arXiv:2603.17411v1 [math.FA] 18 Mar 2026

拉东-尼科迪姆化简述

THIERRY DE PAUW

目录

1. 前言 1 2. 动机 2 3. $\mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_1^*$ 2典范映射的单射性与满射性 4 4. 带零集的可测空间 6 5. 积分几何测度 9 6. **特殊有界变差** 的对偶 10 7. 致谢 10 参考文献 10

1. 前言

在第 2 节中，我们解释了关于特殊有界变差(Ω)对偶的某种观点，如何与理解 $\mathrm{L}_1(\Omega, \mathrm{B}(\Omega), \mathrm{H}^{n-1}; \mathbb{R}^n)$ 的对偶相关，其中 H^{n-1} 是豪斯多夫测度。后者所面临的困难源于拉东 - 尼科迪姆定理不适用于测度空间 $(\Omega, \mathrm{B}(\Omega), \mathrm{H}^{n-1})$。在第 3 节中，我们回顾了我们的论文 [10]，其中讨论了对于一般测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$，典范映射 $\Upsilon : \mathrm{L}_\infty(X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathrm{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)^*$ 的性质： Υ 是单射，当且仅当 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是半有限的； Υ 是满射，当且仅当 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是半局部化的，即布尔代数 $\mathscr{N}_\mu^{\mathscr{A}}{}_{,\mathrm{loc}}$ 是序完备~~的，~~ 其中 $\mathscr{N}_{\mu,\mathrm{loc}}$ 由 $\mathscr{A}$ 中那些在每个有限测度集合上的迹均为零的成员组成。单射性与拉东-尼科迪姆导数的唯一性有关，而满射性与其存在性有关。我们解释了对于豪斯多夫测度， Υ 是单射还是满射，取决于所考虑的 σ-代数——是博雷尔可测的，还是按卡拉西奥多里意义下的豪斯多夫可测的。特别地，我们给出了若干线索，说明为什么测度空间 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{A}_{\mathscr{H}^1}, \mathrm{H}^1)$ 上 Υ 的满射性在 ZFC 中是不可判定的。在第 4 节中，我们讨论了我们与 Ph. Bouafia 合作的论文 [6] 中证明的存在性：对于每个测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$，都存在一个拉东 - 尼科迪姆化 $(\hat{X}, \hat{\mathscr{A}}, \hat{\mu})$，类似于度量空间的完备化或豪斯多夫拓扑空间的紧化。使测度空间成为半有限的，可以在不改变基空间 $(X, \mathscr{A})$ 的情况下（轻易地）实现。然而，第 3 节中的例子表明，使测度空间成为半局部化的，通常需要将 X 替换为一个“更大”的空间 $\hat{X}$ ——某个纤维丛的商。为了陈述定义测度空间拉东-尼科迪姆化的泛性质，需要建立恰当的范畴语言。一般的存在性定理是非构造性的。在第 5 节中，如同 [6]，我们在 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 例如为积分几何测度空间 $(\mathbb{R}^2, \mathrm{B}(\mathbb{R}^2), \mathrm{I}^1_\infty)$ 的情形下，对 $(\hat{X}, \hat{\mathscr{A}}, \hat{\mu})$ 给出了一个明确而“直接操作式”的描述。这依赖于测度 I^1_∞ 的特定性质（贝西科维奇–费德勒投影定理、密度 1），而豪斯多夫测度 H^1 不具备这些性质。该替换不影响对原问题的应用，即描述特殊有界变差(Ω)的对偶，因为全变差 $\|Du\|$ 的

2010 数学主题分类。 主要分类 49Q15,28A75,26A45,28C05。关键词与短语。 拉东-尼科迪姆定理、豪斯多夫测度、积分几何、有界变差函数。

分布导数 Du 对特殊有界变差函数 u 是绝对连续的，相对于 $\mathbf{I}^1_\infty$（的半有限版本）而言，这相当于说 u 的跳跃集是可数可整化的。这在第 6 节中导出了一个积分表示公式：借助定义在扩大的 ˆ空间 Ω 上的向量场，表示带有**特殊有界变差(Ω)**的成员；这是我们与 Ph. Bouafia 合作的论文 [7] 的主要结果。

2. 动机

设 $n \geqslant 2$ 和 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集。对于变分法中的一些问题，若能对 E. De Giorgi [3, 3.1] 意义下的有界变差函数所构成的巴拿赫空间**BV(Ω)**的对偶，以及特殊有界变差函数所构成的巴拿赫空间**特殊有界变差(Ω)** [3, 4.1]给出有用的描述，将大有裨益。第一个问题近四十年前就以问题7.4的形式出现在 [1]中。N.G. Meyers 和 W.P. Ziemer 在 [23] 中刻画了属于**BV(Ω)**对偶空间的测度，而 N.C. Phuc 和 M. Torres [24]则刻画了属于该对偶空间的有符号测度。其余元素的描述由 F.J. Almgren [2] 在连续统假设下（并在略有不同的语境中）得出；本文作者则在 [9] 中证明，该特定描述独立于 ZFC公理。最近，N. Fusco 和 D. Spector [18] 沿着 R.D. Mauldin 先前的工作，在连续统假设下给出了更精确的描述。本文回顾近期的工作[10, 6, 7]，该工作在 ZFC公理体系内明确描述了**特殊有界变差(Ω)**对偶空间的元素，并且在下文将说明的某种特定普遍意义下，这一描述是“最优的”。

对于每个代表 **特殊有界变差(Ω)** 中一个元素的 u ， u的分布梯度 Du 可分解为 $Du = \mathrm{L}^n \llcorner \nabla u + \mathrm{H}^{n-1} \llcorner j_u$ ，其中 ∇u 是 u 逐点几乎处处的近似梯度， j_u 是一个支撑在 u的近似不连续集 S_u 上的向量场，并且在该集合上有 $j_u = (u^+ - u^-)\nu_u$， ν_u 是垂直于 S_u 的单位向量场，而 u^+， u^- 是 u 在 S_u两侧的近似极限。我们有

$$\|u\|_{\mathbf{SBV}(\Omega)} = \int_\Omega |u| \, d\mathscr{L}^n + \int_{S_u} \|j_u\| \, d\mathscr{H}^{n-1} + \int_\Omega \|\nabla u\| \, d\mathscr{L}^n .$$

因此， $u \mapsto (u, \ j_u, \ \nabla u)$ 是一个等距嵌入

$$\mathbf{SBV}(\Omega) \to \mathbf{L}_1(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \mathscr{L}^n) \times \mathbf{L}_1(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \mathscr{H}^{n-1}; \mathbb{R}^n) \times \mathbf{L}_1(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \mathscr{L}^n; \mathbb{R}^n).$$

由于 $(\Omega, \ \mathrm{B}(\Omega), \ \mathrm{L}^n)$ 是 σ-有限的，相应 $\mathbf{L}_1$ 空间的对偶当然就是相应的 $\mathbf{L}_\infty$ 空间。这个说明不适用于中间测度空间 $(\Omega, \ \mathrm{B}(\Omega), \ \mathrm{H}^{n-1})$。试图理解相应 $\mathbf{L}_1$ 空间的对偶，会引出对典范映射的研究

$$\Upsilon : \mathbf{L}_\infty(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \mathscr{H}^{n-1}) \to \mathbf{L}_1(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), \mathscr{H}^{n-1})^* .$$

