arXiv:2603.17213v1 [math.SP] 17 Mar 2026

关于自伴扩张的谱稳定性

Mario Alberto Ruiz Caballero

2026年3月19日

摘要。 我们证明，对于具有有限亏指数的对称完全非自伴算子 B （n， n）以及 B^* 的一个边界三元组（$\mathbb{C}^n$， Γ_1， Γ_2）， A_1 的谱中不属于与 B 互不相交的任何自伴扩张的最大重数特征值的点集（其中 A_1 是定义域为 $Ker\ \Gamma_1$的自伴扩张）是 σ（A_1）中的稠密G_δ 集。此外，我们还给出了Malamud定理的一个证明，该定理推广了Aronszajn-Donoghue理论中关于特征值刻画的一个著名结果。

关键词： 边界三元组、自伴扩张、完全非自伴算子、有限亏指数、最大重数特征值、Aronszajn-Donoghue理论。

数学主题分类（2020）： 47B02,47B25, 47A55,47A10.

1 引言

本文继续研究 [7]中开始的课题。该文的结果，尤其是定理1.1和命题4.3，促使我们研究亏指数有限的对称算子的一族自伴扩张的谱稳定性（n， n），其中 $n > 1$ （关于秩一正则扰动和斯图姆-刘维尔算子的情形，见 [2, 3, 4]）。运用边界三元组理论，并以 $\mathbb{H}_n$ 表示 $\mathbb{C}$上的对称矩阵集合 $n \times n$，主要结果如下:

定理1.1 （类禁能量）。 设 B 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上亏指数有限的对称完全非自伴算子，且(n, n)，令 $\Pi = (\mathbb{C}^n, \Gamma_1, \Gamma_2)$ 为 B^*的一个边界三元组。那么

$$\left\{x \in \sigma(A_1) : x \notin \sigma_p^{max}(A_D),\ for\ any\ D \in \mathbb{H}_n\right\} \tag{1.1}$$

在 $\sigma(A_1)$中稠密 G_δ 。

为证明这一点，需要使用 Aronszajn-Donoghue理论中一个定理的推广，该推广由 M. Malamud 在 [9] 中提出。值得一提的是

，上述定理的证明并未出现在 [9]，中，因此本文给出了一个证明。

本文结构如下。第2节中，我们定义边界三元组、互不相交的真闭扩张，并陈述边界三元组扩张定理。第3节中，我们给出矩阵值测度、Nevanlinna-Herglotz 矩阵以及通过二次型定义的关于矩阵值测度的积分。我们将 [7] 在标量情形下的一些结果推广到矩阵值情形。第4节中，我们回顾 [10, 12] 关于希尔伯特空间直积分方法的结果。我们定义矩阵值测度和自伴算子的重数函数，还定义空间 $L^2(\Omega\ \mathbb{C}^n)$，其中 Ω 是矩阵值测度，并陈述 Kats 定理。第5节中，我们定义 Weyl 函数、完全非自伴算子以及最大重数特征值。通过推广 [6] 的经典方法并运用 Kats 理论，我们证明了前述 Malamud 定理。第6节中，我们通过将算子 A_1 替换为另一个自伴扩张，给出一个与 Malamud 定理类似的结果。此外，定理1.1可作为 Malamud 定理的直接推论得出。

2 边界三元组理论

本节依赖于 [9] 和 [1, 第 14]章。

定义2.1。 令 B 表示作用于 $\mathcal{H}$上的稠密定义对称算子。我们将以下子空间称为亏空间

$$K_{\pm}(B) := Ran(B \pm iI)^{\perp} = Ker(B^* \mp iI).$$

此外，我们将 B 这一对称为亏指数：$(d_+(B)\ d_-(B))$，其中

$$d_{\pm}(B) := dim\ K_{\pm}(B).$$

定义2.2。 令 B 表示作用于 $\mathcal{H}$ 上的亏指数相等的稠密定义对称算子。若三元组 $(\mathcal{K},\ \Gamma_1,\ \Gamma_2)$满足： $\mathcal{K}$ 是一个希尔伯特空间，且 $dim\ \mathcal{K} = d_{\pm}(H)$和 Γ_i ： $D(B^*)$ $\longrightarrow \mathcal{K}$ 是一个线性映射，并且 $i = 1,\ 2$，则称其为 B^* 的边界三元组：

- 满足抽象格林恒等式，即

$$\langle B^*x, y\rangle - \langle x, B^*y\rangle = \langle \Gamma_2 x, \Gamma_1 y\rangle_{\mathcal{K}} - \langle \Gamma_1 x, \Gamma_2 y\rangle_{\mathcal{K}}$$

  对于每个 $x, y \in D(B^*)$。

- 由 $\Gamma x = (\Gamma_1 x, \Gamma_2 x)$ 对每个 $x \in D(B^*)$ 定义的线性映射 $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$： $D(B^*)$ $\longrightarrow \mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$ 是满射。

我们用 A_i with $i = 1,2$ 表示 B such that $D(A_i) = Ker\ \Gamma_i$ 的自伴扩张。

定义 2.3. 设 B 是定义在 $\mathcal{H}$上的稠密定义对称算子。我们将 B as A 在 $\mathcal{H}$ 上的闭真扩张定义为满足 $B \subseteq A \subseteq B^*$ 的闭算子。若 B 的两个闭真扩张 A 和 A' 满足 $D(A) \cap D(A') = D(B)$，则称它们互不相交。

