathbb{R}^k$、$b \in \mathbb{R}^{2n}\}$。则

$$|\Phi(\omega)| \gtrsim |\det A|^{-1}\int_\omega |P(Au)|dvduds,$$

其中 $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ 是到与 A^{-1}（$\mathbb{R}^k \times \{s'\}$）平行的 k 维子空间上的正交投影。

证明。设 $\widetilde{s} = A^{-1}s, \widetilde{u} = Au, \widetilde{v} = A^{-1}v, \widetilde{\omega} := \{(\widetilde{s},\widetilde{u},\widetilde{v}) \in \mathbb{R}^{3n} : (A\widetilde{s}, A^{-1}\widetilde{u}, A\widetilde{v}) \in \omega\} \subset B \times \mathbb{R}^{2n}$。那么，

$$\begin{aligned}&\Phi(s,u,v) = \Phi(A\widetilde{s}, A^{-1}\widetilde{u}, A\widetilde{v})\\ =&(x_0 + A(\widetilde{s}+\widetilde{v}), y_0 + A^{-1}\widetilde{u}, t_0 + \frac{1}{2}(-(\widetilde{s}+\widetilde{v})^T A y_0 + x_0^T A^{-1}\widetilde{u} + (\widetilde{s}-\widetilde{v})\cdot\widetilde{u}))\\ =&\widetilde{A}\Phi(\widetilde{s},\widetilde{u},\widetilde{v}),\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{A}: \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ 是由下式给出的线性映射

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(x,y,t) =&(A(x-x_0)+x_0, A^{-1}(y-y_0)+y_0,\\ &t + \frac{1}{2}((x-x_0)\cdot y_0 - (x-x_0)^T A y_0 - x_0\cdot(y-y_0) + x_0^T A^{-1}(y-y_0))).\end{aligned}$$

~~由于 $|\det A| \equiv 1$，我们有 $|\Phi(\omega)| = |\Phi(\widetilde{\omega})|$。

注意，$\Pi = A^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{s'\})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个仿射子空间，而 $\widetilde{B} := \Pi \cap B$ 是一个半径为 $r_0 \in (0,1]$ 的 k 维球（见图4）。令 $D = \{\nu \in S^{n-1} : \nu /\!\!/ \Pi\}$，并令 $\nu^\perp$ 为 Π 中垂直于 $\nu \in D$~~~~且经过 B 中心的 $(k-1)$ 维仿射平面。于是，对每个 $s \in B$，都存在唯一的一对

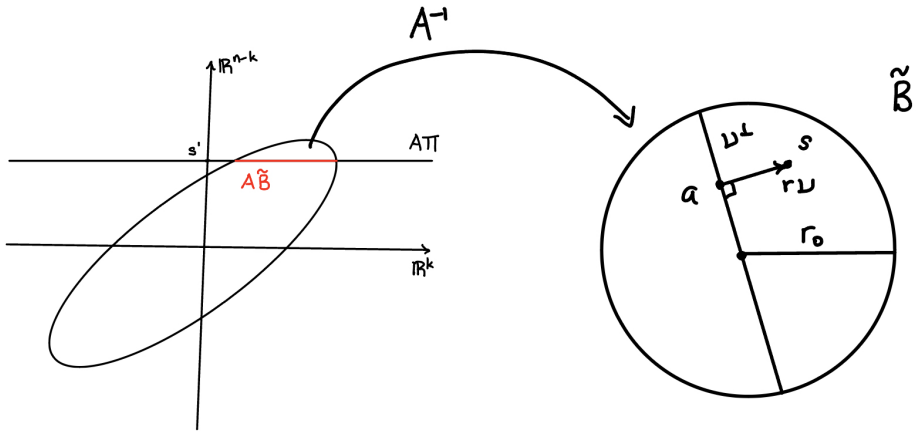


FIGURE 4

$(a,\ r) \in (\widetilde{B} \cap \nu^\perp) \times [0, r_0)$ 使得 $s = a + r\nu$。定义 $G_{a,\ \nu}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n$为

$$G_{a,\nu}(r, u, v) \coloneqq \Phi(a + r\nu, u, v).$$

设 $\widetilde{\omega}_{a,\nu} = \{(r, u, v) \in \mathbb{R}^{2n+1} : (a + r\nu, u, v) \in \widetilde{\omega}\}$。那么 $G_{a,\nu}(\widetilde{\omega}_{a,\nu}) \subset \Phi(\widetilde{\omega})$。容易验证，$G_{a,\nu}$ 的雅可比行列式为 $|\nu \cdot u|$。根据贝祖定理，对于每个 $a \in \nu^\perp$，

$$|\Phi(\widetilde{\omega})| \geq |G_{a,\nu}(\widetilde{\omega}_{a,\nu})| \sim \int_{\widetilde{\omega}_{a,\nu}} |\nu \cdot u| dr du dv.$$

由于 $|\widetilde{B} \cap \nu^\perp| \sim r_0^{k-1}$，我们有

$$|\Phi(\widetilde{\omega})| \sim r_0^{1-k} \int_{\widetilde{B}\cap\nu^\perp} |\Phi(\widetilde{\omega})| da \gtrsim \int_{\widetilde{B}\cap\nu^\perp} \int_{\widetilde{\omega}_{a,\nu}} |\nu \cdot u| dr du dv da \sim \int_{\widetilde{\omega}} |\nu \cdot u| ds du dv. \tag{12.13}$$

同理，我们可以对 D 上的 $|\Phi(\widetilde{\omega})|$ 关于 ν 积分：

$$\begin{aligned}
&|\Phi(\widetilde{\omega})| \sim \int_D |\Phi(\widetilde{\omega})| d\nu \\
\gtrsim &\int_D \int_{\widetilde{\omega}} |\nu \cdot u| ds du dv d\nu = |\det A|^{-1} \int_D \int_\omega |\nu \cdot (Au)| ds du dv d\nu \\
= &|\det A|^{-1} \int_\omega \int_D |\nu \cdot (Au)| d\nu ds du dv \sim |\det A|^{-1} \int_\omega |P(Au)| ds du dv,
\end{aligned}$$

其中 $P\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ 是到与 Π 平行的 k 维子空间上的正交投影。□

命题 *12.4* 的证明。设 $\varepsilon > 0$。假设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 是 ε-正则的。令

$$\alpha_j = \frac{|\Omega|}{|\pi_j(\Omega)|}, \qquad 1 \leq j \leq M; \tag{12.14}$$

$$\beta_j = \frac{|\Omega|}{|\widetilde{\pi}_j(\Omega)|}, \quad \beta_j^* = \frac{|\Omega|}{|\widetilde{\pi}_j^*(\Omega)|}, \qquad 1 \leq j \leq \widetilde{m}. \tag{12.15}$$

由命题 11.1 和 ε-正则性，我们有

$$\prod_{j=1}^{m}\alpha_j \lesssim \varepsilon^{-C}\prod_{j=1}^{\widetilde{m}}\beta_j \lesssim \varepsilon^{-C}\prod_{j=1}^{m}\alpha_j, \qquad \prod_{j=m+1}^{M}\alpha_j \lesssim \varepsilon^{-C}\prod_{j=1}^{\widetilde{m}}\beta_j^* \lesssim \varepsilon^{-C}\prod_{j=m+1}^{M}\alpha_j. \tag{12.16}$$

由推论 11.2，存在一个较大的常数 C，它仅依赖于 n, π_j, p_j, 一个 $(z_0, S_1, \mathcal{F}_l, \mathcal{G}_l)$ 精化流方案（Ω π, 10），以及一个以原点为中心、适配于 $\{L_j\}_{j=1}^m$ 的椭球 $\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^n$，满足 $S_1\subset\mathcal{C}$, $|\mathcal{C}|\lesssim\varepsilon^{-C}|S_1|$。

