粗糙界面的广义斯涅尔定律

Christophe Gomez[1] 和 Knut Sølna[2]

[1]艾克斯-马赛大学、法国国家科学研究中心、I2M，法国马赛[2]加州大学欧文分校数学系，美国加利福尼亚州欧文

arXiv:2603.17488v1 [math-ph] 18 Mar 2026

摘要

本文研究具有一般混合性质的快速振荡粗糙界面对波的反射与透射问题。我们采用基于尺度分离、对应于近轴（抛物型）尺度区间的渐近分析，精确刻画反射场和透射场中的镜面分量与散斑（扩散）分量。本文考虑临界标度的界面，即界面起伏的振幅与中心波长处于同一数量级。当界面起伏的相关长度与光束宽度处于同一数量级时，反射波和透射波中都会出现随机镜面分量，而不会观察到散斑分量。等价地说，反射场和透射场基本局限于由镜面分量形成的锥体（镜面锥）内，其方向由经典反射与折射的斯涅尔定律决定。当相关长度小于光束宽度时，则进入镜面均匀化区间。在这种情况下，粗糙界面可由等效平坦界面近似，从而产生确定性的镜面反射锥和透射锥。然而，还会出现包含镜面锥的更宽锥体；在这些锥体内，波场形成散斑图样（散斑锥），其总能量处于首阶。我们给出这些散斑图样的二点相关函数，并建立一种中心极限定理型结果，表明它们可以建模为高斯随机场。这些结果有助于确定反射与透射的广义斯涅尔定律，该定律取决于界面处的有效散射算子。

K关键词。 波传播、粗糙表面、随机介质、波散斑、斯涅尔定律 s

目录

1 结果概述与广义斯涅尔定律 4 2 物理模型 7 3 未扰动界面上的反射与透射 103.1 界面处的反射与透射.11 3.2 反射波.12 3.3 透射波.14**4 随机界面上的反射波与透射波 15 5 情形** $\gamma = 1/2$ **16 6 情形** $\gamma > 1/2$**：均匀化镜面反射与透射分量 19 7 情形** $\gamma > 1/2$**：非镜面反射贡献的非相干波动 21**7.1 相关函数和强度函数.23 7.2 非相干波动的统计特性.26**8 情形** $\gamma > 1/2$**：非镜面透射贡献的非相干波动 28**8.1 相关函数和强度.29 8.2 非相干波动的统计特性.30**9 命题 7.1 和 7.2 的证明 32**9.1 命题 7.1 的证明.32 9.2 命题 7.2 的证明.34

10 定理 7.1 的证明 **35**

A 跳跃条件与连续性关系的证明 39A.1 源位置平面上的跳跃条件.39 A.2 随机扰动界面上的连续性关系.39

B 引理 2.1 的证明
40 C 引理 4.1 的证明

41

引言

粗糙表面引起的波散射是物理学和工程学若干分支的核心。理解这些现象对于众多领域至关重要，包括光学、固体物理学、遥感、雷达技术、环境监测、通信和无损检测 [8, 14, 27, 33, 36]。波入射到粗糙表面时，会因表面轮廓的不规则而发生散射，导致其方向、振幅和相位发生变化。波与粗糙表面之间的相互作用会产生反射、透射和衍射的复杂交织。因此，研究粗糙表面引起的波散射，旨在揭示支配这些相互作用的复杂机制，从而预测和分析实际情形中的波行为。例如，对于雷达系统，粗糙表面电磁波散射理论对于描述陆地或海面的粗糙度影响至关重要。在光学领域，描述具有角度相关反射率的材料散射的理论发挥着重要作用。对于声波，海洋声学层析成像或测温具有重要应用，其中海床和海面粗糙度至关重要；此外，使用超声波进行无损检测也有重要应用。

物理学文献中有许多研究采用微扰方法考察随机界面问题，其中界面变化较小时，透射波场和反射波场仅产生相对较小的修正。在本文中，我们将界面起伏建模为一个随机场，从而能够描述透射场和反射场，即使随机界面的存在已在首阶上对它们产生了改变。涉及从粗糙界面反射或透射穿过粗糙界面的光束传播，需要采用专门的技术，这些技术与体传播所采用的技术略有不同 [18]。

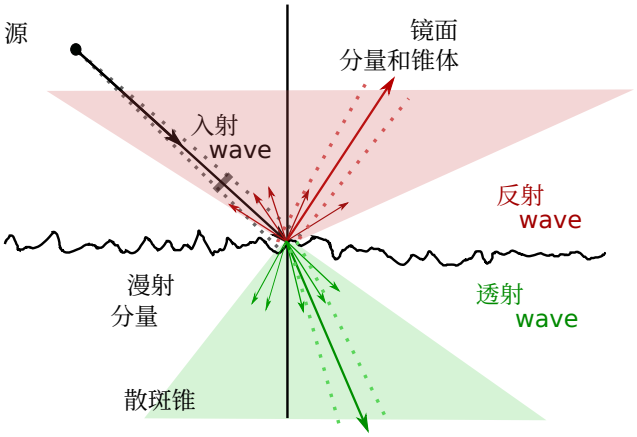

图1：基本物理装置示意图。一个源照射（灰色）粗糙表面，产生反射波（红色）和透射波（绿色）。入射脉冲以灰色矩形表示，灰色圆点代表与之相关的探测锥。反射波和透射波通常都表现出镜面分量和漫射分量。根据反射与折射的经典斯涅尔定律确定的镜面分量方向对应于长箭头，相关的镜面锥以虚线绘出。漫射分量（散斑）的方向由小箭头表示，它们源于入射波被粗糙界面显著散射。透射散斑锥分别以浅红色和绿色区域表示。

我们考虑的基本构型如图1所示。在傍轴（抛物）尺度下，一个类光束波场照射到粗糙界面上，该界面将上下参数不同的两个均匀介质分隔开。入射波产生反射波和透射波，其中每一种波都可进一步分解为两个主要分量：镜面分量和散斑分量。镜面分量对应于平坦界面所产生的贡献，并遵循经典斯涅尔定律。散斑分量也称为非相干分量或漫射分量，由

散射产生。我们探讨的核心问题如下：(*i*) 界面起伏会如何改变**镜面锥** 及其中的波场？以及 (*ii*) 如何刻画**散斑锥** 及其中的波场分量？特别是，是什么决定了锥体的空间支撑范围及相关的波场统计特性？区分不同典型散射状态的一个关键参数是随机界面的相关长度（即其变化的特征尺度）与光束宽度的相对大小。在此处考虑的临界标度情形中，界面起伏的振幅与波长同阶。我们特别指出，当界面空间涨落发生在光束宽度（或探测锥）尺度上时，反射和透射波脉冲会呈现随机的到达时间特性。然而，其主要波能量仍局限于镜面分量形成的锥体中（镜面锥的方向由反射与折射的经典斯涅尔定律给出），因为界面起伏不会在沿斜向传播、横向波数不同的模式之间引发强烈耦合。相比之下，当界面空间涨落的尺度小于探测锥宽度时，这种模式耦合便会变得显著。这会使均匀化后的镜面反射波和透射波出现频率相关衰减，其衰减由界面高度统计决定。从这些有效波中损失的能量会转移到宽广的散斑分量中；这些分量呈现高斯统计，并携带相对量级为一的总能量。尽管本研究设定中的界面粗糙度不足以产生增强背向散射效应 [28], ，我们推导出的散射算子与物理学文献中在 Born（单次散射）近似下得到的结果相似 [39], ，但本文并未采用此类近似。对散斑锥的详细刻画还使我们能够推导出广义斯涅尔折射与透射定律，类似于文献 [1, 44]中的结果。总体而言，本研究在统一框架下衔接了粗糙界面波散射的两种不同研究方法，并严格推导了界面处的散射算子及相应的广义斯涅尔定律。

总而言之，我们在此的目标是刻画镜面锥和散斑锥，以及波场在其中的行为。

关于粗糙表面或界面上的波散射这一重要问题，已有大量文献对此进行了研究。其中大多数文献采用基于物理的展开方法，例如微扰方法或基尔霍夫型近似，这些方法对适用的尺度区间施加了严格条件 [7, 14, 17, 20, 31, 33, 43]。积分方程表述也得到了广泛研究 [16, 32, 42], ，尤其用于描述近场散射 [38]。此外，人们还发展出了复杂的数值方法，用于分析复杂几何结构中的波散射 [12, 40]。在本文中，我们关注的是这样一类情形：这些几何结构仅以统计意义加以描述。尽管均匀化技术已被用于为随机界面推导有效界面条件 [19, 35], ，但我们在此同样关注对散射场的漫射（散斑）分量进行统计刻画。在我们的分析中，漫射分量所携带的总能量可能与镜面分量所携带的总能量相当。

尽管这一问题十分重要且应用广泛，但严格刻画经粗糙界面透射或反射的波场的研究成果仍然有限 [2, 3, 25, 30, 35]。在高频区间，我们考虑一族特征尺度区间，它们取决于光束宽度相对于界面起伏相关长度的大小。第一个技术难点源于随机偏微分方程（SPDEs）标准理论的局限性 [13]。这一困难是因为我们假设界面高度起伏具有平稳性，因此噪声项无法用希尔伯特–施密特协方差算子表示。从这一角度来看，本文情形与 [15], 所研究的情形相似；该文研究了白噪声抛物型（伊藤–薛定谔）方程的适定性。然而，在我们的设定中，随机性来自界面起伏，而非体涨落；并且我们考虑的是标度极限区间，而不是从白噪声模型出发。第二个技术难点在于，不仅需要描述透射波场，还需要描述反射波。我们通过一种嵌入型表述来实现这一点，该表述以一族上行与下行传播波分量为参数来表示波场。第三个技术难点涉及随机界面的性质：它仅取决于横向变量，而不取决于传播（纵向）变量。因此，经典的扩散近似框架并不适用 [18]。

我们的主要目标是建立一种新颖的框架，以高斯随机场的形式精确刻画粗糙界面产生的漫散射波（散斑），以及这些分量在透射和反射（例如雷达后向散射）中形成的相关锥体。这类解析框架有望应用于遥感成像问题，包括（*i*）粗糙（随机）界面参数的成像，以及（*ii*）界面后方隐藏物体的成像，例如通过计算反射散斑场的经验谱 [23, 24, 29, 41]。这一分析还可进一步推广至合成孔径雷达（SAR）成像场景；在此类场景中，源锥会移动，且通常搭载于飞机上。在更广泛的成像应用中，人们可能希望利用所谓的记忆效应：当源的入射角改变时，照亮隐藏物体的散斑图样并不会完全改变，而是会发生特定幅度的平移。我们还指出，在极化成像方案中，刻画界面处不同偏振模式之间的耦合，并了解这种耦合如何取决于界面统计特性 [40]，至关重要。未来的工作将探讨对此类成像配置的推广、对一般双曲系统 [22], 的推广，以及强起伏情形

在这些情形中，界面起伏振幅相对于波长较大。

本文结构如下。首先，在第1节中，我们概述本文的主要结果，特别是广义斯涅尔定律。第2节介绍所研究的波传播情形和尺度区间。本节还讨论界面起伏统计建模中的混合性质。第3节介绍在平坦界面情形下，将波场分解为横向傅里叶模态（横向波数）以及向上和向下传播分量的基本方法。借助这一分解，我们可以推导平坦界面处的反射与透射条件；这些条件将每个横向波数对应的向上和向下传播波模态耦合起来。第4节将这一描述推广到随机界面的情形，由此确定界面处的随机散射算子，它刻画了随机界面起伏所引起的不同横向波数下向上和向下传播波模态之间的耦合。第5节讨论界面起伏的去相关尺度与探测锥宽度相当的情形，此时形成的镜面锥几乎承载全部能量。第6至8节讨论界面起伏的去相关尺度小于探测锥宽度、但大于波长的情形。在这一尺度区间内，界面既会产生镜面锥，也会产生更宽的散斑锥，由此可确定广义斯涅尔定律。最后，第9节和第10节以及附录A、B和C给出了技术性结果的详细证明。

1 结果总结与广义斯涅尔定律

如图2所示，所提出的解析框架使我们能够从物理学的第一性原理出发，推导出适用于粗糙界面的广义反射与折射斯涅尔定律。我们考虑一种三维传播介质，其中反射角和透射角相对于粗糙界面的法线轴定义，因此均为非负值。在这种情况下，入射波既可能反射回源位置，也可能透射穿过界面；散射则取决于界面的粗糙度。