我们陈述边界三元组扩张定理。

定理 2.4 (命题 14.7, [1] 和命题 1, [9])。设 B 表示定义在 $\mathcal{H}$ 上的稠密定义闭对称算子，且亏指数相等。我们用 $\mathcal{C}(B)$ 表示 B的真闭扩张集合。则存在一个关于 B^* 的边界三元组$(\mathcal{K}, \Gamma_1, \Gamma_2)$，使得 $\mathcal{C}(B)$与 $\mathcal{K}$ 上的闭关系集合之间存在如下双射:

- 若 Λ 是 $\mathcal{K}$上的闭关系，则 $A_\Lambda \in \mathcal{C}(B)$ 由下式给出
$$D(A_\Lambda) := \{x \in D(B^*) : \Gamma x \in \Lambda\}.$$
- 若 $A \in \mathcal{C}(B)$，则 $\Lambda_A := \Gamma(D(A))$ 是 $\mathcal{K}$上的闭关系。

此外，

- 若 Λ 是 $\mathcal{K}$上的闭关系，则 $(A_\Lambda)^* = A_{\Lambda^*}$。
- 如果 $A \in \mathcal{C}(B)$ 是一个对称算子，那么 Λ_A 是 $\mathcal{K}$上的闭对称关系。
- 如果 Λ 是 $\mathcal{K}$上的闭对称关系，那么 $A_\Lambda \in \mathcal{C}(B)$ 是对称的。
- 设 A_1 为满足 $D(A_1) = Ker\ \Gamma_1$的算子。那么，当且仅当存在定义在 $\mathcal{K}$上的稠密定义闭算子 D，使得 $\Lambda = graph(D)$时，A_Λ 与 A_1 互不相交。若如此，A_Λ 记作 A_D，并且
$$D(A_D) = Ker\ (\Gamma_2 - D\Gamma_1).$$

3 Nevanlinna-Herglotz 矩阵与矩阵值测度

令$B(\mathbb{R})$表示 $\mathbb{R}$ 上的博雷尔 σ代数，令 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 表示$\mathbb{C}$上的 $n \times n$ 矩阵空间。以下定义见 [8]第5节。

定义 3.1。矩阵值测度 $\Omega : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个满足以下条件的函数:

1) 对于每个有界的 $X \in B(\mathbb{R})$，$\Omega(X)$ 都是正定矩阵。

2) $\Omega(\varnothing) = 0$。

3) 对于 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(\mathbb{R})$，其中 $X_m \cap X_l = \varnothing$ 对每个 $m \neq l$ 都成立，且 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 有界
$$\Omega\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Omega(X_n).$$

我们将 Ω 的迹定义为

$$Tr\Omega := \sum_{i=1}^{n} \mu_{ii} \; where \; \mu_{ij} := \langle e_i, \Omega(\cdot) e_j \rangle_{\mathbb{C}^n} \tag{3.1}$$

其中 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{C}^n$的典范基。

我们提出以下定义。

定义 3.2。 设 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 是一个博雷尔可测函数。我们定义Φ_f : $\mathbb{C}^n \bigoplus \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ 为

$$\Phi_f(a,b) := \int_{\mathbb{R}} f(y) d\langle a, \Omega(y) b \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

其中 $D(\Phi_f) := \{(a, \ b) \in \mathbb{C}^n \bigoplus \mathbb{C}^n : \int_{\mathbb{R}} f(y) d\langle a, \ \Omega(y) b \rangle_{\mathbb{C}^n} \ exists \}$。

上述映射显然是一个半双线性形式。下面的引理是初等的。

引理 3.3。 如果 $f : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个博雷尔可测函数，那么 Φ_f 是 $\mathbb{C}^n$上的对称形式。

我们提出以下定义。

定义 3.4。 若 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 是博雷尔可测函数，则定义表达式 $\int_{\mathbb{R}} f d\Omega$ 为与形式 Φ_f相关联的矩阵。

注 3.5。 1）若 f为实值函数，则 $\int_{\mathbb{R}} f d\Omega$ 是对称矩阵。

2）若 f取正值，则 $\int_{\mathbb{R}} f d\Omega$ 是正定矩阵。

3）记号 $\int_{\mathbb{R}} f d\Omega \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 表示该矩阵存在，也就是说，形式 Φ_f 在 $\mathbb{C}^n$上处处有定义。

定义 3.6。 若全纯函数 $M : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足以下条件，则称其为 Nevanlinna-Herglotz 矩阵:

$$Imz \cdot Im \ M(z) > 0 \text{ and } M(\overline{z}) = M(z)^* \text{ for all } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

其中 $Im \ M(z) := \frac{1}{2i}(M(z) \ - M(z)^*)$。

下面的命题显而易见。

命题 3.7。 若 $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是有限维希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一列半双线性型，满足 $t_n \longrightarrow_{n \to \infty} t$ ，其中 t 是 $\mathcal{H}$上的一个半双线性形式，则 $A_n \longrightarrow A$ ，其中 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 和 A 是相应算子。

我们得到以下对 [7, 命题 3.1] 的推广

命题 3.8。 设 Ω 为矩阵值测度，且 $x \in \mathbb{R}$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\Omega(y)}{1+y^2},\ T(x) \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

其中 $T(x)\colon = \int_{\mathbb{R}} {}^{d}\overline{\Omega(y)\,(x-y)^2}$。那么

$$M(x+i0) := \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} M(x+i\varepsilon) \in \mathbb{C}^{n\times n}\ and\ M(x+i0) = M(x+i0)^*$$