记 $S=S_1$, $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1$, 以及 $\mathcal{C}=A(B)$, 其中 A 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可逆对称线性变换, $B\subset\mathbb{R}^n$ 是以原点为中心的单位球。我们还可以写成 $A=\mathbf{e}\,\mathrm{diag}(r)\mathbf{e}^T$, 其中 $r=(r_1, \ldots, r_n)\in(\mathbb{R}_{>0})^n$, ~ 且 $\mathbf{e}=\{\widetilde{e}_i\}_{i=1}^n$ 是正交归一的，使得对于每个 $1\le j\le\widetilde{m}$, $\{\widetilde{e}_i\}_{i=1}^{k_j}$ 张成前 $\widetilde{k}_j$ 个坐标。于是

$$\alpha_j \lesssim \frac{|S|}{|L_j(S)|}\lesssim\frac{|\mathcal{C}|}{|L_j(\mathcal{C})|}, \quad \alpha_j\lesssim\frac{|\mathcal{G}|}{|L_j(\mathcal{G})|}, \qquad 1\le j\le m; \tag{12.17}$$

$$\alpha_j\lesssim\frac{|\mathcal{F}|}{|L_j(\mathcal{F})|}, \qquad m<j\le M; \tag{12.18}$$

$$\beta_j\lesssim\frac{|\mathcal{C}|}{|P_j(\mathcal{C})|}\sim|P_j^{\perp}(\mathcal{C})|\sim\prod_{i=1}^{\widetilde{k}_j}r_i\lesssim\varepsilon^{-C}\beta_j, \qquad 1\le j\le\widetilde{m}; \tag{12.19}$$

$$\beta_j\lesssim|P_j^{-1}(s_j)\cap S|, |P_j^{-1}(v_j)\cap\mathcal{G}|\lesssim\varepsilon^{-C}\beta_j, \qquad \forall s_j\in P_j(S), v_j\in P_j(\mathcal{G}); \tag{12.20}$$

$$\beta_j^*\lesssim|P_j^{-1}(u_j)\cap\mathcal{F}|\lesssim\varepsilon^{-C}\beta_j^*, \qquad \forall u_j\in P_j(\mathcal{F}). \tag{12.21}$$

步骤 1。应用引理 12.6，取

$$\begin{aligned} A_j &= \mathbf{e}\,\mathrm{diag}(r_1,\ldots,r_{\widetilde{k}_j},1,\ldots,1)\mathbf{e}^T,\\ \omega_j &= \{(s,s_j,u,v)\in\mathbb{R}^{3n}, (s,s_j)\in S, u\in\mathcal{F}(s,s_j), v\in\mathcal{G}(s,s_j,u)\}, \qquad s_j\in P_j(S),\\ \phi_j(s,s_j,u,v) &= e^{v\cdot\mathbf{X}}e^{u\cdot\mathbf{Y}}e^{(s,s_j)\cdot\mathbf{X}}(z_0), \qquad (12.22)\\ P &= P_j^{\perp}. \end{aligned}$$

我们断言如下：

$$\varepsilon^{C_0}\beta_{\widetilde{m}}\beta_{\widetilde{m}}^*(\beta_j\beta_j^*)^{\frac{1}{k_j}}\lesssim|\phi(\omega_j)|\le|\Omega|\lesssim\varepsilon^{-C}\beta_{\widetilde{m}}\beta_{\widetilde{m}}^*(\beta_j\beta_j^*)^{\frac{1}{k_j}}, \qquad 1\le j\le\widetilde{m}. \tag{12.23}$$

为此，我们固定 $s_j'\in P_j(S)$，其中 $j=1$, ..., $\widetilde{m}$。于是

$$|\Omega|\gtrsim\varepsilon^C\beta_j^{-2}\beta_{\widetilde{m}}\int_{P_j^{-1}(s_j')\cap S}\int_{\widetilde{\mathcal{F}}_j(s)}|P_j^{\perp}(u)|duds,$$

~ ~其中 $\mathcal{F}_j(s)=A_j(\mathcal{F}(s))$。根据 A_j 的定义, $P_j(\mathcal{F}_j(s))=P_j(\mathcal{F}(s))$。此外，由 (12.21) 和 $\widetilde{k}_{\widetilde{m}}=n$，有 $|P_j(\mathcal{F}(s))|\gtrsim\varepsilon^C\beta_{\widetilde{m}}^*/\beta_j^*$；由 (12.20) 和 (12.21)，有 $|P_j^{-1}(u_j)\cap\widetilde{F}_j(s)|\gtrsim\varepsilon^C\beta_j\beta_j^*$。于是

$$\int_{\widetilde{\mathcal{F}}_j(s)}|P_j^{\perp}(u)|du=\int_{P_j(\mathcal{F}_j(s))}\int_{P_j^{-1}(u_j)\cap\widetilde{\mathcal{F}}_j(s)}|P_j^{\perp}(u)|dudu_j\gtrsim\varepsilon^C\beta_j\beta_{\widetilde{m}}^*(\beta_j\beta_j^*)^{\frac{1}{k_j}}.$$

下界由进一步应用 (12.20) 得到。

~为证明上界，令 $|\Omega| = \varepsilon^{-C_j}(\beta_{\widetilde{m}}\beta^*_{\widetilde{m}})(\beta_j\beta^*_j)^{1/k_j}$表示 $1 \le j \le \widetilde{m}$。由 (8.2) 和 (12.23) 的下界，我们可推出：

$$|\Omega|^N \gtrsim \varepsilon^{C'_j}\prod_{j=1}^{\widetilde{m}}(\beta_{\widetilde{m}}\beta^*_{\widetilde{m}}(\beta_j\beta^*_j)^{\frac{1}{k_j}})^{\widetilde{k}_j\widetilde{\widetilde{q}}_j} = \varepsilon^{C'_j}\prod_{j=1}^{\widetilde{m}}(\beta_j\beta^*_j)^{\widetilde{q}_j}, \tag{12.24}$$

~ ~其中 $C'_j = -C_jk_j\widetilde{\widetilde{q}}_j + C_0\prod_{r\neq j}k_r\widetilde{\widetilde{q}}_r$。当 C_j 过大时，这与准极值性矛盾。

~**步骤 2**。现在我们构造对偶椭球 $\mathcal{C}_*$。令 $\mathcal{F}(s) = A(\mathcal{F}(s))$。那么$\beta_{\widetilde{m}}\beta^*_{\widetilde{m}} \lesssim |\widetilde{\mathcal{F}}(s)| \lesssim \varepsilon^{-C}\beta_{\widetilde{m}}\beta^*_{\widetilde{m}}$。我们注意到，对于任意 $\rho > 0$，以下两种情况必有其一：

~(1) $\int_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}|u|du \gtrsim \rho|\mathcal{F}(s)|$，

或者~ ~(2) $|\mathcal{F}(s) \cap B^n_\rho(0)| \gtrsim |\mathcal{F}(s)|$，

其中，$B^n_\rho(0)$表示 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 ρ 且以原点为中心的球。记

$$\rho = \varepsilon^{-C'}(\beta_{\widetilde{m}}\beta^*_{\widetilde{m}})^{\frac{1}{n}}, \tag{12.25}$$

其中，$a > 0$ 是一个待确定的大常数。这个二分情况实质上归结为以下两种：

(1) 存在 S的一个细化 $S^\dagger$，使得对任意$s \in S^\dagger$，$\int_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}|u|du \gtrsim \rho^{n+1}$；或者
(2) 存在 S的一个细化 $S^\ddagger$，使得对任意$s \in S^\ddagger$，$|\widetilde{\mathcal{F}}(s) \cap B^n_\rho(0)| \sim |\widetilde{\mathcal{F}}(s)|$。

事实上，当 C'充分大时，第一种情况不可能发生。否则，我们得到

$$|\Omega| \gtrsim \varepsilon^{-nC'}(\beta_{\widetilde{m}}\beta^*_{\widetilde{m}})^{\frac{n+1}{n}} \gtrsim \varepsilon^{C-nC'}\prod_{j=1}^{M}\alpha_j^{\frac{q_j}{N}},$$

