arXiv:2603.17394v1 [hep-th] 18 Mar 2026

# 德尔涅-奇瓦诺维奇例外级数的 W-代数与最小三维 $\mathcal{N}=4$ 超共形场论

Thomas Creutzig[1], Niklas Garner[2], Byeonggi Go[3], 和 Heeyeon Kim[4]

摘要。我们提出一种三维场论构造，将与中间李代数相关的顶点代数，以及德尔涅-奇瓦诺维奇（DC）级数中相关的$C_2$-余有限最小$W$-代数实现为边界代数。该构造基于与拓扑场论耦合的最小三维 $\mathcal{N}=4$超共形场论。对于与拓扑$A$-扭曲相容的 Neumann 型边界条件，边界局部算符代数实现最小$W$-代数$W_{-h^\vee/6}(\mathfrak{g}, f_{\min})$。尽管这一边界条件无法连续形变为$B$-扭曲，我们认为，全纯-拓扑（$HT^B$）扭曲则实现中间李代数的一级仿射代数，从而为这些顶点代数结构提供统一的三维起源。

目录

1. 引言 1
2. 最小 $\mathcal{N}=4$ 半空间上的超共形场论 3
3. $\mathfrak{sl}_2$ 7
4. $\mathcal{T}_{\min}$ 耦合至 $L_1(\mathfrak{e}_8)$ 10
5. $\mathcal{T}_2$ 耦合至 $L_1(\mathfrak{e}_8)$ 15
6. Deligne–Cvitanovi´c 例外级数的 W-代数 20
7. 镜像描述 25
参考文献 27

## 1. 引言

Deligne-Cvitanovi´c（DC）例外级数 [Del96]

$$A_1 \subset A_2 \subset G_2 \subset D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8\,, \tag{1.1}$$

是一列特殊的单李代数，在数学和物理学中反复出现，尤其是在共形场论中，代数结构与模性施加了强有力的约束。Mukhi、Mathur 和 Sen（MMS）对双特征标有理共形场论进行分类时，就出现了一个具体实例 [MMS88], 其中，模线性微分

方程（MLDE）的解自然由 DC 系列中的李代数所对应的一级仿射代数的特征标实现。

有趣的是，MMS 分类中存在一个“缺失空缺”：除了 DC 系列的一级仿射代数之外，还有一个额外解；有人提出，它对应于仿射代数 $(E^{7\frac{1}{2}})_1$的特征。李代数 $E^{7\frac{1}{2}}$ 是 $E_7$ 与 $E_8$, 之间的中间李代数，由 [LM06] 引入，作为 $E_8$的一个非可约李子代数。更一般地，设 $\mathfrak{g}$ 是一个按最高根分次的单李代数，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \,. \tag{1.2}$$

$\mathfrak{g}$ 的中间代数定义如下：

$$\mathfrak{g}_0' \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \,, \tag{1.3}$$

其中 $\mathfrak{g}_0'$ 是 $\mathfrak{g}_0$的半单子代数。Kawasetsu 在其研究中率先探讨了相应的顶点代数 [Kaw14], ，不过，目前对其结构的理解在很大程度上仍依赖于特征层面的一致性检验 [LSW24b、LSW24a]。

本文将 DC 系列中间李代数对应的顶点代数实现为某个扭曲三维$\mathcal{N} = 4$ 超共形场论（SCFT）的边界顶点代数。发挥核心作用的是所谓的极小 $\mathcal{N} = 4$ SCFT，记作 $\mathcal{T}_{\text{min}}$；它最早在 [GY18] 中被讨论，是零秩超共形场论最简单的例子，即其库仑分支和希格斯分支均为零维。近年来，人们对 $\mathcal{T}_{\text{min}}$ 在各种边界条件下的拓扑 A 扭曲和 B 扭曲所对应的边界顶点代数进行了广泛研究 [GKL+21、GKS24、FGK24、CGK25], ，尤其是在四维 SCFT/VOA 对应的背景下 [Ded23、GK25、KS24、AAGRS25、AADGL26]。正如下文所示，中间顶点代数并非源自拓扑扭曲，而是出现在例如 [CDG23]研究的全纯-拓扑（HT）扭曲或极小扭曲中。

为实现与中间李代数相关联的顶点代数，我们考虑将最小超共形场论与拓扑场论耦合

$$\overline{\mathcal{T}}_{\text{min}} \times T_{\mathfrak{g}} \,, \tag{1.4}$$

其中，$\overline{\mathcal{T}}_{\text{min}}$ 表示 $\mathcal{T}_{\text{min}}$的定向反转，而$T_{\mathfrak{g}}$ 是一级纯陈-西蒙斯理论，其边界支持单仿射顶点算子代数$L_1(\mathfrak{g})$。这两个理论通过$\mathcal{T}_{\text{min}}$ 的R-对称性与$T_{\mathfrak{g}}$的$U(1)$ 规范对称性之间的混合陈-西蒙斯项进行耦合。该耦合抵消了边界规范反常，并确保$\mathcal{T}_{\text{min}}$ 的超对称诺伊曼边界条件定义良好。

我们提出，该耦合系统允许一种 Neumann 型边界条件，它可变形为拓扑 $A$-扭曲，意义如 [CG19、BLS21]所述。由于$T_{\mathfrak{g}}$ 与 $\mathcal{T}_{\text{min}}$之间存在非平凡耦合，扭曲理论中 $L_1(\mathfrak{g})$ 的共形向量会偏离其标准形式，变为所谓的 Urod 移位共形向量 [BFL16、ACF22]。我们认为，由此得到的边界局部算符代数实现了最小$W$-代数

$$W_{-h^\vee/6}(\mathfrak{g}, f_{\text{min}}) \,, \tag{1.5}$$

其中 $h^\vee$ 表示 $\mathfrak{g}$的对偶考克斯特数。对于 $\mathfrak{g}$属于 DC 系列的情形，这些代数与 Kawasetsu 研究的 $C_2$-有限且有理的$W$-代数 [Kaw18]>相同。我们计算了扭曲理论的半指标 [GGP16、YS20、DGP18]，它统计边界上的 BPS 局部算符，并提出一族关于其特征标的新颖 Nahm 和公式。在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_8$ 的情形下，扭曲模的特征标与 MMS 分类中出现的 $(E[7\frac{1}{2}])_1$ 的模不变特征标相一致。

另一方面，我们猜想，标准的纽曼边界条件无法进行与拓扑$B$-扭曲相容的变形。另一种做法是考虑利用$R_C$定义的 HT 扭曲，其中$SU(2)_C$的卡坦子代数，即用于定义拓扑$B$-扭曲中的扭曲同态的部分$R$-对称性。我们将其称为$HT^B$-扭曲，参见 [Gar24]。在此框架下，可以显式计算边界局部算符代数；我们论证，该代数实现了与中间李代数相关的一级仿射代数，包括$(E[7\frac{1}{2}])_1$。相应的半指标再现了 [Kaw14、LSW24a]中讨论的猜想特征公式。

本文其余部分安排如下。第 2 节简要回顾最小超共形场论 $\mathcal{T}_{\text{min}}$ 及其边界条件的基本性质，并由此构造耦合系统 $\mathcal{T}_{\text{min}}_\times\text{T}_\mathfrak{g}$。第 3 节分析带有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ 的最简单例子，其中边界代数实现 $\text{W}_{-1/3}(\mathfrak{sl}_2, \text{f}_{\text{min}})$；在此情形下，它约化为 Virasoro 最小模型 M(5, 3)。第 4 节考察具有特殊地位的例子 $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_8$，其边界自由度 $\text{L}_1(\mathfrak{e}_8)$ 构成一个全纯共形场论；这一分析导出了 M(5, 2) 与极小 W 代数 $\text{W}_{-5}(\mathfrak{e}_8, \text{f}_{\text{min}})$ 之间一种新颖的层-秩对偶。第 5 节考虑一种相关构造，其中次简单的秩零理论 $\mathcal{T}_2$ 与 $\text{L}_1(\mathfrak{e}_8)$ 耦合，该理论与一个奇异中间代数 $(\text{X}_1)_1$ 相关。第 6 节讨论 DC 系列中带有 $\mathfrak{g}$ 的一般情形。最后，第 7 节提出一种镜像对偶描述 $\mathbb{T}_\mathfrak{g}$，其狄利克雷边界条件实现了这些边界代数，并讨论相应边界条件的可变形性。

**致谢**。 N.G. 的研究此前由 ERC 整合者基金资助（编号 #864828），项目名称为“超对称量子场论的代数基础”（SCFTAlg）；目前由 Simons 天体全息合作项目资助（CH-00001550-1）。B.G. 和 H.K. 的研究由韩国国家研究基金会资助，资助编号为 NRF2023R1A2C1004965 和 RS-2024-00405629，同时也获得 POSCO TJPark 基金会的 POSCO 科学奖学金资助。

## 2. 半空间上的最小 $\mathcal{N} = 4$ 超共形场论

本节回顾最小 $\mathcal{N} = 4$ 超共形场论，$\mathcal{T}_{\text{min}}$，它最初由 [GY18]引入。尽管该理论不允许存在具有显式 $\mathcal{N} = 4$ 对称性的拉格朗日描述，但据推测，它可以通过一种简单的阿贝尔陈-西蒙斯物质理论在紫外区实现。随后，我们讨论其拓扑扭曲和各种边界条件。

2.1. $\mathcal{N}=2$ **拉格朗日描述**。 考虑一个$U(1)$ 等级为$k = 3/2$ 的陈-西蒙斯理论，并将其与一个 $\Phi$ 电荷为 1 的手征多重态耦合。文献[GY18] 指出，该理论在红外区流向所谓的最小超共形场论， $\mathcal{T}_{\text{min}}$，其希格斯分支和库仑分支均为零维。

紫外规范理论具有全局对称性 $U(1)_R \times U(1)_S$，其中$U(1)_S$可识别为与$U(1)$ 规范群相关联的拓扑对称性。在红外中，R 对称性可能与拓扑对称性混合；这种混合由 $\nu \in \mathbb{R}$ 参数化，我们记作

$$R_\nu = R_0 + \nu S\,, \tag{2.1}$$

其中我们选择 $R_0$ 作为固定点处的超共形 R 荷，它由 F 极大化确定 [Jaf12]。预计这一全局对称性会增强为红外超共形场论中的完整 R 对称群 $\mathcal{N}=4$ ，$SO(4) \simeq SU(2)_C \times SU(2)_H/\mathbb{Z}_2$，其嵌入为

$$R_0 = R_C + R_H\,, \quad S = R_C - R_H\,, \tag{2.2}$$

其中$R_{C、H}$ 是$SU(2)_{C、H}$的卡坦子代数生成元。为支持这一论断，可以进行半经典分析，论证存在两个四分之一 BPS、规范不变的单极算子，它们属于额外的超流多重态。它们是

$$\phi^2 V_{-1}\,, \quad \bar{\psi} V_{+1}\,, \tag{2.3}$$

其超共形$R$荷和自旋均为 1，轴荷则分别为$S = -1$ 和 1。我们将 $\mathcal{T}_{\text{min}}$ 的定向反转记为 $\overline{\mathcal{T}}_{\text{min}}$。

$\mathcal{N} = 4$超共形场论 $\mathcal{T}_{\text{min}}$ 可以进行拓扑扭曲，从而得到一对拓扑场论，我们将其记为 $\mathcal{T}^A_{\text{min}}$ 和 $\mathcal{T}^B_{\text{min}}$。对于 A 扭曲和 B 扭曲，扭曲自旋分别为 $\mathrm{J}_A = \mathrm{J}_3 + \mathrm{R}_H$ 和 $\mathrm{J}_B = \mathrm{J}_3 + \mathrm{R}_C$，对应于选择$\nu = -1$ 和 $\nu = 1$。尽管这类非拉格朗日拓扑场论的边界代数通常难以研究，但拉格朗日描述的存在使我们能够先进行全纯-拓扑（HT）扭曲，然后研究其向完全拓扑理论的形变。这一形变通过向扭曲理论中添加适当的超势项 $\Theta_{A/B}$ 来实现；该超势项中出现的手性算符正是公式（2.3）中给出的局域算符。有关更多细节，参见例如 [FGK24] 。

2.2. **边界条件**。 该 $\mathcal{N}=2$ 拉格朗日理论可以置于半空间 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_{\leq 0}$ 上，并选择一种半 BPS (0,2) 边界条件。要使这种边界条件与红外超共形场论的拓扑 $A$- 扭曲或 $B$- 扭曲相容，它必须能够变形为 $A$- 扭曲或 $B$- 扭曲（按 [CG19、BLS21] 的意义）。

在 [GKS24], 中，有论证指出，超对称狄利克雷边界条件的一个形变可形变至$A$-扭曲，而边界局部算符代数实现了 Virasoro 最小模型$M(5,2)$。类似地，未形变的狄利克雷边界条件被认为可形变至$B$-扭曲 [FGK24] 中，并实现单仿射顶点算子代数$L_1(\mathfrak{osp}_{1|2})$。类似地，取向反转理论 $\mathcal{T}_{\text{min}}$ 在 [FGK24、CGK25]中被认为具有一个可形变至$A$-扭曲的超对称诺伊曼边界条件，以及一个适当的（尽管其显式形式未知）形变，可形变至$B$-扭曲。

诺伊曼边界条件的具体形式受到规范反常不存在这一要求的约束。令$\mathbf{f}$、$\mathbf{r}$ 和$\mathbf{f}_{\text{top}}$ 分别表示规范、$R$以及拓扑对称性的场强。那么，（取向反转的）紫外规范理论的微扰边界反常为 [DGP18、FGK24]

$$-2\mathbf{f}^2 - 2(\mathbf{f}_{\text{top}} - \mathbf{r})\mathbf{f}\,, \tag{2.4}$$

这必须通过在边界添加适当的(0,2)自由度来抵消$T_{2d}$。请注意，为了能够形变到$A$扭曲，上述规范-全局对称性之间的混合反常也必须抵消；否则，我们进行拓扑扭曲所需的全局对称性$R_H$就会被破坏。

一种自然的选择是$T_{2d}$ 由两个复马约拉纳费米子构成的代数，每个费米子都属于一个(0,2)费米多重态。正如 [FGK24、CGK25], 中所讨论的，可以给一个费米多重态赋予规范荷1，而给第二个费米多重态赋予规范荷 $-1$、拓扑荷 $-1$和 R 荷1，从而完全抵消规范反常（2.4）。