其中 M 是与 Ω 相关联的 *Nevanlinna-Herglotz* 矩阵，使得

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow \infty} \frac{M(x+i\varepsilon)}{i\varepsilon} = 0.$$

证明。 根据 Nevanlinna-Herglotz 矩阵的典范表示定理（见 [8, 定理 5.4(iv)]）

$$M(z) = C + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{y-z} - \frac{y}{1+y^2} \right) d\Omega(y) \tag{3.2}$$

其中 $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个对称矩阵。我们不失一般性地假设 $C = 0$。令 Φ 为矩阵 $\int_{\mathbb{R}} {}^{d}\Omega(y)\ 1+y^2$和 $T(x)$ 的二次型，分别记为 Φ 和 Φ_x。因此，对每个 $c \in \mathbb{C}^n$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2} d\langle c, \Omega(y)c\rangle_{\mathbb{C}^n} =: \Phi\,[c] < \infty.$$

因此，对于每个 $c \in \mathbb{C}^n$，$m_c(z) := \int_{\mathbb{R}} \left({}^{1}_{y-z} - {}^{y}_{1+y^2} \right) d\langle c, \Omega(y)c\rangle_{\mathbb{C}^n}$ 都存在。也就是说，Nevanlinna-Herglotz 矩阵的二次型

$$M(z) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{y-z} - \frac{y}{1+y^2} \right) d\Omega(y)$$

它由 $\Phi_z\,[c] := m_c(z)$ 给出，并在 $\mathbb{C}^n$ 上处处有定义。此外， Φ_x 在 $\mathbb{C}^n$ 上也处处有定义，因为 $T(x)$ 是一个矩阵。这表明，对于每个 $c \in \mathbb{C}^n$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-y)^2} d\langle c, \Omega(y)c\rangle_{\mathbb{C}^n} = \Phi_x\,[c] < \infty.$$

根据 [7, 命题 3.1],

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \Phi_{x+i\varepsilon}[c] = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} m_c(x+i\varepsilon) = m_c(x+i0) \in \mathbb{R}.$$

也就是说,

$$\Phi_{x+i\varepsilon} \longrightarrow_{\varepsilon \longrightarrow 0} \Phi_{x+i0}.$$

根据命题 3.7，可得

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} M(x+i\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{y-x} - \frac{y}{1+y^2} \right) d\Omega(y).$$

此外，由于函数 $g(y) := {}^{1}_{y-x} - {}^{y}_{1+y^2}$ 是实值函数，因此 $M(x+i0)$ 是一个对称矩阵。由此得出结论。

□

以下结果的证明采用与 [3, 定理 2.1] 相同的方法。

定理 3.9. 设 Ω 是一个矩阵值测度，使得

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\Omega(y)}{1+y^2} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Then

$$\left\{x \in supp\,\Omega : T(x) \notin \mathbb{C}^{n\times n}\right\} \tag{3.3}$$

其中 $T(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\Omega(y)}{(x-y)^2}$，在 $supp\,\Omega$ 中是稠密 G_δ。

证明。 考虑由 M 给出的 Nevanlinna-Herglotz 矩阵

$$M(z) := \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{y-z} - \frac{y}{1+y^2}\right) d\Omega(y).$$

我们断言

$$Int_{supp\,\Omega}\left\{x \in supp\,\Omega : T(x) \in \mathbb{C}^{n\times n}\right\} = \varnothing.$$

假设上述集合包含一个开区间 S。这意味着每个$x \in S$ 都满足 $T(x) \in \mathbb{C}^{n\times n}$。由于 $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\Omega(y)}{1+y^2} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，根据命题 3.8，我们得到所有 $x \in S$ 都满足

$$M(x+i0) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} M(x+i\varepsilon) \in \mathbb{C}^{n\times n}\ and\ M(x+i0) = M(x+i0)^*.$$

注意，对所有 $x \in S$，以下结论成立:

- Since $Im\,M(x+i0) = 0$, $rank\ Im\,M(x+i0) = 0$. Thus, $S \cap \Omega_{ac} = \varnothing$.
- 由于函数 $f(z) := Im\ z$ 和迹算子都是连续的，对于每个 $x \in S$

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} Im\ Tr\ M(x+i\varepsilon) = Im\ Tr\ M(x+i0) = 0.$$

上述结论是因为 $M(x+i0)$ 是对称的，因此其主对角线上的元素为实数。因此， $S \cap \Omega_s = \varnothing$。

根据 [8, 定理 6.1], $\Omega(S) = \Omega_{ac}(S) + \Omega_s(S) = 0$。于是 $\mathbb{R}\setminus S$ 是 Ω 的一个闭支集，即 $supp\,\Omega \subseteq \mathbb{R}\setminus S$，这等价于 $supp\,\Omega \cap S = \varnothing$。因此，我们得出集合 (3.3) 在 $supp\Omega$ 中稠密。

现在，我们断言集合 (3.3) 属于 Ω 中的 G_δ $supp$。注意到

$$\begin{aligned} T(x) \in \mathbb{C}^{n\times n} &\Longleftrightarrow \forall\ c \in \mathbb{C}^n,\ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-y)^2} d\langle c, \Omega(y)c\rangle_{\mathbb{C}^n} < \infty \\ &\Longleftrightarrow \forall\ i = 1, ..., n,\ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-y)^2} d\langle e_i, \Omega(y)e_i\rangle_{\mathbb{C}^n} < \infty. \end{aligned}$$