由 (12.23) 的上界（取 $j = \widetilde{m}$）以及命题 11.1 可得。这与当 C'充分大时的拟极值性矛盾。

写作 $\mathcal{C}_* = A^{-1}(B^n_\rho(0)) = A_*(B)$，其中 $A_* = \mathbf{e}\,\mathrm{diag}(r^*)\mathbf{e}^T$, $r^*_j = \rho/r_j$对于每个 h j。于是 $|\mathcal{F}(s) \cap \mathcal{C}_*| \sim |\mathcal{F}(s)|$ 且 $|\mathcal{C}_*| \lesssim \varepsilon^{-C}|\mathcal{F}(s)|$。因此，

$$\alpha_j \lesssim \frac{|\mathcal{C}_*|}{|L_j(\mathcal{C}_*)|}, \qquad m < j \le M; \tag{12.26}$$

$$\beta^*_j \lesssim \frac{|\mathcal{C}_*|}{|P_j(\mathcal{C}_*)|} \sim |P^\perp_j(\mathcal{C}_*)| \lesssim \varepsilon^{-C}\beta^*_j, \qquad 1 \le j \le \widetilde{m}. \tag{12.27}$$

由 (12.16)、(12.26)、(12.27) 和推论 6.10，我们可以将 C_* 扩大，代价至多为 ε^{-C}（由对偶性，也可以将 $\mathcal{C}$ 扩大，代价至多为 ε^{-C}），使其适配于 $\{L_j\}_{j=1}^M$。现在令 $\mathbf{e}$ 表示新 $\mathcal{C}$沿主轴方向的标准正交基。注意，$\mathcal{C}_*$与 s无关。对于每个 $s \in S$，考虑 (Ω π_*, 9) 的精化流方案（$e^{s\cdot\mathbf{X}}(z_0)$ $\mathcal{F}(s)$ $\mathcal{G}_l(s,\cdot)$ $\mathcal{F}_{l+1}(s,\cdot)$）。利用 $\mathcal{C}, \mathcal{C}_*$的对偶性，如有必要，我们可以扩大$C, C'$，从而得到以下结论：

$$\forall s \in S \quad u \in \mathcal{F}(s) \qquad \mathcal{G}(s,u) \subset \mathcal{C}, \quad |\mathcal{C}| \lesssim \varepsilon^{-C}|\mathcal{G}(s,u)|. \tag{12.28}$$

步骤 3。现在我们断言，由 $\mathcal{C}$、$\mathcal{C}_*$ 确定的抛物球给出了所需的界（12.10）和（12.12）。令 $\mathcal{B} := \mathcal{B}(z_0$、 $\mathbf{e}$ r、r^*、ρ、$\{L_j\}_{j=1}^M)$。回顾（12.22），我们有 $\phi_{\widetilde{m}}(\omega) \subset \Omega \cap \mathcal{B}$。由（12.23），我们有

$$|\Omega \cap \mathcal{B}| \gtrsim \varepsilon^C(\beta_{\widetilde{m}}\beta^*_{\widetilde{m}})^{\frac{n}{n+1}} \gtrsim \varepsilon^C|\Omega|. \tag{12.29}$$

此外，根据准极值性、（12.23）的下界以及命题 11.1，我们得到

$$|\mathcal{B}| \sim \rho^{n+1} \lesssim \varepsilon^{-C} \prod_{j=1}^{\widetilde{m}} (\beta_j \beta_j^*)^{\frac{\tilde{q}_j}{N}} \lesssim \varepsilon^{-C} |\Omega|. \tag{12.30}$$

C 可能会随行而变化。

仍需证明 (12.12)。由于 $\mathcal{C}$，$\mathcal{C}_*$ 与 L_j（因此也与 P_j）相适配，所以可由 $\mathcal{B}$、(12.17)、(12.19)、(12.26)、(12.27) 和 $|\mathcal{B}| \lesssim \varepsilon^{-C}|\Omega|$ 的构造推得该界。□

13. 对几乎不相交的集合求和

下一步是将命题 12.3 推广到半正则集。我们将通过把 ε-准极值半正则集划分为 η-正则集来实现这一点，这些集合的$\widetilde{\pi}_j$，$\widetilde{\pi}_j^*$ 纤维截然不同。根据命题 12.3，我们可以用抛物球逼近正则集，误差至多为 η^{-C}。我们断言这些抛物球必定几乎不相交，因此正则集也几乎不相交。

引理 13.1。令 $\varepsilon \in (0.1]$。令 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$。假设对每个 Ω' 的细化，都存在一个与 $\{L_j\}_{j=1}^M$ 相关联的抛物球 $\mathcal{B}$，使得 $(\Omega', \mathcal{B})$ 满足 *(12.10)* 和 *(12.11)*。那么，存在一族与 $\{L_j\}_{j=1}^M$ 相关联的抛物球 $\{\mathcal{B}_k\}_{k\in\mathcal{K}}$，以及一个仅依赖于 n, π_j, p_j 的常数 $C > 0$，使得

$$|\Omega \cap (\bigcup_{k\in\mathcal{K}} \mathcal{B}_k)| \sim |\Omega|, \tag{13.1}$$

$$\#\mathcal{K} \lesssim \varepsilon^{-C}, \tag{13.2}$$

$$|\pi_j(\mathcal{B}_k)| \le |\pi_j(\Omega)|, \quad 1 \le j \le M, \tag{13.3}$$

$$|\widetilde{\pi}_j(\mathcal{B}_k)| \le |\widetilde{\pi}_j(\Omega)|, \quad 1 \le j \le \widetilde{m}, \tag{13.4}$$

$$|\widetilde{\pi}_j^*(\mathcal{B}_k)| \le |\widetilde{\pi}_j^*(\Omega)|, \quad 1 \le j \le \widetilde{m}. \tag{13.5}$$

证明。令 $\Omega_1 = \Omega$。根据假设，我们可以找到一个与$\{L_j\}_{j=1}^M$ 相关联的抛物球 $\mathcal{B}_1$，使其满足 (13.3)-(13.5)。对于 $k > 1$，假设我们已得到满足 (13.3)-(13.5) 的 $(\Omega_r, \mathcal{B}_r)$，其中 $|\Omega_r| > \frac{1}{2}|\Omega|$ 对于 $r < k$ 成立，且 $\{\Omega_r \cap \mathcal{B}_r\}_{r<k}$ 互不相交。令 $\Omega_k = \Omega_{k-1} \backslash \mathcal{B}_{k-1}$。假设 $|\Omega_k| > \frac{1}{2}|\Omega|$。那么存在一个与 $\{L_j\}_{j=1}^M$ 相关联的抛物球 $\mathcal{B}_k$，使其满足 (13.3)-(13.5)。由于 $\{\Omega_k \cap \mathcal{B}_k\}$ 是 Ω 的互不相交的 ε^C-细化，因此对于某个 $k \lesssim \varepsilon^{-C}$，必有 $|\Omega_k| \le \frac{1}{2}|\Omega|$。□

引理 13.2。设 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$, $A > 0$，并设 Ω、$\Omega' \subset \mathbb{H}^n$。假设对于 Ω、Ω' 的任意细化 $\widetilde{\Omega}$ $\widetilde{\Omega}'$，都存在与 $\{L_j\}_{j=1}^M$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 相关联的抛物球 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$，使得 $(\Omega\ \mathcal{B})$、$(\Omega', \mathcal{B}')$ 满足 *(12.10)* 和 *(12.11)*。令

$$\beta_j = \frac{|\Omega|}{|\widetilde{\pi}_j(\Omega)|}, \quad \beta_j^* = \frac{|\Omega|}{|\widetilde{\pi}_j^*(\Omega)|}; \qquad \beta_j' = \frac{|\Omega'|}{|\widetilde{\pi}_j(\Omega')|}, \quad (\beta_j^*)' = \frac{|\Omega'|}{|\widetilde{\pi}_j^*(\Omega')|}. \tag{13.6}$$