3. $\mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_1^*$ 典范映射的单射性与满射性

设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是一个测度空间。存在一个自然的线性收缩

$$\Upsilon : \mathbf{L}_\infty(X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbf{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)^* \tag{1}$$

它将$\mathbf{g}$ 映射为$\mathbf{f} \mapsto \int_X g f \, d\mu$，其中 g 和 f分别表示$\mathbf{g}$ 和$\mathbf{f}$。一般而言， Υ既不一定是单射，也不一定是满射。长期以来，人们已经知道， Υ 是单射，当且仅当 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是半有限的。这意味着，对于每个满足 $\mu(A) = \infty$ 的 $A \in \mathscr{A}$，都存在一个子集 $\mathscr{A} \ni B \subseteq A$，使得 $0 < \mu(B) < \infty$。当然，每个 σ-有限测度空间都是半有限的。然而，对我们关注的情况而言，这种依赖于所考虑的 σ-代数的情形已经出现。具体情况如下。

(1) 如果 X 是完备可分度量空间，且 $0 < d < \infty$，那么测度空间 $(X, \ \mathrm{B}(X), \ \mathrm{H}^d)$ 是半有限的。这里，$\mathrm{B}(X)$ 表示 X 的博雷尔子集构成的 σ代数，而 H^d 是 X上的 d维豪斯多夫测度。在 $X = \mathbb{R}^n$的情况下，这由 R.O. Davies [8]证明；一般情形则由 J. Howroyd [20]证明。

(2) 根据 D.H. Fremlin [15, 439, H], 测度空间 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{A}_{\mathscr{H}^1}, \mathrm{H}^1)$ 不是半有限的，其中 $\mathscr{A}_{\mathscr{H}^1}$ 表示由 $\mathbb{R}^2$中 H^1可测子集构成的 σ代数。这基于 E. Grzegorek, [19]所确立的 $[0,1]$,的“较大”普遍零测子集的存在性。另请参阅 O. Zindulka [26]的文章。

假设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是半有限的，那么 Υ 的满射性的充要条件早已为人所知。该条件要求商布尔代数 $\mathscr{A}/\mathscr{N}_\mu$ 序完备，其中 $\mathscr{N}_\mu = \mathscr{A} \cap \{N : \mu(N) = 0\}$ 是由μ-零测集构成的 σ-理想。具有这一性质的半有限测度空间有时称为 马哈拉姆，[12, 211G]。一种更强的条件有时称为 可分解，它将σ-有限性的概念推广到可能不可数地分解为有限测度集的情形，同时还要求满足一个称为局部决定的新条件（即可测性由有限测度集决定）；可分解的定义见 [12, 211E] 。根据 E.J. McShane[22], , 如果商 σ-代数$\mathscr{A}/\mathscr{N}_\mu$ 的规模不太大，那么可分解性意味着马哈拉姆性质；但根据 D.H. Fremlin [12, 216E], 一般而言并非如此。

若 X 是一个波兰空间，且 $\mathrm{B}(X)$ 表示由其博雷尔子集构成的 σ-代数，并且测度空间 $(X, \mathrm{B}(X), \mu)$ 是可分解的，那么它就是 σ-有限的。我从 D.H. Fremlin 那里学到了证明这一点的“计数论证”，参见 [10]。鉴于上文的 (1)，这表明 $(\mathbb{R}^2, \mathrm{B}(\mathbb{R}^2), \mathrm{H}^1)$ 不可分解。由于一般而言，可分解性比 Υ 的满射性更强，我们还需要进一步论证，才能证明 $(\mathbb{R}^2, \mathrm{B}(\mathbb{R}^2), \mathrm{H}^1)$ 不是马哈拉姆，见下文。这一观察促使我们建立一个判据，用以判断 Υ 是否为满射，而无需预先假设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是半有限的。关于是否

$$\Upsilon : \mathbf{L}_\infty\left(\mathbb{R}^2, \mathscr{A}, \mathscr{H}^1\right) \to \mathbf{L}_1\left(\mathbb{R}^2, \mathscr{A}, \mathscr{H}^1\right)^*$$

是满射，情况如下，参见 [10]。

(3) 若 $\mathscr{A} = \mathrm{B}(\mathbb{R}^2)$，则 Υ 不是满射。由于根据 (1)，$(\mathbb{R}^2, \mathrm{B}(\mathbb{R}^2), \mathrm{H}^1)$ 是半有限的，且不是 σ-有限的，因此它不可分解。E.J. McShane 的论证并未证明 $(\mathbb{R}^2, \mathrm{B}(\mathbb{R}^2), \mathrm{H}^1)$ 不是马哈拉姆（原因在于其完备化不是局部决定的）。不过，下面我们将基于富比尼定理，给出一个简单论证，说明它在某种意义上不是马哈拉姆。(4) 若 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{\mathscr{H}^1}$，则 Υ 的满射性在 ZFC 中是不可判定的。一致性 o f 其满射性是连续统假设的推论。其一致性 o f 它并非满射这一点最早在 [9], 中被指出，不过当时的表述略有不同。下文将解释这一想法。

然而，答案为何会取决于所考虑的 σ-代数? 为了理解这一点，让我们试着证明 Υ 是满射的。

根据经典的黎斯定理，当 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是有限测度空间时，Υ 是满射的——这归结为应用拉东-尼科迪姆定理。这启发我们考虑 $\mathscr{A}^f_\mu = \mathscr{A} \cap \{A : \mu(A) < \infty\}$，并对每个 $A \in \mathscr{A}^f_\mu$，考虑映射

$$\Upsilon^A : \mathbf{L}_\infty(A, \mathscr{A}_A, \mu_A) \to \mathbf{L}_1(A, \mathscr{A}_A, \mu_A)^*,$$

其中 $(A, \mathscr{A}_A, \mu_A)$ 是显然的（有限）测度子空间。因此，Υ^A 是等距线性同构，并且给定 $\alpha \in \mathbf{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)^*$，存在 $g_A \in \mathbf{g}_A \in \mathbf{L}_\infty(A, \mathscr{A}_A, \mu_A)$ 使得

$$(\alpha \circ \iota_A)(\mathbf{f}) = \int_A g_A f \, d\mu_A,$$

只要 $f \in \mathbf{f} \in \mathrm{L}_1(A, \mathscr{A}_A, \mu_A)$，其中 $\iota_A : \mathrm{L}_1(A, \mathscr{A}_A, \mu_A) \to \mathrm{L}_1(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是显然的嵌入。根据拉东-尼科迪姆导数 g_A 的 μ_A-几乎处处唯一性，我们推得，若 $A, A' \in \mathscr{A}^f_\mu$，则 $\mu(A \cap A' \cap \{g_A \neq g_{A'}\}) = 0$。因此，$(g_A)^{A \in \mathscr{A}^f_\mu}$ 就是我们从现在起所称的局部定义可测函数的相容族，问题在于它是否对应一个全局定义的可测函数，即是否存在一个 $\mathscr{A}$-可测的 $g : X \to \mathbb{R}$，使得 $\mu(A \cap \{g \neq$