因此，

$$\left\{x \in \mathbb{R} : T(x) \notin \mathbb{C}^{n\times n}\right\} = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$$

其中

$$W_i := \left\{x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-y)^2} d\langle e_i, \Omega(y)e_i\rangle_{\mathbb{C}^n} = \infty\right\}.$$

根据 [7, 引理 3.2], , 对所有 $c \in \mathbb{C}^n$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-y)^2} d\langle c, \Omega(y)c\rangle_{\mathbb{C}^n} = \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-y)^2 + \frac{1}{m^2}} d\langle c, \Omega(y)c\rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

因此，

$$\begin{aligned} W_i &= \left\{x \in \mathbb{R} : \forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ such\ that\ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-y)^2 + \frac{1}{m^2}} d\langle e_i, \Omega(y)e_i\rangle_{\mathbb{C}^n} > k\right\} \\ &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-y)^2 + \frac{1}{m^2}} d\langle e_i, \Omega(y)e_i\rangle_{\mathbb{C}^n} > k\right\} \end{aligned}$$

其中，方括号内的集合是开集，因为相应的函数根据 [7,引理 3.2]是连续的。因此，

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n} W_i &= \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-y)^2 + \frac{1}{m^2}} d\langle e_i, \Omega(y)e_i\rangle_{\mathbb{C}^n} > k\right\} \\ &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-y)^2 + \frac{1}{m^2}} d\langle e_i, \Omega(y)e_i\rangle_{\mathbb{C}^n} > k\right\} \end{aligned}$$

最后，我们考虑与 $supp\Omega$ 的交集，并得出 (3.3) 在 $_\delta$ in$supp\ \Omega$ 中是 G。

□

4 Katstheorem 和重数函数

我们陈述以下结果。

定理 4.1 (定理 4.3(i), [10] 以及定理 7.5。1, [12])。 设 A 是定义在 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，且 ρ 是一个标量博雷尔测度，使得 $\mathcal{E}_A$ 与 ρ 等价。那么 A 与定义在 $\int_{\mathbb{R}} \oplus G$ 上的算子 Q 酉等价$(t)d\rho(t)$ ，满足

$$D(Q) := \left\{f \in \int_{\mathbb{R}} \oplus G(t)d\rho(t) : Qf \in \int_{\mathbb{R}} \oplus G(t)d\rho(t)\right\}$$

以及 $Qf(t) := tf(t)$。

定理 4.2 (定理 4.3(ii), [10])。 设 Q_i 为 $\int_{\mathbb{R}} \oplus G_i(t)d\rho_i(t)$上的算子，使得

$$D(Q_i) := \left\{f \in \int_{\mathbb{R}} \oplus G_i(t)d\rho_i(t) : Q_i f \in \int_{\mathbb{R}} \oplus G_i(t)d\rho_i(t)\right\}$$

且 $Q_i f(t) := tf(t)$ 其中 $i = 1, 2$。那么 Q_1 与 Q_2 酉等价，当且仅当 ρ_1 与 ρ_2 等价，并且 $dim\, G_1(t) = dim\, G_2(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处成立（关于 ρ_i）。

我们给出自伴算子的重数函数的定义。

定义 4.3. 若 A 满足定理 4.1 的假设，我们定义 A 的重数函数如下：

$$N_A(t) := dim\, G(t). \tag{4.1}$$

以下是 [10, 推论 4.4] 和 [12, 定理 7.5.2] 的一个版本

定理4.4. 设 A_i 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_i$ 上的自伴算子，且 $i = 1,2$，满足定理 *4.1* 的假设。若 A_1 与 A_2 酉等价，则

$$\mathcal{E}_{A_1} \text{ is equivalent to } \mathcal{E}_{A_2} \text{ and } N_{A_1}(t) = N_{A_2}(t),\ \mathcal{E}_{A_i}\text{-a.e. on } \mathbb{R}.$$

证明. 设 ρ_i 是与 $\mathcal{E}_{A_i}$ 等价的标量测度，且 $i = 1,2$。根据定理 4.1，A_i 与作用于 $\int_{\mathbb{R}} \oplus G_i(t)$ $d\rho_i(t)$ 上的乘法算子 Q_i 酉等价，其中乘子为 t。于是，Q_1 与 Q_2 酉等价；根据定理 4.2，$\mathcal{E}_{A_1}$ 与 $\mathcal{E}_{A_2}$ 等价；由 (4.1)，$N_{A_1}(t) = N_{A_2}(t)$，在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处相对于 $\mathcal{E}_{A_i}$ 成立。

□

现在我们给出矩阵值测度的重数函数定义。

定义4.5（定义4.5, [10]）. 设 Ω 是一个矩阵值测度。我们定义密度矩阵

$$\Psi_\Omega(t) := \left(\frac{d\mu_{ij}}{dTr\Omega}(t)\right)_{i,j=1}^{n}$$

其中 μ_{ij} 和 $Tr\Omega$ 由（3.1）给出。我们称 Ω 的重数函数为以下表达式

$$N_\Omega(t) := rank\Psi_\Omega(t).$$

接下来我们给出希尔伯特空间 $L^2(\Omega\ \mathbb{C}^n)$ 的定义。更多细节请参见 [10, 11]。

定义4.6. 我们将 $L^2(\Omega\ \mathbb{C}^n)$ 定义为商空间 $\dot{L}^2(\Omega\ \mathbb{C}^n)/Ker\ p$，其中 $\dot{L}^2(\Omega\ \mathbb{C}^n)$ 是满足以下条件的博雷尔可测函数 f：$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$

$$p(f) := \int_{\mathbb{R}} \langle d\Omega(t) f(t), f(t)\rangle_{\mathbb{C}^n} < \infty$$