首先考虑图1所示的镜面反射锥体和透射锥体。这些锥体遵循经典斯涅尔定律，反射角等于入射角 θ_{inc}，而透射角 θ_{tr}^0 则按平坦界面情形定义（见图2）。如果界面起伏的空间尺度远小于光束宽度，则适用均匀化结果，随机涨落的影响可用一个频率相关阻尼因子表示。该阻尼因子根据界面高度起伏的边缘分布定义。对于脉冲源，这会通过与脉冲整形函数卷积而产生改变。当界面起伏的尺度与光束宽度相当时，主阶场仅由镜面分量构成，而这些分量会变为随机。随机性源于相位项，它反映了积分表示中界面对透射波场和反射波场的扰动。这些结果将在第5节和第6节中作更详细的讨论

接下来，我们介绍图1所示的散斑分量。为了引出关于广义斯涅尔定律的主要结果，我们先考虑标准衍射光栅的情形。设有一个波长为 λ 、沿水平方向传播且垂直于衍射沟槽的入射平面波，其相对于光栅法线的入射角为 θ_{inc}。对于光栅均匀的空间周期 d，反射衍射场会在满足光栅方程的衍射角 $\theta_{ref}(m)$处出现极大值：

$$\sin(\theta_{ref}(m)) = \sin(\theta_{inc}) + \frac{m\lambda}{d}, \qquad m \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

现在我们来考察，当界面不再是理想的周期光栅，而是具有各向同性随机高度起伏的粗糙随机界面时，这一图景会如何变化。该界面将两个半空间分隔开来，它们的传播速度分别为 c_0 和 c_1（见图2）。在这种情况下，空间尺度 d 被替换 为ℓ_c，即表征界面起伏变化尺度的相关长度。此外，反射角不再是离散的一组特征值，而是形成连续分布，从而产生一个散斑锥。在此框架下，指标 m 被替换 为相对散射慢度矢量$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$，其概率分布由以下有效的频率相关测度描述：

$$\mathcal{A}(v, \omega, \mathbf{p}) := \int \mathbb{E}\Big[e^{i\omega v(V(\mathbf{y})-V(0))}\Big] e^{-i\omega \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}}\, d\mathbf{y}, \tag{2}$$

其中 $v = 2\cos(\theta_{inc})/c_0$。根据博赫纳–欣钦定理，A 在$\mathbb{R}^2$ 上相对于$\mathbf{p}$定义了一个有限正测度，本文将其称为散射分布。为简化记号，尽管 A 是$\mathbf{p}$上的一个测度，本文仍始终使用记号 A$(v, \omega, \mathbf{p})$。该测度通过相对高程$V(\mathbf{y})$ $-V(0)$的特征函数，涉及平稳随机界面高程 V。请注意，在我们的表述中，散射算子显式依赖于角频率 ω。

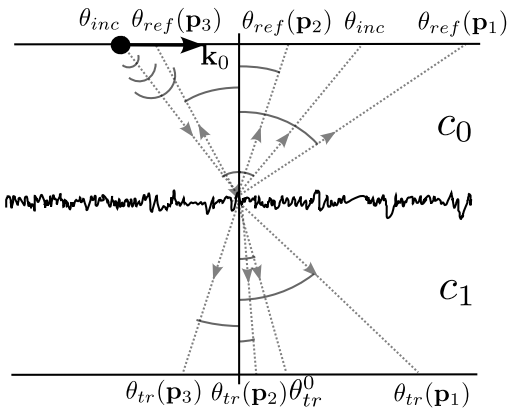

图 2：广义反射与折射斯涅尔定律示意图。反射角和透射角由散射慢度向量$\mathbf{p}$参数化。

这种依赖关系体现了脉冲的频率成分与界面相对高程之间的相互作用。

物理学文献中曾在 Born（单次散射）近似下推导出这种形式的分布，用以描述漫反射波场的平均强度。这里，我们无需采用这一近似，即可得到相同的散射算子。对于平坦界面，$\mathbf{p}$ 的分布支撑在原点。一般而言，$\mathbf{p}$ 由观测点相对于镜面锥的位置决定，反射场的强度与 A 成正比。下文的式 (67) 给出了计算散斑的位置相对于镜面分量的位置。

接下来，我们引入广义斯涅尔定律，将 $\mathbf{p}$ 的取值与反射角对应起来。如上所述，该方向上的反射强度取决于散射分布 A。考虑一个角频率为 ω 、二维慢度向量为$\mathbf{k}_0$ 的入射波，则入射角 $\theta_{inc} > 0$ 为

$$\sin(\theta_{inc}) = c_0|\mathbf{k}_0|.$$

见下文式 (43)。当散射慢度向量为 $\mathbf{p}$ 时，反射角 θ_{ref} 由下式给出：

$$\frac{\sin(\theta_{ref}(\mathbf{p}))}{c_0} = \frac{\sin(\theta_{inc})}{c_0} + |\mathbf{k}_0|\mathcal{C}(\mathbf{p};\mathbf{k}_0,\theta_{inc},\theta_{inc}), \tag{3}$$

其中，散斑调制因子为

$$\mathcal{C}(\mathbf{p};\mathbf{k},\theta,\phi) = \sqrt{\frac{\Xi(\mathbf{p};\mathbf{k},\theta,\phi)}{1+\sin^2(\theta)\Big(\Xi(\mathbf{p};\mathbf{k},\theta,\phi)-1\Big)}} - 1$$

其中

$$\Xi(\mathbf{p};\mathbf{k},\theta,\phi) = \Big(1+\xi(\phi)\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}}{\cos^2(\theta)}\Big)^2 + \xi^2(\phi)(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}^\perp)^2, \qquad \text{with} \qquad \xi(\phi) = \frac{r_0^2}{\ell_c L}\frac{c_0^2}{\sin^2(\phi)},$$

并且 $\mathbf{k}_0^\perp = (-\mathbf{k}^{0,2}, \mathbf{k}^{0,1})^T$。这里，$r_0$ 表示由源项产生的光束宽度，ℓ_c 表示界面起伏的特征相关长度，L 表示从源平面到界面的典型传播距离。注意，对于散射分布 A 仅在原点处有支撑的平坦界面，$\mathbf{p}$ ，我们得到经典的折射斯涅尔定律，因为 $\mathcal{C}(\mathbf{0};\mathbf{k}\ \theta) = 0$。

接下来，我们考虑透过界面的透射以及折射角。透射的广义斯涅尔定律为

$$\frac{\sin(\theta_{tr}(\mathbf{p}))}{c_1} = \frac{\sin(\theta_{inc})}{c_0} + |\mathbf{k}_0|\mathcal{C}(\mathbf{p};\mathbf{k}_0,\theta^0_{tr},\theta_{inc}). \tag{4}$$

这里，θ^0_{tr} 表示平坦界面的镜面折射角，由标准的折射斯涅尔定律给出：

$$\frac{\sin(\theta^0_{tr})}{c_1} = \frac{\sin(\theta_{inc})}{c_0}.$$

此处，（2）中的散射分布 $A(v,\ \omega,\ \mathbf{p})$ 在 $v = \cos(\theta_{inc})/c_0 - \cos(\theta^0_{tr})/c_1$ 处取值。在关系式（3）和（4）中，刻画散斑（扩散）锥体尺寸以及相对于经典斯涅尔定律的修正幅度的关键参数，是比值 $r_0^2/(\ell_c L)$。该参数类似于菲涅耳数的倒数，其中 ℓ_c 扮演通常定义中传播距离的角色。

在此处考虑的近轴区内，我们假设 λ 是源项的中心波长：

$$\frac{r_0^2}{\lambda} \sim L,$$

对应的瑞利长度与典型传播距离同阶 L。瑞利长度是指从光束腰到光束横截面积增大一倍的位置之间的距离。换言之，在这种标度下，波束不会显著发散，在典型传播距离内基本保持准直。在我们的情形中，这种标度意味着

$$\frac{r_0^2}{\ell_c L} \sim \frac{\lambda}{\ell_c}.$$

后一比值刻画了界面的相对粗糙度。当$\lambda \sim \ell_c$时，界面被视为粗糙；而当 $\lambda \ll \ell_c$时，界面对于波而言显得平滑。下文将参数 λ_c/ℓ_c称为相对粗糙度参数，它与逆菲涅耳型数$r_0^2/(\ell_c L)$类似。

(3)和(4)中的修正项与物理学文献 [1, 44] 中针对相对平滑界面得到的结果相似：

$$|\mathbf{k}_0|\mathcal{C}_{ref}(\mathbf{p}) \underset{\lambda \ll \ell_c}{\simeq} \frac{1}{n_0 k_0} \frac{2\pi \mathbf{p}\cdot\widehat{\mathbf{k}}_0}{c_0 \ell_c \cos^2(\theta_{inc})} \qquad \text{and} \qquad |\mathbf{k}_0|\mathcal{C}_{tr}(\mathbf{p}) \underset{\lambda \ll \ell_c}{\simeq} \frac{1}{k_0} \frac{2\pi \mathbf{p}\cdot\widehat{\mathbf{k}}_0}{\ell_c \cos^2(\theta_{tr}^0)}, \tag{5}$$

$\widehat{}$其波数为 $k_0 = 2\pi/\lambda$、折射率为 $n_0 = 1/c_0$，初始横向传播方向为$\mathbf{k}_0 =\mathbf{k}_0/|\mathbf{k}_0|$。与 [1, 44], 中以空间相关相移表示这些修正不同，这里是在概率框架下，以散射方向$\mathbf{p}$来表述这些修正；散射方向服从由(2)定义的有效散射分布A，该分布经过适当归一化后可视为概率测度。由广义斯涅尔关系(3)可知，对于相对平滑的界面（$\lambda \ll \ell_c$），反射角可近似为

$$\theta_{ref}(\mathbf{p}) \underset{\lambda \ll \ell_c}{\simeq} \theta_{inc} + \Big(\frac{\lambda}{\ell_c}\Big) \frac{c_0 \mathbf{p}\cdot\widehat{\mathbf{k}}_0}{\cos^3(\theta_{inc})} \tag{6}$$

因此，相对于镜面反射角的偏差很小，量级为 λ/ℓ_c。与衍射光栅 (1) 相比，在相对平滑的情况下，衍射光栅给出的关系形式为

$$\sin(\theta_{ref}(m)) \simeq \sin(\theta_{inc}) + \frac{m\lambda}{\ell_c} \qquad \text{with} \qquad m = \frac{c_0 \mathbf{p}\cdot\widehat{\mathbf{k}}_0}{\cos^2(\theta_{inc})},$$

由此可见，修正项中的参数 d （表征周期性）被 ℓ_c （相关长度）取代，后者描述界面起伏的变化尺度。

类似地，根据 (4)，折射角可近似为

$$\theta_{tr}(\mathbf{p}) \underset{\lambda \ll \ell_c}{\simeq} \theta_{tr}^0 + \Big(\frac{\lambda}{\ell_c}\Big) \frac{c_1 \mathbf{p}\cdot\widehat{\mathbf{k}}_0}{\cos^3(\theta_{tr}^0)}, \tag{7}$$

另请注意，对于正入射 $\theta_{inc} = 0$，这些关系可简化为

$$\theta_{ref}(\mathbf{p}) = \arctan\Big(\frac{\lambda c_0 |\mathbf{p}|}{\ell_c}\Big) \qquad \text{and} \qquad \theta_{tr}(\mathbf{p}) = \arctan\Big(\frac{\lambda c_1 |\mathbf{p}|}{\ell_c}\Big);$$

见 (69) 和 (80)。

最后，对于发射短脉冲的源，可以证明，透射和反射散斑（扩散）分量是时空高斯随机场，其协方差函数可通过散射分布 A 明确表征。这些协方差函数表明，沿水平面观测时，随机场呈椭圆形，并由相应的色散矩阵表征，且随时间演变（示意见图3）。

总之，控制散斑反射和折射角的重要参数是逆菲涅耳型数 $r_0^2/\ell_c L$，其量级与相对粗糙度参数 λ/ℓ_c 相当；而控制透射和反射散斑场统计结构的重要量则是散射分布 A。

本文所进行的所有分析均针对发射短脉冲的时变源，因此源项具有宽带宽。源包含单一频率的时谐情形将在未来的工作中研究。不过，我们注意到，本文推导的广义斯涅尔定律在时谐状态下仍然成立。