$g_A\}) = 0$，对每个 $A \in \mathscr{A}^f_\mu$ 都成立。如果这样的 g 存在，我们就称它为相容族 $(g_A)_{A\in\mathscr{A}^f_\mu}$ 的粘合。在我们的情形中，粘合相容族的问题令人想起这样一个事实：对于拓扑空间 X，开集上的连续函数函子是一个层。然而，与连续函数的情形不同，为了全局定义 g，我们必须在定义域 $A \cap A'$ 上作出选择，其中 A，$A' \in \mathscr{A}^f_\mu$，因为 g_A 和 $g_{A'}$ 在这些地方并非处处相等，而只是几乎处处相等。一般而言，我们无法作出一致的选择。

事实证明，注意到是否存在粘合这一问题可以在稍微更一般的情形下提出，是相当有用的，因为它只在涉及其 μ-零测集时才取决于测度 μ。因此，带可忽略集的可测空间 $(X, \mathscr{A}, \mathscr{N})$，简称 MSN，由一个可测空间 $(X, \mathscr{A})$ 和一个 σ-理想 $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{A}$ 组成。给定任意 $\mathrm{E} \subseteq \mathscr{A}$，只需要求当 $E, E' \in \mathrm{E}$ 时 $E \cap E' \cap \{g_E \neq g_{E'}\} \in \mathscr{N}$，即可轻易定义相容族 $(g_E)_{E\in\mathscr{E}}$ 的概念；并且，若对所有 $E \in \mathrm{E}$ 都有 $E \cap \{g \neq g_E\} \in \mathscr{N}$，则称一个 $\mathscr{A}$-可测函数 $g\colon X \to \mathbb{R}$ 是 $(g_E)_{E\in\mathscr{E}}$ 的粘合。随后可以证明，当且仅当每个 $\mathrm{E} \subseteq \mathscr{A}$ 都存在一个 $\mathscr{N}$-本质上确界 $A \in \mathscr{A}$ 时，每个相容族都存在粘合。这意味着

(i) 对每个 $E \in \mathrm{E}$，都有 $E \setminus A \in \mathscr{N}$；
(ii) 对每个 $B \in \mathscr{A}$，若当 $E \in \mathrm{E}$ 时有 $E \setminus B \in \mathscr{N}$，则 $A \setminus B \in \mathscr{N}$。

我们称带可忽略集的可测空间是可局部化的，若它具有这一性质。

在 [10] 中，我们刻画了使得 Υ 为满射的那些测度空间。为陈述这一结果，我们先定义

$$\mathscr{N}_\mu\left[\mathscr{A}^f_\mu\right] = \mathscr{A} \cap \left\{N : \mu(A \cap N) = 0 \text{ for all } A \in \mathscr{A}^f_\mu\right\}.$$

它是一个 σ-理想，其成员很容易让人想称之为局部 μ-零。我们也将其简记为 $\mathscr{N}_{\mu,\,\mathrm{loc}}$。

定理。对于任意测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$，映射 Υ（回顾(1)）为满射，当且仅当带可忽略集的可测空间 $(X, \mathscr{A}, \mathscr{N}_{\mu,\,\mathrm{loc}})$ 是可局部化的。

我们称满足这一性质的测度空间为半局部化测度空间——这里不假设半有限性。在 [10] 中，我们研究它与 [9] 中引入的几乎可分解测度空间这一概念之间的联系，从而将上文简要提及的经典理论推广到非半有限测度空间。若存在一个互不相交族 $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{A}^f_\mu$ 使得，我们称测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 为几乎可分解测度空间。

$$\forall A \in \mathscr{P}(X) : (\forall G \in \mathscr{G} : A \cap G \in \mathscr{A}) \Rightarrow A \in \mathscr{A},$$

and

$$\forall A \in \mathscr{A} : \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(A) = \sum_{G\in\mathscr{G}} \mu(A \cap G).$$

借助 E.J. McShane [22] 的一个想法，以及这样一个事实：在波兰空间上，关于博雷尔正则外测度的可测集等价类数量并不多，我们证明了以下 [10]。

定理。设 X 是一个完备可分度量空间，且 $0 < d < \infty$。对于测度空间 $(X, \mathscr{A}_{\mathscr{H}^d}, \mathrm{H}^d)$，以下条件等价。

(1) 典范映射 Υ 是满射；(2) $(X, \mathscr{A}_{\mathscr{H}^d}, \mathrm{H}^d)$ 是半局部化的；(3) $(X, \mathscr{A}_{\mathscr{H}^d}, \mathrm{H}^d)$ 是几乎可分解的。

现在，让我们从半局部化的概念出发，考察测度空间 $(\mathbb{R}^2, \mathrm{B}(\mathbb{R}^2), \mathrm{H}^1)$。我们知道它不是半局部化的（上文的 (3)），并且曾承诺说明这是富比尼定理的推论。定义垂直截面 $V_s = \{s\} \times \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$，以及水平截面 $H_t = \mathbb{R} \times \{t\}$，$t \in \mathbb{R}$。假设可能存在 $A \in \mathrm{B}(\mathbb{R}^2)$，使其成为族 $(V_s)_{s\in\mathbb{R}}$ 的一个 $\mathscr{N}_{\mathscr{H}^1}\left[\mathrm{B}(\mathbb{R}^2)\,{}^f\mathrm{H}^1\right]$-本质上确界。那么很容易推出

(a) $\mathrm{H}^1(V_s \setminus A) = 0$ 对每个 $s \in \mathbb{R}$ 都成立;
(b) $\mathrm{H}^1(H_t \cap A) = 0$ 对每个 $t \in \mathbb{R}$都成立。

事实上，注意到 V_s 和 H_t 具有 σ-有限的 H^1 测度，(a)就是对上文 (i) 的改述，而 (b) 则由将 $B = A \setminus H_t$ 代入 (ii) 得出。将富比尼定理应用两次可得

$$\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2 \setminus A) = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{H}^1(V_s \setminus A) d\mathscr{L}^1(s) = 0,$$

根据 (a)，以及

$$\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^2 \cap A) = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{H}^1(H_t \cap A) d\mathscr{L}^1(t) = 0,$$

根据 (b)。进而，$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2) = 0$，矛盾。显然，将 $\mathbb{R}^2$ 替换为任何满足 $\mathrm{L}^2(X) > 0$ 的博雷尔集 $X \subseteq \mathbb{R}^2$，同样的论证即可说明 $(X, \mathrm{B}(X), \mathrm{H}^1)$ 不是半局部化的。

有 上述论证不具结论性的两种情形 性:

（α）当 A 不是 L^2-可测时（因为富比尼定理不适用）；

（β）当 $\mathrm{L}^2(X) = 0$时（因为不会导致矛盾）。

关于情形（α），事实上，当我们用较大的 $\mathscr{A}_{\mathscr{H}^1}$ 替换 σ-代数 $\mathrm{B}(\mathbb{R}^2)$ 时，$(\mathbb{R}^2, \mathscr{A}_{\mathscr{H}^1}, \mathrm{H}^1)$ 一致地是半局部化的。这是连续统假设的一个推论，详情见 [10]；事实上，还有一个更一般的结论成立[1]。正如 [9], 中所指出的，然而事实证明，$(\mathbb{R}^2, \mathscr{A}_{\mathscr{H}^1}, \mathrm{H}^1)$ 一致地也可能不是半局部化的。原因如下。假设 $A \in \mathscr{A}_{\mathscr{H}^1}$ 是族 $(V_s)_{s\in\mathbb{R}}$的一个 $\mathscr{N}_{\mathscr{H}^1}\left|\mathscr{A}^f \mathrm{H}^1\right|$-本质上确界。对每个 $s \in \mathbb{R}$，我们定义 $T_s = \mathbb{R} \cap \{t : (s,t) \in V_s \setminus A\}$，因此，根据 (a)，$\mathrm{L}^1(T_s) = 0$。现在，取满足 $\mathrm{L}^1(E) > 0$ 的 $E \subseteq \mathbb{R}$，并使 E 在所有测度非零的集合中基数最小；记这个基数为 $\mathrm{non}(\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1})$。假设存在 $t \in \mathbb{R} \setminus \cup_{s\in E} T_s$。那么，对每个 $s \in E$，$t \notin T_s$，即 $(s,t) \in H_t \cap A$。因此，根据 (b)，$\mathrm{L}^1(E) = 0$，矛盾。当然，只有当 $\mathbb{R} \neq \cup_{s\in E} T_s$时我们才能得到这个矛盾，这取决于 E 有多大。我们将 $\mathrm{cov}(\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1})$ 记为以 L^1-零测集覆盖 $\mathbb{R}$ 所需的最小基数。因此，若 $\mathrm{card}\, E = \mathrm{non}(\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1}) < \mathrm{cov}(\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1})$，上述论证便成立。事实证明，这种基数的严格不等式（出现在所谓的 Cichoń图中）与 ZFC 相容， [4, 第 7] 章或 [17, 552H 和 552G]。下文将把这一思路称为“垂直—水平方法”。此论证出自 [9]; 我是从 D.H. Fremlin 那里学到的。

关于上面的情形 (β)，我们再次注意到，连续统假设意味着对于任意紧集 $X \subseteq \mathbb{R}^2$，无论其是否具有零 L^2 测度，$(X, \mathscr{A}_{\mathscr{H}^1}, \mathrm{H}^1)$ 都是半局部化的。因此，问题在于：在 ZFC 中，$(X, \mathscr{A}_{\mathscr{H}^1}, \mathrm{H}^1)$ 是否是半局部化的，或者是否一致地不是半局部化的。后一种情况发生在“垂直—水平方法”从 $X = \mathbb{R}^2$ 推广到 X时。例如，它显然可以推广到 $X = [a,b] \times [c,d]$，但如果 $\mathrm{L}^2(X) = 0$，就不容易立刻看出该如何继续。因此，我们应当说明如何将上述“垂直—水平方法”调整到用某个合适的子集 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ 替代 $\mathbb{R}^2$ 的情形。该方法表明，若 $\mathrm{non}(\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1}) < \mathrm{cov}(\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1})$，则 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{A}_{\mathscr{H}^1}, \mathrm{H}^1)$ 不是半局部化的。首先，值得注意的是，若 $(S, \mathrm{B}(S), \sigma)$ 是一个概率空间，S 是波兰空间，且 σ 无原子，则 $\mathrm{non}(\mathscr{N}_{\bar{\sigma}}) = \mathrm{non}(\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1})$ 且 $\mathrm{cov}(\mathscr{N}_{\bar{\sigma}}) = \mathrm{cov}(\mathscr{N}_{\mathscr{L}^1})$。这是库拉托夫斯基同构定理（定理 3.4） [25, 23] 的推论。仔细检查论证可得如下结论，见 [10]。

定理。设 $0 < d < 1$，并设 $C_d \subseteq [0,1]$ 为豪斯多夫维数为 $0 < d < 1$的标准自相似康托尔集。测度空间 $(C_d \times C_d, \mathscr{A}_{\mathscr{H}^d}, \mathrm{H}^d)$ 是否为半局部化，在ZFC中是不可判定的。

[1]我是从 [11, 2.5.10] 中了解到这一点的。遗憾的是，那里的讲解无法突出选择某个特定 σ-代数所起的作用。

顺便一提，通过在带可忽略集的可测空间范畴中构造某个同构，我们还能够推导出以下结论。

定理。 在 ZFC 中，无法判定测度空间 $\left([0,1], \mathscr{A}_{\mathscr{H}^{1/2}}, \underline{\mathrm{H}}^{\frac{1}{2}}\right)$ 是否半局部化。

这里，指数 1/2 反映了论证的性质：我们将空间 X 视为某种乘积，在其中，同样大小的“垂直”集 V_s 和“水平”集 H_t 是有意义的。注意，集合 $X = C_d \times C_d$ 是纯粹的 $(\mathrm{H}^1, 1)$-不可整流集。接下来，我们试图将“垂直—水平方法”应用于一个 L^2-可忽略紧集 $X \subseteq \mathbb{R}^2$，该集合并非纯粹的 $(\mathrm{H}^1, 1)$-不可整流集，并证明 $(X, \mathscr{A}_{\mathscr{H}^1}, \mathrm{H}^1)$ 不是半局部化的。我们选择尽可能小的 X，即豪斯多夫维数为 1，例如 $X = C \times [0,1]$，其中 $C \subseteq [0,1]$ 是豪斯多夫维数为 0 的康托尔集。当然，显然可以选择$V_s = \{s\} \times [0,1], s \in C$ 作为垂直集；然而，选择 $H_t = C \times \{t\}, t \in [0,1]$ 毫无用处，因为 $\mathrm{H}^1(H_t) = 0$，因此，运用“垂直—水平方法”时不会产生矛盾。我们转而采用以下方法来定义 H_t。令 μ 为 C 上的一个弥散概率测度，并令 $f(t) = \mu([0,t]), t \in [0,1]$ 为其分布函数（这是与我们的零维集合 C相对应的魔鬼阶梯的一个版本）。考虑函数 $\frac{1}{2}f$ 的图像 G；因此 G 是一条可整流曲线，并且与集合 X 的交集并非 H^1 -零测。然后我们定义 $H_t = G + t.e_2, t \in [0, 1/2]$,, 其中 $e_2 = (0,1)$。事实证明，这些集合将成功发挥水平集的作用。我们得到以下定理 [10]。

定理。 假设

(1) $C \subseteq [0,1]$ 是一个豪斯多夫维数为 0 的康托尔集；

(2) $X = C \times [0,1]$; (3) $\mathscr{A}$ 是一个 σ-代数，且 $\mathrm{B}(X) \subseteq \mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$; (4) $\mathscr{N} = \mathscr{N}_{\mathscr{H}^1}$ 或 $\mathscr{N} = \mathscr{N}_{pu}$。

由此可知，带可忽略集的可测空间$(X, \mathscr{A}, \mathscr{N})$ 在一致性意义下不可局部化。

这里， $\mathscr{N}_{pu}$ 是由 $\mathbb{R}^2$ 的那些子集 S 组成的 σ-理想，这些子集都是纯粹的 $(\mathrm{H}^1, 1)$-不可整流集；即 对每条 Lipschitz（或者说，对此而言， C^1）曲线 $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$， $\mathrm{H}^1(S \cap \Gamma) = 0$。