对边界局域算符计数的半指标定义为

$$I_{\text{half}}(q;x) = \text{tr}_{\text{ops}}(-1)^{R_v} q^{J_3+R_v/2} x^F\,, \tag{2.5}$$

其中$F$ 是边界味对称性的生成元，且$q = e^{2\pi i\tau}$。加入上述费米多重态后，Neumann 半指标为$\overline{\mathcal{T}}_{\text{min}}$，其表达式为

$$I_{\text{half}}(q;x,\nu,\eta) = (q)_\infty \oint \frac{dz}{2\pi i z} \frac{FF(zx)FF((-q^{1/2})^{\nu-1}\eta q z x^{-1})}{(z,q)_\infty}\,, \tag{2.6}$$

其中 FF(z) $=(z;q)_\infty(qz^{-1};q)_\infty$是边界 $\mathcal{N}=(0,2)$ 费米多重态的椭圆亏格。这里，x 是 U(1) 全局对称性的逸度，在该对称性下两个费米子的荷均为 1；$\eta$ 则计数全局对称性 S 下的荷。A-扭曲特化（$\nu=-1,\eta=1$）给出 $L_1(\mathfrak{osp}_{1|2})$ 的真空特征，而 B 扭曲特化（$\nu=1,\eta=1$）连同 x $=1$给出 M(5,2) 的真空特征。

二维 $\mathcal{N}=(0,2)$ 边界自由度的微扰反常编码在椭圆亏格在大规范变换 [AGMV86] (另见 [CDPK19])下的变换中。假设二维自由度具有 $G = U(1)^N$ 全局对称性，对应的逸度为 $x_a = e^{2\pi i u_a}, a = 1,\cdots,N$。那么在大规范变换下，$u \to u + m\tau$ 对于$m \in \mathbb{Z}^N$，椭圆亏格的变换形式为

$$I_{2d}(q;\{x_a\}) \to e^{-\pi i \mathcal{A}^{ab}(m_a u_b + u_a m_b + m_a m_b \tau)} I_{2d}(q,\{x_a\})\,, \tag{2.7}$$

其中 $\mathcal{A}^{ab}\mathbf{f}_a\mathbf{f}_b$ 是 $G$ 对称性的反常多项式。事实上，可以验证边界费米子的贡献，

$$I_{2d}(q;z) = FF(z)FF((-q^{1/2})^{\nu-1}\eta q z) \tag{2.8}$$

变换为

$$I_{2d}(q;zq) = q^{-1}(-q^{1/2})^{1-\nu}\eta^{-1}z^{-2} I_{2d}(q;z)\,, \tag{2.9}$$

这与（2.7）一致。

或者，也可以将边界自由度取为等级为一的手征 WZW 模型，从而产生简单仿射顶点代数 $L_1(\mathfrak{g})$，以此抵消规范反常（2.4）。一般而言，这并不能定义一个二维全纯共形场论，也就是说，它们并非真正的二维自由度。[1] 相反，最自然的理解是，它们是规范群为$G$、等级为 1 的三维陈-西蒙斯理论的边缘模，其中该规范群取为李代数为 $\mathfrak{g}$ 的单连通群，并施加狄利克雷边界条件。这促使我们考虑耦合系统 $\mathcal{T}^A\min \times T_{\mathfrak{g}}$ 的边界代数，或者等价地，考虑 $\mathcal{T}^A_{\min}$ 与$T_{\mathfrak{g}}$之间的界面。

让我们考虑由 $h_\theta = \theta^\vee$生成的 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{u}(1)$ 子代数，它诱导出分次

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \,, \tag{2.10}$$

并令 $\mathfrak{g}_0'$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的半单部分。体理论 $\mathcal{T}^A\min$ 和 $T_{\mathfrak{g}}$ 在边界处耦合，耦合方式是将由 $h_\theta$ 生成的子代数与 $\mathfrak{u}$min 的边界 $\mathfrak{u}(1)$ 规范对称性相对应。于是，相应的流 $J_{h_\theta}$ 的等级为 2，

$$J_{h_\theta}(z) J_{h_\theta}(w) \sim \frac{2}{(z-w)^2} \,, \tag{2.11}$$

这恰好提供了抵消来自$\mathcal{T}_{\min}$的纯规范反常所需的贡献。

为了产生所需的混合规范-全局反常，我们在体量子场论之间引入如下形式的耦合：一个混合陈-西蒙斯项

$$\frac{1}{2\pi}\int (A_{\text{top}} - A_R) \wedge dA \,, \tag{2.12}$$

其中，$A^{\text{top}}$ 和 $A_R$ 分别是 $\mathcal{T}_{\min}$ 的拓扑对称性和 $R$ 对称性的背景规范场，而 $A$ 是 $T_{\mathfrak{g}}$ 中的 $h_\theta$ 规范场。在界面处，后者与 $\mathcal{T}_{\min}$ 一侧的$U(1)$ 规范场相对应。

取拓扑 $A$-扭曲后，混合陈-西蒙斯项（2.12）的存在会导致 $T_{\mathfrak{g}}$ 中威尔逊线的拓扑自旋发生有效偏移，其偏移量与这些威尔逊线在 $h_\theta$ 下的荷成正比。为此，考虑与 $h_\theta$ 规范场相关联的等级为 2 的$U(1)$ 陈-西蒙斯理论中的一条荷为 $n$ 的威尔逊线。该威尔逊线的期望值可通过路径积分计算

$$\langle W_n \rangle = \int [dA]_{\mathcal{A}/\mathcal{G}}\, e^{\frac{i}{2\pi}\int AdA + \frac{i}{2\pi}\int w_h dA + in\oint_\gamma A} \,, \tag{2.13}$$

其中，$w_h$ 是自旋联络$w$的嘉当分量，对应于紫外理论的$HT$扭曲中全纯平面内的旋转。作用量中的第二项源自扭曲后的混合陈-西蒙斯项（2.12）；在这种扭曲下，自旋联络$w$ 被认作红外中$R_H$-对称性对应的主$SU(2)$ 丛上的联络$w^{R_H}$。规范场的经典值满足运动方程

$$dA = -\frac{1}{2} dw_h - n\pi\delta_\gamma \,, \tag{2.14}$$

[1] 一个有趣的例外情况是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_8$，我们将在第4节单独讨论

其中 $\delta_\gamma$ 是曲线 $\gamma$的庞加莱对偶。将其代回后，我们发现路径积分化简为

$$\langle W_n \rangle = \exp\left[-\frac{i\pi n^2}{2}\int_D \delta_\gamma - \frac{in}{2}\int_D dw_h\right]\cdot Z\,, \tag{2.15}$$

其中 $\partial D = \gamma$，$Z$ 是一个与$n$无关的因子。指数中的第一项与线的自链接数成正比，这正是框架异常的来源。若将线的框架改变一个整数$N$，威尔逊环的期望值会获得一个因子

$$\langle W_N \rangle \to e^{i2\pi N\left(\frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}\right)}\langle W_N \rangle\,, \tag{2.16}$$

这意味着$W_n$ 的拓扑自旋为

$$\theta_n = \exp 2\pi i\left(\frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}\right)\,. \tag{2.17}$$

指数中n/2 的额外偏移源于耦合（2.12）。

在边界代数层面，耦合（2.12）实际上将 $T_\mathfrak{g}$ 中边界单极算符的拓扑自旋和 R 荷分别赋为$n$ 和 $-n$，其中 $n \in \mathbb{Z}$ 是它们在$U(1)$ 规范对称性下的磁通量。在 $A$-扭曲中，这会使相应模的扭曲自旋偏移 $n/2$。这对于将陈-西蒙斯场的边界边缘模识别为经 Urod 平移的单仿射李代数至关重要，详见第3节。

在接下来的章节中，我们将讨论以这种方式得到的一类顶点代数，其中 $\mathfrak{g}$ 属于 Deligne–Cvitanovi´c 例外级数，并论证这种构造自然地实现了与 $\mathfrak{g}$ 相关的一类 Urod 平移 W- 代数。

## 3. sl2 的 Urod现象

作为热身，我们从最简单的情形开始，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$。我们研究耦合系统 $\mathcal{T}^A{}_{\min} \times T_{\mathfrak{sl}_2}$ 的边界代数，其中 $T_{\mathfrak{sl}_2}$ 是等级为 1 的纯 $SU(2)$ 陈-西蒙斯理论。对 $\mathcal{T}^A{}_{\min}$ 施加诺伊曼边界条件，并对 $T_{\mathfrak{sl}_2}$ 施加狄利克雷边界条件，以适当的方式将二者耦合后，我们获得了有力证据，表明所得的边界局部算符代数对应于 Virasoro 最小模型 $M(5,3)$。这一构造可以视为 $L_1(\mathfrak{sl}_2)$[BFL16]，的 Urod现象的一个实例，我们将在第 3.2 节中简要回顾这一现象。

### 3.1. 将 $L_1(\mathfrak{sl}_2)$ 耦合至 $\mathcal{T}^A{}_{\min}$。

设 $A$ 表示 $\mathfrak{sl}_2$中的阿贝尔规范场，它们由将 $\mathfrak{su}(2)$ 连接投影到其 Cartan 子代数上得到。我们通过在边界处将 $\mathcal{T}_{\min}$ 与 $A$ 的边界值识别为 $\mathcal{T}_{\min}$的动力学规范场，将该理论耦合到边界上。考虑混合陈-西蒙斯项（2.12）后，来自 $T_{\mathfrak{sl}_2}$ 的贡献由其狄利克雷半指标给出 [DGP18]，

$$I[T_{\mathfrak{sl}_2}](q;z,\nu,\eta) = \frac{1}{(q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\left[(-q^{1/2})^{\nu-1}\eta\right]^{-n} z^{-2n}\,, \tag{3.1}$$

其中 $z$ 是 Cartan 子代数对应的逸度/Jacobi变量。可以验证，相对于大规范变换，该表达式具有所需的变换性质：

$$I[T_{\mathfrak{sl}_2}](q;qz,\nu,\eta) = q^{-1}(-q^{1/2})^{1-\nu}\eta^{-1}z^{-2}I_{2d}(q;z,\nu,\eta)\,. \tag{3.2}$$

因此，它完全抵消了来自2.4的反常流入（ $\mathfrak{T}_{\text{min}}$。在$A$-扭结特化下，指标化简为

$$I[T_{\mathfrak{sl}_2}](q;z,-1,1) = \frac{1}{(q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2+n}z^{-2n}\,. \tag{3.3}$$

计算耦合系统的半指标，我们得到

$$\begin{aligned} I_{\text{half}}(q,-1,1) &= (q)_\infty \oint \frac{dz}{2\pi i z}\frac{I[T_{\mathfrak{sl}_2}](q;z,-1,1)}{(z;q)_\infty} \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i z}\frac{1}{(z;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2+n}z^{-2n} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{q^{n^2+n}}{(q)_{2n}}\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

这与$M$（5,3）的真空特征一致，支持了相应的边界顶点算子代数为M（5, 3）的猜想。

体拓扑场论允许存在简单线$W^{(a,b)}$，其$a$、$b$ $=0$、1可以识别为紫外描述中$U$（1）$_{\mathfrak{T}_{\text{min}}}$ $^{\times}U$（1）$_{T_{\mathfrak{g}}}$规范对称性下电荷为 $-(a$、$b)$ 的威尔逊线。我们发现，插入这些线会重现$M$（5,3）的四个单模的特征，

$$\begin{aligned} I_{\text{half}}(q,-1,1)[W_{(1,0)}] &= \oint \frac{dz}{2\pi i z}\frac{1}{(z;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2+n}z^{-2n}z^{-1} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{q^{n^2+n}}{(q)_{2n+1}} = q^{-9/40}\text{ch}(M^{5,3}_{3,1})\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} I_{\text{half}}(q,-1,1)[W_{(0,1)}] &= \oint \frac{dz}{2\pi i z}\frac{1}{(z;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2+2n+1}z^{-2n}z^{-1} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{q^{(n+1)^2}}{(q)_{2n+1}} = q^{9/40}\text{ch}(M^{5,3}_{4,1})\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

and

$$\begin{aligned} I_{\text{half}}(q,-1,1)[W_{(1,1)}] &= \oint \frac{dz}{2\pi i z}\frac{1}{(z;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2+2n+1}z^{-2n}z^{-2} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{q^{n^2}}{(q)_{2n}} = q^{1/40}\text{ch}(M^{5,3}_{2,1})\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.2. **对 $L_1(\mathfrak{sl}_2)$ 的分解**。 关于 $M(5,3)$ 的出现，可以从 $\mathfrak{sl}_2$ 的 Urod现象中得到解释：该现象表明，$\mathfrak{sl}_2$ 在一级处的单仿射顶点代数是两个 Virasoro 最小模型的共形扩张。[BFL16，ACF22]

为此，令 $L_1(\mathfrak{sl}_2)$ 为 $\mathfrak{sl}_2$ 在一级处的单仿射顶点代数，并令$L_1(\omega)$ 为其顶层是 $\mathfrak{sl}_2$ 标准表示的单模。令 $M(u,v)$ 为中心荷为.....的简单 Virasoro 代数

$$c = 1 - 6(u-v)^2/uv\,. \tag{3.8}$$

对于$u$、$v \in \mathbb{Z}_{>1}$ 互素时，它是强有理的。其单模为 $M^{u\,v}_{r\,,\,s}$ 其中$1 \le r \le u-1$、$1 \le s \le v-1$ 以及 $M^{u\,v}_{r\,,\,s} \cong M^{u\,v}_{u-r\,,\,v-s}$。于是，Urod现象表明，

$$\begin{aligned} L_1(\mathfrak{sl}_2) &\cong M(5,2)\otimes M(5,3) \oplus M^{5,2}_{3,1}\otimes M^{5,3}_{3,1}\,, \\ L_1(\omega) &\cong M^{5,2}_{2,1}\otimes M^{5,3}_{2,1} \oplus M^{5,2}_{4,1}\otimes M^{5,3}_{4,1}\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