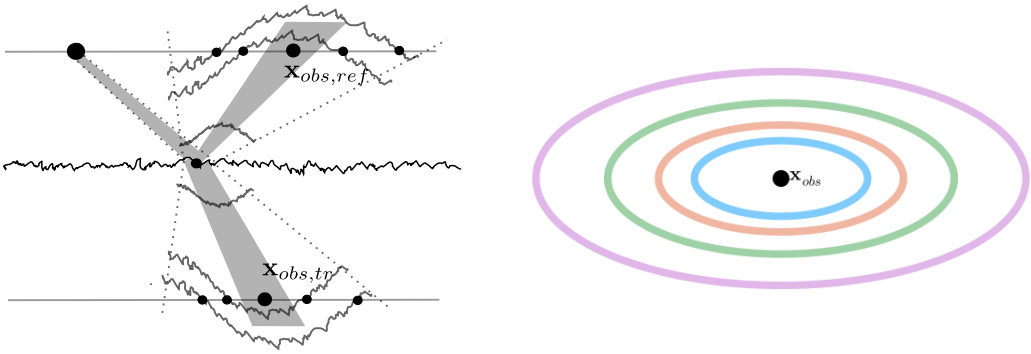

图3：左图展示了脉冲在粗糙界面上的反射和折射。灰色区域对应于入射波形成的锥体，以及在$\mathbf{x}_{obs,\ ref}$ 和$\mathbf{x}_{obs,\ tr}$处观测到的反射和透射镜面分量所对应的锥体。当散斑分量与水平面相交时，会形成椭圆，其形状随时间变化；右图用不同颜色展示了这一现象，椭圆以$\mathbf{x}_{obs}$为中心，其中该位置表示$\mathbf{x}_{obs,\ ref}$ 或$\mathbf{x}_{obs,\ tr}$。这些椭圆的宽度由初始脉冲持续时间决定。

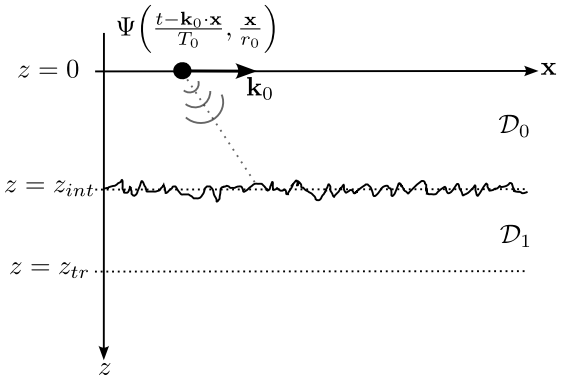

图4：物理装置示意图。平面 $z=0$ 包含源位置，而粗糙界面位于平面 $z=z_{int}$ 附近，并将 $\mathbf{D}^0$ 与 $\mathbf{D}^1$ 分隔开。反射波在$z=0$处观测，透射波则在 $z=z_{tr}$处观测。

2 物理模型

波动方程。 本文考虑由标量波动方程建模的三维线性波传播

$$\Delta u - \frac{1}{c^2(\mathbf{x},z)}\partial_{tt}^2 u = \nabla\cdot F(t,\mathbf{x},z) \qquad (t,\mathbf{x},z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}, \tag{8}$$

满足零初始条件

$$u(t=0,\mathbf{x},z)=\partial_t u(t=0,\mathbf{x},z)=0 \qquad (\mathbf{x},z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}.$$

波模型 (8) 蕴含界面处的连续性条件，具体内容将在下文说明。坐标z 表示主传播轴，而$\mathbf{x}$ 表示横向方向， F 为源项。这里，拉普拉斯算子 $\Delta=\Delta_\perp+\partial_{zz}^2$ 作用于所有空间变量$\mathbf{x}$ 和 z。传播介质由两个均匀子域组成，它们被一个位于平面 $z=z_{int}>0$附近的随机界面隔开：

$$\mathscr{D}^0 := \{(\mathbf{x},z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad z<z_{int}+\sigma V(\mathbf{x}/\ell_c)\} \tag{9}$$

and

$$\mathscr{D}^1 := \{(\mathbf{x},z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad z>z_{int}+\sigma V(\mathbf{x}/\ell_c)\}. \tag{10}$$

物理装置示意图见图4。函数 V 表示一个具有二阶导数的零均值随机场

用于模拟界面起伏并刻画其粗糙度。在远离界面处，波速由下式给出

$$c(\mathbf{x},z) := \begin{cases} c_0 & \text{if} \quad (\mathbf{x},z) \in \mathscr{D}^0, \\ c_1 & \text{if} \quad (\mathbf{x},z) \in \mathscr{D}^1. \end{cases} \tag{11}$$

强迫项

$$F(t,\mathbf{x},z) := \Psi\Big(\frac{t-\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}}{T_0}, \frac{\mathbf{x}}{r_0}\Big)\delta(z)\mathbf{e}_z, \tag{12}$$

其中 $\mathbf{e}_z$ 表示 z方向上的单位向量，用于模拟位于平面 $z=0$ 上的一个源，该源向随机界面发射沿方向 $(\mathbf{k}_0, \sqrt{c_0^{-2}-|\mathbf{k}_0|^2})$传播的准平面波 Ψ （我们假设 $|\mathbf{k}_0| < c_0^{-1}$）。式（8）中源项的散度形式是线性声学中的标准形式，其中 u 表示压力场；例如参见 [18]。此处采用这种形式是为了数学上的便利，其他类型的源项也可以类似地处理。参数 T_0 和 r_0 分别表示源的时间脉冲宽度和空间光束宽度。

波动方程 （8）给出了随机扰动界面两侧的以下两个连续性关系 ce:

$$u(z=z_{int}(\mathbf{x})^+) = u(z=z_{int}(\mathbf{x})^-) \qquad \text{and} \qquad \partial_z u(z=z_{int}(\mathbf{x})^+) = \partial_z u(z=z_{int}(\mathbf{x})^-), \tag{13}$$

其中

$$z_{int}(\mathbf{x}) := z_{int} + \sigma V(\mathbf{x}/\ell_c).$$

这些关系的推导见附录 A。最后，我们假设没有波从源平面上方或粗糙界面下方进入系统；所有传播波均由源项产生。

参数标度。本文所采用的方法基于尺度分离技术，其中相关的长度尺度如下：典型（参考）传播距离，记为 L；中心波长 λ，它与脉冲持续时间的关系为

$$\lambda = c_0 T_0;$$

空间光束半径 r_0；界面起伏的相关长度 ℓ_c；以及界面起伏的振幅 σ V。我们用 z_{int} 表示源到界面的距离，用 z_{tr} 表示源到记录透射波的平面之间的距离（见图4）。这两个距离都与典型传播距离 L同阶，我们引入无量纲参数

$$\varepsilon := \frac{\lambda}{L} = \frac{c_0 T_0}{L} \ll 1.$$

我们考虑满足 $\varepsilon \ll 1$ 的高频区间，并采用抛物近似（或抛物型）标度，该标度通过施加以下条件得到

$$\frac{r_0^2}{\lambda} \sim L,$$

这对应于与典型传播距离同阶的瑞利长度。瑞利长度$L_R = r_0^2/\lambda$ 是从光束腰到光束横截面积增大一倍的位置之间的距离。界面起伏采用临界标度，这意味着界面起伏的幅度与中心波长同阶，

$$\sigma \sim \lambda. \tag{14}$$

最后，用 ℓ_c 表示（假设各向同性的）界面起伏的相关长度。我们考虑该长度尺度从中心波长到光束宽度的各种情况，即

$$\lambda \lesssim \ell_c \lesssim r_0. \tag{15}$$

比值 λ/ℓ_c 表征界面对入射波而言显得有多粗糙，并决定反射和透射散斑锥的角宽度。当 $\lambda \sim \ell_c$ 时，界面被认为是粗糙的；当 $\lambda \ll \ell_c$ 时，则相对平滑。我们还注意到，如果 $r_0 \ll \ell_c$，情况就会简化，实质上相当于一个平面界面，反射脉冲和透射脉冲具有随机传播时间涨落。情况 $\ell_c \ll \lambda$ 对应于一种退化状态，其中散斑（扩散）分量形成宽阔的锥体，其开口角为 $\pi/2$，本文不予讨论。

在本文的其余部分，为简便起见，我们采用无量纲表述，并令 t

$$L \sim 1, \qquad r_0/L \to r_0 = \sqrt{\varepsilon}, \qquad \sigma \to \sigma/L = \varepsilon, \qquad \text{and} \qquad \ell_c/L \to \ell_c = \varepsilon^\gamma, \tag{16}$$

从而满足式（14），且根据式（15）可得

$$\gamma \in [1/2, 1].$$

请注意，此时 $T = L/c_0 = \lambda/(\varepsilon c_0) = T_0/\varepsilon$ 是特征传播时间，因此脉冲持续时间相较于特征传播时间较短，这与高频区间一致。此外，瑞利长度 $L_R = r_0^2/\lambda \sim 1$。

在接下来的分析中，我们区分情形 $\gamma = 1/2$ （对应于 $\ell_c \sim r_0$）和情形 $1/2 < \gamma \leq 1$ （对应于 $\lambda \lesssim \ell_c \ll r_0$）。这两种区间会导致反射信号和透射信号呈现定性上不同的行为。在前一种情形中，只能观测到随机镜面分量；而在后一种情形中，由于界面相对于光束半径（$\ell_c \ll r_0$）快速振荡，镜面反射分量和透射分量会出现均匀化效应，同时还会在比镜面分量对应的锥体更宽的锥体范围内产生随机散斑场。

随机涨落。 在（9）和（10）中，分隔两个子区域的界面的随机涨落由连续的、均值为零的平稳随机场 V 描述。为简单起见，我们假设 $V(0)$ 具有概率密度，并且界面起伏满足混合 性质，用于描述 V 沿界面的统计依赖性逐渐消失。在我们的语境中，混合 的基本思想如下。对于给定的位置集合$\mathbf{x}_1$、.....、$\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^2$，当这些位置彼此充分远离时，场 $V(\mathbf{x}_1)$.....、 $V(\mathbf{x}_n)$ 的相应取值将变得相互独立：

$$\mathbb{P}(V(\mathbf{x}_1) \in A_1, \ldots, V(\mathbf{x}_n) \in A_n) \to \mathbb{P}(V(\mathbf{x}_1) \in A_1) \cdots \mathbb{P}(V(\mathbf{x}_n) \in A_n), \tag{17}$$

对于任意博雷尔集 A_1、.....、$A_n \subset \mathbb{R}$，有

$$\min_{j,l \in \{1,\ldots,n\}} |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l| \to \infty.$$

该性　质在 V 为具有相关函数的平稳高斯随机场时很容易满足　　n

$$R(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[V(\mathbf{x} + \mathbf{y})V(\mathbf{y})],$$

当 $|\mathbf{x}| \to \infty$ 时，该函数衰减至零。对于更一般的随机场（不一定是高斯随机场），性质（17）可以通过如下的 α-混合概念形式化。定义

$$\alpha(r) := \sup_{\substack{S,S' \subset \mathbb{R}^2 \\ d(S,S') > r}} \sup_{\substack{A \in \sigma(V(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S) \\ B \in \sigma(V(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S')}} |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|,$$

其中

$$d(S, S') = \inf_{\substack{s \in S \\ s' \in S'}} |s - s'|$$

表示两个非空子集 S 和 S' 之间的距离，而 σ（V（$\mathbf{x}$），$\mathbf{x} \in S$）是由族 $V_{|S} :=$（V（$\mathbf{x}$））$_{\mathbf{x} \in S}$ 生成的 σ-场。通俗地说，量 α（r）衡量随机场 V 在相距至少 r 的区域对之间的统计依赖程度。 α-混合条件相当于假设

$$\alpha(r) \to 0 \qquad \text{as} \qquad r \to \infty, \tag{18}$$

这意味着随着 S 和 S' 之间的距离趋于无穷， $V_{|S}$ 和 $V_{|S'}$ 之间的统计依赖性消失。混合这一概念在本文中发挥着核心作用，因为它使镜面分量的均匀化、散斑分量的经验二点相关函数的自平均性质，以及散斑图样的高斯性成为可能。

为了量化混合对物理量及其协变的影响，我们还引入一种相关度量 ρ-混合，它刻画相距较远的随机变量之间的相干性（或者更确切地说，缺乏相干性）。其定义为

$$\rho(r) := \sup_{\substack{S,S' \subset \mathbb{R}^2 \\ d(S,S') > r}} \sup_{\substack{V \in \mathcal{L}^2(\sigma(V(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S)) \\ W \in \mathcal{L}^2(\sigma(V(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S'))}} |Corr(V, W)|, \tag{19}$$