配备半标量积的

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{C}^n)} := \int_{\mathbb{R}} \langle d\Omega(t) f(t), g(t)\rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

现在，我们定义配备半标量积的空间 $\dot{G}(t) := \left(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\dot{G}(t)}\right)$其中

$$\langle f, g\rangle_{\dot{G}(t)} := \langle \Psi_\Omega(t) f, g\rangle_{\mathbb{C}^n}. \tag{4.2}$$

最后，我们陈述 Kats定理，它给出了$L^2(\Omega\ \mathbb{C}^n)$的函数描述。

定理 4.7 (定理 2.11, [10])。 若Ω 是一个矩阵值测度，则

$$L^2(\Omega, \mathbb{C}^n) = \int_{\mathbb{R}} \oplus G(t) dTr\Omega(t)$$

其中 $G(t)\colon = G(t)/Ker\ p_t$，其中 p_t 是与 *(4.2)* 相关联的半范数，并且

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{C}^n)} = \int_{\mathbb{R}} \langle \Psi_\Omega(t) f(t), g(t)\rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

此外， $N_\Omega(t) = dim\ G(t) \leq n$。

5 Aronszajn-Donoghue理论

我们回顾一下有限亏指数这一特殊情形下的以下定义。用 ϱ 表示预解集。

定义 5.1. 令 B 表示 $\mathcal{H}$ 上一个具有有限亏指数（n, n）的稠密定义闭对称算子，并令 $\Pi = (\mathbb{C}^n, \Gamma_1, \Gamma_2)$ 表示其边界三元组。我们将对应于 Π 的 Weyl 函数定义为函数 $M : \varrho(A_1) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ ， 使得

$$\Gamma_2 f_z = M(z)\Gamma_1 f_z \text{ where } f_z \in Ker\ (B^* - zI) \text{ and } z \in \varrho(A_1).$$

此外，我们将具有 $D \in \mathbb{H}_n$ 的算子 A_D 的 Weyl 函数定义为

$$M_D(z) := [D - M(z)]^{-1}.$$

如果闭算子 B 不存在任何约化 B 的子空间，使得 B 在该子空间上的部分是自伴的，则称 B 为完全非自伴。非自伴。

令 B 表示 $\mathcal{H}$ 上一个具有相等且有限亏指数的对称完全非自伴算子。令 A 为其任意一个自伴扩张。若特征值 z 满足以下条件，则称其为 A 的最大重数特征值:

$$dim\ Ker(A - zI) = d_\pm(B).$$

用 $\sigma_p^{max}(A)$ 表示 A 的最大重数特征值集合。

很容易证明以下恒等式。

引理 5.2. 设 B 表示实数集 $\mathcal{H}$上的稠密定义闭对称算子，其亏指数有限(n,n)，且 $\Pi=(\mathbb{C}^n,\Gamma_1,\Gamma_2)$ 是B^*的边界三元组。对于 $D,D'\in\mathbb{H}_n$,

$$M_D(z)=M_{D'}(z)\left[(D-D')M_{D'}(z)+I\right]^{-1}=\left[M_{D'}(z)(D-D')+I\right]^{-1}M_{D'}(z).$$

以下是 [9] 的一个结果，它将 [5, 定理 4] 和 [6,定理 4]统一推广。

定理 5.3（定理 2, [9]）。设 B 是定义在 $\mathcal{H}$ 上的具有有限亏指数（n,n）的对称完全非自伴算子。设 $\Pi=(\mathbb{C}^n,\Gamma_1,\Gamma_2)$ 是 B^* 的一个边界三元组， M 是相应的 *Weyl* 函数。设 Ω 是与 M相关的矩阵值测度。那么，对于 B 的每个自伴扩张 A_D，且满足 $D\in\mathbb{H}_n$

$$\sigma_p^{max}(A_D)=\left\{x\in\mathbb{R}:T(x)\in\mathbb{C}^{n\times n}\ and\ M(x+i0)=D\right\}.$$

其中 $T:\ \mathbb{R}\longrightarrow\ \mathbb{C}^{n\times n}$ 由下式给出

$$T(x):=\int\frac{d\Omega(y)}{(x-y)^2}.$$

为了证明该结论，我们需要以下定理。

定理 5.4（推论 7.10, [10]）。设定理 *5.3* 的假设成立。设A_D 是 B 的一个扩张，满足 $D\in\mathbb{H}_n$， M_D 是 A_D 的 *Weyl* 函数，且Ω_D是相应的矩阵值测度。设 Q_{Ω_D} 是 L^2上关于 t 的乘法算子（$\Omega_D,\mathbb{C}^n$）。则 $\mathcal{H}$ 与 L^2（$\Omega_D,\mathbb{C}^n$）酉等价，并且 A_D 与 Q_{Ω_D}酉等价。