这一对应中的应力张量/共形向量不是来自标准Sugawara构造的那个，应力张量/共形向量，因为右侧的中心荷为 $-5$。相反，它是另一个来自Urod共形向量的应力张量。对于Urod共形向量的共形权分次，我们用上标$U$表示相应的特征标。它与通常特征的关系为

$$\mathrm{ch}^U[L_1(\mathfrak{sl}_2)](q;z) = \mathrm{ch}[L_1(\omega)](q;z), \qquad \mathrm{ch}^U[L_1(\omega)](q;z) = \mathrm{ch}[L_1(\mathfrak{sl}_2)](q;z)\,.$$

事实上，我们发现$T_{\mathfrak{sl}_2}$ 在$A$-扭曲极限中的贡献与Urod移位后的特征标一致，但相差一个模异常前因子：

$$I[T_{\mathfrak{sl}_2}](q;z,-1,1) = \mathrm{ch}^U[L_1(\mathfrak{sl}_2)](q;z)\,.$$

分解（3.9）可以自然地解释为位于 $\mathcal{T}^A_{\min}$ 与 $\mathrm{T}_{\mathfrak{sl}_2}$之间界面处的顶点代数。考虑 $\mathcal{T}^A_{\min}$ 在区间 $\mathrm{x}_3 \in [0,\mathrm{L}]$, 上，其右端点 $\mathrm{x}_3 = \mathrm{L}$ 处施加狄利克雷边界条件，从而按照 [GKS24], 实现 M(5, 2)，左端点 $\mathrm{x}_3 = 0$处施加诺伊曼边界条件。随后，将左边界与定义在半空间 $\mathrm{x}_3 \le 0$ 上的 $\mathrm{T}_{\mathfrak{sl}_2}$ 粘合，并施加狄利克雷边界条件，具体方式如第 3.1 节所述。对 $\mathcal{T}^A_{\min}$ 进行区间约化，将 $\mathrm{M}(5,2)\otimes\mathrm{M}(5,3)$ 的扩张确定为 $\mathrm{T}_{\mathfrak{sl}_2}$ 在 $\mathrm{x}_3 = 0$处的边界代数，而这正是Urod移位后的 $\mathrm{L}_1(\mathfrak{sl}_2)$。

3.3. **$HT^B$-扭曲**。 如 [FGK24、CGK25], 所述， $\mathcal{T}_{\min}$ 的标准诺伊曼边界条件无法形变为$B$扭曲，因为实现该形变的超势项 $\phi^2 V_{-1}$ 在边界处不为零。相反，可以考虑$HT^B$扭曲理论，即相对于由$R = R_C$给定的 $\mathcal{N} = 2$ $R$荷进行全纯-拓扑扭曲的理论，参见 [Gar24]。与$L_1(\mathfrak{sl}_2)$ 耦合的诺伊曼半指标在极限 $\nu = \eta = 1$ 下变为

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{half}}(q,1,1) &= (q)_\infty \oint \frac{dz}{2\pi i z}\frac{I[T_{\mathfrak{sl}_2}](q;z,1,1)}{(z;q)_\infty} \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i z}\frac{1}{(z;q)_\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} z^{-2n} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^{n^2}}{(q)_{2n}}\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

其中，$L_1(\mathfrak{sl}_2)$ 的贡献现在由标准共形矢量给出。在没有实现形变为$B$扭曲的超势项时，可以显式计算边界算子代数。令$J_\pm$、$J_3$ 为$L_1(\mathfrak{sl}_2)$的生成元。边界代数由 $\phi(z)$、$J^a(z)$ 的规范不变组合以及$c(z)$的导数生成，并配有作用如下的 BRST 微分$Q$

$$Q = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, c(z) J_3(z)\,. \tag{3.11}$$

这给出

$$Q\phi = c\phi\,, \quad Qc = 0\,, \quad QJ_\pm = \pm c J_\pm\,, \tag{3.12}$$

而且重要的是

$$QJ_3(w) = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, c(z)J_3(z)J_3(w) = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, \frac{2\partial c(z)(z-w)}{(z-w)^2} = 2\partial c(w)\,. \tag{3.13}$$

因此，$J_3$ 和 $\partial c$ 都不属于 $Q$-上同调。唯一存留下来的规范不变算子是

$$:\phi^2 J_-:\,, \tag{3.14}$$

其扭曲自旋为 1，且与自身的算子乘积展开平凡。该算子可识别为体单极算子 $\phi^2$ $V_-$ 的边界值。该代数的共形维数为 1 的空间可视为中间李代数（1.3）的最简单例子，其中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ [LM06]。

在拓扑 $A$-扭曲中，算子（3.14）的扭曲自旋为 2，因此可以合理地预期它对应于（或至少构成）$M(5,3)$ 的应力张量。

## 4. 面向顶点代数，适用于 $\mathcal{T}_{\mathrm{MIN}}$ 与$L_1(\mathfrak{e}_8)$耦合

现在我们考虑将边界自由度取为 $L_1(\mathfrak{e}_8)$ 的情形，其特点是它定义了一个全纯共形场论。通过将其适当地耦合到 $\mathcal{T}^A\,\mathrm{min}$，我们将论证边界算子代数实现了最小 W-代数$W_{-5}(\mathfrak{e}_8, f_{\mathrm{min}})$，从而在 $M(5,2)$ 与 $W_{-5}(\mathfrak{e}_8, f_{\mathrm{min}})$之间建立一种新的等级-秩类型对偶。在第 4.4 节中，我们讨论$HT^B$-扭曲理论的边界代数，并指出它自然等同于一个中间顶点代数，通常记作 $(E^{7\frac{1}{2}})_1$，它填补了德利涅–茨维塔诺维奇例外级数中的“缺失空缺”。

**4.1. 将 $\mathbf{L}_1(\mathfrak{e}_8)$ 耦合到 $\mathcal{T}^A\overline{\mathbf{min}}$.** 我们来考虑由$(\mathbf{1})$ $\mathfrak{e}_8$ 生成的子代数，其中 $_\theta = \theta^\vee$ $\mathfrak{h}$ 是最高根，它定义了分次

$$\mathfrak{e}_8 = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2\,, \tag{4.1}$$

其中 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0' \oplus \mathbb{C}h_\theta$ 满足 $\mathfrak{g}_0' = \mathfrak{e}_7$。作为 $\mathfrak{g}_0$ 的一个表示，我们可以将 $\mathfrak{e}_8$ 的伴随表示分解为

$$\mathbf{248} = \mathbf{1}_{-2} + \mathbf{56}_{-1} + (\mathbf{133}+\mathbf{1})_0 + \mathbf{56}_1 + \mathbf{1}_2\,, \tag{4.2}$$

其中，每个 $\mathfrak{e}_7$ 表示下标表示其相对于$h_\theta$的权。我们将$L_1(\mathfrak{e}_8)$ 的对应生成元记为

$$J^{\alpha}_{\mathfrak{e}_7}(z)\,,\quad J_{h_\theta}(z)\,,\quad J^{i}_{(\pm1)}(z)\,,\quad J_{(\pm2)}(z)\,. \tag{4.3}$$

这些边界自由度通过将由 $h_\theta$ 生成的子代数与边界 $\mathfrak{u}(\overline{1})$ 规范对称性的流相等，从而与具有诺伊曼边界条件的 $\mathfrak{T}_{\min}$ 耦合。由于相应流 $J^{h_\theta}$ 的等级为 2，其贡献恰好抵消了 $\mathfrak{T}_{\min}$ 的纯规范反常。混合规范-全局反常同样可以通过将 $L_1(\mathfrak{e}_8)$ 流的 $R_\nu$ 荷设为等于其在 $\mathbf{1}$ $2(1-\nu)h_\theta$ 下的荷来抵消。这些流对诺伊曼半指标的贡献为

$$I_{2d}(q;z,\nu,\eta)=\frac{1}{(q)_\infty^8}\sum_{n\in\mathbb{Z}^8}q^{\frac{1}{2}n^tC(E_8)n}z^{-n_1}[(-q^{1/2})^{\nu-1}\eta]^{-n_1/2}\,, \tag{4.4}$$

其中，$C_8$ 是 $\mathfrak{e}_8$ 的 Cartan 矩阵。我们的约定是

$$C_8=\begin{pmatrix}2&-1&0&0&0&0&0&0\\-1&2&-1&0&0&0&0&0\\0&-1&2&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&2&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&2&-1&0&-1\\0&0&0&0&-1&2&-1&0\\0&0&0&0&0&-1&2&0\\0&0&0&0&-1&0&0&2\end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

可以验证，指标在大规范变换下按预期变换：

$$I_{2d}(q;qz,\nu,\eta)=q^{-1}(-q^{1/2})^{1-\nu}\eta^{-1}z^{-2}I_{2d}(q;z,\nu,\eta)\,. \tag{4.6}$$

对于拓扑 $A$ 扭转，耦合系统的半指标为

$$\begin{aligned}I_{\text{half}}(q;-1,1)&=(q)_\infty\oint\frac{dz}{2\pi iz}\frac{1}{(z;q)_\infty}I_{2d}(q;z,-1,1)\\&=\frac{1}{(q)_\infty^7}\sum_{n_1\geq0}\sum_{(n_2,\cdots,n_8)\in\mathbb{Z}^7}\frac{q^{\frac{1}{2}n^tC_8n}(-q^{1/2})^{n_1}}{(q)_{n_1}}\,.\end{aligned} \tag{4.7}$$

4.2. **分解** $L_1(\mathfrak{e}_8)$。 令$W^k(\mathfrak{g},f_{\min})$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 在等级 $k$ 处的泛最小$W$-代数，并以 $W_k(\mathfrak{g},f_{\min})$ 表示其单商。Urod 定理指出，存在一个顶点代数同态

$$\varphi:W^{k+n}(\mathfrak{g},f_{\min})\to W_k(\mathfrak{g},f_{\min})\otimes L_n(\mathfrak{g})$$

对于任意正整数 $n$。这里，$L_n(\mathfrak{g})$ 的共形向量必须替换为 Urod共形向量（这会使中心荷增加 $-6n$）。这种同态通常会经由单商分解。尤其当 $\varphi$ 的像是某个强有理顶点算子代数 $V$ 的余集 $\mathrm{Com}(V,W_k(\mathfrak{g},f_{\min})\otimes L_n(\mathfrak{g}))$ 时，便会出现这种情况。我们只考虑这一种情形。

若取 $\mathfrak{g}=\mathfrak{e}_8$ 和 $k=-6$，并使用$W_{-6}(\mathfrak{e}_8,f_{\min})\cong\mathbb{C}$ [AKMF+18]，则存在一个顶点代数同态$W^{-5}(\mathfrak{e}_8,f_{\min})\to L_1(\mathfrak{e}_8)$。其像包含 $L_1(\mathfrak{e}_7)$

以及标准表示 $\rho_{\omega_1}$ of $\mathfrak{e}_7$ 中共形权为 3/2 的场。我们将分解

$$\begin{aligned} L_1(\mathfrak{e}_8) &\cong L_1(\mathfrak{e}_7)\otimes L_1(\mathfrak{sl}_2)\oplus L_1(\omega_1)\otimes L_1(\omega) \\ &= L_1(\mathfrak{e}_7)\otimes\left(M(5,2)\otimes M(5,3)\oplus M^{5,2}_{3,1}\otimes M^{5,3}_{3,1}\right)\oplus \\ &\qquad L_1(\omega_1)\otimes\left(M^{5,2}_{2,1}\otimes M^{5,3}_{2,1}\oplus M^{5,2}_{4,1}\otimes M^{5,3}_{4,1}\right) \\ &\cong M(5,2)\otimes\left(L_1(\mathfrak{e}_7)\otimes M(5,3)\oplus L_1(\omega_1)\otimes M^{5,3}_{4,1}\right)\oplus \\ &\qquad M^{5,2}_{3,1}\otimes\left(L_1(\mathfrak{e}_7)\otimes M^{5,3}_{3,1}\oplus L_1(\omega_1)\otimes M^{5,3}_{2,1}\right)\ . \end{aligned} \tag{4.8}$$

我们看到

$$\mathrm{Com}\left(M(5,2),L_1(\mathfrak{e}_8)\right)\cong L_1(\mathfrak{e}_7)\otimes M(5,3)\oplus L_1(\omega_1)\otimes M^{5,3}_{4,1}\ , \tag{4.9}$$

这恰好就是简单极小 $W$-代数 $W_{-5}(\mathfrak{e}_8,\ f_{\min})$ [Kaw18]。由于它是 $L_1(\mathfrak{e}_7)\otimes M(5,3)$ 的简单流扩张，且简单流 $L_1(\omega_1)\otimes M^{5,3}_{4,1}$ 没有不动点，因此其模都可以通过诱导得到。由此得到两个局部模

(4.10)
$$M_0=L_1(\mathfrak{e}_7)\otimes M(5,3)\oplus L_1(\omega_1)\otimes M^{5,3}_{4,1},\qquad M_1=L_1(\mathfrak{e}_7)\otimes M^{5,3}_{3,1}\oplus L_1(\omega_1)\otimes M^{5,3}_{2,1}$$

以及两个 Ramond 扭模

(4.11)
$$M_2=L_1(\mathfrak{e}_7)\otimes M^{5,3}_{2,1}\oplus L_1(\omega_1)\otimes M^{5,3}_{3,1},\qquad M_3=L_1(\mathfrak{e}_7)\otimes M^{5,3}_{4,1}\oplus L_1(\omega_1)\otimes M(5,3).$$

Urod共形向量的零模为 $L_0+h_0$，其中 $h$ 是属于与 $f_{\min}$相同的 $\mathfrak{sl}_2$-三元组的 Cartan 子代数元素。在此情形下，它属于 $\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{sl}_2$-子代数的权 $\omega_1+\omega$。

关系式 (4.8) 是通过对 $\mathcal{T}^A_{\min}$ 进行区间约化实现的，并施加两种不同的边界条件。右侧边界施加狄利克雷边界条件，该条件支持 $M(5,2)$；左侧边界则施加与 $L_1(\mathfrak{e}_8)$耦合的诺伊曼边界条件，不过其编织方向相反，详见第 4.1节。由此可知，左侧边界支持简单极小 W-代数 $W_{-5}(\mathfrak{e}_8,\ f_{\min})$。由于左右边界上的顶点算子代数的模范畴都实现为体线算子的范畴，自然可以预期这两个顶点算子代数具有等价的模范畴，这与 (4.8) [CKM24a、CKM22]一致。下文将通过显式计算其模的（超）特征来进一步支持这一论断，并可证明这些特征与诺伊曼半指标 (4.7) 相符。