4. 带可忽略集的可测空间

自然地，我们希望为任意测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 以一种普适的方式构造一个改进版本，理想情况下，该版本满足拉东-尼科迪姆定理。根据上一节，这相当于使其成为半有限且半局部化的。稍微修改测度 μ 并保持底层可测空间 $(X, \mathscr{A})$ 不变，从而使其成为半有限，并不困难。具体而言，令$\mu_{\mathrm{sf}}(A) = \sup\{\mu(A \cap F) : F \in \mathscr{A}^f\}$，其中 $A \in \mathscr{A}$，可以验证 $(X, \mathscr{A}, \mu_{\mathrm{sf}})$ 是半有限的，且 $\mathscr{N}_{\mu_{\mathrm{sf}}} = \mathscr{N}_{\mu,\mathrm{loc}}$。然而，要以一种典范的方式修改 $(X, \mathscr{A}, \mu)$，使得 Υ 成为满射，似乎更为棘手。我们可以试着巧妙地“添加可测集”，以构造一个可局部化 MSN $(X, \hat{}\mathscr{A}, \hat{}\mathscr{N}_{\hat{\mu}})$，只添加必要的那些集合；这样便得到 $(X, \mathscr{A}, \mathscr{N}_{\mu})$ 的一个“局部化版本”。遗憾的是，在 ZFC 中，只要“坚持基空间 X 不变”，这一做法并非总能实现，上一节陈述的最后一个定理便说明了这一点。

因此，可能还需要向基空间 X 添加点。对于一般的测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$，在尝试定义相容族 $(f_F)_{F \in \mathscr{A}^f}$ 的粘合时，我们可以大致了解需要做些什么。事实上，每个 $x \in X$ 都可能属于多个 $F \in \mathscr{A}^f$，因此需要考虑纤维丛 $\{(x, F) : x \in F \in \mathscr{A}^f\}$ 的适当商。

我们的任务是为 MSN 定义一种一般性的“局部化”概念，并在某些情况下证明其存在性。这类似于度量空间的“完备化”以及

豪斯多夫拓扑空间的“紧化”。这两种情况都可以通过各种方式“手工”描述，但它们在相关范畴中仅在同构意义下存在；而在每种情况下，只添加“所需的尽可能少的元素”这一事实，则可以方便地用泛性质来表达。由于 MSN 的“局部化”定义也将涉及泛性质，因此确定哪一种范畴适用于我们的目的至关重要。由于这会带来意想不到的惊喜，我们将详细描述其中的几个步骤。

第一个范畴 MSN 的对象是饱和 MSN $(X, \mathscr{A}, \mathscr{N})$；所谓饱和，是指对每个 N，$N' \subseteq X$，若 $N \subseteq N'$ 且 $N' \in \mathscr{N}$，则 $N \in \mathscr{N}$。这与完备测度空间的概念类似。为定义两个对象 $(X, \mathscr{A}, \mathscr{N})$ 和 $(Y, \mathscr{B}, \mathscr{M})$ 之间的态射，我们称映射 $f\colon X \to Y$ 是 $[(\mathscr{A}, \mathscr{N}), (\mathscr{B}, \mathscr{M})]$-可测的，若对每个 $B \in \mathscr{B}$ 都有 $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$，且对每个 $M \in \mathscr{M}$ 都有 $f^{-1}(M) \in \mathscr{N}$。例如，若 X 是波兰空间，且 μ 是定义在 X 上的无原子概率测度，则存在一个（根据库拉托夫斯基同构定理）博雷尔同构 $f\colon X \to [0,1]$，使得 $f_{\#}\mu = \mathrm{L}^1,$，其中 L^1 是勒贝格测度，因此 f 是$[(\mathscr{B}(X), \mathscr{N}_\mu), (\mathscr{B}([0,1]), \mathscr{N}_{\mathscr{L}^1})]$-可测的。对于这类可测映射 $f, f'\colon X \to Y$，我们定义一个等价关系：当且仅当 $\{f \neq f'\} \in \mathscr{N}$ 时，$f \sim f'$。范畴 MSN 中，对象 $(X, \mathscr{A}, \mathscr{N})$ 和 $(Y, \mathscr{B}, \mathscr{M})$ 之间的态射，是 $[(\mathscr{A}, \mathscr{N}), (\mathscr{B}, \mathscr{M})]$-可测映射的等价类。此时，我们需要假设 $(X, \mathscr{A}, \mathscr{N})$ 关于几乎处处相等是饱和的，才能使该关系具有传递性。在此假设下，可测映射的复合也与 $\sim$ 相容。

令 LOC 为 MSN 的全子范畴，其对象为可局部化 MSN。我们可能倾向于将一个饱和 MSN $(X, \mathscr{A}, \mathscr{N})$ 的局部化定义为它沿遗忘函子 $\mathrm{Forget} : \mathrm{LOC} \to \mathrm{MSN}$ 的余反射（如果存在），而一般情形下的存在性问题便转化为 Forget 是否存在右伴随的问题。具体而言，我们可能希望说，一对 $[(\hat{X}, \hat{\mathscr{A}}, \hat{\mathscr{N}}), \mathrm{p}],$，其中 $(\hat{X}, \hat{\mathscr{A}}, \hat{\mathscr{N}})$ 是饱和可局部化 MSN，且 p 是态射 $\hat{X} \to X$，当且仅当满足如下泛性质时，是 $(X, \mathscr{A}, \mathscr{N})$ 的一个局部化。对于每一对 $[(Y, \mathrm{B}, \mathrm{M}), \mathrm{q}],$，其中 $(Y, \mathrm{B}, \mathrm{M})$ 是饱和可局部化 MSN，且 q 是态射 $Y \to X$，存在唯一的态射 $\mathrm{r}\colon Y \to \hat{X}$，使得 $\mathrm{q} = \mathrm{p} \circ \mathrm{r}$。

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathscr{B}, \mathscr{M}) & \overset{\exists! \mathbf{r}}{\dashrightarrow} & (\hat{X}, \hat{\mathscr{A}}, \hat{\mathscr{N}}) \\ & {\scriptstyle \mathbf{q}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathbf{p}} & \\ & (X, \mathscr{A}, \mathscr{N}) & \end{array} \tag{$\triangledown$}$$

然而，我们现在将说明，迄今定义的态射概念还不是我们所需要的恰当概念。考虑 MSN $(X, \mathscr{A}, \{\emptyset\})$，其中 $X = \mathbb{R}$ 和 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{R}$ 的勒贝格可测子集的 σ-代数。我们注意到，$(X, \mathscr{A}, \{\emptyset\})$ 的局部化唯一合理的选择是 $[(X, \mathscr{P}(X), \{\emptyset\}), \mathrm{p}]$，其中 p 由恒等映射 id_X 诱导。假设情况确实如此。在上面的图表中，我们考虑 $(Y, \mathrm{B}, \mathrm{M}) = (X, \mathscr{A}, \mathscr{N}_{\mathscr{L}^1})$，以及由恒等映射诱导的 q。注意，这确实是一个可局部化 MSN，因为它与一个 σ-有限测度空间相关联（这是众所周知的事实，例如可在 [10] 和 [7] 中找到）。因此，将存在一个 MSN 中的态射 r，使得 $\mathrm{p} \circ \mathrm{r} = \mathrm{q}$。取 $r \in \mathrm{r}$，这意味着 $X \cap \{x : r(x) \neq x\}$ 是勒贝格零测的。r 的可测性将进一步意味着，对于每个 $S \in \mathscr{P}(X)$，都有 $r^{-1}(S) \in \mathscr{A}$，这与 $\mathbb{R}$ 的非勒贝格可测子集的存在相矛盾。