若存在某个 $1 \le j \le \widetilde{m}$ 使得

$$\max\{\frac{\beta_j}{\beta_j'}, \frac{\beta_j'}{\beta_j}, \frac{\beta_j^*}{(\beta_j')^*}, \frac{(\beta_j')^*}{\beta_j^*}\} \ge \varepsilon^{-A}, \tag{13.7}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$然后，我们可以分别选取Ω、Ω' 的细化Ω、Ω'，使得

$$\forall 1 \le j \le M \quad |\pi_j(\widetilde{\Omega}) \cap \pi_j(\widetilde{\Omega}')| \lesssim \varepsilon^{C_A} |\pi_j(\widetilde{\Omega} \cup \widetilde{\Omega}')|, \tag{13.8}$$

其中， $C_A>0$ 仅依赖于 n、π_j、 p_j、 A和$\lim_{A\to\infty}C_A=\infty$。

证明。 设 $\mathcal{B}$，$\mathcal{B}'$是与 $\{L_j\}_{j=1}^M$相关的两个抛物球，使得 (Ω $\mathcal{B}$)，(Ω′， $\mathcal{B}'$) 满足 (12.10) 和 (12.11)。设 ($\mathcal{C}$， $\mathcal{C}_*$)，($\mathcal{C}'$， $\mathcal{C}'_*$) 是相应的椭球。那么存在某个 $1\le j\le\widetilde{m}$，使得

$$\max\left\{\frac{|P_j^\perp(\mathcal{C})|}{|P_j^\perp(\mathcal{C}')|},\frac{|P_j^\perp(\mathcal{C}')|}{|P_j^\perp(\mathcal{C})|},\frac{|P_j^\perp(\mathcal{C}_*)|}{|P_j^\perp(\mathcal{C}'_*)|},\frac{|P_j^\perp(\mathcal{C}'_*)|}{|P_j^\perp(\mathcal{C}_*)|}\right\}\ge\varepsilon^{-C_A}$$

由 (13.7)、(12.10)、(12.11) 以及 $\mathcal{B}$ 的结构可知，其中 $C_A>0$ 是依赖于 n，π_j，p_j，A 和 $\lim_{A\to\infty}C_A=\infty$ 的常数。利用引理 13.1 和性质 12.2.4，即可完成证明。□

引理 13.3 (几乎不相交性[9])。 设 $\varepsilon\in(0,\frac12]$,，并设 $d>0$ 为正整数。假设 $F\subset\mathbb{R}^d$ 是一个可测集，且 $\{F_\ell\}_{\ell\in\Lambda}$ 是 F 的可测子集。如果对于每个 $\ell\in\Lambda$ 都有 $|F_\ell|\gtrsim\varepsilon|F|$，并且当 $\ell_1\neq\ell_2$ 时 $|F_{\ell_1}\cap F_{\ell_2}|\lesssim\varepsilon^3|F|$，那么

$$\sum_{\ell\in\Lambda}|F_\ell|\lesssim|F|. \tag{13.9}$$

证明。 该假设迫使 F_ℓ 的集合为有限集。由 H¨older 不等式,

$$\left(|F|^{-1}\sum_{\ell\in\Lambda}|F_\ell|\right)^2=|F|^{-2}\left(\int_F\sum_{\ell\in\Lambda}\mathcal{X}_{F_\ell}\right)^2$$

$$\le|F|^{-1}\int_F\left(\sum_{\ell\in\Lambda}\mathcal{X}_{F_\ell}\right)^2\sim|F|^{-1}\left(\sum_{\ell\in\Lambda}|F_\ell|+\sum_{\ell_1\neq\ell_2}|F_{\ell_1}\cap F_{\ell_2}|\right).$$

假设 ($|F|^{-1}\sum_{\ell\in\Lambda}|F_\ell|)^2\lesssim|F|^{-1}\sum_{\ell_1\neq\ell_2}|F_{\ell_1}\cap F_{\ell_2}|$。再次应用 H¨older 不等式可得

$$\#\Lambda^2\varepsilon^2\lesssim|F|^{-1}\#\Lambda^2\max_{\ell_1\neq\ell_2}|F_{\ell_1}\cap F_{\ell_2}|\lesssim\varepsilon^3\#\Lambda^2. \tag{13.10}$$

当 ε 足够小时便会产生矛盾。 □

本文余下部分基本上是反复应用以下引理。我们通过将 [9] 的第 9 节改写为多线性情形来证明该引理。

引理 13.4. 令 $\varepsilon,\eta_j\in(0,\frac12]$ 其中 $1\le j\le M$. 存在常数 $a_j,c>0$，使得下列性质成立。假设 $p_j\in[1,\infty]$ 且 $F_\ell,H_j,F_{j,\ell}\ge0$满足 $\sum_j1/p_j>1,1\le\ell\lesssim\prod\eta_j^{-1}$，并且

$$\forall l\qquad F_\ell\lesssim\prod_{j=1}^M F_{j,\ell}^{\frac{1}{p_j}}, \tag{13.11}$$

$$\forall l\qquad F_\ell\sim\varepsilon\prod_{j=1}^M H_j^{\frac{1}{p_j}}, \tag{13.12}$$

$$\forall l\quad\forall1\le j\le M\quad F_{j,\ell}\lesssim\eta_jH_j, \tag{13.13}$$

$$\forall 1 \le j \le M \quad \sum_{\ell} F_{j,\ell} \lesssim H_j. \tag{13.14}$$

Then

$$\sum_{\ell} F_\ell \lesssim \min\{\prod_{j=1}^{M} \eta_j^a, \varepsilon \prod_{j=1}^{M} \eta_j^{-1}\} \prod_{j=1}^{M} H_j^{\frac{1}{p_j}}. \tag{13.15}$$

证明. 由 H¨older 不等式、(13.11) 和 (13.14),

$$\sum_{\ell} F_\ell \lesssim \left(\sum_{\ell} \prod_{j=1}^{M-1} F_{j,\ell}^{\frac{r}{p_j}}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{\ell} F_{M,\ell}\right)^{\frac{1}{p_M}} \lesssim \left(\sum_{\ell} \prod_{j=1}^{M-1} F_{j,\ell}^{\frac{r}{p_j}}\right)^{\frac{1}{r}} H_M^{\frac{1}{p_M}}, \tag{13.16}$$

其中 $r^{-1} = 1 - p_M^{-1} < \sum_{j=1}^{M-1} p_j^{-1} =: s^{-1}$。再次应用 H¨older 不等式，并利用（13.14），可得

$$\left(\sum_{\ell} \prod_{j=1}^{M-1} F_{j,\ell}^{\frac{r}{p_j}}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{\ell} \prod_{j=1}^{M-1} F_{j,\ell}^{\frac{s}{p_j}} \prod_{j=1}^{M-1} F_{j,\ell}^{\frac{r-s}{p_j}}\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$\le \prod_{j=1}^{M-1} \left(\sum_{\ell} F_{j,\ell}\right)^{\frac{s}{p_j r}} \max_{\ell} \prod_{j=1}^{M-1} F_{j,\ell}^{\frac{r-s}{p_j r}} \sim \prod_{j=1}^{M-1} \eta_j^{\frac{r-s}{p_j r}} H_j^{\frac{1}{p_j}}.$$

将 M 替换为任意其他指标 j，我们可以找到一个足够小的常数 $a > 0$，使得

$$\sum_{\ell} F_\ell \lesssim \prod_{j=1}^{M} \eta_j^a H_j^{\frac{1}{p_j}}. \tag{13.17}$$