其中，$L^2(F)$ 表示具有有限二阶矩的 F-可测随机变量集合，而 $Corr$ 表示相关系数，

$$Corr(V, W) = \frac{Cov(V, W)}{\sqrt{Var(V)Var(W)}}.$$

根据 [10, 定理 1][1]，可得

$$\alpha(r) \leq \rho(r) \leq 2\pi\, \alpha(r), \qquad r > 0, \tag{20}$$

[1]此处使用的函数 α 和 ρ 分别对应于 [10]中的 α^* 和 ρ^*

因此， α-混合和 ρ-混合的概念是等价的，事实上我们有 $\rho(r) \to 0$ 当 $r \to \infty$。利用ρ-混合性质，下面的引理对式（17）给出了精确表述，这将在后续的渐近分析中发挥重要作用。

引理 2.1 设 $n \geq 1$ 和 V 是 ρ-混合且平稳的，则有：

1. 对于 n 有界函数 $f_1, \ldots, f_n$：$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$，以及互不相同的 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{\eta\to 0} \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} f_j\Big(V\Big(\frac{\mathbf{x}_j}{\eta}\Big)\Big)\Big] = \lim_{\eta\to 0} \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\Big[f_j\Big(V\Big(\frac{\mathbf{x}_j}{\eta}\Big)\Big)\Big] = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\Big[f_j(V(0))\Big];$$

2. 对于 n 有界函数 $g_1, \ldots, g_n$：$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$，$\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^2$，以及互不相同的 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^2$，

$$\begin{aligned}\lim_{\eta\to 0} \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} g_j\Big(V\Big(\frac{\mathbf{x}_j}{\eta}+\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big), V\Big(\frac{\mathbf{x}_j}{\eta}-\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big)\Big)\Big] &= \lim_{\eta\to 0} \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\Big[g_j\Big(V\Big(\frac{\mathbf{x}_j}{\eta}+\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big), V\Big(\frac{\mathbf{x}_j}{\eta}-\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big)\Big)\Big] \\ &= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\Big[g_j\Big(V\Big(\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big), V\Big(-\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big)\Big)\Big].\end{aligned}$$

该引理的详细证明见附录 B。

3 未扰动界面的反射与透射

在分析随机界面引起的波散射之前，我们先在本节描述未扰动或平坦界面的反射与透射机制。特别是，本节通过一个简单的情形介绍主要的波量及相关术语，之后再考察这些概念如何推广到随机情形。本节分为四个部分，分别讨论界面处的入射波、未扰动界面的透射与反射条件，最后介绍反射波锥体和透射波锥体。

为研究入射波的反射与透射，我们引入以下缩放傅里叶变换：

$$\hat{f}^{\varepsilon}(\omega,\mathbf{k}) := \iint f(t,\mathbf{x}) e^{i\omega(t/\varepsilon - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}/\sqrt{\varepsilon})} dt d\mathbf{x}, \qquad \text{and} \qquad f(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon^2} \iint \hat{f}_{\varepsilon}(\omega,\mathbf{k}) e^{-i\omega(t/\varepsilon - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}/\sqrt{\varepsilon})} \omega^2 d\omega d\mathbf{k},$$

该变换根据源分布进行了缩放（见 (12) 和 (16)）。在傅里叶域中，将波动方程 (8) 限制在 $z \in (-\infty, z_{int})$ 上，可化简为亥姆霍兹方程

$$\partial_z^2 \hat{u}_{\omega}^{\varepsilon}(\mathbf{k},z) + \frac{\omega^2}{\varepsilon^2 c_0^2}\Big(1 - \varepsilon c_0^2 |\mathbf{k}|^2\Big)\hat{u}_{\omega}^{\varepsilon}(\mathbf{k},z) = \varepsilon^2 \hat{\Psi}\Big(\omega, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}_0}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)\delta'(z), \tag{21}$$

其中

$$\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{k}) := \iint \Psi(t,\mathbf{x}) e^{i\omega(t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} dt d\mathbf{x} \tag{22}$$

表示源分布 Ψ 的未缩放傅里叶变换。

满足 $\sqrt{\varepsilon}\, c_0|\mathbf{k}| < 1$ 的 $\mathbf{k}$ 模态称为传播模态，而满足$\sqrt{\varepsilon}\, c_0|\mathbf{k}| > 1$ 的模态称为倏逝模态。为避免在界面处透射时不必要地处理倏逝模态，我们为方便起见假设

$$c_1 < c_0.$$

此假设仅用于简化表述。经过少许调整，本文给出的所有结果对于情形 $c_0 < c_1$ 仍然成立，前提是 $\mathbf{k}_0$ 满足 $|\mathbf{k}_0| < c_1^{-1}$，以避免临界透射角。

在对源分布 $\hat{\Psi}$ 作出适当假设（在两个变量上均具有紧支撑，且关于 ω有正的下界）时，对于足够小的 ε，源项在介质中仅产生传播模态。事实上，引入变量替换

$$\mathbf{k} = \mathbf{q} + \frac{\mathbf{k}_0}{\sqrt{\varepsilon}},$$

使得$\mathbf{q}$ 位于 Ψ的支撑集内，我们得到

$$\sqrt{\varepsilon}\, c_0|\mathbf{k}| \leq \sqrt{\varepsilon}\, c_0|\mathbf{q}| + c_0|\mathbf{k}_0| < 1, \tag{23}$$

ˆ 对于 ε 足够小的情况（仅取决于 Ψ的支撑集）。
对于 $z \in (z_{int}, z_{tr})$，傅里叶域中的波动方程 (8) 化简为以下亥姆霍兹方程：

$$\partial_{zz}^2 \hat{u}_\omega^\varepsilon(\mathbf{k}, z) + \frac{\omega^2}{\varepsilon^2 c_1^2}\Big(1 - \varepsilon c_1^2 |\mathbf{k}|^2\Big)\hat{u}_\omega^\varepsilon(\mathbf{k}, z) = 0. \tag{24}$$

在本文中，我们用以下符号表示

$$\mathit{ơ}_j^\varepsilon(\mathbf{k}) := \frac{1}{c_j}\sqrt{1 - \varepsilon c_j^2 |\mathbf{k}|^2}, \qquad \text{for} \qquad \sqrt{\varepsilon}\, c_j |\mathbf{k}| < 1, \quad j = 0, 1, \tag{25}$$

与 (21) 和 (24) 相关的垂直慢度。注意，由于 (23) 和假设 $c_1 < c_0$，(25) 中关于 $\mathbf{k}$ 的条件得以满足。

在接下来的分析中，将使用以下展开式：

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathit{ơ}_j^\varepsilon\Big(\mathbf{q} + \frac{\mathbf{k}_0}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) = \frac{\mathit{ơ}_j}{\varepsilon} - \frac{\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{q}}{\sqrt{\varepsilon}\,\mathit{ơ}_j} - \frac{c_j}{2}\mathbf{q}^T A_j \mathbf{q} + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \qquad j = 0, 1, \tag{26}$$

其中 $\mathbf{q}^T$ 表示 $\mathbf{q}$ 的转置，并且

$$A_j := \frac{1}{(1 - c_j^2|\mathbf{k}_0|^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} 1 - c_j^2\mathbf{k}_{0,2}^2 & c_j^2\mathbf{k}_{0,1}\mathbf{k}_{0,2} \\ c_j^2\mathbf{k}_{0,1}\mathbf{k}_{0,2} & 1 - c_j^2\mathbf{k}_{0,1}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{c_j^3\mathit{ơ}_j^3}\big(\mathbf{I}_2 - c_j^2\,\mathbf{k}_0^\perp \otimes \mathbf{k}_0^\perp\big). \tag{27}$$

这里，余项 O($\sqrt{\varepsilon}$) 关于 $\mathbf{q}$ 在 ˆΨ¯的支撑集内一致成立，并且

$$\mathit{ơ}_j := \frac{\sqrt{1 - c_j^2|\mathbf{k}_0|^2}}{c_j} \qquad j = 0, 1, \tag{28}$$

表示界面上方（$j = 0$）和下方（$j = 1$）的垂直慢度。此外，$\mathbf{I}_2$ 表示单位矩阵，而$\mathbf{k}_0^\perp$:= (−$\mathbf{k}^{0,2}$, $\mathbf{k}^{0,1}$)^T。

3.1 界面处的反射与透射

引入相对于 z 方向的上行和下行模态分解，并回想一下，假设没有波从源平面上方或界面下方传来，则波场可写为

$$\begin{aligned}
\hat{u}_\omega^\varepsilon(\mathbf{k}, z) = {} & \frac{\hat{b}_{0,\omega}^\varepsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega\mathit{ơ}_0^\varepsilon(\mathbf{k})}} e^{-i\omega\mathit{ơ}_0^\varepsilon(\mathbf{k})z/\varepsilon}\,\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(z) \\
& + \Big(\frac{\hat{a}_{0,\omega}^\varepsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega\mathit{ơ}_0^\varepsilon(\mathbf{k})}} e^{i\omega\mathit{ơ}_0^\varepsilon(\mathbf{k})(z - z_{int})/\varepsilon} + \frac{\hat{b}_\omega^{\varepsilon,ref}(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega\mathit{ơ}_0^\varepsilon(\mathbf{k})}} e^{-i\omega\mathit{ơ}_0^\varepsilon(\mathbf{k})(z - z_{int})/\varepsilon}\Big)\mathbf{1}_{(0, z_{int})}(z) \\
& + \frac{\hat{a}_\omega^{\varepsilon,tr}(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega\mathit{ơ}_1^\varepsilon(\mathbf{k})}} e^{i\omega\mathit{ơ}_1^\varepsilon(\mathbf{k})(z - z_{int})/\varepsilon}\mathbf{1}_{(z_{int}, \infty)}(z).
\end{aligned}$$

这里，ˆ$b_{0,\omega}^\varepsilon$(k) 表示 $z < 0$ 的上行模态振幅，ˆ$a_{0,\omega}^\varepsilon$(k) 表示入射到界面的下行入射模态振幅，$\hat{b}^{\varepsilon,}{}_\omega{}^{ref}$(k) 表示反射模态的振幅，而$\hat{a}^{\varepsilon,}{}_\omega{}^{tr}$(k) 表示透射模态的振幅（见图 5）。

入射模态的振幅由平面$z = 0$两侧的以下跳跃条件确定。这些条件由式 (21) 中的源项引起，并由附录 A 中的式 (91) 得出：

$$\begin{aligned}
\hat{u}_\omega^\varepsilon(\mathbf{k}, z = 0^+) - \hat{u}_\omega^\varepsilon(\mathbf{k}, z = 0^-) &= \varepsilon^2\hat{\Psi}\Big(\omega, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}_0}{\sqrt{\varepsilon}}\Big), \\
\partial_z\hat{u}_\omega^\varepsilon(\mathbf{k}, z = 0^+) - \partial_z\hat{u}_\omega^\varepsilon(\mathbf{k}, z = 0^-) &= 0,
\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{0,\omega}^\varepsilon(\mathbf{k}) &= \frac{\varepsilon^2\sqrt{\omega\mathit{ơ}_0^\varepsilon(\mathbf{k})}}{2}\hat{\Psi}\Big(\omega, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}_0}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)e^{i\omega\mathit{ơ}_0^\varepsilon(\mathbf{k})z_{int}/\varepsilon}, \\
\hat{b}_{0,\omega}^\varepsilon(\mathbf{k}) &= -\frac{\varepsilon^2\sqrt{\omega\mathit{ơ}_0^\varepsilon(\mathbf{k})}}{2}\hat{\Psi}\Big(\omega, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}_0}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) + \hat{b}_\omega^{\varepsilon,ref}(\mathbf{k})e^{i\omega\mathit{ơ}_0^\varepsilon(\mathbf{k})z_{int}/\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{29}$$

因此，上行模态ˆ$b_{0,\ \omega}^\varepsilon$(k)由源的直接贡献和来自界面的反射分量组成。

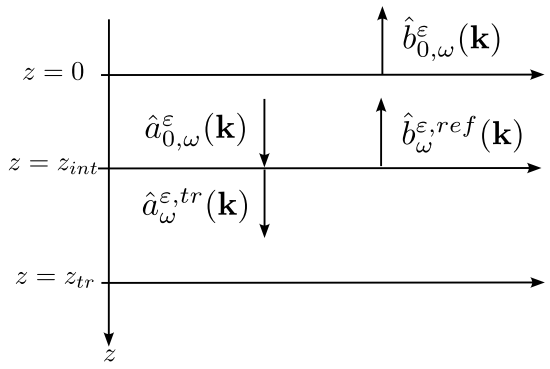

图 5：向上传播和向下传播的模态振幅示意图。

现在记作

$$\hat{u}^{\varepsilon,inc}_{\omega}(\mathbf{k},z) := \frac{\hat{a}^{\varepsilon}_{0,\omega}(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega \mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{k})}} e^{i\omega \mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{k})(z-z_{int})/\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2}\hat{\Psi}\Big(\omega, \mathbf{k}-\frac{\mathbf{k}_0}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) e^{i\omega \mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{k})z/\varepsilon},$$