上面的例子的问题在于，对象 $(X, \mathscr{A}, \mathscr{N}_{\mathscr{L}^1})$ 和 $(X, \mathscr{A}, \{\emptyset\})$ 不应进行比较，换言之，$\mathbf{q}$ 不应是一个合法的态射。我们称范畴 MSN 中的态射 $\mathbf{f}\colon (X, \mathscr{A}, \mathscr{N}) \to (Y, \mathrm{B}, \mathrm{M})$ 是**保上确界**的，如果对于某个（因而对于每个）$f \in \mathbf{f}$，以下条件成立：若 $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{B}$ 存在一个 M-本质上确界 $S \in \mathrm{B}$，则 $f^{-1}(S)$ 是 $\mathscr{N}$-本质上确界 $f^{-1}(\mathrm{F})$。容易看出，在态射的定义中加入这一条件，就能排除上一段所考虑的$\mathbf{q}$。我们将范畴 $\mathrm{MSN}^{\mathrm{sp}}$ 定义为其对象是

饱和 MSN，态射则是 MSN 中保上确界的态射。类似地，我们定义 $\mathrm{LOC}^{\mathrm{sp}}$。现在，我们定义饱和 MSN 的**局部化版本**（若存在），它具有（▽）中所示的类似泛性质，不过现在要求所有态射都属于 $\mathrm{MSN}^{\mathrm{sp}}$，即保上确界。换言之，它是 $\mathrm{MSN}^{\mathrm{sp}}$ 中一个对象沿 $\mathrm{Forget}\colon \mathrm{LOC}_{\mathrm{sp}} \to \mathrm{MSN}^{\mathrm{sp}}$ 的余反射。不幸的是，这还不是完全合适的框架。事实上，我们在 [7] 中证明，若 X 不可数，且 $\mathscr{C}(X)$ 是 X 上的可数—余可数 σ-代数，那么 $([,\ \mathscr{P}(X),\ \{\emptyset\}),\ \iota]$（其中 ι 由 id_X 诱导）并非 $(X,\ \mathscr{C}(X),\ \{\emptyset\})$ 的局部化版本。这促使我们引入一个新的范畴。

在一个 MSN $(X,\ \mathscr{A},\ \mathscr{N})$ 中，若一个集合族 $\mathrm{E} \subseteq \mathscr{A}$ 以 X 作为其 $\mathscr{N}$-本质上确界，则称它是 $\mathscr{N}$-**生成的**。若 MSN 中的一个对象 $(X,\ \mathscr{A},\ \mathscr{N})$ 满足以下条件，则称其为**局部决定的**：对于每个 $\mathscr{N}$-生成的集合族 $\mathrm{E} \subseteq \mathscr{A}$，

$$\forall A \subseteq X : \left[\forall E \in \mathscr{C} : A \cap E \in \mathscr{A}\right] \Rightarrow A \in \mathscr{A}.$$

若 MSN 的一个对象既可局部化又局部决定，则称其为**lld**，并将相应的全子范畴记作 $\mathrm{LOC}^{\mathrm{sp}}$ 的 $\mathrm{LLD}^{\mathrm{sp}}$。现在，我们将 $\mathrm{MSN}^{\mathrm{sp}}$ 中一个对象的**lld 版本**定义为它沿 $\mathrm{Forget} : \mathrm{LLD}_{\mathrm{sp}} \to \mathrm{MSN}^{\mathrm{sp}}$ 的余反射（若存在），也就是说，它满足 (▽) 中所示的相应泛性质，其中 Y 和 $\hat{}X$ 均为 lld，且态射均保上确界。至少在最简单的情形下，这一定义是适用的：若 $(X,\ \mathscr{A},\ \{\emptyset\})$ 满足 $\mathscr{A}$ 包含所有单点集，则它有一个 lld 版本 $[(X,\ \mathscr{P}(X),\ \{\emptyset\}),\ \iota]$。

我们现在的总体问题变成了：$\mathrm{Forget} : \mathrm{LLD}_{\mathrm{sp}} \to \mathrm{MSN}^{\mathrm{sp}}$ 是否存在右伴随。Freyd伴随函子定理 [5, 3.3.3] 或许能派上用场，不过我们不知道它是否适用，主要是因为我们不知道 $\mathrm{MSN}^{\mathrm{sp}}$ 中是否存在余等化子（商）。我们在表4中汇总了关于我们所引入的三个范畴中的极限和余极限的已知信息。

	$\mathrm{MSN}_{\mathrm{sp}}$	$\mathrm{LOC}_{\mathrm{sp}}$	$\mathrm{LLD}_{\mathrm{sp}}$
等化子	当 $\{f = g\}$ 可测时存在 (C)	**?**	存在
积	（可数个）存在	**?**	**?**
余等化子	**?**	**?**	**?**
余积	存在（D）	存在	存在（D）

表 1. MSN 三个范畴中的极限和余极限。

为了证明 lld 版本的某些部分存在性结果，我们引入中间概念 **cccc**饱和 MSN，它是余积（在 $\mathrm{MSN}^{\mathrm{sp}}$中）的 ccc 饱和 MSN 的简称。容易看出，cccc MSN 是 lld 的。$\mathrm{MSN}^{\mathrm{sp}}$ 中对象的**cccc 版本**也通过图表（▽）中的泛性质来定义，其中使用上确界保持态射。我们的主要结果涉及**局部 ccc** MSN，即也就是说，满足 $\mathrm{E}X, \mathscr{A}, \mathscr{N}$，且 $\mathrm{E}_{\mathrm{ccc}} = \mathscr{A} \cap \{Z\colon$ 子 MSN（$Z, \mathscr{A}_Z, \mathscr{N}_Z$）是 ccc$\}$ 为 $\mathscr{N}$-生成的饱和 MSN。完备半有限测度空间（$X, \mathscr{A}, \mu$）显然是局部 ccc 的，因为 $\mathscr{A}^f$是 $\mathscr{N}_\mu$-生成的。

定理。 设$(X, \mathscr{A}, \mathscr{N})$ 是一个饱和的局部 *ccc MSN*。以下结论成立。

(1) $(X, \mathscr{A}, \mathscr{N})$ 存在一个 *cccc* 版本。(2) 此外，若$\mathrm{E}_{\mathrm{ccc}}$ 包含一个 $\mathscr{N}$-生成子集E，使得基数$\mathrm{E} \leqslant \mathfrak{c}$，并且对每个$(Z, \mathscr{A}_Z)$，其均为可数分离的，其中 $Z \in \mathrm{E}$，则$(X, \mathscr{A}, \mathscr{N})$ 存在一个 *lld* 版本，且该版本也是其 *cccc* 版本。