4.3. **特征标与超特征标**。 相对于 Urod 共形向量的特征标与通常特征标之间的关系为

$$\mathrm{ch}^U[L_1(\mathfrak{sl}_2)](u,\tau)=\mathrm{ch}[L_1(\omega)](u,\tau),\qquad \mathrm{ch}^U[L_1(\omega)](u,\tau)=\mathrm{ch}[L_1(\mathfrak{sl}_2)](u,\tau).$$

and

$$\mathrm{ch}^U[L_1(\mathfrak{e}_7)](u,\tau)=\mathrm{ch}[L_1(\omega_1)](u,\tau),\qquad \mathrm{ch}^U[L_1(\omega_1)](u,\tau)=\mathrm{ch}[L_1(\mathfrak{e}_7)](u,\tau).$$

Thus

$$\begin{aligned} &\mathrm{ch}^U[M_0](u,\tau)=\mathrm{ch}[M_3](u,\tau), \qquad \mathrm{ch}^U[M_1](u,\tau)=\mathrm{ch}[M_2](u,\tau),\\ &\mathrm{ch}^U[M_2](u,\tau)=\mathrm{ch}[M_1](u,\tau), \qquad \mathrm{ch}^U[M_3](u,\tau)=\mathrm{ch}[M_0](u,\tau). \end{aligned} \tag{4.12}$$

$M_0$ 和$M_1$ 的特征标在模$S$变换下不封闭，但它们的超特征标

$$\begin{aligned} &\mathrm{sch}[M_0]=\mathrm{ch}[L_1(\mathfrak{e}_7)]\mathrm{ch}[M(5,3)]-\mathrm{ch}[L_1(\omega_1)]\mathrm{ch}[M^{5,3}_{4,1}],\\ &\mathrm{sch}[M_1]=\mathrm{ch}[L_1(\omega_1)]\mathrm{ch}[M^{5,3}_{2,1}]-\mathrm{ch}[L_1(\mathfrak{e}_7)]\mathrm{ch}[M^{5,3}_{3,1}] \end{aligned} \tag{4.13}$$

具体而言，相应的$S$-矩阵为

$$\sqrt{\frac{4}{5}}\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{pmatrix}$$

并且，Verlinde 公式按要求计算融合规则的超维数 [CKM24b], 尤其是

$$\mathrm{sch}[M_1]\times\mathrm{sch}[M_1]=\mathrm{sch}[M_0]-\mathrm{sch}[M_1]=\mathrm{sch}[M_1\boxtimes M_1].$$

可以验证，$A$-扭曲半指标（4.7）恰好再现了真空模的超特征$M_0$。为此，我们使用

$$\mathrm{ch}(L_1(\mathfrak{e}_7))=q^{-7/24}\frac{1}{(q)_\infty^7}\sum_{n\in\mathbb{Z}^7}q^{\frac{1}{2}nC(E_7)n^t}\,, \tag{4.14}$$

$$\mathrm{ch}(L_1(w_1))=q^{11/24}\frac{1}{(q)_\infty^7}\sum_{n\in\mathbb{Z}^7}q^{\frac{1}{2}nC(E_7)n^t-n_1}\,, \tag{4.15}$$

and

$$\mathrm{ch}(M(5,3))=q^{1/40}\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n(n+1)}}{(q)_{2n}}\,,\quad \mathrm{ch}(M^{5,3}_{4,1})=q^{-9/40}\sum_{n\geq 0}\frac{q^{(n+1)^2}}{(q)_{2n+1}}\,, \tag{4.16}$$

$$\mathrm{ch}(M^{5,3}_{2,1})=q^{-1/40}\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(q)_{2n}}\,,\quad \mathrm{ch}(M^{5,3}_{3,1})=q^{9/40}\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2+n}}{(q)_{2n+1}}\,. \tag{4.17}$$

该$A$-扭曲半指标（4.7）分解为偶数和奇数 $n_1$ 扇区：

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{half}}(q;-1,1)&=\frac{1}{(q)_\infty^7}\sum_{n_1\geq 0}\sum_{(n_2,\cdots,n_8)\in\mathbb{Z}^7}\frac{q^{\frac{1}{2}n^tC_8n}(-q^{1/2})^{n_1}}{(q)_{n_1}}\\ &=\frac{1}{(q)_\infty^7}\sum_{\ell\geq 0}\sum_{\mathbf{n}'\in\mathbb{Z}^7}\frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{n}'^tC(E_7)\mathbf{n}'-2\ell n_2+4\ell^2+\ell}}{(q)_{2\ell}}\\ &\quad-\frac{1}{(q)_\infty^7}\sum_{\ell\geq 0}\sum_{\mathbf{n}'\in\mathbb{Z}^7}\frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{n}'^tC(E_7)\mathbf{n}'-(2\ell+1)n_2+(2\ell+1)^2+\ell+\frac{1}{2}}}{(q)_{2\ell+1}}\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

将 $\mathbf{n}' \to \mathbf{n}' + 2\ell w_1$, 平移

$$
\begin{aligned}
I_{\text{half}}(q;-1,1) = &\frac{1}{(q)_\infty^7} \sum_{\ell\geq 0} \sum_{\mathbf{n}'\in\mathbb{Z}^7} \frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{n}'^t C(E_7)\mathbf{n}' + \ell^2 + \ell}}{(q)_{2\ell}} \\
&- \frac{q^{1/2}}{(q)_\infty^7} \sum_{\ell\geq 0} \sum_{\mathbf{n}'\in\mathbb{Z}^7} \frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{n}'^t C(E_7)\mathbf{n}' - n_2 + (\ell+1)^2}}{(q)_{2\ell+1}}
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

这确实在相差一个模异常前因子的情况下重现了 $\mathrm{sch}[M_0]$。

我们可以对插入了规范荷为 1 的$W_1$, 威尔逊线$W_1$ 的情形重复同样的分析。存在 $W_1$ 时的半指标为

$$
\begin{aligned}
I_{\text{half}}[W_1](q;-1,1) &= (q)_\infty \oint \frac{dz}{2\pi i z} \frac{1}{(z;q)_\infty} I_{2d}(q;z,-1,1)\cdot z^{-1} \\
&= \frac{1}{(q)_\infty^7} \sum_{n_1\geq -1} \sum_{(n_2,\cdots,n_8)\in\mathbb{Z}^7} \frac{q^{\frac{1}{2}n^t C(E_8) n} (-q^{1/2})^{n_1}}{(q)_{n_1+1}} ,
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

这可以分解为

$$
\begin{aligned}
I_{\text{half}}[W_1](q;-1,1) = &\frac{1}{(q)_\infty^7} \sum_{\ell\geq 0} \sum_{\mathbf{n}'\in\mathbb{Z}^7} \frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{n}'^t C(E_7)\mathbf{n}' - 2\ell n_2 + 4\ell^2 + \ell}}{(q)_{2\ell+1}} \\
&- \frac{1}{(q)_\infty^7} \sum_{\ell\geq -1} \sum_{\mathbf{n}'\in\mathbb{Z}^7} \frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{n}'^t C(E_7)\mathbf{n}' - (2\ell+1)n_2 + (2\ell+1)^2 + \ell + \frac{1}{2}}}{(q)_{2\ell+2}} .
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

将 $\mathbf{n}' \to \mathbf{n}' + 2\ell w_1$, 平移

$$
\begin{aligned}
I_{\text{half}}[W_1](q;-1,1) = &\frac{1}{(q)_\infty^7} \sum_{\ell\geq 0} \sum_{\mathbf{n}'\in\mathbb{Z}^7} \frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{n}'^t C(E_7)\mathbf{n}' + \ell^2 + \ell}}{(q)_{2\ell+1}} \\
&- \frac{q^{1/2}}{(q)_\infty^7} \sum_{\ell\geq 0} \sum_{\mathbf{n}'\in\mathbb{Z}^7} \frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{n}'^t C(E_7)\mathbf{n}' - n_2 + \ell^2}}{(q)_{2\ell}} ,
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

这再次在相差一个模异常前因子的情况下重现了 $\mathrm{sch}[M_1]$ 。

4.4. $HT^B$ **扭曲及** $(E^{7\frac{1}{2}})_1$。_如第 3.3 节所述，可以考虑与 $L_1(\mathfrak{e}_8)$ 耦合的 $HT^B$-扭曲理论。取极限 $\nu = \eta = 1$ 后，诺伊曼半指标变为

$$
\begin{aligned}
I_{\text{half}}(q;1,1) &= (q)_\infty \oint \frac{dz}{2\pi i z} \frac{1}{(z;q)_\infty} I_{2d}(q;z,1,1) \\
&= \frac{1}{(q)_\infty^7} \sum_{n_1\geq 0} \sum_{(n_2,\cdots,n_8)\in\mathbb{Z}^7} \frac{q^{\frac{1}{2}n^t C_8 n}}{(q)_{n_1}} , \\
&= 1 + 190q + 2831q^2 + 22306q^3 + \cdots ,
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

其中 $L_1(\mathfrak{e}_8)$ 的贡献现在是相对于标准共形向量计算的，对应于 $HT^B$-扭曲自旋。值得注意的是，所得的 $q$-级数恰好与 MMS 对具有两个特征标的二维有理共形场论的分类中出现的“缺失空缺”一致 [MMS88]。这个 $q$-级数通常与一个假定的顶点代数相关联，该代数记作 $(E^{7\frac{1}{2}})_1$,，其中 $E^{7\frac{1}{2}}$ 是对应于 1.3 的中间李代数（ $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_8$ [LM06，Kaw14]）。

对于采用标准诺伊曼边界条件的 $HT^B$-扭曲理论，可以明确计算边界算子代数。$Q$-上同调包含三类规范不变边界算子，

$$J^{\alpha}_{\mathfrak{e}_7}\,, \quad :\phi J^{i}_{(-1)}:\,, \quad :\phi^2 J_{(-2)}:\,, \tag{4.24}$$

它们的扭曲自旋均为一。它们构成一个 $\mathfrak{e}_7$ 表示

$$\mathbf{190} = \mathbf{133} + \mathbf{56} + \mathbf{1}\,, \tag{4.25}$$

它同构于 $\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$，即与$\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_8$对应的中间李代数。令 $A^i = \phi J^i_{(-1)}$ 和 $B = \phi^2 J_{(-2)}$。奇异算子乘积展开为

$$\begin{aligned} J^{\alpha}_{\mathfrak{e}_7}(z) J^{\beta}_{\mathfrak{e}_7}(w) &\sim \frac{\kappa^{\alpha\beta}}{(z-w)^2} + \frac{f^{\alpha\beta}_{\gamma} J^{\gamma}_{\mathfrak{e}_7}(w)}{z-w}\,, \\ J^{\alpha}_{\mathfrak{e}_7}(z) A^i(w) &\sim \frac{f^{\alpha i}{}_{j} A^j(w)}{z-w}\,, \quad A^i(z) A^j(w) \sim \frac{f^{ij}{}_{-\theta} B(w)}{z-w} \end{aligned} \tag{4.26}$$

其余所有算子乘积展开均为正则。注意，$B(z)$ 与所有算子之间的算子乘积展开均为正则，这与以下预期相一致：算子 $B(z)$ 是体单极算子 $\phi^2 V_{-}$的边界值。

## 5. T2 的边界顶点代数 $\mathcal{T}_2$ 耦合于 $L_1(\mathfrak{e}_8)$

最小超共形场论 $\mathcal{T}_{\min}$ 是一个秩为零的 $\mathcal{N} = 4$超共形场论一参数族 $\mathcal{T}_r$中最简单的成员，其中 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{\min}$；其拓扑 A 扭曲允许一种支持 Virasoro 最小模型 M(2r + 3, 2) [GKS24]的边界条件。本节将考虑把二维自由度 $V_{2d} = L_1(\mathfrak{e}_8)$耦合到该族中次简单的理论 $\mathcal{T}_2$。预计该理论在紫外区可由一种 $\mathcal{N} = 2$U(1)$^2$ CS-物质理论描述，其中每个 U(1) 规范群与一个电荷为 1 的手征多重态耦合。陈-西蒙斯能级矩阵为 $\kappa_{ij} = 2$ min(i, j)，其中 i, j $= 1$、2。在开启超势形变后

$$W = V_{(2,-1)}\,, \tag{5.1}$$

其中，$V_{(m,n)}$ 表示通量为 (m, n) $\in \mathbb{Z}^2$的裸单极算子；该理 $\mathcal{T}_2$预计将流向超共形场论，其库仑分支和希格斯分支均为零维。该 Chern–Simons 物质理论具有全局对称性 $U(1)_R \times U(1)_S$，其中 $U(1)_S$ 可识别为未破缺的全局对称性 $U(1)^{\text{top}}_1 + 2U(1)^{\text{top}}_2$，其中 $U(1)^{\text{top}}$ i 是与第 i 个规范节点相关联的拓扑对称性。在红外超共形场论中，这一全局对称性增强为完整的 R 对称群 SO(4)。文献 [GKS24、FGK24] 指出，$\mathcal{T}^A_2$的变形狄利克雷边界条件实现了 M(7,2)。

我们考虑宇称反演理论 $\mathcal{T}^A_2$ 的拓扑 A 扭曲，并施加诺伊曼边界条件。体理论在边界上诱导出如下规范反常：

$$-2\mathbf{f}_1^2 - 4\mathbf{f}_2^2 - 4\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 - 2(\mathbf{s} - \mathbf{r})(\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2)\,, \tag{5.2}$$

其中$\mathbf{s}$ 是$U(1)_S$ 对称性的背景场强。我们将证明，通过以特定方式耦合边界自由度，可以完全消除这一反常

$L_1(\mathfrak{e}_8)$ ，随后论证边界算子代数实现了一个有理且 $C_2$-余有限的顶点算子代数，它与 $M(7,2)$ 具有等级-秩对偶关系。在第 5.4 节，我们转而讨论 $HT^B$-扭曲理论的边界代数，并论证它可识别为一个中间代数，记作 $(X_1)_1$, ，该代数见于[Mkr16、LSW24a、KS24]。