入射波场，

$$\hat{u}^{\varepsilon,ref}_{\omega}(\mathbf{k},z) := \frac{\hat{b}^{\varepsilon,ref}_{\omega}(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega \mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{k})}} e^{-i\omega \mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{k})(z-z_{int})/\varepsilon} \qquad 0<z<z_{int},$$

反射波场，以及

$$\hat{u}^{\varepsilon,tr}_{\omega}(\mathbf{x},z) := \frac{\hat{a}^{\varepsilon,tr}_{\omega}(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega \mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{1}(\mathbf{k})}} e^{i\omega \mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{1}(\mathbf{k})(z-z_{int})/\varepsilon} \qquad z>z_{int},$$

透射波场。对于平坦界面（$V\equiv 0$），在 $z=z_{int}$ 处的连续性条件 (13) 得出

$$\begin{aligned}
\hat{u}^{\varepsilon,inc}_{\omega}(\mathbf{x},z_{int}) + \hat{u}^{\varepsilon,ref}_{\omega}(\mathbf{x},z_{int}) &= \hat{u}^{\varepsilon,tr}_{\omega}(\mathbf{x},z_{int}),\\
\partial_z\hat{u}^{\varepsilon,inc}_{\omega}(\mathbf{x},z_{int}) + \partial_z\hat{u}^{\varepsilon,ref}_{\omega}(\mathbf{x},z_{int}) &= \partial_z\hat{u}^{\varepsilon,tr}_{\omega}(\mathbf{x},z_{int}).
\end{aligned}$$

这些条件导出以下方程组

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{a}^{\varepsilon}_{0,\omega}(\mathbf{k})}{\sqrt{\mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{k})}} + \frac{\hat{b}^{\varepsilon,ref}_{\omega}(\mathbf{k})}{\sqrt{\mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{k})}} &= \frac{\hat{a}^{\varepsilon,tr}_{\omega}(\mathbf{k})}{\sqrt{\mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{1}(\mathbf{k})}},\\
\sqrt{\mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{k})}\hat{a}^{\varepsilon}_{0,\omega}(\mathbf{k}) - \sqrt{\mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{k})}\hat{b}^{\varepsilon,ref}_{\omega}(\mathbf{k}) &= \sqrt{\mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{1}(\mathbf{k})}\hat{a}^{\varepsilon,tr}_{\omega}(\mathbf{k}),
\end{aligned}$$

其解为

$$\hat{a}^{\varepsilon,tr}_{\omega}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\tau^{\varepsilon}_{+}(\mathbf{k})}\hat{a}^{\varepsilon}_{0,\omega}(\mathbf{k}) \qquad \text{and} \qquad \hat{b}^{\varepsilon,ref}_{\omega}(\mathbf{k}) = \frac{\tau^{\varepsilon}_{-}(\mathbf{k})}{\tau^{\varepsilon}_{+}(\mathbf{k})}\hat{a}^{\varepsilon}_{0,\omega}(\mathbf{k}),$$

其中

$$\tau^{\varepsilon}_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{k})}{\mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{1}(\mathbf{k})}} \pm \sqrt{\frac{\mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{1}(\mathbf{k})}{\mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{k})}}\right),$$

从而得到能量守恒关系

$$|\hat{a}^{\varepsilon}_{0,\omega}(\mathbf{k})|^2 = |\hat{a}^{\varepsilon,tr}_{\omega}(\mathbf{k})|^2 + |\hat{b}^{\varepsilon,ref}_{\omega}(\mathbf{k})|^2.$$

3.2 反射波

从　　根据上述分析，在平面 $z=0$ 中观测到的反射波可明确表示为

$$\begin{aligned}
u^{\varepsilon}(t,\mathbf{x},z=0^-) &= \frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon^2}\iint \hat{u}^{\varepsilon,ref}_{\omega}(\mathbf{k},z=0)e^{-i\omega(t/\varepsilon-\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}/\sqrt{\varepsilon})}\omega^2 d\omega d\mathbf{k}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon^2}\iint e^{i\omega \mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{k})z_{int}/\varepsilon}\frac{\tau^{\varepsilon}_{-}(\mathbf{k})\hat{a}^{\varepsilon}_{0,\omega}(\mathbf{k})}{\tau^{\varepsilon}_{+}(\mathbf{k})\sqrt{\omega \mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{k})}}e^{-i\omega(t/\varepsilon-\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}/\sqrt{\varepsilon})}\omega^2 d\omega d\mathbf{k}\\
&= \frac{1}{2(2\pi)^3}\iint e^{2i\omega \mathit{\Lambda}^{\varepsilon}_{0}(\mathbf{q}+\mathbf{k}_0/\sqrt{\varepsilon})z_{int}/\varepsilon}\frac{\tau^{\varepsilon}_{-}(\mathbf{q}+\mathbf{k}_0/\sqrt{\varepsilon})}{\tau^{\varepsilon}_{+}(\mathbf{q}+\mathbf{k}_0/\sqrt{\varepsilon})}e^{-i\omega(t/\varepsilon-\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}_0/\varepsilon-\mathbf{x}\cdot\mathbf{q}/\sqrt{\varepsilon})}\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q})\omega^2 d\omega d\mathbf{q},
\end{aligned}$$

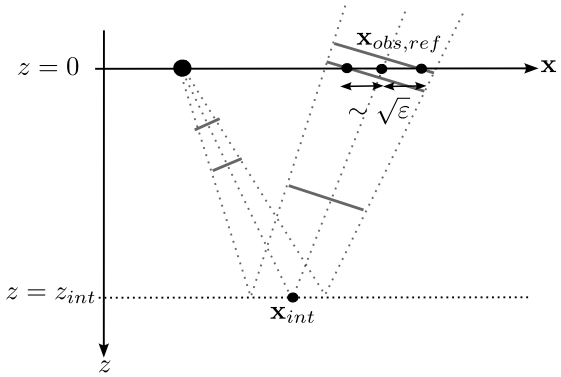

图6：示意式（30）中与光束宽度 $\sqrt{\varepsilon}$ 同量级的修正，该宽度大于脉冲宽度 ε；图中用探测锥体和镜面反射锥内灰色直线的宽度表示。这一 $\sqrt{\varepsilon}$ 修正需要计入观测时间，才能准确描述横跨整个光束宽度的镜面反射波。

其中最后一行　　由变量替换 $\mathbf{k} = \mathbf{q} + \mathbf{k}_0/\sqrt{\varepsilon}$ 得出，这与 $\hat{\Psi}$ 中的论证一致 (29).

利用展开式（26），我们引入以下观测位置和观测时间：

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{obs,ref} + \sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{y} \qquad \text{and} \qquad t = t^{\varepsilon}_{obs,ref}(\mathbf{y}) := t_{obs,ref} + \sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{y}, \tag{30}$$

其中

$$\mathbf{x}_{obs,ref} := \frac{2\mathbf{k}_0 z_{int}}{\mathscr{s}_0} \qquad \text{and} \qquad t_{obs,ref} := \frac{2z_{int}}{c_0^2 \mathscr{s}_0}, \tag{31}$$

其中$\mathscr{s}_0$ 由式（28）定义。采用这一选择，我们得到镜面反射波的非平凡渐近表达式：

$$\begin{aligned} U^{ref}(s,\mathbf{y}) &:= \lim_{\varepsilon\to 0} u^{\varepsilon}\big(t^{\varepsilon}_{obs,ref}(\mathbf{y}) + \varepsilon s, \mathbf{x}_{obs,ref} + \sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{y}, z = 0\big) \\ &= \frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^3} \int e^{-i\omega(s - \mathbf{y}\cdot\mathbf{q})} \hat{\mathcal{U}}_0(\omega, \mathbf{q}, 2z_{int}) \hat{\Psi}(\omega, \mathbf{q}) \omega^2 d\omega d\mathbf{q}. \end{aligned} \tag{32}$$

这里，U^{ref} 表示在位置$\mathbf{x}_{obs,ref}$、时间$t^{\varepsilon}_{obs,ref}$（$\mathbf{y}$）处，以源的参考系观测到的渐近波前。传播时间对偏移量$\mathbf{y}$的依赖，反映了光束宽度$\sqrt{\varepsilon}$ 大于脉冲宽度 ε这一事实，同时也体现了波前相对于垂直方向斜向传播的情况（见图6）。注意，$\mathbf{x}_{obs,ref}$ 是横向位置的两倍

$$\mathbf{x}_{int} := \frac{\mathbf{k}_0 z_{int}}{\mathscr{s}_0}, \tag{33}$$

入射脉　　冲射向界面。因此，标准反射关系为　　s

$$\theta_{inc} = \theta^0_{ref} := \arctan\Big(\frac{|\mathbf{k}_0|}{\mathscr{s}_0}\Big), \tag{34}$$

其中入射角与反射角相等。反射的几何性质示意见图7。

关于反射波的脉冲轮廓，反射系数为

$$\mathcal{R} := \frac{\mathscr{s}_0 - \mathscr{s}_1}{\mathscr{s}_0 + \mathscr{s}_1}, \tag{35}$$

and

$$\hat{\mathcal{U}}_0(\omega, \mathbf{q}, z) := e^{-i\omega z c_0 \mathbf{q}^T A_0 \mathbf{q}/2}, \tag{36}$$

其中 A_0 在式（27）中定义。项 $\hat{\mathsf{U}}_0$ 生成如下齐次半群：

$$\check{\mathcal{U}}_0(\omega, \mathbf{y}, z) := \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \int e^{i\omega \mathbf{y}\cdot\mathbf{q}} e^{-i\omega z c_0 \mathbf{q}^T A_0 \mathbf{q}/2} d\mathbf{q},$$

满足薛定谔型方程

$$i\partial_z \check{\mathcal{U}}_0(\omega, \mathbf{y}, z) + \frac{1}{2k_{0,\omega}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \Big(A_0 \nabla_{\mathbf{y}} \check{\mathcal{U}}_0\Big)(\omega, \mathbf{y}, z) = 0 \qquad z > 0, \tag{37}$$

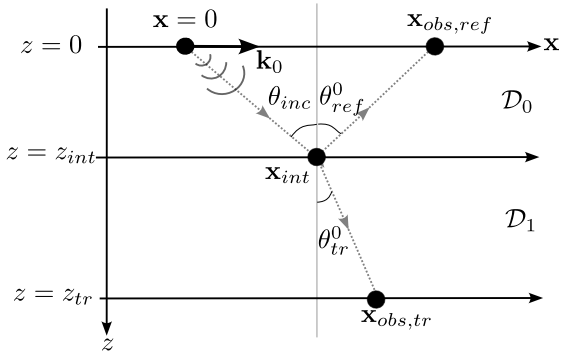

图7：位于 $z=z_{int}$ 的平坦界面上的反射与透射示意图。源位于平面 $z=0$ 中的 $\mathbf{x}=0$ 处，发射波以入射角 θ_{inc} 入射到界面上的 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_{int}$ 处。角度为 θ^0_{ref} 的反射波在平面 $z=0$ 中的 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_{obs,ref}$ 处观测到，而角度为 θ^0_{tr} 的透射波在平面 $z=z_{tr}$ 中的 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_{obs,tr}$ 处观测到。

其中

$$\check{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{y},z=0)=\delta(\mathbf{y}) \qquad \text{and} \qquad k_{0,\omega}=\omega/c_0,$$

这是傍轴近似的特征。由于初始横向方向 $\mathbf{k}_0$，非零，该方程不会化简为带有拉普拉斯算子的标准薛定谔方程。然而，在极限 $\mathbf{k}_0\to 0$ 下，标准拉普拉斯结构会恢复。

在时域中，函数

$$\mathcal{U}_0(s,\mathbf{y},z):=\frac{1}{2(2\pi)^3}\int e^{-i\omega(s-\mathbf{y}\cdot\mathbf{q})}\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q},z)\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q})\omega^2 d\omega d\mathbf{q}, \tag{38}$$