称可测空间 $(Z,\ \mathscr{A}_Z)$ 可数分离，是指 $\mathscr{A}_Z$包含一个可数子集族，能够分离 Z中的点。cccc 版本 $(\hat{}X,\ \hat{}\mathscr{A},\ \hat{}\mathscr{N})$ 是通过余积 $\coprod_{Z\in\mathrm{E}}(Z,\ \mathscr{A}_Z,\ \mathscr{N}_Z)$ 得到的，其中 E 是一个 $\mathscr{N}$-生成的几乎不交

Eccc 的细化，其存在性由佐恩引理保证。为了证明在 (2) 的额外假设下，这实际上也是 lld 版本，我们需要为图表 (▽) 中与 lld 对 [(Y B, M), **q**] 相关的态射 **r** 构造一个适当的映射。它可通过粘合 $(q_Z)_{Z\in\mathscr{E}}$ 得到，其中 $q_Z\colon q^{-1}(Z) \to \hat{}X$ 是显然的映射。由于 E 几乎不交，$(q_Z)_{Z\in\mathrm{E}}$ 是相容的；又由于图表 (▽) 中的 (Y B, M) 可局部化，粘合的唯一障碍是 $\hat{}X$ 不 $\mathbb{R}$。尽管如此，$(\hat{}X, \hat{}\mathscr{A}) = \coprod_{Z\in\mathrm{E}}(Z, \mathscr{A}_Z)$ 本身是可数分离的，因为 cardE $\leqslant$ c，因此 (Y B, M) 的局部确定性，以及 q^{-1}(E) 是 M-生成的这一事实（因为 E 是 $\mathscr{N}$-生成的，且 q 保上确界），共同保证了一个粘合 r。

现在我们说明如何以规范的方式，将任意测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 与一个可分解测度空间 [12, 211E] 关联起来（拉东-尼科迪姆定理适用于可分解测度空间）。首先，我们回顾一下，无需改变基空间 X，即可使测度空间完备且半有限。在这种情况下，$\mathscr{A}^f$ 是$\mathscr{N}_\mu$-生成的，并由此证明饱和 MSN $(X, \mathscr{A}, \mathscr{N}_\mu)$ 是局部 ccc。根据上述定理，它存在一个 cccc 版本 [($\hat{}X, \hat{}\mathscr{A}, \hat{}\mathscr{N}$), **p**]。

定理。设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 是一个完备半有限测度空间，且 $[(\hat{}X, \hat{}\mathscr{A}, \hat{}\mathscr{N}), p]$ 是其对应的 *cccc* 版本。设 $p \in p$。存在唯一的（且与 $\hat{}$ 的选择无关）测度 $\hat{}\mu$，定义在 $\mathscr{A}$ 上，使得 $p_{\#}\hat{}\mu = \mu$ 且 $\mathscr{N}_{\hat{\mu}} = \mathscr{N}$。此外，$(X\hat{},\mathscr{A}\hat{},\mu\hat{})$ 是一个可分解测度空间，并且巴拿赫空间 $L_1(X, \mathscr{A}, \mathscr{N})$ 与 $L_1(\hat{}X, \hat{}\mathscr{A}, \hat{}\mu)$ 等距同构。

我们称（ $\hat{X}, \hat{\mathscr{A}}, \hat{}\mu$）是**Radon-Nikodým 化**的（$X$， $\mathscr{A}$， μ）。

5. 积分几何测度

当然，上一节中构造 $\hat{}X$ 的一般过程是非构造性的，因为它需要借助选择公理，将 $\mathscr{A}^f$ 转化为一个几乎不交的生成族。因此，我们在此简要探讨一种特殊情况：在这种情况下，我们可以完全通过具体操作，明确地将 $\hat{}X$ 描述为一个纤维丛的商。

我们从测度空间 $(\Omega, \mathrm{B}(\Omega), \mathrm{I}^k_\infty)$ 开始，其中 $1 \leqslant k \leqslant m-1$ 是整数，而 I^k_∞ 是 [11, 2.10.5(1)] 和 [21, 5.14]中所述的积分几何测度。注意，它不是半有限的， [11, 3.3.20]。因此，我们用其完备半有限版本 $(\Omega, \widetilde{\mathrm{B}(\Omega)}, \tilde{\mathrm{I}}^k_\infty)$ 替代它。令 E 为 k维 $M \subseteq \Omega$ 类为 C^1 且满足 $\phi_M = \mathrm{H}^k \llcorner M$ 局部有限的子流形的集合。由贝西科维奇结构定理 [11, 3.3.14] 可知，E 是 $\mathscr{N}$-I^k_∞-生成的。现在，对每个 $x \in \Omega$，我们定义 $\mathrm{E}_x = \mathrm{E} \cap \{M\colon x \in M\}$，并在 E_x 上定义如下等价关系。我们规定，当且仅当 $M \sim_x M'$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\mathscr{H}^k(M \cap M' \cap \mathbf{B}(x, r))}{\boldsymbol{\alpha}(k) r^k} = 1.$$

令 $[M]_x$ 表示 $M \in \mathrm{E}_x$ 的等价类（我们可以将其视为 k-可求长集在 x 处的芽），我们在 [6]中证明，cccc、lld 和 $\widetilde{\ }$可分解版本的 MSN（Ω, B(Ω), $\mathscr{N}$-I^k_∞）的底集可以取为

$$\hat{\Omega} = \{(x, [M]_x) : x \in \Omega \text{ and } M \in \mathscr{E}_x\}.$$

由此得到 $\mathbf{L}_1(\Omega, \widetilde{\mathrm{B}(\Omega)}, \tilde{\mathrm{I}}^k_\infty)$ 的对偶 $\mathbf{L}_\infty(\hat{}X, \hat{}\mathscr{A}, \hat{}\mathscr{N})$ 的显式描述。特别地，在研究 **SBV**(Ω) 的对偶时，我们关注的情形 $k = n-1$ 满足：

定理。映射 $\Upsilon\colon \mathbf{L}_\infty(\hat{}\Omega, \hat{}\mathscr{A}, \hat{}\mathrm{I}^{n-1}_\infty) \to \mathbf{L}_1(\Omega, \widetilde{\mathrm{B}(\Omega)}, \tilde{\mathrm{I}}^{n-1}_\infty)^*$ 定义为

$$\Upsilon(\mathbf{g})(\mathbf{f}) = \int_{\hat{\Omega}} g(f \circ p)\, d\hat{\mathscr{F}}^{n-1}$$

是一个等距同构（其中 p 与上一节最后一个定理中的情形相同）。

该方法依赖于关于 k-可求长博雷尔集的“密度为 1”定理，以及在此情形下零测集都是纯粹 k-不可求长集这一事实。当然，这番努力的主要意义在于，上述商纤维丛 Ω 是一种“局部化”：作为我们起初所讨论的积分几何测度空间的可分解版本，它“尽可能小”。