5.1. 将 $\mathrm{L}_1(\mathfrak{e}_8)$ 与 $\mathcal{T}_2^A$ 耦合。考虑由 $\mathrm{h}_1 = \theta^\vee = \omega_1^\vee$ 和 $\mathrm{h}_2 = \omega_7^\vee$ 生成的 $\mathfrak{e}_8$ 的 $\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1)$ 子代数，其中 $\mathrm{w}_i$ 表示第 i 个基本权。[2] 李代数 $\mathfrak{e}_8$ 可按照在 $\mathrm{h}_1$ 和 $\mathrm{h}_2$, 下的荷进行分解

$$\mathfrak{e}_8 = \bigoplus_{i,j=-2}^{2} \mathfrak{g}_{i,j} \,. \tag{5.3}$$

这里 $\mathfrak{g}_{0,\ 0} \simeq \mathfrak{so}_{12} \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}h_2$。作为 $\mathfrak{g}_{0,0}$-表示的分解总结于图 。

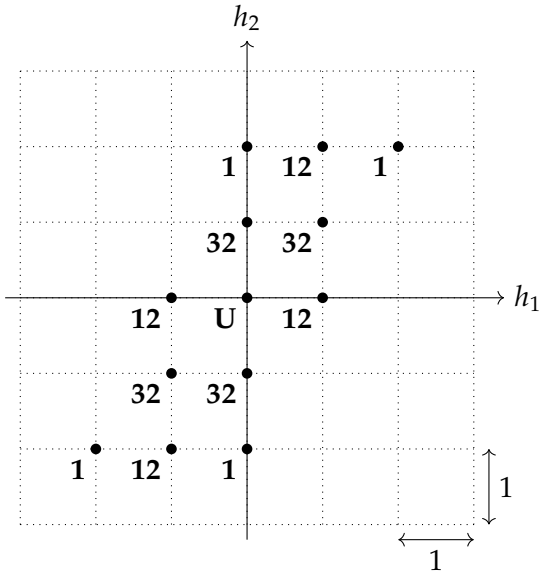



图5.1。 $\mathfrak{e}_8$ 的分解。格点按照其 $\mathfrak{so}_{12}$ 表示进行标记。我们有 $\mathbf{U} = \mathfrak{g}_{0,\ 0} = \mathbf{66} + \mathbf{1} + \mathbf{1}$。

我们将相应的流记为

$$J^{\alpha}_{\mathfrak{so}_{12}},\ J_{h_1},\ J_{h_2},\ J_{\pm(0,2)}\ J^{i}_{\pm(1,0)},\ J^{i}_{\pm(1,2)},\ J^{a}_{\pm(0,1)},\ J^{a}_{\pm(1,1)},\ J_{\pm(2,2)} \,. \tag{5.4}$$

两个 $\mathfrak{u}(1)$ 流的算子乘积展开为

$$J_{h_i}(z) J_{h_j}(w) = \frac{\kappa_{ij}}{(z-w)^2} \,, \qquad i,j = 1,2 \,, \tag{5.5}$$

其中 $\kappa_{ij} = 2\min(i,j)$ 是体规范理论的 CS 层级，因此可以抵消体理论中的纯规范反常 $\mathcal{T}_2$。与前一个例子一样，可以通过赋予适当的$R$-荷来抵消混合规范-全局反常

[2] In the simple root basis, $w_1 = (2,3,4,5,6,4,2,3)$ , $w_7 = (2,4,6,8,10,7,4,5)$.

给$L_1(\mathfrak{e}_8)$ 流。我们声称，只需赋予每个流一个$R_\nu$-荷，使其等于它在 $\mathbf{1}\ 2(1-\nu)h_2$下的荷即可实现这一点。作此赋值后，这些流对诺伊曼半指标的贡献为

$$I_{2d}(q;z_1,z_2,\nu,\eta)=\frac{1}{(q)_\infty^8}\sum_{n\in\mathbb{Z}^8}q^{\frac{1}{2}n^tC(E_8)n}z_1^{-n_1}z_2^{-n_7}[(-q^{1/2})^{\nu-1}\eta]^{-n_7/2}\,. \tag{5.6}$$

事实上，可以验证，在大规范变换 $z_1\ \to z_1q$ 和$z_2\to z_2q$下，它变换为

$$\begin{aligned}I(q;z_1q,z_2,\nu,\eta)&=q^{-1}[(-q^{1/2})^{\nu-1}\eta]^{-1}z_1^{-2}z_2^{-2}I(q;z_1,z_2,\nu,\eta)\,,\\ I(q;z_1,z_2q,\nu,\eta)&=q^{-2}[(-q^{1/2})^{\nu-1}\eta]^{-2}z_1^{-2}z_2^{-4}I(q;z_1,z_2,\nu,\eta)\,,\end{aligned} \tag{5.7}$$

这意味着这些自由度的贡献恰好抵消了规范反常（5.2）。

对于拓扑 $A$-扭曲，耦合系统的诺伊曼半指标为 s

$$\begin{aligned}I_{\text{half}}(q;-1,1)&=(q)_\infty^2\oint\frac{dz_1}{2\pi iz_1}\frac{dz_2}{2\pi iz_2}\frac{1}{(z_1;q)_\infty(z_2;q)_\infty}I_{2d}(q;z_1,z_2,-1,1)\\&=\frac{1}{(q)_\infty^6}\sum_{n_1,n_7\geq0}\sum_{(n_2,\cdots,n_6,n_8)\in\mathbb{Z}^6}\frac{q^{\frac{1}{2}n^tC(E_8)n}(-q^{1/2})^{n_7}}{(q)_{n_1}(q)_{n_7}}\\&=1+78q-64q^{3/2}+898q^2-896q^{5/2}+6072q^3-\cdots\,.\end{aligned} \tag{5.8}$$

5.2. **对** $L_1(\mathfrak{e}_8)$ **的分解**。 我们考虑如下分解

$$L_1(\mathfrak{e}_8)=L_1(\mathfrak{e}_7)\otimes L_1(\mathfrak{sl}_2)\oplus L_1^{\mathfrak{e}_7}(\omega_1)\otimes L_1^{\mathfrak{sl}_2}(\omega)\,, \tag{5.9}$$

随后进一步分解

$$\begin{aligned}L_1(\mathfrak{e}_7)&=L_1(\mathfrak{so}_{12})\otimes L_1(\mathfrak{sl}_2)\oplus L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_6)\otimes L_1^{\mathfrak{sl}_2}(\omega)\,,\\ L_1^{\mathfrak{e}_7}(\omega_1)&=L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_5)\otimes L_1(\mathfrak{sl}_2)\oplus L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_1)\otimes L_1^{\mathfrak{sl}_2}(\omega)\,,\end{aligned} \tag{5.10}$$

得到

$$\begin{aligned}L_1(\mathfrak{e}_8)=&\left[L_1(\mathfrak{so}_{12})\otimes L_1(\mathfrak{sl}_2)\oplus L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_6)\otimes L_1^{\mathfrak{sl}_2}(\omega)\right]\otimes L_1(\mathfrak{sl}_2)\\&\oplus\left[L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_5)\otimes L_1(\mathfrak{sl}_2)\oplus L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_1)\otimes L_1^{\mathfrak{sl}_2}(\omega)\right]\otimes L_1^{\mathfrak{sl}_2}(\omega)\,.\end{aligned} \tag{5.11}$$

如果我们选择上述两份 $L_1(\mathfrak{sl}_2)$ 和 $L_1^{\mathfrak{sl}_2}(\omega)$ 的共形向量为 Urod共形向量，那么在 A-扭曲极限 $\nu=-\eta=-1$下，(5.11) 的特征恰好再现了边界自由度 (*5.6*) 的贡献。利用 Virasoro 的 Urod-GKO 余集分解

$$\begin{aligned}M_{r,1}^{u,v}\otimes L_1(\mathfrak{sl}_2)&\cong\bigoplus_{\substack{s=1\\ s+r\ \text{even}}}^{u+v-1}M_{s,1}^{u+v,v}\otimes M_{s,r}^{u+v,u}\\ M_{r,1}^{u,v}\otimes L_1(\omega)&\cong\bigoplus_{\substack{s=1\\ s+r\ \text{odd}}}^{u+v-1}M_{s,1}^{u+v,v}\otimes M_{s,r}^{u+v,u}\,,\end{aligned} \tag{5.12}$$

我们得到

$$L_1(\mathfrak{e}_8) = \bigoplus_{t=1}^{3} M_{t,1}^{7,2} \otimes C_t \,, \tag{5.13}$$

其中

$$\begin{aligned} C_1 = {} & L_1(\mathfrak{so}_{12}) \otimes \left[ M(5,3) \otimes M(7,5) \oplus M_{3,1}^{5,3} \otimes M_{1,3}^{7,5} \right] \\ & \oplus L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_6) \left[ M(5,3) \otimes M_{1,4}^{7,5} \oplus M_{3,1}^{5,3} \otimes M_{1,2}^{7,5} \right] \\ & \oplus \; L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_1) \otimes \left[ M_{2,1}^{5,3} \otimes M_{1,2}^{7,5} \oplus M_{4,1}^{5,3} \otimes M_{1,4}^{7,5} \right] \\ & \oplus L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_5) \left[ M_{2,1}^{5,3} \otimes M_{1,3}^{7,5} \oplus M_{4,1}^{5,3} \otimes M(7,5) \right] \,, \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} C_2 = {} & L_1(\mathfrak{so}_{12}) \otimes \left[ M(5,3) \otimes M_{5,1}^{7,5} \oplus M_{3,1}^{5,3} \otimes M_{5,3}^{7,5} \right] \\ & \oplus L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_6) \left[ M(5,3) \otimes M_{2,1}^{7,5} \oplus M_{3,1}^{5,3} \otimes M_{2,3}^{7,5} \right] \\ & \oplus \; L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_1) \otimes \left[ M_{2,1}^{5,3} \otimes M_{5,2}^{7,5} \oplus M_{4,1}^{5,3} \otimes M_{5,4}^{7,5} \right] \\ & \oplus L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_5) \left[ M_{2,1}^{5,3} \otimes M_{2,2}^{7,5} \oplus M_{4,1}^{5,3} \otimes M_{2,4}^{7,5} \right] \,, \end{aligned} \tag{5.15}$$

and

$$\begin{aligned} C_3 = {} & L_1(\mathfrak{so}_{12}) \otimes \left[ M(5,3) \otimes M_{3,1}^{7,5} \oplus M_{3,1}^{5,3} \otimes M_{3,3}^{7,5} \right] \\ & \oplus L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_6) \left[ M(5,3) \otimes M_{4,1}^{7,5} \oplus M_{3,1}^{5,3} \otimes M_{4,3}^{7,5} \right] \\ & \oplus \; L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_1) \otimes \left[ M_{2,1}^{5,3} \otimes M_{3,2}^{7,5} \oplus M_{4,1}^{5,3} \otimes M_{3,4}^{7,5} \right] \\ & \oplus L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_5) \left[ M_{2,1}^{5,3} \otimes M_{4,2}^{7,5} \oplus M_{4,1}^{5,3} \otimes M_{4,4}^{7,5} \right] \,. \end{aligned} \tag{5.16}$$

由此可得

$$\mathrm{Com}(M(7,2), L_1(\mathfrak{e}_8)) = C_1 \,. \tag{5.17}$$

如上一节所述，我们考虑 $\mathfrak{T}_2^A$的区间约化，并施加两种不同的边界条件。在右侧边界，施加 [GKS24] 的例外狄利克雷边界条件，该条件支持顶点算子代数 $M(7,2)$；在左侧边界，则施加与$L_1(\mathfrak{e}_8)$耦合的诺伊曼边界条件，如第 5.1 节所述。人们预计，左、右边界所支持的顶点算子代数具有（辫反向的）等价模范畴。特别自然的预期是，$\mathfrak{T}_2^A$左侧边界上的顶点算子代数（或者等价地，$\mathfrak{T}_2^A$ 右侧边界上的顶点算子代数）可实现为$L_1(\mathfrak{e}_8)$ 对$M(7,2)$的余集。

5.3. **特征标与超特征标**。 上述论断得到了特征标比较的有力支持。我们发现，式（5.8）的前几个系数与式（$C_1$ 5.14）中定义的超特征标一致，至少截至 $q^4$。

体拓扑场论有三条简单线：$\mathbf{1}$、$W^{(1,1)}$、$W^{(1,2)}$。后两条线分别对应电荷为 $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ 和 $(\mathbf{1},\mathbf{2})$ 的威尔逊线，在$U(\mathbf{1})^2$ 规范

群 [GKS24], 中分别对应。因此，插入这些线后，半指标为

(5.18)
$$I_{\text{half}}[W_{(1,1)}](q;-1,1) = (q)_\infty^2 \oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1}\frac{dz_2}{2\pi i z_2}\frac{1}{(z_1;q)_\infty (z_2;q)_\infty} I_{2d}(q;z_1,z_2,-1,1) z_1^{-1} z_2^{-1}$$
$$= \frac{1}{(q)_\infty^6} \sum_{n_1,n_7\geq -1} \sum_{(n_2,\cdots,n_6,n_8)\in\mathbb{Z}^6} \frac{q^{\frac{1}{2}n^t C(E_8) n}(-q^{1/2})^{n_7}}{(q)_{n_1+1}(q)_{n_7+1}}$$

and

(5.19)
$$I_{\text{half}}[W_{(1,2)}](q;-1,1) = (q)_\infty^2 \oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1}\frac{dz_2}{2\pi i z_2}\frac{1}{(z_1;q)_\infty (z_2;q)_\infty} I_{2d}(q;z_1,z_2,-1,1) z_1^{-1} z_2^{-2}$$
$$= \frac{1}{(q)_\infty^6} \sum_{\substack{n_1\geq -1\\ n_7\geq -2}} \sum_{(n_2,\cdots,n_6,n_8)\in\mathbb{Z}^6} \frac{q^{\frac{1}{2}n^t C(E_8) n}(-q^{1/2})^{n_7}}{(q)_{n_1+1}(q)_{n_7+2}} \,.$$

我们验证了这些$q$级数的前几个系数分别与模$C_2$ 和$C_3$ 的超特征标一致。

5.4. $HT^B$**-扭曲与** $(X_1)_1$。 现在我们考虑$HT^B$扭曲的 $\mathfrak{T}_2$ 理论，其边界满足诺伊曼边界条件，并耦合到由$L_1(\mathfrak{e}_8)$给出的边界自由度。上述诺伊曼半指标在极限 $\nu=\eta=1$ 下为

$$I_{\text{half}}(q;1,1) = (q)_\infty^2 \oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1}\frac{dz_2}{2\pi i z_2}\frac{1}{(z_1;q)_\infty (z_2;q)_\infty} I_{2d}(q;z_1,z_2,1,1)$$
$$= \frac{1}{(q)_\infty^6} \sum_{n_1,n_7\geq 0} \sum_{(n_2,\cdots,n_6,n_8)\in\mathbb{Z}^6} \frac{q^{\frac{1}{2}n^t C(E_8) n}}{(q)_{n_1}(q)_{n_7}} \,.$$
$$= 1 + 156q + 2236q^2 + 17056q^3 + \cdots \,.$$