它对应于式（32）中的脉冲轮廓，满足傍轴波动方程

$$\partial^2_{sz}\mathcal{U}_0-\frac{c_0}{2}\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\Big(A_0\nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{U}_0\Big)=0, \qquad \text{with} \qquad \mathcal{U}_0(s,z=0,\mathbf{y})=\frac{1}{2}\Psi(s,\mathbf{y}). \tag{39}$$

因此，平坦（未扰动）界面反射的波可写为

$$U^{ref}(s,\mathbf{y})=\mathcal{R}\,\mathcal{U}_0(s,\mathbf{y},2z_{int}).$$

在傍轴波模型中，这一表达式对应于发射脉冲从源位置传播到界面，再返回源平面的过程，对应的总传播距离为$2z_{int}$。因子 R 表示在界面处的反射。

3.3 透射波

采用与反射波相同的策略，在 $z=z_{tr}$ 处观测到的透射波可写为

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(t,\mathbf{x},z=z_{tr}) &= \frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon^2}\iint \hat{u}^{\varepsilon,tr}_\omega(\mathbf{k},z=z_{tr})e^{-i\omega(t/\varepsilon-\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}/\sqrt{\varepsilon})}\omega^2 d\omega d\mathbf{k}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon^2}\iint \frac{\hat{a}^\varepsilon_{0,\omega}(\mathbf{k})}{\tau^\varepsilon_+(\mathbf{k})\sqrt{\omega\mathfrak{s}^\varepsilon_1(\mathbf{k})}}e^{i\omega\mathfrak{s}^\varepsilon_1(\mathbf{k})(z_{tr}-z_{int})/\varepsilon}e^{-i\omega(t/\varepsilon-\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}/\sqrt{\varepsilon})}\omega^2 d\omega d\mathbf{k}\\
&= \frac{1}{2(2\pi)^3}\iint e^{i\omega(\mathfrak{s}^\varepsilon_0(\mathbf{q}+\mathbf{k}_0/\sqrt{\varepsilon})z_{int}+\mathfrak{s}^\varepsilon_1(\mathbf{q}+\mathbf{k}_0/\sqrt{\varepsilon})(z_{tr}-z_{int}))/\varepsilon}\frac{\sqrt{\mathfrak{s}^\varepsilon_0(\mathbf{q}+\mathbf{k}_0/\sqrt{\varepsilon})}}{\tau^\varepsilon_+(\mathbf{q}+\mathbf{k}_0/\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\mathfrak{s}^\varepsilon_1(\mathbf{q}+\mathbf{k}_0/\sqrt{\varepsilon})}}\\
&\qquad\qquad \times e^{-i\omega(t/\varepsilon-\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}_0/\varepsilon-\mathbf{x}\cdot\mathbf{q}/\sqrt{\varepsilon})}\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q})\omega^2 d\omega d\mathbf{q}.
\end{aligned}$$

利用展开式 (26)，我们得到镜面透射波的以下渐近表达式：

$$\begin{aligned}
U^{tr}(s,\mathbf{y}) &:= \lim_{\varepsilon\to 0}u^\varepsilon\big(t^\varepsilon_{obs,tr}(\mathbf{y})+\varepsilon s,\mathbf{x}_{obs,tr}+\sqrt{\varepsilon}\mathbf{y},z=z_{tr}\big)\\
&= \frac{\mathcal{T}}{2(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\mathfrak{s}_0}{\mathfrak{s}_1}}\int e^{-i\omega(s-\mathbf{y}\cdot\mathbf{q})}\hat{\mathcal{U}}_1(\omega,\mathbf{q},z_{tr}-z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q},z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q})\omega^2 d\omega d\mathbf{q},
\end{aligned} \tag{40}$$

with

$$\mathbf{x}_{obs,tr}:=\mathbf{x}_{int}+\mathbf{x}_{tr}:=\mathbf{x}_{int}+\frac{\mathbf{k}_0(z_{tr}-z_{int})}{\mathfrak{s}_1}, \tag{41}$$

其中 $\mathbf{x}_{int}$ 给出　由 (33) 给出，垂向慢度$\mathit{ɔ}j$ 由 (28) 给出，相应的观测时间　　by

$$t^{\varepsilon}_{obs,tr}(\mathbf{y}) := t_{obs,tr} + \sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{y} \qquad \text{with} \qquad t_{obs,tr} := \frac{z_{int}}{c_0^2 \mathit{ɔ}_0} + \frac{z_{tr} - z_{int}}{c_1^2 \mathit{ɔ}_1}. \tag{42}$$

这里，量 U^{tr} 表示在源的参考系中，于位置 $\mathbf{x}_{obs,\ tr}$时刻 $t^{\varepsilon}_{obs,\ tr}(\mathbf{y})$观测到的波前。到达时间 $t_{obs,\ tr}$ 是源到界面的传播时间与从界面到平面 $z = z_{tr}$的传播时间之和。与反射情形一样，$t^{\varepsilon}_{obs,\ tr}(\mathbf{y})$中的 $\sqrt{\varepsilon}$ 修正项考虑了观测点的横向偏移（其相对于脉冲宽度较大），以及波前相对于垂直方向的斜向传播。

横向位置 $\mathbf{x}_{obs,\ tr}$ 由两部分组成：脉冲入射到界面处的横向位置，以及脉冲穿过第二介质并传播至平面 $z = z_{tr}$时累积的额外横向位移。透射的几何性质如图7所示。根据这一表述，我们可得到斯涅尔定律：

$$\frac{\sin(\theta_{inc})}{c_0} = \frac{\sin(\theta^0_{tr})}{c_1} = |\mathbf{k}_0|, \tag{43}$$

其中 θ_{inc} 由式（34）定义，且

$$\theta^0_{tr} := \arctan\Big(\frac{|\mathbf{k}_0|}{\mathit{ɔ}_1}\Big). \tag{44}$$

对于脉冲轮廓，透射系数定义为

$$\mathcal{T} := \frac{2\sqrt{\mathit{ɔ}_0 \mathit{ɔ}_1}}{\mathit{ɔ}_0 + \mathit{ɔ}_1}, \tag{45}$$

从而满足守恒关系 $\mathrm{R}^2 + \mathrm{T}^2 = 1$ 。函数 $\hat{}\mathrm{U}_0$ 在式（36）中定义，而 $\hat{}\mathrm{U}_1$ 则类似地定义为

$$\hat{\mathit{u}}_1(\omega, \mathbf{q}, z) := e^{-i\omega z c_1 \mathbf{q}^T A_1 \mathbf{q}/2}, \tag{46}$$

其中，A_1 由式（27）给出。将 U_1 记为式（38）的类似表达式，其中以 c_1 和 A_1 替代 c_0 和 A_0；它满足相应的傍轴波动方程（39）。在傍轴近似下，表达式（40）描述了发射脉冲从源传播到界面，再从界面传播到平面 $z = z_{tr}$ 的过程。因子 T 表示界面处的透射。

4 随机界面的反射波和透射波

本节将上一节的结果推广到随机起伏界面的情形。我们利用前面引入的模态分解，推导反射波和透射波的表达式。

回想一下，界面定义为

$$z = z^{\varepsilon}_{int}(\mathbf{x}) := z_{int} + \varepsilon\, V\Big(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon^{\gamma}}\Big).$$

如上所述，我们将入射波、反射波和透射波表示为

$$u^{\varepsilon,inc}(t,\mathbf{x},z) = \frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon^2}\iint e^{-i\omega(t/\varepsilon - \mathbf{x}\cdot\mathbf{k}/\sqrt{\varepsilon})}\frac{\hat{a}^{\varepsilon}_{0,\omega}(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega \mathit{ɔ}^{\varepsilon}_0(\mathbf{k})}} e^{i\omega \mathit{ɔ}^{\varepsilon}_0(\mathbf{k})(z - z_{int})/\varepsilon}\omega^2 d\omega d\mathbf{k} \qquad 0 < z < z^{\varepsilon}_{int}(\mathbf{x}),$$

$$u^{\varepsilon,ref}(t,\mathbf{x},z) = \frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon^2}\iint e^{-i\omega(t/\varepsilon - \mathbf{x}\cdot\mathbf{k}/\sqrt{\varepsilon})}\frac{\hat{b}^{\varepsilon,ref}_{\omega}(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega \mathit{ɔ}^{\varepsilon}_0(\mathbf{k})}} e^{-i\omega \mathit{ɔ}^{\varepsilon}_0(\mathbf{k})(z - z_{int})/\varepsilon}\omega^2 d\omega d\mathbf{k} \qquad 0 < z < z^{\varepsilon}_{int}(\mathbf{x}),$$

$$u^{\varepsilon,tr}(t,\mathbf{x},z) = \frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon^2}\iint e^{-i\omega(t/\varepsilon - \mathbf{x}\cdot\mathbf{k}/\sqrt{\varepsilon})}\frac{\hat{a}^{\varepsilon,tr}_{\omega}(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega \mathit{ɔ}^{\varepsilon}_1(\mathbf{k})}} e^{i\omega \mathit{ɔ}^{\varepsilon}_1(\mathbf{k})(z - z_{int})/\varepsilon}\omega^2 d\omega d\mathbf{k} \qquad z > z^{\varepsilon}_{int}(\mathbf{x}).$$

根据式（13），这些表达式给出了随机界面 $z = z^{\varepsilon}_{int}(\mathbf{x})$ 上的两个连续性关系，它们描述了透射和反射机制：

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon,inc}(t,\mathbf{x},z^{\varepsilon}_{int}(\mathbf{x})^-) + u^{\varepsilon,ref}(t,\mathbf{x},z^{\varepsilon}_{int}(\mathbf{x})^-) &= u^{\varepsilon,tr}(t,\mathbf{x},z^{\varepsilon}_{int}(\mathbf{x})^+), \\ \partial_z u^{\varepsilon,inc}(t,\mathbf{x},z^{\varepsilon}_{int}(\mathbf{x})^-) + \partial_z u^{\varepsilon,ref}(t,\mathbf{x},z^{\varepsilon}_{int}(\mathbf{x})^-) &= \partial_z u^{\varepsilon,tr}(t,\mathbf{x},z^{\varepsilon}_{int}(\mathbf{x})^+). \end{aligned} \tag{47}$$

根据这些关系，观测到的反射波和透射波可以写成一种形式，从而明确体现界面起伏的作用，并便于后续分析。

引理 4.1 在 ε 的首阶近似下，反射波和透射波可以写为

$$u^{\varepsilon,ref}(t,\mathbf{x},z=0)\simeq\frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^3}\iiint e^{-i\omega(t-2\mathfrak{s}_0 z_{int}-\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}_0)/\varepsilon}e^{i\omega\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{obs,ref})/\sqrt{\varepsilon}}\\ \times K^{\varepsilon}(2\mathfrak{s}_0,\omega,\mathbf{q},\mathbf{q}')\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q},z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}')\omega^2 d\omega d\mathbf{q}' d\mathbf{q}, \tag{48}$$

and

$$u^{\varepsilon,tr}(t,\mathbf{x},z=z_{tr})\simeq\frac{\mathcal{T}}{2(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\mathfrak{s}_0}{\mathfrak{s}_1}}\iiint e^{-i\omega(t-\mathfrak{s}_0 z_{int}-\mathfrak{s}_1(z_{tr}-z_{int})-\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}_0)/\varepsilon}e^{i\omega\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{obs,tr})/\sqrt{\varepsilon}}\\ \times K^{\varepsilon}(\mathfrak{s}_0-\mathfrak{s}_1,\omega,\mathbf{q},\mathbf{q}')\hat{\mathcal{U}}_1(\omega,\mathbf{q},z_{tr}-z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}')\omega^2 d\omega d\mathbf{q}' d\mathbf{q}. \tag{49}$$

与随机界面相关的散射算子 K^{ε} 具有如下傅里叶表示：

$$K^{\varepsilon}(\tau,\omega,\mathbf{q},\mathbf{q}')=\frac{\omega^2}{\varepsilon(2\pi)^2}\int e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_{int})/\sqrt{\varepsilon}}e^{i\omega\tau V(\mathbf{x}'/\varepsilon^{\gamma})}d\mathbf{x}'. \tag{50}$$

垂向慢度$\mathfrak{s}_j$ 由(28)定义，函数$\hat{\mathcal{U}}_j$ 由(36) 和(46)定义；而$\mathbf{x}_{int}$ （即入射脉冲照射界面处的横向位置）以及 $\mathbf{x}_{obs,ref}$ 和$\mathbf{x}_{obs,tr}$（即观测反射波和透射波处的横向位置）由(33)定义（分别由(31) 和(41)定义）。