6. 特殊有界变差的对偶

$\hat{}$ 借助上一节所述的商纤维丛 Ω，现在我们可以给出特殊有界变差空间 $\mathbf{SBV}(\Omega)$ 的对偶元素的“最优”积分表示，见 [7]。用积分几何测度替代豪斯多夫测度，是因为我们不知道如何显式描述豪斯多夫测度的拉东–尼科迪姆化（问题在于缺少“密度为 1”的定理）。之所以可以进行这种替换，是因为若 u 具有特殊有界变差，则 $\|Du\| << \mathcal{I}^{n-1}_\infty$。

定理。设 $\varphi\colon SBV(\Omega) \to \mathbb{R}$ 是一个连续线性泛函。存在场 $f \in L_\infty(\Omega, B(\Omega), L^n)$、$g \in L_\infty(\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{A}}, \hat{\mathcal{I}}^{n-1}_\infty; \mathbb{R}^n)$ 以及 $h \in L_\infty(\Omega, B(\Omega), L^n; \mathbb{R}^n)$，使得

$$\varphi(u) = \int_\Omega f u \, d\mathscr{L}^n + \int_{\hat{\Omega}} g \cdot (j_u \circ p) d\hat{\mathcal{J}}^{n-1}_\infty + \int_\Omega h \cdot \nabla u \, d\mathscr{L}^n$$

其中，Du 的分布梯度 u 分解为其勒贝格部分 $\mathrm{L}^n \quad \nabla u$ 和跳跃部分 $D^j u = j_u \, \mathrm{H}^{n-1} \quad S_u$。此外，可以选择 g，使得 $g(x, [E]_x)$ 对于 $\mathcal{I}^{n-1}_\infty$-几乎处处的 $(x, [E]_x) \in \hat{\Omega}$，都垂直于 $\mathrm{Tan}^{n-1}([E]_x)$。

7. 致谢

我要感谢 David H. Fremlin，不仅感谢他那部启发人心的专著《测度论》[13, 12, 14, 15, 16, 17], ，也感谢他与我进行的许多有益交谈。我也很高兴记下与 Francis Borceux 就范畴论进行的有益交流。感谢 ZhiQiang Wang 在 [10] 仍为手稿时认真审阅，并提出风趣的评论。最后但同样重要的是，我很欣喜地回顾与 Philippe Bouafia 长期而富有成果的合作。

参考文献

1. **1984 年美国数学会夏季研究所参与者提出的几何测度论及其应用中的一些公开问题**，《几何测度论与变分法》（加利福尼亚州阿卡塔，1984）（J. E. Brothers 编），纯数学研讨会论文集，第 44 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1986 年，第 441 840292 2 464– 页。MR 。F. J. Almgren, Jr.，**质量连续余链是微分形式**，《美国数学会会刊》**16** (1965)，1291–1294。MR 205208 3. L. Ambrosio、N. Fusco 和 D. Pallara，**有界变差函数与自由间断问题**，牛津数学专著丛书，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000。MR 1857292 4. T. Bartoszyński 和 H. Judah，**集合论**，A K Peters, Ltd.，马萨诸塞州韦尔斯利，1995，《实直线的结构》。MR 1350295 5. F. Borceux，《**范畴代数手册》第 1 卷**，《数学及其应用百科全书》，第 50 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994，1291599 6 基础范畴论。MR 。Ph. Bouafia 和 Th. De Pauw，**任意测度空间的 Radon-Nikodým 化**，《数学摘录》**38** (2023)，第 2 期，139–203。7. ，**特殊有界变差空间对偶中元素的表示公式**，《比萨高等师范学校科学年刊》(5) **XXV**(2024)，483–493。8. R. O. Davies，**解析集中有限测度的子集**，《荷兰皇家科学院学报 A 辑》， **55** =《数学研究》**14**0053184 9 1952 488 489**47**( )，–。MR 。Th. De Pauw，**关于特殊有界变差空间的对偶**，《印第安纳大学数学杂志》(1998)，第 1 期，99–121。MR 1631541 10. Th. De Pauw，**不可判定半局部化度量测度空间**，《当代通讯数学》**26** (2024)，第 4 期，145–168。

11. H. Federer，**几何测度论**，数学科学基础丛书，第 153 卷，Springer-Verlag New York Inc.，纽约，1969。MR 0257325 (41 #1976) 12. D. H. Fremlin，《**测度论**》**第 2 卷**，Torres Fremlin，科尔切斯特，2003，广泛基础，2001 年原版的勘误第二次印刷。MR 2462280 13**1**，《**测度论**》**第** Torres Fremlin，科尔切斯特，2004，不可约最小值，2000 年原版的勘误第三次印刷。MR 2462519 14**3**，《**测度论**》**第** Torres Fremlin，科尔切斯特，2004，测度代数，2002 年原版的勘误第二次印刷。MR 2459668 15**4**，《**测度论**》**第** Torres Fremlin，科尔切斯特，2006，拓扑测度空间。第一、二部分，2003 年原版的勘误第二次印刷。MR 2462372 16**5**原版。MR 。，《**测度论**》**第 5 卷**。**集合论测度论**。**第一部分**，Torres Fremlin，科尔切斯特，2015，2008 年版的勘误重印。MR 3723040 17**5**原版。MR 。，《**测度论**》**第 5 卷**。**集合论测度论**。**第二部分**，Torres Fremlin，科尔切斯特，2015，2008 年版的勘误重印。MR 3723041 18 原版。MR 。N. Fusco 和 D. Spector，**关于 BV 对偶的积分刻画的一则说明**，《应用数学与分析杂志》**457** (2018)，第 2 期，1370–1375。MR 3705358 19. E. Grzegorek，**关于 Darst 和 Sierpiński 有关普遍测度零集与普遍可测集的一些结果**，《波兰科学院通报·数学科学辑》**29**(1981)，第 1–2 期，1–5。MR 634120 20. J. D. Howroyd，**关于维数及有限正豪斯多夫测度集合的存在性**，《伦敦数学会会刊》(3)**70** (1995)，第 3 期，581–604。MR 1317515 21. P. Mattila，**欧几里得空间中的集合与测度几何**，《剑桥高等数学研究》，第 44 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1995，分形与可整流性。MR 1333890 (96h:28006) 22. E. J. McShane，**测度族与算子代数的表示**，《美国数学会汇刊》**102**(1962)，328–345。MR 137002 23. N. G. Meyers 和 W. P. Ziemer，**BV 函数的庞加莱型与维尔廷格型积分不等式**，《美国数学杂志》**99**(1977)，第 6 期，1345–1360。MR 507433 24. N. C. Phuc 和 M. Torres，**对偶中的有符号测度刻画 BV 及相关的等距同构**，《比萨高等师范学校科学年刊》(5 3676052 25**17** 2017 1，385 417 180，)( )，第 – 期。MR 。S. M. Srivastava，**博雷尔集课程**，数学研究生教材，Springer-Verlag，纽约，1998。MR 1619545 (99d:04002) 26. O. Zindulka，**普遍测度零、大豪斯多夫维数与近似利普希茨映射**，《数学基础》**218**(2012)，第 2 期，95–119。MR 2957686

浙江省杭州市西湖区云谷路600号，邮编310030，中国西湖大学理论科学研究院电子邮箱地址：thierry.depauw@westlake.edu.cn