这与中间代数$(X_1)_1$,的一个模不变特征标一致，该中间代数位于$D_6$ 和$E_8$之间。

在$Q$上同调中存留下来的规范不变边界算符为

(5.20)
$$J^\alpha_{\mathfrak{so}_{12}}\,, \quad :\phi_1 J^i_{(-1,0)}:, \quad :\phi_1\phi_2^2 J^i_{(-1,-2)}:, \quad :\phi_2 J^a_{(0,-1)}:,$$
$$:\phi_1^2\phi_2 J^a_{(-1,-1)}:, \quad :\phi_2^2 J_{(0,-2)}:, \quad :\phi_1^2\phi_2^2 J_{(-2,-2)}:,$$

它们的扭曲自旋均为 1。它们构成一个 $\mathfrak{so}_{12}$-表示

(5.21)
$$\mathbf{156} = \mathbf{66} + \mathbf{12} + \mathbf{12} + \mathbf{32} + \mathbf{32} + \mathbf{1} + \mathbf{1}\,,$$

它同构于一个非约化李代数

(5.22)
$$\mathfrak{so}_{12} \oplus \bigoplus_{i+j>0} \mathfrak{g}_{i,j}\,,$$

内部 $\mathfrak{e}_8$。它们之间的算符乘积展开直接继承自$L_1(\mathfrak{so}_{12})$。特别是，算子 $\phi_1^2\phi_2^2 J^{(-2,-2)}$ 与所有算子都有正则算子乘积展开。该算子被认定为四分之一BPS体单极算子$\phi_1^2\phi_2^2 V^{(-1,0)}$的边界值，它属于额外超流多重态 [GKS24]。

更一般地，$\mathcal{T}^{\mathcal{A}}{}_{\min}$ 的边界规范反常可以通过加入对应于$L_1(\mathfrak{g})$的边界自由度予以抵消，其中是 Deligne–Cvitanović（DC）例外级数中的一个李代数。如第3.1节所述，这可通过考虑耦合系统 $\mathcal{T}^{\mathcal{A}}\ \min \times T_{\mathfrak{g}}$的边界代数来实现，其中 $T_{\mathfrak{g}}$ 是规范群为$G$的 1 级陈-西蒙斯理论，且$G$取为李代数为 $\mathfrak{g}$的单连通群。

**6.1. 将 $L_1(\mathfrak{g})$ 耦合到 $\mathcal{T}^{\mathcal{A}}{}_{\min}$。** 令 $\chi_{\mathfrak{g}}(q;\{y_i\})$ 为具有标准共形向量的 $L_1(\mathfrak{g})$ 的特征。上述边界自由度的贡献于是为

$$I^{\mathfrak{g}}_{2d}(q;z,\nu,\eta)=\chi_{\mathfrak{g}}\left(q;\left\{z^{a_i^\vee}[(-q^{1/2})^{\nu-1}\eta]^{a_i^\vee/2}\right\}\right)\,, \tag{6.1}$$

其中 $a_i^\vee$为余标记，定义为 $\theta^\vee=\sum_i a_i^\vee\alpha_i^\vee$。Jacobi 变量$z$ 的平移源于混合 Chern-Simons 耦合（2.12）。当$L_1(\mathfrak{g})$ 是格 VOA，即对于 $\mathfrak{g}=A_1,A_2,D_4,E_6,E_7,E_8,$时，该贡献可写成如下形式，

$$I^{\mathfrak{g}}_{2d}(q;z,\nu,\eta)=\frac{1}{(q)_\infty^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}}\sum_{n\in\mathbb{Z}^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}}q^{\frac{1}{2}n^tC(\mathfrak{g})n}z^{-a_i^\vee C(\mathfrak{g})_{ij}n_j}[(-q^{1/2})^{\nu-1}\eta]^{-a_i^\vee C(\mathfrak{g})_{ij}n_j/2}\,, \tag{6.2}$$

其中 $C(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$的 Cartan 矩阵。对于这些例子，可以显式计算诺伊曼半指标。令$n_{\theta^\vee}=\sum_{i,j}a_i^\vee C(\mathfrak{g})^{ij}n_j$。于是

$$\begin{aligned}I^{\mathfrak{g}}_{\mathrm{half}}(q;\nu,\eta)&=(q)_\infty\oint\frac{dz}{2\pi iz}\frac{1}{(z;q)_\infty}I^{\mathfrak{g}}_{2d}(q;z,\nu,\eta)\\&=\frac{1}{(q)_\infty^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})-1}}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}\\ n_{\theta^\vee}\geq 0}}\frac{1}{(q)_{n_{\theta^\vee}}}q^{\frac{1}{2}n^tC(\mathfrak{g})n}[(-q^{1/2})^{\nu-1}\eta]^{-n_{\theta^\vee}/2}\,.\end{aligned} \tag{6.3}$$

在$A$扭曲极限下，我们有

$$I^{\mathfrak{g}}_{\mathrm{half}}(q;-1,1)=\frac{1}{(q)_\infty^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})-1}}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}\\ n_{\theta^\vee}\geq 0}}\frac{1}{(q)_{n_{\theta^\vee}}}q^{\frac{1}{2}n^tC(\mathfrak{g})n}(-q^{1/2})^{n_{\theta^\vee}}\,. \tag{6.4}$$

**6.2. 对$L_1(\mathfrak{g})$的分解。**让我们回顾一下 Deligne–Cvitanovi´c 例外级数的一些特点。设 $\mathfrak{g}$ 是 DC 系列中的一个李代数，$h^\vee$ 是其对偶 Coxeter 数。那么 $\mathfrak{g}$ 的维数满足

$$\dim(\mathfrak{g})=\frac{2(h^\vee+1)(5h^\vee-6)}{h^\vee+6}.$$

这对相关顶点代数有一些组合学上的推论。最小$W$-代数在 $\mathfrak{g}$ 等级$k$ 下的 [KW04]

$$c(k)=\frac{k\dim\mathfrak{g}}{k+h^\vee}-6k+h^\vee-4\,. \tag{6.5}$$

| $\mathfrak{g}$ | $A_{\mathfrak{g}}$ | $B_{\mathfrak{g}}$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | $\mathbf{1}$ | $\mathbf{1}$ |
| $A_2$ | $V_{\sqrt{3}A_1}$ | $V_{\sqrt{3}A_1+\lambda/2}$ |
| $G_2$ | $L_3(\mathfrak{sl}_2)$ | $L_3(3\omega)$ |
| $D_4$ | $L_1(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes 3}$ | $L_1(\omega)^{\otimes 3}$ |
| $F_4$ | $L_1(\mathfrak{sp}_6)$ | $L_1^{\mathfrak{sp}_6}(\omega_3)$ |
| $E_6$ | $L_1(\mathfrak{sl}_6)$ | $L_1^{\mathfrak{sl}_6}(\omega_3)$ |
| $E_7$ | $L_1(\mathfrak{so}_{12})$ | $L_1^{\mathfrak{so}_{12}}(\omega_6)$ |
| $E_8$ | $L_1(E_7)$ | $L_1^{\mathfrak{e}_7}(\omega_1)$ |

表 6.1. DC 系列中 $\mathfrak{g}$ 的 $L_1(\mathfrak{g})$ 的分解，$L_1(\mathfrak{g}) \cong A_{\mathfrak{g}} \otimes L_1(\mathfrak{sl}_2) \oplus B_{\mathfrak{g}} \otimes L_1(\omega)$。此处 $V_L$ 是与格 $L$ 关联的格 VOA。

此外，当 $\mathfrak{g}$ 属于 DC 系列时，$W^k(\mathfrak{g}, f_{\min})$ 的仿射顶点子代数 $V^{k^\sharp}(\mathfrak{g}^\natural)$ 的等级为

$$k^\sharp = k + \frac{h^\vee}{6} + 1.$$

对于 $k = -\frac{h^\vee}{6} - 1$，此等级为零，并且可以验证$W_k(\mathfrak{g}, f_{\min})$ 在此等级下的中心荷也为零。随后发现这是一个坍缩级别，即$W_k(\mathfrak{g}, f_{\min}) \cong \mathbb{C}$ 是平凡的 [AKMF+18, AAC+25]。

考虑余集 $\mathrm{Com}(V^{k+1}(\mathfrak{g}), V^k(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g}))$时，会出现下一个巧合。当 $\mathfrak{g}$ 属于 DC 系列时，计算该余集的中心荷可得$-\frac{22}{5}$，并且确实可以证明 [ACK25]

$$\mathrm{Com}\left(L_{-\frac{h^\vee}{6}}(\mathfrak{g}), L_{-\frac{h^\vee}{6}-1}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})\right) \cong M(5,2).$$

换言之，$L_{-\frac{h^\vee}{6}-1}(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g})$ 是 $L_{-h^\vee/6}(\mathfrak{g}) \otimes M(5,2)$ 的共形扩张，因此 Urod 定理 [ACF22] 蕴含 $W^{-\frac{h^\vee}{6}-1}(\mathfrak{g}, f_{\min}) \otimes L_1(\mathfrak{g}) \cong L_1(\mathfrak{g})$ 是 $M(5,2) \otimes W^{-\frac{h^\vee}{6}}(\mathfrak{g}, f_{\min})$ 的共形扩张。对于 DC 系列中的任意 $\mathfrak{g}$，我们有如下分解

$$\begin{aligned} L_1(\mathfrak{g}) &\cong A_{\mathfrak{g}} \otimes L_1(\mathfrak{sl}_2) \oplus B_{\mathfrak{g}} \otimes L_1^{\mathfrak{sl}_2}(\omega) \\ &\cong A_{\mathfrak{g}} \otimes \left(M(5,2) \otimes M(5,3) \oplus M_{3,1}^{5,2} \otimes M_{3,1}^{5,3}\right) \oplus \\ &\qquad B_{\mathfrak{g}} \otimes \left(M_{2,1}^{5,2} \otimes M_{2,1}^{5,3} \oplus M_{4,1}^{5,2} \otimes M_{4,1}^{5,3}\right) \\ &= M(5,2) \otimes \left(A_{\mathfrak{g}} \otimes M(5,3) \oplus B_{\mathfrak{g}} \otimes M_{4,1}^{5,3}\right) \oplus \\ &\qquad M_{3,1}^{5,2} \otimes \left(A_{\mathfrak{g}} \otimes M_{3,1}^{5,3} \oplus B_{\mathfrak{g}} \otimes M_{2,1}^{5,3}\right), \end{aligned} \tag{6.6}$$

其中，$A_{\mathfrak{g}}$ 和$B_{\mathfrak{g}}$ 对于每个 $\mathfrak{g}$ 的总结见表6.1。于是有

$$\mathrm{Com}\left(M(5,2), L_1(\mathfrak{g})\right) \cong A_{\mathfrak{g}} \otimes M(5,3) \oplus B_{\mathfrak{g}} \otimes M_{4,1}^{5,3}, \tag{6.7}$$

它自然实现为 $\mathcal{T}^{A}{}_{\min} \times T_{\mathfrak{g}}$的边界顶点代数。这类顶点算子代数被认定为$C_2$-余有限且 $\mathbb{Z}_2$-有理的$W$-代数$W_k(\mathfrak{g},\, f_{\min})$，等级为$k = -h^\vee/6$ [Kaw18]。

仿射顶点超代数$\mathfrak{osp}_{1|2n}$ 的表示论在许多方面与单李代数[CGL24]所关联的顶点代数的表示论相似。特别是，对于任意正整数等级$m$，$L_m(\mathfrak{osp}_{1|2n})$ 也是有理的。对偶考克斯特数为$h^\vee = n + \frac{1}{2}$，超维数为 $\underline{\text{sdim}}(\mathfrak{osp}_{1|2n}) = n(2n-1)$。因此我们看到

$$\text{sdim}(\mathfrak{osp}_{1|2n}) = \frac{2(h^\vee+1)(5h^\vee-6)}{h^\vee+6}\,,$$

当且仅当 $n = 1$。结果表明，在这种情况下，$W_k(\mathfrak{g}, f_{\min}) \cong \mathbb{C}$ 是平凡的[AKMF+18, AAC+25]。与 [ACK25]相同的证明表明

$$\text{Com}\left(L_{-\frac{1}{4}}(\mathfrak{osp}_{1|2}), L_{-\frac{5}{4}}(\mathfrak{osp}_{1|2}) \otimes L_1(\mathfrak{osp}_{1|2})\right) \cong M(5,2) \tag{6.8}$$

同样成立，因此根据 Urod 定理， [ACF22]，（该定理对李超代数也成立），$L_1(\mathfrak{osp}_{1|2})$ 是$M(5,2) \otimes W^{-\frac{1}{4}}(\mathfrak{osp}_{1|2}, f_{\min})$的共形扩张。$L_1(\mathfrak{osp}_{1|2})$ 的分解为 [CFK18]

$$L_1(\mathfrak{osp}_{1|2}) \cong M(5,3) \otimes L_1(\mathfrak{sl}_2) \oplus M^{5,3}_{4,1} \otimes L_1^{\mathfrak{sl}_2}(\omega) \tag{6.9}$$

因此，如果我们设

$$A_{\mathfrak{osp}_{1|2}} = M(5,3), \qquad B_{\mathfrak{osp}_{1|2}} = M^{5,3}_{4,1},$$