另一方面，由（13.12）和 $1 \le l \lesssim \prod \eta_j^{-1}$，我们可推出

$$\sum_{\ell} F_\ell \sim \varepsilon \sum_{\ell} \prod_{j=1}^{M} H_j^{\frac{1}{p_j}} \lesssim \varepsilon \prod_{j=1}^{M} \eta_j^{-1} H_j^{\frac{1}{p_j}}. \tag{13.18}$$

□

14. Summing quasiextremals

14.1. **准极值半正则集**。

命题 14.1。 设 $\varepsilon > 0$。假设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 是关于 π 的 1-半正则集，并且是 ε-准极值的。则存在一个与 $\{L_j\}_{j=1}^M$ 相关联的抛物球 $\mathcal{B}$，使得 *(12.10)* 和 *(12.11)* 成立。

˜证明。 不妨设 $p_j < \infty$。对于 $\ell \in \mathbb{Z}^m$，定义

$$\Omega_\ell = \{z \in \Omega : \forall j = 1, \dots, \widetilde{m} \quad 2^{\ell_j} \le |(\widetilde{T}_j^*)^\Omega(z)| < 2^{\ell_j + 1}\}. \tag{14.1}$$

那么 Ω_ℓ 相对于 π_* 是 1-半正则的，并且 $\Omega = \sqcup_\ell \Omega_\ell$（除去一个零测集）。由命题 11.1 可得

$$|\Omega_\ell| \lesssim \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega_\ell)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{14.2}$$

此外，存在某个二进有理数 $\eta_0 \in (0, 0.5]$ 使得

$$|\Omega_\ell| \sim \eta_0 \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}} \geq \eta_0 \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega_\ell)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{14.3}$$

于是，由引理 10.2 可推得 Ω_ℓ 是 $C\eta_0$-正则的。若 $\eta_0 \gtrsim \varepsilon^C$，则可应用命题 12.3，用抛物球逼近 Ω_ℓ，且其对 Ω 的逼近在 ε损失范围内仍然良好。假设我们始终有 $\eta_0 \leq \varepsilon^{C_0}$。只需证明当 C_0 过大时，这是不可能的。

令 Λ 表示指标集合 ℓ。考虑划分 $\Lambda = \sqcup_b \Lambda_b$，其中$1 \leq b \lesssim (\log(\eta_0^{-1}))^{\widetilde{m}}$，并且对于任意 b，每一对不同的 ℓ，$\ell' \in \Lambda_b$ 都满足大间隙性质 $|\ell_j - \ell'_j| \geq A \log(\eta_0^{-1})$，其中某个 j 以及充分大的 $A > 0$。应用命题 12.3 以及引理 10.6 和 13.2，可得到 Ω'_ℓ 对 Ω_ℓ的细化，使得

$$\forall \ell, \ell' \in \Lambda_b \qquad \ell \neq \ell' \implies |\pi_j(\Omega'_\ell) \cap \pi_j(\Omega'_{\ell'})| \lesssim \eta_0^{C_A} |\pi_j(\Omega)|. \tag{14.4}$$

进一步假设存在一个二进有理数 $\eta_j \in (0, \frac{1}{2}]$，使得对每个 ℓ,

$$\forall 1 \leq j \leq M \quad |\pi_j(\Omega'_\ell)| \sim \eta_j |\pi_j(\Omega)|. \tag{14.5}$$

我们可以假设对所有 j 都有 $\eta_j \gtrsim \eta_0^C$。否则，命题 11.1 给出

$$|\Omega'_\ell| \lesssim \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega'_\ell)|^{\frac{1}{p_j}} \lesssim \eta_0^{\min \frac{C}{p_j}} \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}}, \tag{14.6}$$

这与充分大的 C 时的 (14.3) 矛盾。注意，当 A 充分大时，$C_A \geq 3C$。令 $\overrightarrow{\eta} = \{\eta_j\}_{j=0}^{M}$。令 $\Lambda(b, \overrightarrow{\eta})$ 表示满足 (14.5) 的指标集合 $\ell \in \Lambda_b$，并令 $\Lambda(\overrightarrow{\eta}) = \sqcup_b \Lambda(b, \overrightarrow{\eta})$。引理 13.3 蕴含

$$\sum_{\ell \in \Lambda(b, \overrightarrow{\eta})} |\pi_j(\Omega'_\ell)| \lesssim |\pi_j(\Omega)|, \qquad 1 \leq j \leq M. \tag{14.7}$$

注意，$\#\Lambda(b, \overrightarrow{\eta}) \lesssim \min \eta_j^{-1}$。将引理 13.4 应用于 $F_\ell = |\Omega'_\ell|, H_j = |\pi_j(\Omega)|, F_{j,\ell} = |\pi_j(\Omega'_\ell)|$，并回顾 (5.1)，可得

$$\sum_{\Lambda(b, \overrightarrow{\eta})} |\Omega_\ell| \lesssim \min\{\prod_{j=1}^{M} \eta_j^a, \eta_0 \prod_{j=1}^{M} \eta_j^{-1}\} \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{14.8}$$

对 b 求和会产生一个无关紧要的 $(\log(\eta_0^{-1}))^{\widetilde{m}}$ 损失，并得到

$$\sum_{\Lambda(\overrightarrow{\eta})} |\Omega_\ell| \lesssim \min\{\prod_{j=1}^{M} \eta_j^a, \eta_0^b\} \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}}, \tag{14.9}$$

对某些常数 a，$b > 0$。对二进制有理数 $\eta_j \in [\varepsilon^C, \frac{1}{2}]$，$\eta_0 \leq \varepsilon^{C_0}$ 求和，当 C_0 足够大时，这与 Ω 的 ε-准极值性矛盾。□

14.2. **限制弱型不等式。**

命题 14.2. 设 $\mathbf{p} \in ([1, \infty] \cap \mathbb{Q})^n$ 满足条件 *(A)* 和 *(C)*。那么限制弱型估计 $(\widetilde{B})$,

$$|\Omega| \lesssim \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}} \tag{14.10}$$

对所有勒贝格可测子集 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$一致成立。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $p_j < \infty$ 且 Ω 有界。对于$\ell \in \mathbb{Z}^m$，定义

$$\Omega_\ell = \{z' \in \Omega : \forall j = 1, \dots, \widetilde{m} \quad 2^{\ell_j} \le |\widetilde{T}_j^{\Omega}(z)| < 2^{\ell_j+1}\}. \tag{14.11}$$

那么 Ω_ℓ 关于 π 是 1-半正则的，并且 $\Omega = \sqcup \Omega_\ell$ （相差一个零测集）。由命题 11.1 得

$$|\Omega_\ell| \lesssim \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega_\ell)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{14.12}$$

此外，存在某个二进有理数 $\varepsilon \in (0, 0.5]$，使得

$$|\Omega_\ell| \sim \varepsilon \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}} \ge \varepsilon \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega_\ell)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{14.13}$$

令 Λ 表示指标集 ℓ。考虑划分 $\Lambda = \sqcup_b \Lambda_b$，其中$1 \le b \lesssim (\log(\eta_0^{-1}))^{\widetilde{m}}$，并且对于任意 b，每一对不同的 ℓ，$\ell' \in \Lambda_b$ 都具有大间隙性质 $|\ell_j - \ell'_j| \ge A \log(\eta_0^{-1})$，其中某个 j 且 $A > 0$ 足够大。于是可以应用命题 14.1 以及引理 10.2 和 13.2，得到 Ω'_ℓ 对 Ω_ℓ 的细化，使得若 $\ell \neq \ell'$，则对所有 $1 \le j \le M$，

$$|\pi_j(\Omega'_\ell) \cap \pi_j(\Omega'_{\ell'})| \lesssim \varepsilon^{C_A} |\pi_j(\Omega)|, \qquad \lim_{A \to \infty} C_A = \infty. \tag{14.14}$$