散射算子 K^{ε} 是一个核心量，概括了界面随机性的影响。它以角频率 ω为参数，中心位于$\mathbf{x}_{int}$，其有效支撑范围为$\mathbf{q}-\mathbf{q}'$，与光束宽度 $\sqrt{\varepsilon}$相当。该算子描述了由源项 Ψ支持的、横向方向为$\mathbf{q}'$的入射平面波，如何散射至方向$\mathbf{q}$。

对于反射波（48）和透射波（49），方向为$\mathbf{q}'$ 的入射平面波在傍轴近似下，按照$\hat{\mathsf{U}}_0(\mathbf{q}')$传播，直至到达粗糙界面。在界面处，算子 K^{ε} 描述散射和模式耦合。与界面相互作用后，反射分量沿相反的 z方向按照$\hat{\mathsf{U}}_0(\mathbf{q})$传播，而透射分量则按照$\hat{\mathsf{U}}_1(\mathbf{q})$传播。

注意，对于 $V\equiv 0$，散射算子化为恒等算子，我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u^{\varepsilon,ref}(t^{\varepsilon}_{obs,ref}(\mathbf{y})+\varepsilon s,\mathbf{x}_{obs,ref}+\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{y},z=0)=U^{ref}(s,\mathbf{y}),\\ \lim_{\varepsilon\to 0}u^{\varepsilon,tr}(t^{\varepsilon}_{obs,tr}(\mathbf{y})+\varepsilon s,\mathbf{x}_{obs,tr}+\sqrt{\varepsilon}\mathbf{y},z=z_{tr})=U^{tr}(s,\mathbf{y}),$$

其中 U^{ref} 和 U^{tr} 分别定义于 (32) 和 (40) 中。

在本文余下部分，我们将进一步分析算子 K^{ε} 在高频极限 $\varepsilon\to 0$ 下的有效统计行为。以下两种情况

$$\gamma=1/2\qquad\text{and}\qquad\gamma>1/2,$$

将分别进行分析，因为它们会使反射波和透射波呈现出截然不同的统计行为。

5 γ =1/2 时的镜面锥

情形 $\gamma=1/2$ 对应于界面起伏的相关长度与光束宽度处于同一量级的情况。由于波长也假设与起伏振幅处于同一量级，因此可以合理预期反射波和透射波具有随机到达时间，但不会出现均匀化效应（示意图见图 8）。为了从数学上描述反射波的这一现象，我们进行如下变量替换

$$\mathbf{x}'\to\mathbf{x}_{int}+\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{y}'$$

在式（48）中，因此，首阶观测到的反射波场为

$$u^{\varepsilon,ref}(t,\mathbf{x},z=0)\simeq\frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^5}\iiiint e^{-i\omega(t-2\mathfrak{s}_0 z_{int}-\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}_0)/\varepsilon}e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot\mathbf{y}'}e^{2i\omega\mathfrak{s}_0 V(\mathbf{x}_{int}/\sqrt{\varepsilon}+\mathbf{y}')}\\ \times e^{i\omega\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{obs,ref})/\sqrt{\varepsilon}}\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q},z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\\ \times\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}')\omega^4 d\omega d\mathbf{y}' d\mathbf{q}' d\mathbf{q}.$$

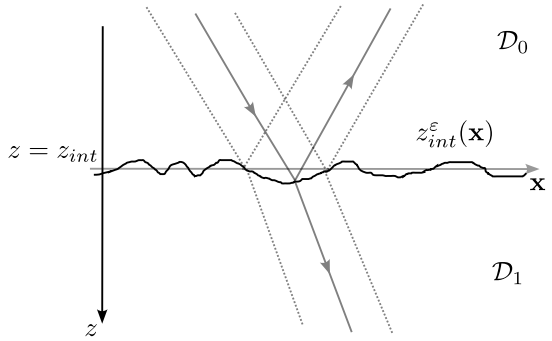

图 8：随机界面反射与透射的示意图，其中 $\gamma = 1/2$，因此波束的宽度处于随机界面变化的空间尺度上。反射波和透射波的传播时间受到涨落 V 的影响。

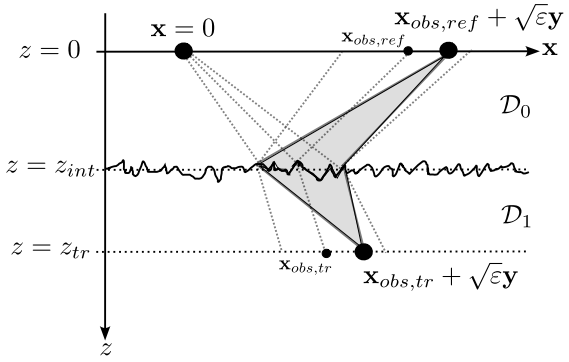

图9：在点 $\mathbf{x}_{obs,\ ref} \pm \sqrt{\varepsilon}\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{x}_{obs,\ tr} + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{y}$ 分别观测到的反射波和透射波的各项贡献示意图。

这里，横向位置$\mathbf{x}_{obs,\ ref}$ 与平坦界面情形中的相同（见式（31））， $\mathfrak{s}_0$ 由式（28）定义，而 $\hat{\mathrm{U}}_0$ 由式（36）定义。快速振荡分量的存在提示我们引入

$$U^{\varepsilon,ref}(s,\mathbf{y}) := u^{\varepsilon,ref}\big(t^{\varepsilon}_{obs,ref}(\mathbf{y}) + \varepsilon s, \mathbf{x}_{obs,ref} + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{y}, z = 0\big) \qquad (s,\mathbf{y}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2,$$

其中 $t^{\varepsilon}_{obs,\ ref}(\mathbf{y})$ 由式（30）定义，对应于在平面 $z = 0$ 中观测反射波的预期传播时间。随后，在与平坦界面情形中的镜面反射波相同的横向位置和移动时间坐标系中观测到波前 $U^{\varepsilon,\ ref}$。需要指出的是，为了记号简便，在本文余下部分我们记作

$$X = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2.$$

对于反射波波前，我们得到以下结果。

命题 5.1 族 $(U^{\varepsilon,\ ref})_{\varepsilon}$ 在 $L^2(X)$ 中依分布收敛于

$$U^{ref}(s,\mathbf{y}) := \frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^5}\iiiint e^{-i\omega(s-2\mathfrak{s}_0\mathcal{V}(\mathbf{y}')-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot\mathbf{y}'} \times \hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q},z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}')\omega^4 d\omega d\mathbf{y}' d\mathbf{q}' d\mathbf{q},$$

其中，$\mathcal{V}$ 是一个与 V 具有相同概率分布的随机场。

反射波前 U^{ref} 由在点 $\mathbf{y}$ 观测到的贡献叠加而成。这些贡献均产生沿初始横向方向 $\mathbf{q}'$ 发射的波，它们按照 $\hat{\mathrm{U}}_0(\mathbf{q}')$ 传播，并在点 $\mathbf{y}'$ 散射至方向 $\mathbf{q}$，随后再按照 $\hat{\mathrm{U}}_0(\mathbf{q})$ 传播回来（示意图见图 9）。请注意，该反射波前的光束宽度仍为 $\sqrt{\varepsilon}$ 量级，且观测点仍为 $\mathbf{x}_{obs,\ ref}$。换言之， U^{ref}对应于镜面反射分量：镜面反射锥和式（34）中定义的角度 θ^0_{ref} 均未受到显著扰动。最后，在 $z = 0$ 处，随机相移 $2\mathfrak{s}_0\mathrm{V}(\mathbf{y}')$ 通过在相对位置 $\mathbf{y}'$ 处散射的贡献出现在 U^{ref} 中。

此外， U^{ref} 可以改写为

$$U^{ref}(s,\mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^3}\iiint\!\!\!\int e^{-i\omega(s-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}K(2\vartheta_0,\omega,\mathbf{q}',\mathbf{q}) \times \hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q},z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}')\omega^2 d\omega d\mathbf{y}' d\mathbf{q}' d\mathbf{q},$$

其中散射算子

$$K(\tau,\omega,\mathbf{q}',\mathbf{q}) := \frac{\omega^2}{(2\pi)^2}\int e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot\mathbf{y}'}e^{i\omega\tau V(\mathbf{y}')}d\mathbf{y}' \tag{51}$$

根据 V的平稳性，其概率分布与式（50）中定义的 K^ε 相同：对于任意 φ， $\psi\in\mathsf{S}(\mathbb{R}^2)$（其中 $\mathsf{S}(\mathbb{R}^2)$表示施瓦茨类），随机变量

$$K^\varepsilon(\tau,\omega,\varphi,\psi) := \iint K^\varepsilon(\tau,\omega,\mathbf{q}',\mathbf{q})d\mathbf{q}d\mathbf{q}'$$

与.....的概率分布相同

$$K(\tau,\omega,\varphi,\psi) := \iint K(\tau,\omega,\mathbf{q}',\mathbf{q})d\mathbf{q}d\mathbf{q}',$$

对于任意 ε。

（命题 5.1 的证明）证明分三步进行。首先，我们证明在 $\mathsf{S}'(X)$（温和分布空间）中的收敛，然后利用稠密性论证，证明在赋予弱拓扑的 $L^2(X)$中的收敛。最后，根据能量守恒关系，证明在赋予强拓扑的 $L^2(X)$中的收敛。

对于第一步，将$(U^{\varepsilon,\ ref})_\varepsilon$视为温和分布族。在 ε的首阶下，波前 $U^{\varepsilon,\ ref}$ 表示为

$$U^{\varepsilon,ref}(s,\mathbf{y}) \simeq \frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^5}\iiint\!\!\!\int e^{-i\omega(s-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot\mathbf{y}'}e^{2i\omega\vartheta_0 V(\mathbf{x}_{int}/\sqrt{\varepsilon}+\mathbf{y}')} \times \hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q},z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}')\omega^4 d\omega d\mathbf{y}' d\mathbf{q}' d\mathbf{q},$$

对于这些对象，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\|U^{\varepsilon,ref}\|_{L^2(X)} = \|U^{ref}\|_{L^2(X)} = \frac{\mathcal{R}}{2}\|\Psi\|_{L^2(X)}. \tag{52}$$

利用 (52)，结合 [34],在 $\mathsf{S}'(X)$ 中的紧性可得

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\left|\langle U^{\varepsilon,ref},\varphi\rangle_{L^2(X)}\right| \le \frac{\mathcal{R}}{2}\|\Psi\|_{L^2(X)}\|\varphi\|_{L^2(X)}, \tag{53}$$

对任意 $\varphi\in\mathsf{S}(X)$ 均成立。有限维分布的收敛性由 V的平稳性推出，这使我们可以消去平移 $\mathbf{x}_{int}/\sqrt{\varepsilon}$，从而对任意 $n\ge1$和 $\varphi_1,\dots,\varphi_n\in\mathsf{S}(X)$，有：

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^n\langle U^{\varepsilon,ref},\varphi_j\rangle_{L^2(X)}\Big] = \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^n\langle U^{ref},\varphi_j\rangle_{L^2(X)}\Big].$$

因此，$(U^{\varepsilon,ref})_\varepsilon$ 在 $\mathsf{S}'(X)$ 中是紧的，且其有限维分布收敛到相应的极限；根据 [34],$(U^{\varepsilon,ref})_\varepsilon$ 在 $\mathsf{S}'(X)$ 中依分布收敛。

为了得到在 $L^2(X)$中的收敛，我们使用斯科罗霍德表示定理 [9, 定理 6.7，第 70] 页：存在一个概率空间，在其上定义了 $(\widetilde{U}^{\varepsilon,ref})_\varepsilon$和 $\widetilde{U}^{ref}$，它们的概率分布分别与 $(U^{\varepsilon,ref})_\varepsilon$和 U^{ref}相同，并且 $(\widetilde{U}^{\varepsilon,ref})_\varepsilon$几乎必然在 $\mathsf{S}'(X)$ 中收敛到 $\widetilde{U}^{ref}$。由于 $\mathsf{S}(X)$ 在 $L^2(X)$ 中稠密，令 $\varphi\in L^2(X)$，并令 $(\varphi_n)_n$ 为 $\mathsf{S}(X)$ 中的一列函数，它在 $L^2(X)$ 中收敛到 φ。沿用 (53) 中的相同步骤，我们得到

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\left|\langle\widetilde{U}^{\varepsilon,ref}-\widetilde{U}^{ref},\varphi\rangle_{L^2(X)}\right| \le \mathcal{R}\|\Psi\|_{L^2(X)}\|\varphi-\varphi_n\|_{L^2(X)} + \underbrace{\limsup_{\varepsilon\to0}\left|\langle\widetilde{U}^{\varepsilon,ref}-\widetilde{U}^{ref},\varphi_n\rangle_{L^2(X)}\right|}_{=0\text{ with probability }1}.$$