那么便可像之前一样得到

$$\begin{aligned} L_1(\mathfrak{osp}_{1|2}) &\cong A_{\mathfrak{osp}_{1|2}} \otimes L_1(\mathfrak{sl}_2) \oplus B_{\mathfrak{osp}_{1|2}} \otimes L_1^{\mathfrak{sl}_2}(\omega) \\ &\cong A_{\mathfrak{osp}_{1|2}} \otimes \left(M(5,2) \otimes M(5,3) \oplus M^{5,2}_{3,1} \otimes M^{5,3}_{3,1}\right) \oplus \\ &\qquad B_{\mathfrak{osp}_{1|2}} \otimes \left(M^{5,2}_{2,1} \otimes M^{5,3}_{2,1} \oplus M^{5,2}_{4,1} \otimes M^{5,3}_{4,1}\right) \\ &= M(5,2) \otimes \left(A_{\mathfrak{osp}_{1|2}} \otimes M(5,3) \oplus B_{\mathfrak{osp}_{1|2}} \otimes M^{5,3}_{4,1}\right) \oplus \\ &\qquad M^{5,2}_{3,1} \otimes \left(A_{\mathfrak{osp}_{1|2}} \otimes M^{5,3}_{3,1} \oplus B_{\mathfrak{osp}_{1|2}} \otimes M^{5,3}_{2,1}\right)\,. \end{aligned} \tag{6.10}$$

The $W$-代数 $\mathfrak{osp}_{1|2}$ 可实现为 $\mathcal{T}^{A}{}_{\min} \times T^{\mathfrak{osp}_{1|2}}$的边界代数，其中拓扑场论 $T^{\mathfrak{osp}_{1|2}}$ 被认定为 $\mathcal{T}^{B}_{\min}$ 配备标准 Dirichlet 边界条件 [FGK24]。正如 前文所述， $\mathcal{T}_{\min}$ 的自镜像性质意味着它与以下理论镜像对偶

$$\mathcal{T}^{B}_{\min} \text{ with } (\mathcal{D}, D) \longleftrightarrow \overline{\mathcal{T}}^{A}_{\min} \text{ with } (\mathcal{N}, N) \text{ coupled to } (\text{bc})^{\otimes 2}\,, \tag{6.11}$$

其中$(\text{bc})^{\otimes 2}$ 表示两份 bc 鬼系统，即在某种$R$荷选择下的 (0,2) 费米多重态。因此，体理论可描述为 $\mathcal{T}^{A}$ min $\times \mathcal{T}^{A}$ min，并施加诺伊曼边界条件$(\mathcal{N}, N; \mathcal{N}, N)$，再与$(\text{bc})^{\otimes 2}$耦合。

6.3. **特征标与超特征标**。 对于 $\mathfrak{g} = D_4, E_6, E_7, E_8$, 其中 $n_\theta^\vee$ 是穿过与仿射节点相连的 Dynkin 节点的通量，我们可以将诺伊曼半指标(6.3) 写作

(6.12)
$$\begin{aligned} I^{\mathfrak{g}}_{\text{half}}(q;-1,1) &= \frac{1}{(q)_\infty^{\text{rk}(\mathfrak{g})-1}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}^{\text{rk}(\mathfrak{g})} \\ n_{\theta^\vee}\geq 0}} \frac{1}{(q)_{n_{\theta^\vee}}} q^{\frac{1}{2}n^t C(\mathfrak{g})n} (-q^{1/2})^{n_{\theta^\vee}} \\ &= \frac{1}{(q)_\infty^{\text{rk}(\mathfrak{g})-1}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^{\text{rk}(\mathfrak{g})-1} \\ n_{\theta^\vee}\geq 0}} \frac{1}{(q)_{n_{\theta^\vee}}} q^{n_{\theta^\vee}^2 + n_{\theta^\vee}\sum_{j\neq\theta^\vee} C(\mathfrak{g})_{\theta^\vee j} m_j + \frac{1}{2}m^t C(\mathfrak{g}_0')m} (-q^{1/2})^{n_{\theta^\vee}} . \end{aligned}$$

此表达式可分解为偶数和奇数$n_{\theta^\vee}$的和：

(6.13)
$$\begin{aligned} I^{\mathfrak{g}}_{\text{half}}(q;-1,1) &= \frac{1}{(q)_\infty^{\text{rk}(\mathfrak{g})-1}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^{\text{rk}(\mathfrak{g})-1} \\ k\geq 0}} \frac{1}{(q)_{2k}} q^{4k^2+k+2k\sum_{j\neq\theta^\vee} C(\mathfrak{g})_{\theta^\vee j} m_j + \frac{1}{2}m^t C(\mathfrak{g}_0')m} \\ &\quad - \frac{q^{1/2}}{(q)_\infty^{\text{rk}(\mathfrak{g})-1}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^{\text{rk}(\mathfrak{g})-1} \\ k\geq 0}} \frac{1}{(q)_{2k+1}} q^{(2k+1)^2+k+(2k+1)\sum_{j\neq\theta^\vee} C(\mathfrak{g})_{\theta^\vee j} m_j + \frac{1}{2}m^t C(\mathfrak{g}_0')m} . \end{aligned}$$

设$u = -\sum_{j\neq\theta^\vee} C_{\theta^\vee j}\omega_j'$，其中 $\omega_j'$ 是 $\mathfrak{g}_0'$ 的第$j$个基本权。将$m \to m + 2ku$平移后，我们有

(6.14)
$$\begin{aligned} I^{\mathfrak{g}}_{\text{half}}(q;-1,1) &= \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(q)_{2k}} q^{k^2+k}\right) \frac{1}{(q)_\infty^{\text{rk}(\mathfrak{g}_0')}} \sum_{m\in\mathbb{Z}^{\text{rk}(\mathfrak{g}_0')}} q^{\frac{1}{2}m^t C(\mathfrak{g}_0')m} \\ &\quad - q^{1/2}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(q)_{2k+1}} q^{(k+1)^2}\right) \frac{1}{(q)_\infty^{\text{rk}(\mathfrak{g}_0')}} \sum_{m\in\mathbb{Z}^{\text{rk}(\mathfrak{g}_0')}} q^{\frac{1}{2}m^t C(\mathfrak{g}_0')m + \sum_{j\neq\theta^\vee} C(\mathfrak{g})_{\theta^\vee j} m_j} . \end{aligned}$$

这正是（6.7）的超特征标，差一个模异常前因子。

情况 $\mathfrak{g} = A_2, G_2, F_4$ 需要分别处理。对于 $\mathfrak{g} = A_2$,

(6.15)
$$\begin{aligned} I^{A_2}_{\text{half}}(q;-1,1) &= \frac{1}{(q)_\infty} \sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ n_1+n_2\geq 0}} \frac{1}{(q)_{n_1+n_2}} q^{n_1^2+n_2^2-n_1n_2} (-q^{1/2})^{n_1+n_2} \\ &= \frac{1}{(q)_\infty} \sum_{n\geq 0, n_2\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(q)_n} q^{n^2-3nn_2+3n_2^2} (-q^{1/2})^n \\ &= \frac{1}{(q)_\infty} \sum_{k\geq 0, n_2\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(q)_{2k}} q^{4k^2+k-6kn_2+3n_2^2} \\ &\quad - \frac{q^{1/2}}{(q)_\infty} \sum_{k\geq 0, n_2\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(q)_{2k+1}} q^{(2k+1)^2+k-3(2k+1)n_2+3n_2^2} . \end{aligned}$$

将 $n_2 \to n_2 + k$ 平移,

$$I^{A_2}_{\text{half}}(q;-1,1) = \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(q)_{2k}} q^{k^2+k}\right) \frac{1}{(q)_\infty} \sum_{n_2\in\mathbb{Z}} q^{3n_2^2} - q^{-1/4} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(q)_{2k+1}} q^{(k+1)^2}\right) \frac{1}{(q)_\infty} \sum_{n_2\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} q^{3n_2^2}\,, \tag{6.16}$$

这与6.7式中 $\mathfrak{g} = A_2$, 的超特征标一致，但相差一个模异常前因子。在此情况下，$A_{\mathfrak{g}}$ 是与格 $\sqrt{3}A_1 = \lambda\mathbb{Z}$ 及其 $(\lambda,\lambda) = 6$ 相关联的格 VOA $V_{\sqrt{3}A_1}$，而 $B_{\mathfrak{g}}$ 是模 $V_{\sqrt{3}A_1+\lambda}$。

最后，对于 $\mathfrak{g} = G_2, F_4,$，我们将（6.3）的第一行展开为 $q$ 级数，并检验前几项系数与（6.7）的超特征标相符。

**6.4. $HT^B$-扭曲与中间顶点子代数。** $HT^B$-扭曲理论的诺伊曼半指标为

$$I^{\mathfrak{g}}_{\text{half}}(q;1,1) = (q)_\infty \oint \frac{dz}{2\pi i z} \frac{1}{(z;q)_\infty} I^{\mathfrak{g}}_{2d}(q;z,1,1)\,. \tag{6.17}$$

对于单连边的 $\mathfrak{g}$，其值为

$$I^{\mathfrak{g}}_{\text{half}}(q;1,1) = \frac{1}{(q)_\infty^{\text{rk}(\mathfrak{g})-1}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}^{\text{rk}(\mathfrak{g})} \\ n_{\theta^\vee}\geq 0}} \frac{1}{(q)_{n_{\theta^\vee}}} q^{\frac{1}{2}n^t C(\mathfrak{g}) n}\,, \tag{6.18}$$

这与文献 [LSW24a], 中计算的中间顶点子代数特征的猜想表达式一致，概述见表 6.2。对于非单连边 $\mathfrak{g}$，我们计算（6.17）的前几项系数，并验证其与上述文献中中间顶点代数（IVAs）对应的特征展开一致。[3]

| $\mathfrak{g}$ | $A_1$ | $A_2$ | $G_2$ | $D_4$ | $F_4$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| IVA | $IM$ | $UA_{1+1/2}$ | $AG_{1+1/2}$ | $AD_{3+1/2}$ | $CD_{3+1/2}$ | $AE_{5+1/2}$ | $DE_{6+1/2}$ | $EE_{7+1/2}$ |

TABLE 6.2. Intermediate vertex subalgebras

在 $Q$-上同调中存留的边界算子为

$$J^\alpha_{\mathfrak{g}'_0}\,, \quad :\phi^a J_{(-a)}: \text{ for } a = 1,2\,, \tag{6.19}$$

其中 $J^{(a)}$ 统称为具有 $h_\theta$ 荷 $a$ 的 $L_1(\mathfrak{g})$ 流。所有这些算子都具有扭曲自旋 1，构成 $L_1(\mathfrak{g}'_0)$ 内部的一个中间李代数 $\mathfrak{g}'_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$。它们之间的算子乘积展开直接继承自 $L_1(\mathfrak{g}'_0)$ 的算子乘积展开。算子 $\phi^2 J^{(-2)}$ 与所有生成元的算子乘积展开均为正则，并可识别为体单极算子 $\phi^2 V_{-1}$ 的边界像。

[3] 剩下的奇异情形记作 $D_{6+1/2+1/2}$，见 [LSW24a]，可以用类似的方法实现：将两个 $\mathcal{T}^A$ min副本与 $L_1(\mathfrak{e}_8)$ 耦合。

| $\mathfrak{g}$ | $A_1$ | $A_2$ | $D_4$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | $2\omega$ | $\omega_1+\omega_2$ | $\omega_2$ | $\omega_6$ | $\omega_1$ | $\omega_1$ |

表 7.1. $\mathbb{T}_{\mathfrak{g}}$ 中手征多重态的荷。

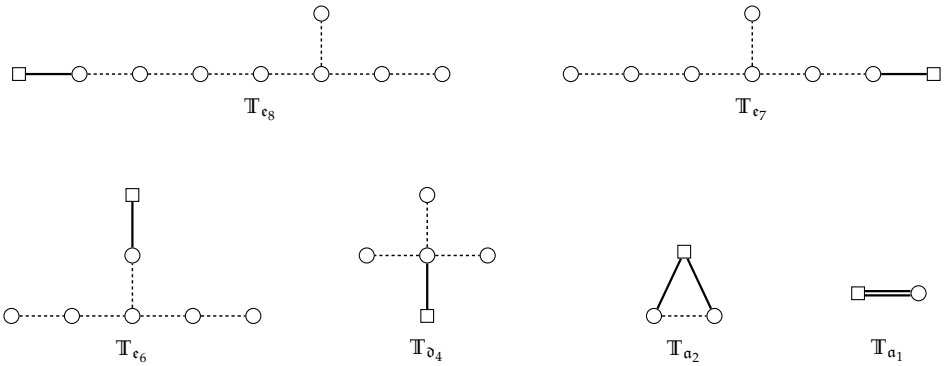



图 7.1. $\mathbb{T}_{\mathfrak{g}}$ 的 $\mathcal{N}=2$ 规范理论描述所对应的箭图。圆形节点表示 $U(1)$ 规范群，它们通过陈-西蒙斯耦合相互作用，其能级矩阵为 $K = C(\mathfrak{g})$，并以虚线表示。实线与方形节点表示带单位电荷的手征多重态。对于 $\mathbb{T}_{\mathfrak{a}_1}$，双实线表示带电荷 2 的手征多重态。这样便将箭图补全为 $\mathfrak{g}$-仿射 Dynkin 图。

## 7. 镜像描述

7.1. **对偶描述**。当 $\mathfrak{g}$ 为单连边时，我们引入另一族 $\mathcal{N}=2$ 规范理论，记作 $\mathbb{T}_{\mathfrak{g}}$，并猜想它们在红外流向 $\mathcal{T}_{\min}\times T_{\mathfrak{g}}$，即 $\mathcal{N}=4$ 与拓扑场论 $T_{\mathfrak{g}}$ 耦合的最小超共形场论。由于 $\mathcal{T}_{\min}$ 在三维 $\mathcal{N}=4$ 镜像对称 [CGK25]，下与其定向反转对偶 $\mathcal{T}_{\min}\times T_{\mathfrak{g}}$，这可以视为 $T_{\mathfrak{g}}$ 的镜像对偶描述。

理论 $\mathbb{T}_{\mathfrak{g}}$ 具有 $\mathcal{N}=2$ 拉格朗日描述，可视为等级为一级的 G 陈-西蒙斯理论，并与一个带单位电荷、受 U(1) $\subset$ G 规范群作用的手征多重态耦合；其定义由 $\rho\in\mathfrak{h}^*$ 给出，详见表 7.1。该理论也可实现为能级矩阵 K $=$ C($\mathfrak{g}$) 的 $\mathcal{N}=2$ U(1)$^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}$ K 陈-西蒙斯理论，并与一个带电荷 $\rho\in\mathbb{Z}^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}$ 的手征多重态耦合。[4] 它可以表示为阿贝尔箭图陈-西蒙斯理论，其中手征多重态将箭图补全为 $\mathfrak{g}$-仿射 Dynkin 图，如图 7.1 所示。