进一步假设二进有理数 $\eta_j \in (0, \frac{1}{2}]$，使得对每个 ℓ，

$$\forall 1 \le j \le M \quad |\pi_j(\Omega'_\ell)| \sim \eta_j |\pi_j(\Omega)|. \tag{14.15}$$

我们可以假设对所有 j，$\eta_j \gtrsim \varepsilon^C$。否则，由命题 11.1 可得

$$|\Omega'_\ell| \lesssim \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega'_\ell)|^{\frac{1}{p_j}} \lesssim \varepsilon^{\min \frac{C}{p_j}} \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}},$$

这与充分大的 C 时的 (14.13) 矛盾。注意，充分大的 A 时，$C_A \ge 3C$。令 $\overrightarrow{\eta} = \{\eta_j\}_{j=1}^{M}$。令 $\Lambda(b, \varepsilon, \overrightarrow{\eta})$ 表示满足 (14.15) 的指标集合 $\ell \in \Lambda_b$，并令 $\Lambda(\varepsilon, \overrightarrow{\eta}) = \sqcup_b \Lambda(b, \varepsilon, \overrightarrow{\eta})$。由引理 13.3 可得

$$\sum_{\ell \in \Lambda(b, \varepsilon, \overrightarrow{\eta})} |\pi_j(\Omega'_\ell)| \lesssim |\pi_j(\Omega)|, \qquad 1 \le j \le M.$$

注意，$\#\Lambda(b, \overrightarrow{\eta}) \lesssim \min \eta_j^{-1}$。将引理 13.4 应用于 $F_\ell = |\Omega'_\ell|, H_j = |\pi_j(\Omega)|, F_{j,\ell} = |\pi_j(\Omega'_\ell)|$，并回忆 (5.1)，可得

$$\sum_{\Lambda(b, \varepsilon, \overrightarrow{\eta})} |\Omega_\ell| \lesssim \min\{\prod_{j=1}^{M} \eta_j^a, \varepsilon \prod_{j=1}^{M} \eta_j^{-1}\} \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}}. \tag{14.16}$$

对 b 求和会带来一个无关紧要的 $(\log(\varepsilon^{-1}))^{\widetilde{m}}$ 损失，并得到

$$\sum_{\Lambda(\varepsilon, \overrightarrow{\eta})} |\Omega_\ell| \lesssim \min\{\prod_{j=1}^{M} \eta_j^a, \varepsilon^b\} \prod_{j=1}^{M} |\pi_j(\Omega)|^{\frac{1}{p_j}}, \tag{14.17}$$

对于某些正常数 a，b。对二进制有理数 η_j，$\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ 求和即可得到 14.10。□ –

上述证明蕴含以下定理，它概括了命题 12.3 和推论 14.1：

定理 14.3. 设 $\varepsilon > 0$。假设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 是 ε-准极值的，则存在一个与 $\{L_j\}_{j=1}^M$ 相关联的抛物球 $\mathcal{B}$，使得 *(12.10)* 和 *(12.11)* 成立。

下面给出引理 13.2 的一个变体。

引理 14.4. 设 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}], A > 0$。假设 $\{\mathcal{X}_{E_j}\}_{j=1}^M, \{\mathcal{X}_{E'_j}\}_{j=1}^M$ 都是 ε- 准极值的。再假设存在 $1 \le j \le M$，使得

$$\max\{\frac{|E_j|}{|E'_j|}, \frac{|E'_j|}{|E_j|}\} \ge \varepsilon^{-A}. \tag{14.18}$$

那么存在 $\{\mathcal{X}_{\widetilde{E}_j}\}_{j=1}^M, \{\mathcal{X}_{\widetilde{E}'_j}\}_{j=1}^M$，使得

$$\mathcal{M}(\{\mathcal{X}_{\widetilde{E}_j}\}_{j=1}^M) \sim \mathcal{M}(\{\mathcal{X}_{E_j}\}_{j=1}^M), \qquad \mathcal{M}(\{\mathcal{X}_{\widetilde{E}'_j}\}_{j=1}^M) \sim \mathcal{M}(\{\mathcal{X}_{E'_j}\}_{j=1}^M),$$

and

$$\forall 1 \le j \le M \quad |\widetilde{E}_j \cap \widetilde{E}'_j| \lesssim \varepsilon^{C_A} \max\{|E_j|, |E'_j|\},$$

其中 $C_A > 0$ 是一个依赖于 n, π_j, p_j, A 和 极限 $\lim_{A\to\infty} C_A = \infty$ 的常数。

证明。设 $\Omega = \cap_{j=1}^M \pi_j^{-1}(E_j)$，$\Omega' = \cap_{j=1}^M \pi_j^{-1}(E'_j)$。由定理 14.3，存在与 $\{L_j\}_{j=1}^M$ 相关联的抛物球 $\mathcal{B}$，$\mathcal{B}'$，使得 $(\Omega, \mathcal{B})$，$(\Omega', \mathcal{B}')$ 满足 (12.10) 和 (12.11)。于是

$$\varepsilon^C |E_j| \lesssim |\pi_j(\mathcal{B})| \lesssim |E_j|, \qquad \varepsilon^C |E'_j| \lesssim |\pi_j(\mathcal{B}')| \lesssim |E'_j|. \tag{14.19}$$

设 $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_*)$，$(\mathcal{C}', \mathcal{C}'_*)$ 为相应的椭球。由抛物球的结构、椭球的对偶性以及 (14.18)，可得对于某个 $1 \le j \le M$，

$$\max\left\{\frac{|L_j(\mathcal{C})|}{|L_j(\mathcal{C}')|}, \frac{|L_j(\mathcal{C}')|}{|L_j(\mathcal{C})|}, \frac{|L_j(\mathcal{C}_*)|}{|L_j(\mathcal{C}'_*)|}, \frac{|L_j(\mathcal{C}'_*)|}{|L_j(\mathcal{C}_*)|}, \frac{|\mathcal{C}|}{|\mathcal{C}'|}, \frac{|\mathcal{C}'|}{|\mathcal{C}|}\right\} \ge \varepsilon^{-C_A}, \tag{14.20}$$

其中 $C_A > 0$ 是一个依赖于 n, π_j, p_j, A 的常数，且 $\lim_{A\to\infty} C_A = \infty$。我们通过应用引理 10.4 和 13.1 以及性质 12.2.4 完成证明。□

14.3. 强型不等式。 为简便起见，我们允许在 (1.1) 的输入中混合使用函数和集合。如果输入中包含集合 E，那么实际送入算子的就是 $\mathcal{X}_E$。例如，若 $M = 2$，则我们写作 $\mathcal{M}(f, E) := \mathcal{M}(f, \mathcal{X}_E)$。

首先，我们声称，只需对二进简单函数 $f_j = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} 2^\ell \mathcal{X}_{E_{\ell,j}}$ 证明 (3.1)，其中 $\{E_{\ell,j}\}_\ell$ 是 $\pi_j(\mathbb{H}^n)$ 中互不相交的勒贝格可测子集。

引理 14.5. 假设 *(3.1)* 对二进简单函数一致成立。那么它对紧支撑连续函数也一致成立。

证明。只需考虑定义在 $\pi_j(\mathbb{H}^n)$ 上、非负且紧支撑的连续函数 f_j，其中 $1 \le j \le M$。定义

$$\widetilde{f}_j := \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} 2^\ell \mathcal{X}_{E_{\ell,j}}, \qquad E_{\ell,j} := \{2^{\ell-1} < f_j \le 2^\ell\}.$$

则 $\frac{1}{2}\widetilde{f}_j \le f_j \le \widetilde{f}_j$，并且在 j 上一致地成立。因此有

$$\mathcal{M}(f_1, \dots, f_M) \le \mathcal{M}(\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_M) \lesssim \prod_{j=1}^M \|\widetilde{f}_j\|_{L^{p_j}} \sim \prod_{j=1}^M \|f_j\|_{L^{p_j}}. \tag{14.21}$$