由此我们得出以下结论。

命题 5.5. 假设上述假设成立。设 $\mathcal{E}_D$ 为具有 $D\in\mathbb{H}_n$的 A_D 的谱族。则

$$N_{\Omega_D}(t)=N_{A_D}(t),\ \mathcal{E}_D\text{-}a.e.\ on\ \mathbb{R}.$$

此外， $N_{A_D}(\lambda)=dim\ Ker(A_D-\lambda I)$ 如果 λ 是 A_D的特征值。

证明. 根据前一个定理，算子 A_D 和 Q_{Ω_D} 酉等价，且重数函数满足

$$N_{A_D}(t)=N_{Q_{\Omega_D}}(t),\ \mathcal{E}_D\text{-a.e. on }\mathbb{R}.$$

另一方面， $\mathcal{E}_{Q_{\Omega_D}}$、 $\mathcal{E}_D$、Ω_D和 $Tr\Omega_D$等价；根据定理 4.1， Q_{Ω_D} 与直积分 $\int_{\mathbb{R}}H(t)dTr\Omega_D(t)$上的乘法算子 Q 酉等价。我们知道 $N_{Q_{\Omega_D}}(t)=dim\ H(t)$, 根据 Kats定理， $N_{\Omega_D}(t)=dim\ G(t)$。由于 Q_{Ω_D}与 Q酉等价，根据定理 4.2,

$$N_{\Omega_D}(t)=dim\ G(t)=dim\ H(t)=N_{Q_{\Omega_D}}(t),\ \mathcal{E}_D\text{-a.e. on }\mathbb{R}.$$

因此，

$$N_{\Omega_D}(t) = N_{A_D}(t),\ \mathcal{E}_D\text{-a.e. on } \mathbb{R}.$$

现在，我们选择 $f \in D(A_D)$，使得 $(A_D - \lambda)f = 0$。根据定理 5.4 和上述分析，我们得到等式

$$(t-\lambda)f(t) = 0 \text{ where } f(t) \in G(t),\ Tr\ \Omega_D\text{-a.e. on } \mathbb{R}.$$

当且仅当 $f(t) = 0$ 在 $t \neq \lambda$ 且 $f(\lambda) \neq 0$ 时，$f \in \int_{\mathbb{R}} \oplus G(t) dTr\Omega_D(t)$ 满足上述等式，其中 $Tr\Omega_D$-几乎处处成立于 $\mathbb{R}$。因此，$Ker(A_D - \lambda I)$ 与 $G(\lambda)$ 同构。

□

由此可得这一结果，用以证明定理 5.3。

推论 5.6. 假设最后一个假设成立。若 $\lambda \in \sigma_p(A_D)$，则

$$rank\ \Omega_D(\{\lambda\}) = dim\ Ker(A_D - \lambda I).$$

证明. 设 f_{ij} 为 Ψ_{Ω_D} 的密度矩阵的元素。根据拉东-尼科迪姆定理，

$$\mu_{ij}(G) = \int_G f_{ij}(t) dTr\Omega_D(t), \text{ with } G \in B(\mathbb{R}) \text{ bounded}.$$

因此，

$$\mu_{ij}(\{\lambda\}) = f_{ij}(\lambda) Tr\Omega_D(\{\lambda\}).$$

接下来，

$$\Omega_D(\{\lambda\}) = (\mu_{ij}(\{\lambda\}))_{i,j=1}^n = (f_{ij}(\lambda) Tr\Omega_D(\{\lambda\}))_{i,j=1}^n = Tr\Omega_D(\{\lambda\})\Psi_{\Omega_D}(\lambda).$$

由于 $\lambda \in \sigma_p(A_D)$，$\mathcal{E}_D(\{\lambda\}) \neq 0$ 且由于 $\mathcal{E}_D$，Ω_D 和 $Tr\Omega_D$ 等价，因此可知 $Tr\ \Omega_D(\{\lambda\}) \neq 0$。所以，

$$N_{\Omega_D}(\lambda) = rank\ \Omega_D(\{\lambda\}).$$

结论由上一个命题以及 Ω_D 的重数函数定义得出。

□

据此，我们采用与 [6, 定理 4] 的证明相同的策略。

定理 *5.3* 的证明。假设 $x \in \sigma_p^{max}(A_D)$。根据 [8, 定理 5.5(i)]，

$$\Omega_D(\{x\}) = -i \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon M_D(x + i\epsilon). \tag{5.1}$$

根据推论 5.6，$\Omega_D(\{x\})^{-1}$ 存在。因此，

$$\Omega_D(\{x\})^{-1} = i \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} M_D(x + i\epsilon)^{-1} = i \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left[D - M(x + i\epsilon)\right]. \tag{5.2}$$

由于 $\Omega_D(\{x\})^{-1}$ 是一个对称矩阵,

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{i}{\epsilon}\left[D-M(x+i\epsilon)\right] &= \lim_{\epsilon\to 0} Re\left[\frac{i}{\epsilon}\left(D-M(x+i\epsilon)\right)\right]\\ &= -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon} Im\left[D-M(x+i\epsilon)\right]\\ &= -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{-1}{\epsilon} Im\ M(x+i\epsilon).\end{aligned}$$

另一方面

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{d\Omega(y)}{(x-y)^2} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\Omega(y)}{(x-y)^2+\epsilon^2} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon} Im\ M(x+i\epsilon).$$

因此,

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{d\Omega(y)}{(x-y)^2} = \Omega_D(\{x\})^{-1}.$$

此外，由 (5.2) 可知,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[D-M(x+i\epsilon)\right] = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{-i\epsilon}\left[D-M(x+i\epsilon)\right]\lim_{\epsilon\to 0}(-i\epsilon) = 0.$$