请注意，$\mathbb{T}_{\mathfrak{a}_1}$ 的箭图描述了一种 $\mathcal{N}=2U(1)_2$ CS 理论，该理论与一个电荷为 2 的手征多重态耦合；这项理论最早由 [GKW18] 在 *loc. cit.* 的附录 B 中研究。作者证明了 $\mathbb{T}_{\mathfrak{a}_1}$ 与 $\mathcal{T}_{\min}\times U(1)_2$ [5]，之间的对偶，这与我们的设想一致。箭图理论及其边界

[4] 这里的 CS 层级 $K$ 是“$U(1)_{-1/2}$ 量子化”中的裸 CS 层级，其定义见 [CKW18]。紫外有效能级为 $k = K - \frac{1}{2}\rho^T\rho$。[5] 在 [GKW18]，中，他们采用紫外有效 CS 层级，其中 $\mathbb{T}_{\mathfrak{a}_1}$，并将其描述为 $U(1)_0$ 与一个电荷 2 手征多重态耦合。

的代数 $\mathbb{T}_{\mathfrak{e}_8}$ 在 [KS24] 中作为与 $(A_1, A_2)$-阿吉雷斯-道格拉斯理论的 BPS 单值化算子的四次幂相关联的顶点代数出现。

7.2. **超对称性增强**。该规范理论 $\mathbb{T}_{\mathfrak{g}}$ 具有一个 $U(1)^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}$ 拓扑对称性，但除一个单独的 $U(1)$ 全局对称性外，所有这些对称性都在红外中解耦。我们猜想，该对称性在红外中自然地等同于轴对称性 $S$，它可以表示为

$$S = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_i^\vee C(\mathfrak{g})_{ij} M_j \,, \tag{7.1}$$

其中，$M_i$ 是与第 $U(1)$ 规范节点相关联的拓扑对称性。作此识别后，我们发现规范理论 $\mathbb{T}_{\mathfrak{g}}$ 具有两个规范不变的 1/4-BPS 装饰单极算子

$$\phi V_{-\theta} \,, \qquad \phi V_{\theta} \,, \tag{7.2}$$

它们具有超共形 $R$ 荷 1、自旋 1 和轴荷 $S = \pm 1$，其中 $\theta$ 是简单根基中的最高根向量。这为它们属于与 $\mathcal{N} = 4$ 红外超共形场论扇区中的超对称性增强相关联的额外超流多重态提供了有力证据。对 $\mathbb{T}_{\mathfrak{g}}$ 进行 $F$-极大化，并计算超共形指标以及在塞弗特流形上的配分函数后，我们发现它们与 $\mathcal{T}_{\min} \times T_{\mathfrak{g}}$ 的结果一致，与这一提议相符。

7.3. **对偶边界条件**。在前几节中，我们分析了 $(\mathcal{N}, N; \mathcal{D})$ 边界条件对于 $\overline{\mathcal{T}}_{\min} \times T_{\mathfrak{g}}$，即对 $\overline{\mathcal{T}}_{\min}$ 施加诺伊曼边界条件，同时对 $T_{\mathfrak{g}}$ 施加狄利克雷边界条件，如第2.2节所述将它们耦合起来。我们提出，$\mathbb{T}_{\mathfrak{g}}$ 的对偶边界条件是一种变形的狄利克雷边界条件（手征多重态具有非零边界值），因此三维镜像对称性会将

$$\overline{\mathcal{T}}_{\min} \times T_{\mathfrak{g}} \ \text{ with } \ (\mathcal{N}, N; \mathcal{D}) \longleftrightarrow \mathbb{T}_{\mathfrak{g}} \ \text{ with } \ (\mathcal{D}, D_c) \,. \tag{7.3}$$

这一主张得到了半指标计算的支持。$\mathbb{T}_{\mathfrak{g}}$ 的狄利克雷半指标为

$$I^{\mathbb{T}_{\mathfrak{g}}}_{\mathrm{half}}(q; \nu, \eta, s) = \frac{1}{(q)_\infty^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})-1}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})} \\ n_{\theta^\vee} \geq 0}} \frac{q^{\frac{1}{2} n^t C(\mathfrak{g}) n}}{(q)_{n_{\theta^\vee}}} \left[(-q^{1/2})^{\nu+1}\eta\right]^{n_{\theta^\vee}/2} \prod_{i,j=1}^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})-1} s_i^{-C(\mathfrak{g}_0')_{ij} n_j} \,. \tag{7.4}$$

将此表达式与（6.3）进行比较（对 $\mathfrak{g}_0'$ 的雅可比变量作简单细化），可得

$$I^{\mathfrak{g}}_{\mathrm{half}}(q; \nu, \eta, s) = I^{\mathbb{T}_{\mathfrak{g}}}_{\mathrm{half}}(q; -\nu, \eta^{-1}, s) \,, \tag{7.5}$$

这为该猜想（7.3）提供了有力证据。

值得注意的是，上述 1/4-BPS 单极算子的形式进一步表明，这种形变的 Dirichlet 边界条件与 $B$-twist 相容，但与 $A$-twist 不相容。具体而言，如上述指标所示，带有 $\phi \neq 0$ 的狄利克雷边界条件将提升所有满足 $n_{\theta^\vee} < 0$ 的单极算子，正如 [FGK24] 的第 5.1 节所述（见脚注 9）。在 $HT$ twist 中，这意味着

在边界上 $\phi V_{-\theta}$ 的限制为零，而 $\phi V_{\theta}$ 非零。换言之，这一边界条件可形变为 $B$-twist [BLS21、FGK24]所对应的条件。鉴于式（7.3）中提出的镜像对称，我们得出结论：前几节研究的边界条件可形变为 $A$-twist，但不能形变为 $B$-twist。

参考文献

[AAC+25] Dražen Adamovi´c、Tomoyuki Arakawa、Thomas Creutzig、Andrew R. Linshaw、Anne Moreau、Pierluigi Möseneder Frajria 和 Paolo Papi，《作为仿射顶点算子代数共形扩张的 W- 代数》，2025 年 8 月。[AADGL26] Arash Arabi Ardehali 、 Mykola Dedushenko 、 Dongmin Gang 和 Mikhail Litvinov，《通过三维高温有效场论连接四维量子场论与二维顶点算子代数》，JHEP 02 (2026), 038。[AAGRS25] Arash Arabi Ardehali、Dongmin Gang、Neville Joshua Rajappa 和 Matteo Sacchi，《来自四维的三维超对称增强与非半单拓扑量子场论》，JHEP 09 (2025), 179。[ACF22] Tomoyuki Arakawa、Thomas Creutzig 和 Boris Feigin，《Urod 代数与 W-代数的平移》，《数学论坛：西格玛》10 (2022), e33。[ACK25] Tomoyuki Arakawa、Thomas Creutzig 和 Kazuya Kawasetsu，《关于光滑非可容许极小及主 W-代数》，《现代代数》第 1 卷：表示论，《当代数学》第 829 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，[2025] ©2025，第 1–13 页。MR 5010103[AGMV86] Luis Alvarez-Gaume、Gregory W. Moore 和 Cumrun Vafa，《θ 函数、模不变性与弦》，Commun. Math. Phys. 106 (1986), 1–40。[AKMF+18] Dražen Adamovi´c、Victor G. Kac、Pierluigi Möseneder Frajria、Paolo Papi 和 Ozren Perše，《仿射顶点代数到极小 W-代数的共形嵌入 I：结构结果》，J. Algebra 500 (2018), 117–152。[BFL16] Mikhail Bershtein、Boris Feigin 和 Alexei Litvinov，《两个共形场论的耦合与中岛－吉冈爆破方程》，Lett. Math. Phys. 106 (2016), no. 1, 29–56。[BLS21] Ilka Brunner、Ioannis Lavdas 和 Ingmar Saberi，《通过扭曲超引力中的膜实现拓扑场论的全纯边界条件》，2021年 10 月。[CDG23] Kevin Costello、Tudor Dimofte 和 Davide Gaiotto，《边界手征代数与全纯扭曲》，Commun. Math. Phys. 399 (2023), no. 2, 1203–1290。[CDPK19] Cyril Closset、Lorenzo DiPietro 和 Heeyeon Kim，《't Hooft 反常与超对称配分函数的全纯性》，JHEP 08 (2019), 035。[CFK18] Thomas Creutzig、Jesse Frohlich 和 Shashank Kanade，《来自顶点张量范畴与雅可比形式的 L_k(𝔬𝔰𝔭(1\vert2)) 表示论》，Proc. Am. Math. Soc. 146 (2018), no. 11, 4571–4589。[CG19] Kevin Costello 和 Davide Gaiotto，《顶点算子代数与三维 $\mathcal{N} = 4$ 规范理论》，JHEP 05 (2019), 018。[CGK25] Thomas Creutzig、Niklas Garner 和 Heeyeon Kim，《三维 $\mathcal{N} = 4$ 秩 0 超共形场论的镜像对称与秩－等级对偶》，Lett. Math. Phys. 115 (2025), no. 6, 123。[CGL24] Thomas Creutzig、Naoki Genra 和 Andrew Linshaw，《$\mathfrak{osp}1|2n$ 顶点代数的普通模》，J. Reine Angew. Math. 2024 (2024), no. 817, 1–31。[CKM22] Thomas Creutzig、Shashank Kanade 和 Robert McRae，《顶点代数粘合》，Adv. Math. 396 (2022), 108174。[CKM24a] ，《顶点算子超代数扩张的张量范畴》，Mem. Am. Math. Soc. 295 (2024), no. 1472。[CKM24b] ，《顶点算子超代数扩张的张量范畴》，第 295 卷，美国数学会，2024年。[CKW18] Cyril Closset、Heeyeon Kim 和 Brian Willett，《三维 $\mathcal{N} = 2$理论中的塞弗特纤维化算子》，JHEP 11 (2018), 004。[Ded23] Mykola Dedushenko，《关于超共形场论／顶点算子代数对应的四维／三维～三维视角》，2023年 12 月。[Del96] Pierre Deligne，《李群的例外级数》，Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Serie I-Mathematique 322 (1996), no. 4, 321–326。[DGP18] Tudor Dimofte、Davide Gaiotto 和 Natalie M. Paquette，《三维超共形场论中的对偶边界条件》，JHEP 05 (2018), 060。

[FGK24] Andrea E. V. Ferrari、Niklas Garner 和 Heeyeon Kim, 《三维$\mathcal{N}=4$ 秩-0 超共形场论的边界顶点代数》, SciPost Phys. 17 (2024), no. 2, 057。[Gar24] Niklas Garner, 《三维 $\mathcal{N}=4$ 理论的扭曲形式主义》, Lett. Math. Phys. 114 (2024), no. 1, 16。[GGP16] Abhijit Gadde、Sergei Gukov 和 Pavel Putrov, 《五膜与四维流形》, Prog. Math. 319 (2016), 155–245。[GK25] Davide Gaiotto 和 Heeyeon Kim, 《来自四维 $\mathcal{N}=2$ BPS粒子的三维拓扑场论》, JHEP 03 (2025), 173。[GKL$^+$21] Dongmin Gang、Sungjoon Kim、Kimyeong Lee、Myungbo Shim 和 Masahito Yamazaki, 《来自三维 $\mathcal{N}=4$ 秩 0 超共形场论的非幺正拓扑量子场论》, JHEP 08 (2021), 158。[GKS24] Dongmin Gang、Heeyeon Kim 和 Spencer Stubbs, 《三维拓扑场论与非幺正极小模型》, Phys. Rev. Lett. 132 (2024), no. 13, 131601。[GKW18] Davide Gaiotto、Zohar Komargodski 和 Jingxiang Wu, 《三维超共形场论的若干奇特方面》, JHEP 08 (2018), 004。[GY18] Dongmin Gang 和 Masahito Yamazaki, 《具有超对称增强的三维规范理论》, Phys. Rev. D 98 (2018), no. 12, 121701。[Jaf12] Daniel L. Jafferis, 《精确的超共形 R 对称性使 Z 取极值》, JHEP 05 (2012), 159。[Kaw14] Kazuya Kawasetsu, 《格顶点算子代数的中间顶点子代数》, Letters in Mathematical Physics 104 (2014), no. 2, 157–178。[Kaw18] , 《具有非可容许等级的 W-代数与 Deligne 例外级数》, International Mathematics Research Notices 2018 (2018), no. 3, 641–676。[KS24] Heeyeon Kim 和 Jaewon Song, 《来自 Argyres-Douglas 理论的一族顶点算子代数》, 2024年 12 月。[KW04] Victor G. Kac 和 Minoru Wakimoto, 《超共形代数的量子约化与表示论》, Adv. Math. 185 (2004), no. 2, 400–458。MR 2060475[LM06] Joseph M Landsberg 和 Laurent Manivel, 《六元数与 e712》, Advances in Mathematics 201 (2006), no. 1, 143–179。[LSW24a] Kimyeong Lee、Kaiwen Sun 和 Haowu Wang, 《关于中间例外级数》, Lett. Math. Phys. 114 (2024), no. 5, 113。[LSW24b] , 《关于中间李代数 E7+1/2》, Lett. Math. Phys. 114 (2024), no. 1, 13。[Mkr16] Ruben L. Mkrtchyan, 《关于 Vogel 平面上的映射》, Lett. Math. Phys. 106 (2016), no. 1, 57–79。[MMS88] Samir D. Mathur、Sunil Mukhi 和 Ashoke Sen, 《关于有理共形场论的分类》, Phys. Lett. B 213 (1988), 303–308。[YS20] Yutaka Yoshida 和 Katsuyuki Sugiyama, 《在 $S^1\times$D 上局域化三维 $\mathcal{N}=2$ 超对称理论》, PTEP 2020 (2020), no. 11, 113B02。

[1]数学系 , 埃尔朗根-纽伦堡大学 , 91058 埃尔朗根 , 德国

电子邮件地址：thomas.creutzig@fau.de

[2] 数学研究所 , 牛津大学 , 牛津 , OX2 6GG , UK

电子邮箱地址：niklas.garner@maths.ox.ac.uk

[3]物理系 , 韩国科学技术院 , 大田 34141，大韩民国

电子邮件地址：wjdzm14@kaist.ac.kr

[3]物理系 , 韩国科学技术院 , 大田 34141，大韩民国

电子邮件地址：heeyeon.kim@kaist.ac.kr