□

定理 *3.1* 的证明。 令 p_j 如定理 3.1 中所述。则有 $p_j \in [1,\infty]$。根据引理 14.5，只需对二进简单函数证明（3.1）。由缩放不变性，不妨假设对每个 j都有 $\|f_j\|_{p_j}=1$ 。

对每个 $\ell=(\ell_1、\ldots\ldots、\ell_M)\in\mathbb{Z}^M$，令 $\mathcal{M}_\ell=\mathcal{M}(2^{\ell_1}\mathcal{X}_{E_{\ell_1,\,1}}、\ldots\ldots、2^{\ell_M}\mathcal{X}_{E_{\ell_M,\,M}})$。由命题 14.2，得

$$\mathcal{M}_\ell\lesssim\prod_{j=1}^{M}(2^{\ell_j p_j}|E_{\ell_j,j}|)^{\frac{1}{p_j}}\le 1.$$

设 $\varepsilon、\eta_j\in(0,\frac{1}{2}]$ 为二进有理数。记作 $\vec{\eta}=\{\eta_j\}_{j=1}^M$。令 $\Lambda(\varepsilon、\vec{\eta})$ 表示满足以下条件的 $\ell\in\mathbb{Z}^M$ 集合

$$\mathcal{M}_\ell\sim\varepsilon, \tag{14.22}$$

$$\forall 1\le j\le M\qquad 2^{\ell_j p_j}|E_{\ell_j,j}|\sim\eta_j. \tag{14.23}$$

则 Ω_ℓ 是 ε-准极值的，并且 $\#\Lambda(\varepsilon、\vec{\eta})\lesssim\prod\eta_j^{-1}$。此外，对所有 j，$\eta_j\gtrsim\varepsilon^C$。否则，命题 14.2 给出

$$\mathcal{M}_\ell\lesssim\prod_{j=1}^{M}(2^{\ell_j p_j}|E_{\ell_j,j}|)^{\frac{1}{p_j}}\lesssim\varepsilon^{\min\frac{C}{p_j}},$$

这与充分大的 C 时的 (14.22) 矛盾。

考虑划分 $\mathbb{Z}^M=\sqcup_b\Lambda_b$，其中 $1\le b\lesssim\log(\varepsilon^{-1})$，且在每个 Λ_b 中，任意一对不同的 ℓ,ℓ' 都具有大间隙性质 $|\ell_j-\ell'_j|\ge A(\log(\varepsilon^{-1}))^M$，其中某个 j 满足条件，且 $A>0$ 充分大。固定 b，我们可以应用引理 14.4 得到 $E_j^\ell\subset E_{\ell_j,j}$，对每个 $\ell\in\Lambda_b,1\le j\le M$ 均成立，使得 $\mathcal{M}'_\ell\sim\mathcal{M}_\ell$，其中$\mathcal{M}'_\ell=\mathcal{M}(2^{\ell_1}\mathcal{X}_{E_1^\ell},\ldots,2^{\ell_M}\mathcal{X}_{E_M^\ell})$。若 $\ell\ne\ell',\ell_j=\ell'_j$ 对某个 j 成立，则

$$|E_j^\ell\cap E_j^{\ell'}|\lesssim\varepsilon^{C_A}|E_{\ell_j,j}|,\qquad\lim_{A\to\infty}C_A=\infty.$$

用证明 $\eta_j\gtrsim\varepsilon^C$ 的同一论证可得 $|E_j^\ell|\gtrsim\varepsilon^C$。注意，当 A 充分大时，$C_A\ge 3C$。引理 13.3 表明 $\sum_{\ell:\ell_j=k}|E_j^\ell|\lesssim|E_{k,j}|$，对每个 $1\le j\le M,k\in\mathbb{Z}$ 均成立。对 k 求和可得 $\sum_\ell 2^{\ell_j p_j}|E_j^\ell|\lesssim 1$。应用引理 13.4，其中$F_\ell=\mathcal{M}_\ell,H_j=1,F_{j,\ell}=2^{\ell_j p_j}|E_j^\ell|$，并回顾 (5.1)，可得

$$\sum_{\Lambda(b,\varepsilon,\vec{\eta})}\mathcal{M}_\ell\lesssim\min\{\prod_{j=1}^{M}\eta_j^a,\varepsilon\prod_{j=1}^{M}\eta_j^{-1}\}, \tag{14.24}$$

其中 $\Lambda(b,\varepsilon,\vec{\eta}):=\Lambda_b\cap\Lambda(\varepsilon,\vec{\eta})$。对 b 求和会产生 $(\log(\varepsilon^{-1}))^M$ 级别的损失，并得到

$$\sum_{\Lambda(\varepsilon,\vec{\eta})}\mathcal{M}_\ell\lesssim\min\{\prod_{j=1}^{M}\eta_j^a,\varepsilon^b\}, \tag{14.25}$$

对于某些正常数 a，b。通过对二进制有理数 η_j，$\varepsilon\in$ 求和，我们完成证明 $(0,\frac{1}{2}]$。

□

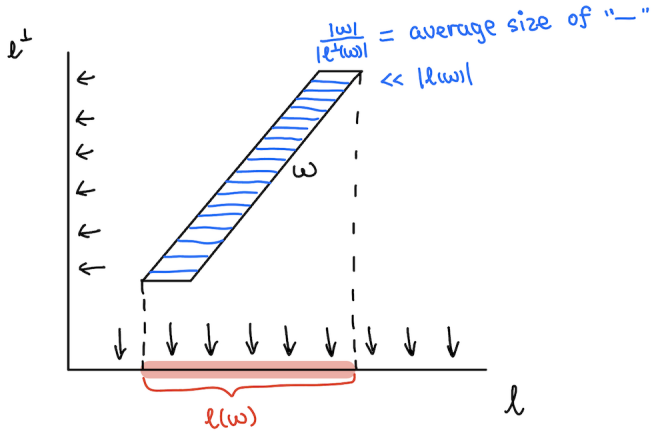


FIGURE 5

APPENDIX A. COUNTEREXAMPLES

例 A.1. 回顾小节3.3。考虑

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{N} \{(x, y, t - \frac{1}{2}x \cdot y) \in \mathbb{H}^4 : x_1 \in [0, n^2], x' \in [0, \frac{1}{n}]^3, (y, t) \in (n, n+1)^5\}.$$

于是 $|\Omega| \sim \log N$，每个 $|\pi_j^{-1}(z) \cap \Omega| \sim 1$ 对于 $1 \le j \le n$，而 $|\tilde{\pi}_1^{-1}(x', y, t - \frac{1}{2}x' \cdot y') \cap \Omega| \sim n^2$ 对于 $(x', y, t) \in [0, \frac{1}{n}]^3 \times (n, n+1)^5$，且 $|\tilde{\pi}_2^{-1}(y, t - \frac{1}{2}x \cdot y) \cap \Omega| \sim \frac{1}{n}$ 对于 $(y, t) \in (n, n+1)^5$。因此，我们有 $\alpha_j \sim 1$，但 $\beta_1 \sim \log N, \beta_2 \sim \log_N{}^N$，从而——

$$\beta_1 \beta_2^2 \ll \prod_{j=1}^{3} \alpha_j.$$

例 A.2. 考虑平行四边形（见图 5）

$$\omega = \{(x + y, \frac{x}{N}) : x \in [0, N], y \in [0, 1]\},$$

并考虑 $l(x) = x_1$，$l^\perp(x) = x_2$ 其中 $x \in \mathbb{R}^2$。于是

$$|l(\omega)| = N + 1 \gg |\frac{|\omega|}{|l^\perp(\omega)|} = 1.$$

例 A.3. 考虑 $l_1(x) = (x_3, x_4)$ $l_2(x) = x_4$，$l_3(x) = x$，$l_4(x) = x_4$ 其中 $x \in \mathbb{R}^4$，并且

$$\omega = \bigcup_{n=1}^{N} [0, \frac{1}{n}] \times [0, n]^2 \times [n, n+1].$$

于是 $|\omega| \sim N^2$，并且

$$\frac{|\omega|}{|l_1(\omega)|} = \frac{|\omega|}{|l_2(\omega)|} = 1, \quad |l_3(\omega)| \sim N^2, \quad |l_4(\omega)| = N.$$