因此， $M(x+i0) = D$。

假设 $\int_{\mathbb{R}}\frac{d\Omega(y)}{(x-y)^2}$ 存在，且 $M(x+i0) = D$。对于表示式 (3.2),

$$\begin{aligned}M(x+i\epsilon)-D &= M(x+i\epsilon)-D+M(x+i0)-M(x+i0) &(5.3)\\ &= M(x+i\epsilon)-M(x+i0) &(5.4)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{y-x-i\epsilon}-\frac{1}{y-x}\right)d\Omega(y) &(5.5)\\ &= i\epsilon\int_{\mathbb{R}}\frac{d\Omega(y)}{(y-x-i\epsilon)(y-x)}. &(5.6)\end{aligned}$$

结果发现,

$$T(x) := \int_{\mathbb{R}}\frac{d\Omega(y)}{(x-y)^2} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\Omega(y)}{(y-x-i\epsilon)(y-x)}.$$

由于 $T(x)$ 是正定矩阵，因此也是可逆的。根据 (5.1),

$$\Omega_D(\{x\}) = \lim_{\epsilon\to 0}\left[-i\epsilon M_D(x+i\epsilon)\right] = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{M(x+i\epsilon)-D}{i\epsilon}\right]^{-1} = T(x)^{-1}.$$

最后，根据推论 5.6， $x\in\sigma_p^{max}(A_D)$。 □

6 Malamud定理的推论

类似的结果

我们证明一个与定理 5.3 类似的结果：它将算子A_1 替换为另一个与 A_1互不相交的 B 自伴扩张。

定理 6.1. 设定理 *5.3* 的假设成立，且 $det(D-D^{'}) \neq 0$ *if*$D, D' \in \mathbb{H}_n$. 那么

$$\sigma_p^{max}(A_D)=\left\{x\in\mathbb{R}:\int_{\mathbb{R}}\frac{d\Omega_{D'}(y)}{(x-y)^2}\in\mathbb{C}^{n\times n}\ y\ M_{D'}(x+i0)=(D'-D)^{-1}\right\}$$

其中，$M_{D'}$ 是$A_{D'}$ 的 *Weyl* 函数，$\Omega_{D'}$ 是与 $M_{D'}$相关联的矩阵值测度。

证明. 设 $x\in\sigma_p^{max}(A_D)$。由 (5.2) 和引理 5.2,

$$\begin{aligned}\Omega_D(\{x\})^{-1}&=i\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}\left\{M_{D'}(x+i\epsilon)\left[(D-D')M_{D'}(x+i\epsilon)+I\right]^{-1}\right\}^{-1}\\&=i\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}\left[D-D'+M_{D'}(x+i\epsilon)^{-1}\right]\end{aligned}$$

由于 $\Omega_D(\{x\})^{-1}$ 是一个对称矩阵，因此可得

$$\begin{aligned}\Omega_D(\{x\})^{-1}&=\lim_{\epsilon\to0}Re\left\{\frac{i}{\epsilon}\left[D-D'+M_{D'}(x+i\epsilon)^{-1}\right]\right\}\\&=-\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}Im\left[D-D'+M_{D'}(x+i\epsilon)^{-1}\right]\\&=-\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}Im\ M_{D'}(x+i\epsilon)^{-1}\\&=\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}M_{D'}(x+i\epsilon)^{-1}Im\ M_{D'}(x+i\epsilon)M_{D'}(x-i\epsilon)^{-1}.\end{aligned}$$

根据假设和定理 5.3,

$$\lim_{\epsilon\to0}M_{D'}(x+i\epsilon)^{-1}=\lim_{\epsilon\to0}\left[D'-M(x+i\epsilon)\right]=D'-M(x+i0)=D'-D.\quad(6.1)$$

类似地,

$$\lim_{\epsilon\to0}M_{D'}(x-i\epsilon)^{-1}=D'-D.$$

因此,

$$\Omega_D(\{x\})^{-1}=(D'-D)\lim_{\epsilon\to0}\frac{Im\ M_{D'}(x+i\epsilon)}{\epsilon}(D'-D).$$

另一方面,

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{d\Omega_{D'}(y)}{(x-y)^2}=\lim_{\epsilon\to0}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\Omega_{D'}(y)}{(x-y)^2+\epsilon^2}=\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}Im\ M_{D'}(x+i\epsilon).$$

因此，

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\Omega_{D'}(y)}{(x-y)^2} = (D'-D)^{-1}\Omega_D(\{x\})^{-1}(D'-D)^{-1}.$$

此外，由 (6.1) 可知

$$M_{D'}(x+i0) = \left[\lim_{\epsilon\to 0} M_{D'}(x+i\epsilon)^{-1}\right]^{-1} = (D'-D)^{-1}.$$

因此， x 满足所需条件。

假设 $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\Omega_{D'}(y)}{(x-y)^2}$ 存在，且 $M_{D'}(x+i0) = (D'-D)^{-1}$。与 (5.3) 类似

$$M_{D'}(x+i\epsilon) - (D'-D)^{-1} = i\epsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{d\Omega_{D'}(y)}{(y-x-i\epsilon)(y-x)}.$$

因此，

$$T_{D'}(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\Omega_{D'}(y)}{(x-y)^2} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\Omega_{D'}(y)}{(y-x-i\epsilon)(y-x)}.$$