因此，

$$|\omega|^2 \gg \frac{|\omega|}{|l_1(\omega)|} \frac{|\omega|}{|l_2(\omega)|} |l_3(\omega)||l_4(\omega)|.$$

示例 A.4。 考虑 $l_1(x) = (x_2,\ x_3,\ x_4)$ $l_2(x) = x_4$, $l_3(x) = (x_2,\ x_4)$ $l_4(x) = (x_3,\ x_4)$ 对于 $x \in \mathbb{R}^4$，以及

$$\omega = \bigcup_{n=1}^{N} [0,n] \times [0,\frac{1}{n}]^2 \times [n,n+1].$$

则 $|\omega| \sim \log\ N$，并且

$$\frac{|\omega|}{|l_1(\omega)|} \sim \log N, \quad \frac{|\omega|}{|l_2(\omega)|} \sim \frac{\log N}{N}, \quad \frac{|\omega|}{|l_3(\omega)|} = \frac{|\omega|}{|l_4(\omega)|} = 1.$$

因此，

$$|\omega|^2 \gg \frac{|\omega|}{|l_1(\omega)|}\frac{|\omega|}{|l_2(\omega)|}|l_3(\omega)||l_4(\omega)|.$$

References

[1] Bennett, Jonathan；Bez, Neal；Buschenhenke, Stefan；Cowling, Michael G.；Flock, Taryn C. *On the nonlinear Brascamp-Lieb inequality.*《杜克数学杂志》169 (2020)，第17期，3291-3338。[2] Bennett, Jonathan；Carbery, Anthony；Christ, Michael；Terence Tao。 *The Brascamp–Lieb inequalities: finiteness structure and extremals.* 17 2008 ，《几何与泛函分析》( )，第5期，1343 1415–。[3] Bennett, Jonathan；Carbery, Anthony；Christ, Michael；Terence Tao。 *Finite bounds for Hölder–Brascamp–Lieb multilinear inequalities.* 17 2010 4, 647 666 《数学研究快报》( )，第-期。[4] Brascamp, Herm Jan；Elliott H. Lieb。 *Best constants in Young's inequality its converse and its generalization to more than three functions.* 20 1976 2, 151 173 ，《数学进展》( )，第–期。[5] Calder´on, A. P. *On the Radon transform and some of its generalizations.* 纪念 Antoni Zygmund 的调和分析会议，第 I、II 卷（伊利诺伊州芝加哥，1981）（1983），673-689。[6] Christ, Michael。 *Convolution, curvature, and combinatorics: a case study.* IMRN：国际数学研究通知（1998），第19期。[7] Christ, Michael；Nagel, Alexander；Elias Stein；Wainger, Stephen。 *Singular and maximal Radon transforms: analysis and geometry.* 150 1999 《数学年刊》第二辑（），第2期，489–577。[8] Christ, Michael；Erdo˘gan, M Burak。 *Mixed norm estimates for a restricted X-ray transform.* 谨以此文纪念 Thomas H. Wolff。《数学分析杂志》 ´87 (2002)，187-198。[9]Christ, Michael。 *Quasiextremals for a Radon-like transform.* arXiv 预印本（2011），arXiv:1106.0722。[10] Christ, Michael。 *Extremizers of a Radon transform inequality.*《分析学进展：Elias M. Stein 的学术遗产》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州（2014），第50卷，84–107。[11] Christ, Michael；Dendrinos, Spyridon；Betsy Stovall；Street, Brian。 *Endpoint Lebesgue estimates for weighted averages on polynomial curves.*《美国数学杂志》142 (2020)，第6期，1661 1731 。[12] Duncan, Jennifer H. *A global approach to nonlinear Brascamp–Lieb inequalities and related topics.* 2022 博士论文，伯明翰大学（）。[13] F¨assler, Katrin； *Planar incidences and geometric inequalities in the Heisenberg group.* 2020 2003 Orponen, Tuomas；Pinamonti, Andrea。arXiv 预印本（），arXiv:。 05862 [14] F¨assler, Katrin；Pinamonti, Andrea。 *Loomis–Whitney inequalities in Heisenberg groups.*《数学杂志》301 (2022)，第2期，1983–2010。[15] Finner, Helmut， *A generalization of Hölder's inequality and some probability inequalities.*《概率论年刊》（1992），第1893–1901页。[16] Philip T. Gressman。 *L^p-nondegenerate Radon-like operators with vanishing rotational curvature.* 143 2015 4, 1595 1604 《美国数学会会刊》（），第期，页码–。[17] Philip T. Gressman。 *Generalized curvature for certain Radon-like operators of intermediate dimension.* 68 2021 1, 201 246 《印第安纳大学数学杂志》（），第期，页码–。[18] Philip T. Gressman。 *L^p-improving estimates for Radon-like operators and the Kakeya-Brascamp-Lieb inequality.* 387 2021 107 831 《数学进展》（），页码–。

[19] Philip T. Gressman。 *Local curvature of maximally nondegenerate Radon-like transforms.* arXiv 预印本（2023）arXiv:2303.03325。[20] Philip T. Gressman。 *Generalized Sobolev Estimates for Form-Valued Functions and Related Results for Radon-like Transforms.* 2024 2407 18860 arXiv 预印本（），arXiv:。。[21] Philip T. Gressman。 *Testing conditions for multilinear Radon-Brascamp-Lieb inequalities.* 美国数学会汇刊 378 (2025)，第2期，第751–804页。[22] Jonathan E. Hickman。 *Topics in affine and discrete harmonic analysis.* 博士论文，爱丁堡大学（2015）。[23] H¨older, Otto。 *Ueber einen Mittelwertsatz.* 《柯尼斯堡皇家科学学会与哥廷根乔治·奥古斯特大学新闻公报》¨onigl. Gesellschaft der Wis- senschaften und der Georg-Augusts-Universit¨at zu G¨ottingen 2 (1889)，第38–47页。[24] 黄凯怡；Betsy Stovall。 *Inequalities of Brascamp-Lieb type on the Heisenberg group.* arXiv 预印本（2024），arXiv:2401.02510。[25] Elliott H. Lieb。 *Gaussian kernels have only Gaussian maximizers.* 《数学发明》102 (1990)，第1期，179–208。[26] Walter Littman。 *Lp-Lq-estimates for singular integral operators arising from hyperbolic equations.* 《偏微分方程》（纯数学专题讨论会论文集，第XXIII卷，加利福尼亚大学伯克利分校，伯克利，加利福尼亚州，1971），第479—481页。纯数学专题讨论会论文集，第XXIII卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1973。[27] Lynn H. Loomis；Hassler Whitney。 *An inequality related to the isoperimetric inequality.* 《美国数学会通报》55 (1949)，961-962。[28] Daniel Oberlin；以及Elias Stein。 *Mapping properties of the Radon transform.* 《印第安纳大学数学杂志》31 (1982)，第5期，641–650。[29] Leonhard James Rogers。 *An extension of a certain theorem in inequalities.* 《数学信使》17 (1888)，145–150。[30] Betsy Stovall。 *L^p improving multilinear Radon-like transforms.* 《伊比利亚美洲数学杂志》27 (2011)，第3期，1059-1085。[31] Terence Tao；James Wright。 *L^p improving bounds for averages along curves.* 《美国数学会杂志》16 (2003)，第3期，605–638。[32] Ye Zhang。 *Loomis–Whitney inequalities on corank* 1 *Carnot groups.* arXiv 预印本（2024），arXiv:2402.02749。

University of Wisconsin–Madison
Email address: khuang247@wisc.edu