注意， $T_{D'}(x)$ 是一个正定矩阵，因此可逆。由 (5.1) 和引理 5.2,

$$\begin{aligned}
\Omega_D(\{x\}) &= \lim_{\epsilon\to 0} \left[-i\epsilon M_D(x+i\epsilon)\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} (-i\epsilon) M_{D'}(x+i\epsilon) \left[(D-D')M_{D'}(x+i\epsilon) + I\right]^{-1} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} (-i\epsilon) M_{D'}(x+i\epsilon) \left\{(D'-D)\left[-M_{D'}(x+i\epsilon) + (D'-D)^{-1}\right]\right\}^{-1} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} M_{D'}(x+i\epsilon) \left[\frac{M_{D'}(x+i\epsilon) - (D'-D)^{-1}}{i\epsilon}\right]^{-1} (D'-D)^{-1} \\
&= (D'-D)^{-1} T_{D'}(x)^{-1} (D'-D)^{-1}.
\end{aligned}$$

因此，$\Omega_D(\{x\})$ 可逆。最后，由推论 5.6， $x \in \sigma_p^{max}(A_D)$。 □

类禁能量

我们得出以下结果。

定理 6.2。 假设定理 *5.3* 的假设成立。那么

$$\left\{x \in \mathbb{R} : T(x) \in \mathbb{C}^{n\times n}\right\} = \bigcup \left\{\sigma_p^{max}(A_D) : D \in \mathbb{H}_n\right\}. \tag{6.2}$$

其中 $T(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\Omega(y)}{(x-y)^2}$。

证明。 如果对任意 $D \in \mathbb{H}_n$都有 $x \in \sigma_p^{max}(A_D)$，根据定理 5.3 可知$T(x) \in \mathbb{C}^{n\times n}$。

另一方面，令 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $T(x) \in \mathbb{C}^{n\times n}$。由于 Ω 是与 Weyl 函数 M 相关联的矩阵值测度，因此可得

二次型 Φ_f，其中 $f(y) := \frac{1}{1+y^2}$，在 $\mathbb{C}^n$ 中处处有定义。这意味着

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\Omega(y)}{1+y^2} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

根据命题 3.8，存在一个 $D \in \mathbb{H}_n$，使得 $M(x+i0) = D$。根据定理 5.3，$x \in \sigma_p^{max}(A_D)$。因此，等式 (6.2) 得证。 □

最后，我们得出主定理。

定理*1.1* 的证明。 我们对等式 (6.2) 两边取补集。因此，

$$\left\{x \in \mathbb{R} : T(x) \notin \mathbb{C}^{n\times n}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \notin \sigma_p^{max}(A_D),\ for\ any\ D \in \mathbb{H}_n\right\}.$$

我们将前一个等式中的集合与 $supp\Omega$ 相交。但我们知道，A_1 的谱族 E_{A_1} 与矩阵值测度 Ω 等价。因此，$supp\Omega = suppE_{A_1} = \sigma(A_1)$。于是，集合 (1.1) 等于集合 (3.3)。最后，根据定理 3.9，我们得出所需结果。 □

致谢

本研究由 *CONACYT* 第 *805144* 号资助支持。作者感谢 *Luis Silva* 教授提出的宝贵意见，并特别感谢 *Rafael del R´ıo* 教授给予的宝贵指导。

参考文献

[1] K. Schmüdgen，希尔伯特空间上的无界自伴算子，《数学研究生教材》，第265卷（Springer，多德雷赫特，2012年）。[2] A. Y. Gordon，单参数扰动下的纯点谱与安德森局域化的不稳定性，《数学物理通讯》164（1994年），第3期，489–505页。[3] R. Del Río，N. Makarov and B. Simon，具有奇异连续谱的算子。*II.* 秩一算子，《数学物理通讯》165（1994年），第1期，59–67页。[4] R. Del Río 嵌入特征值的一个禁集，《美国数学会会刊》121（1994年），第1期，77–82页。[5] W. F. Donoghue Jr.，关于谱的扰动，《纯粹与应用数学通讯》18，559–579页（1965年）。
[6] N. Aronszajn，关于奇异 *Sturm-Liouville* 方程理论中的 *Weyl* 问题，《美国数学杂志》，1957年7月，第79卷，第3期（1957年7月），597–610页。[7] M. A. Ruiz and R. del Río，关于秩一奇异扰动的谱稳定性，《数学小品》45（2025年），第6期，819–840页。

[8] F. Gesztesy and E. Tsekanovskii，关于矩阵值 *Herglotz* 函数，《数学消息》218（2000年），61–138页。[9] M. M. Malamud，关于有限维扰动的奇异谱（迈向 *Aronszajn-Donoghue-Kac* 理论），《数学文献》100（2019年），第1期，358–362页。
[10] M. M. Malamud and S. M. Malamud，希尔伯特空间中算子测度的谱理论，（俄文）《代数与分析》15（2003年），第3期，1–77页；英译本刊于《圣彼得堡数学杂志》15（2004年），第3期，323–373页。
[11] I. S. Kats，由单调厄米矩阵值函数生成的希尔伯特空间，《哈尔科夫国立大学学报》34（1950年），95–113 = 《哈尔科夫数学会物理数学系数学部学报》（第4辑）22（1950年），95–113页。（俄文）。
[12] M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak，希尔伯特空间中自伴算子的谱理论，由 S. Khrushch¨ev 和 V. Peller 根据1980年俄文原版译出。《数学及其应用》（苏联系列）。D. Reidel 出版公司，多德雷赫特，1987年。

Mario Ruiz marioruiz@comunidad.unam.mx
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-0837-2996

墨西哥国立自治大学´应用数学与系统研究所数学物理系墨西哥城´，邮编 04510。