在 n 中取极限可知，$(\langle\widetilde{U}^{\varepsilon,\ ref},\ \varphi\rangle_{L^2(X)})_\varepsilon$以概率 1 收敛到 $\langle U^{ref},\ \varphi\rangle_{L^2(X)}$。这意味着 $(\widetilde{U}^{\varepsilon,\ ref})_\varepsilon$几乎必然收敛到 $\widetilde{U}^{ref}$，其中可分空间 $L^2(X)$ 配备了弱拓扑。最后，结合 (52)（它在新的概率空间上成立）和 [11, 定理 3.32，第 78] 页，可得强收敛。由于几乎必然收敛蕴含依分布收敛，我们得出结论：$(U^{\varepsilon,\ ref})_\varepsilon$依分布收敛到 U^{ref}，其中 $L^2(X)$ 配备了强拓扑。□

在与平坦界面的镜面透射波相同的横向位置和移动时间坐标系中观测到的透射波定义为

$$U^{\varepsilon,tr}(s,\mathbf{y}) := u^{\varepsilon,tr}\big(t^{\varepsilon}_{obs,tr}(\mathbf{y})+\varepsilon s, \mathbf{x}_{obs,tr}+\sqrt{\varepsilon}\mathbf{y}, z=z_{tr}\big) \qquad (s,\mathbf{y})\in X,$$

其中，$\mathbf{x}_{obs,tr}$ 和 $t^{\varepsilon}_{obs,tr}(\mathbf{y})$ 分别由 (41) 和 (42) 定义，而 $u^{\varepsilon,tr}$ 由首阶表达式 (49) 给出。其渐近行为由以下结果刻画；该结果的证明与反射波的证明过程相同，因此略去。

命题 5.2 族 $(U^{\varepsilon,tr})_\varepsilon$ 在 $L^2(X)$ 中依分布收敛至

$$U^{tr}(s,\mathbf{y}) := \frac{\mathcal{T}}{2(2\pi)^5}\sqrt{\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}}\iiiint e^{-i\omega(s-(\vartheta_0-\vartheta_1)\mathcal{V}(\mathbf{y}')-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot\mathbf{y}'} \times \hat{\mathcal{U}}_1(\omega,\mathbf{q},z_{tr}-z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}')\omega^4 d\omega d\mathbf{y}' d\mathbf{q}' d\mathbf{q},$$

其中，$\mathcal{V}$ 是一个与 V 具有相同概率分布的随机场。

透射波前 U^{tr} 同样由在点 $\mathbf{y}$ 观测到的衍射贡献叠加而成。每一项贡献都对应于这样一些波：它们以初始横向方向 $\mathbf{q}'$发射，按照 $\hat{\mathcal{U}}_0$, 传播，在相对位置$\mathbf{y}'$ 穿过界面时散射至方向 $\mathbf{q}$ ，随后按照 $\hat{\mathcal{U}}_1$ 传播，直至到达 $z=z_{tr}$ （见图9）。与反射情形一样，光束宽度仍为 $\sqrt{\varepsilon}$ 量级，且观测点仍为 $\mathbf{x}_{obs,tr}$，因此镜面透射锥及由 (44) 定义的角度 θ^0_{tr} 均不会受到显著扰动。此外，随机相移 $(\vartheta_0-\vartheta_1)\mathcal{V}(\mathbf{y}')$ 出现在 U^{tr} 中，这是由在相对位置 $\mathbf{y}'$ 处散射的贡献所致。

透射波也可以利用散射算子 (51) 重写为

$$U^{tr}(s,\mathbf{y}) := \frac{\mathcal{T}}{2(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}}\iiiint e^{-i\omega(s-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}K(\vartheta_0-\vartheta_1,\omega,\mathbf{q}',\mathbf{q}) \times \hat{\mathcal{U}}_1(\omega,\mathbf{q},z_{tr}-z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}')\omega^2 d\omega d\mathbf{y}' d\mathbf{q}' d\mathbf{q},$$

其中， K 由 (51) 给出。

6 情形 $\gamma > 1/2$：均匀化镜面反射与透射分量

情形 $\gamma>1/2$ 对应于界面起伏的相关长度小于光束宽度。因此，入射波会受到强烈散射，并出现均匀化现象。

本节考虑以下反射波前

$$U^{\varepsilon,ref}(s,\mathbf{y},\widetilde{\mathbf{y}}) := u^{\varepsilon,ref}\big(t^{\varepsilon}_{obs,ref}(\mathbf{y})+\varepsilon^\gamma \mathbf{k}_0\cdot\widetilde{\mathbf{y}}+\varepsilon s, \mathbf{x}_{obs,ref}+\sqrt{\varepsilon}\mathbf{y}+\varepsilon^\gamma\widetilde{\mathbf{y}}, z=0\big) \qquad (s,\ \mathbf{y}\ \widetilde{\ }\mathbf{y})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2, \tag{54}$$

其中， $u^{\varepsilon,\ ref}$ 在首阶下由（48）给出，而$t^{\varepsilon}_{obs,\ ref}$（$\mathbf{y}$）和$\mathbf{x}_{obs,\ ref}$ 分别由（30）和（31）定义。因此，我们考察的是镜面反射分量。附加变量 $\widetilde{\ }\mathbf{y}$ 在此用于描述相关长度尺度上的变化。 $U^{\varepsilon,\ ref}$ 的渐近行为由以下结果描述。为简化记号，我们记

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$$

在本文余下部分中。

命题 6.1 族$(U^{\varepsilon,\ ref})_\varepsilon$在$\mathcal{S}'(\mathbb{X})$（温和分布的集合）中依概率收敛于确定性脉冲轮廓

$$\begin{aligned} U^{ref}(s,\mathbf{y}) &= \frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^3}\iint e^{-i\omega(s-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q},2z_{int})\phi_V(2\omega\vartheta_0)\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q})\omega^2 d\omega d\mathbf{q} \\ &= \mathcal{R}\,\widetilde{\mathcal{U}}_0(s,\mathbf{y},2z_{int}). \end{aligned}$$

其中，

$$\phi_V(u) := \mathbb{E}\big[e^{iuV(0)}\big] \tag{55}$$

是随机变量 $V(0)$ 的特征函数，而 $\hat{\ }\mathcal{U}_0$ 由 (36) 定义。函数 $\widetilde{\ }\mathcal{U}_0$ 满足(39)，其初始条件为

$$\widetilde{\mathcal{U}}_0(s,\mathbf{y},z=0) = \frac{1}{2}\Phi *_s \Psi(s,\mathbf{y}),$$

其中， $*_s$ 表示关于 s 变量的卷积，并且

$$\Phi(s) := \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega s}\phi_V(2\omega\mathit{\vartheta}_0)d\omega = \frac{1}{2\mathit{\vartheta}_0}f_V\Big(\frac{s}{2\mathit{\vartheta}_0}\Big), \tag{56}$$

是 $V(0)$ 的概率密度函数的一个缩放版本，我们将其记为 f_V。

现在我们来讨论均质化镜面反射波前。首先注意，变量 $\tilde{}\mathbf{y}$ 是在（54）中引入的，用于捕捉问题中最精细空间尺度上的变化，该尺度对应于界面变化的尺度。事实上，在小 ε 极限下，渐近剖面不依赖于 $\tilde{}\mathbf{y}$，因此不会在界面起伏的尺度上发生变化。这种行为反映了界面起伏的速度远快于光束宽度，因此极限变为确定性的。随机界面的主导阶效应于是表现为时间上的平滑，其由 $\tilde{}$界面高度的边缘分布决定。实际上，通过 $\mathbf{U}_0$, , 界面起伏对镜面反射的影响可以解释为平坦界面的反射问题，其中有效散射特性由初始条件 $\Phi *_s \Psi/2$中的卷积来刻画。注意，与情形 $\gamma = 1/2$相比，散射算子（51）现在经过了均质化：

$$\mathbb{E}[K(2\mathit{\vartheta}_0,\omega,\mathbf{q}',\mathbf{q})] = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2}\int e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot\mathbf{y}'}\mathbb{E}\Big[e^{2i\omega\mathit{\vartheta}_0 V(\mathbf{y}')}\Big]d\mathbf{y}' = \delta(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\phi_V(2\omega\mathit{\vartheta}_0).$$

这个均质化散射算子的作用与平坦界面相同：它不会改变入射方向 $\mathbf{q}'$。界面起伏的净效应是通过特征函数 ϕ_V 进行频率相关的低通滤波。由于 V 的平稳性，该特征函数仅取决于界面高程的单点统计量。在此情形下，镜面反射分量的光束宽度仍为 $\sqrt{\varepsilon}$ 阶，观测点仍为 $\mathbf{x}^{obs,\ ref}$。因此，镜面反射锥以及由 (34) 给出的角度 θ^0_{ref} 仍–未受到显著扰动。

证明（命题 6.1）证明分两步进行。首先，计算$U^{\varepsilon,\ ref}$ 的一阶矩，以确定均质化极限。其次，计算二阶矩，以证明依概率收敛。

在计算该矩之前，我们对 (48) 作变量替换

$$\mathbf{x}' \to \mathbf{x}_{int} + \sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{y}' + \varepsilon^{\gamma}\widetilde{\mathbf{y}},$$

从而得到首阶项

$$U^{\varepsilon,ref}(s,\mathbf{y},\widetilde{\mathbf{y}}) \simeq \frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^5}\iiiint e^{-i\omega(s-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}e^{2i\omega\mathit{\vartheta}_0 V(\mathbf{x}_{int}/\varepsilon^{\gamma}+\mathbf{y}'/\varepsilon^{\gamma-1/2}+\widetilde{\mathbf{y}})}$$
$$\times\, e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot\mathbf{y}'}e^{i\omega\mathbf{q}'\cdot\widetilde{\mathbf{y}}\varepsilon^{\gamma-1/2}}\hat{u}_0(\omega,\mathbf{q},z_{int})\hat{u}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}')\omega^4 d\omega d\mathbf{y}' d\mathbf{q}' d\mathbf{q}.$$

一阶矩。对 $U^{\varepsilon,\ ref}$ 取期望，并利用起伏的平稳性，可得

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}[U^{\varepsilon,ref}(s,\mathbf{y},\widetilde{\mathbf{y}})] &= \frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^5}\iiiint e^{-i\omega(s-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}\mathbb{E}\big[e^{2i\omega\mathit{\vartheta}_0 V(0)}\big]e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot\mathbf{y}'}\\ &\qquad\times \hat{u}_0(\omega,\mathbf{q},z_{int})\hat{u}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}')\omega^4 d\omega d\mathbf{y}' d\mathbf{q}' d\mathbf{q}\\ &= \frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^3}\iint e^{-i\omega(s-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}\mathbb{E}\big[e^{2i\omega\mathit{\vartheta}_0 V(0)}\big]\\ &\qquad\times \hat{u}_0(\omega,\mathbf{q},2z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q})\omega^2 d\omega d\mathbf{q}\\ &= \mathcal{R}\,\widetilde{u}_0(s,\mathbf{y},2z_{int}).\end{aligned}$$

二阶矩。 </style}在首阶下，^{,ref} 的二阶矩为

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[U^{\varepsilon,ref}(s_1,\mathbf{y}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1)U^{\varepsilon,ref}(s_2,\mathbf{y}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2)]\\ &\qquad= \frac{\mathcal{R}^2}{4(2\pi)^{10}}\int\cdots\int e^{-i\omega_1(s_1-\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{y}_1)}e^{-i\omega_2(s_2-\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{y}_2)}\\ &\qquad\qquad\times\mathbb{E}\big[e^{2i\omega_1\mathit{\vartheta}_0 V(\mathbf{x}_{int}/\varepsilon^{\gamma}+\mathbf{y}_1'/\varepsilon^{\gamma-1/2}+\widetilde{\mathbf{y}}_1)}e^{2i\omega_2\mathit{\vartheta}_0 V(\mathbf{x}_{int}/\varepsilon^{\gamma}+\mathbf{y}_2'/\varepsilon^{\gamma-1/2}+\widetilde{\mathbf{y}}_2)}\big]\\ &\qquad\qquad\times e^{i\omega_1(\mathbf{q}_1'-\mathbf{q}_1)\cdot\mathbf{y}_1'}e^{i\omega_2(\mathbf{q}_2'-\mathbf{q}_2)\cdot\mathbf{y}_2'}\\ &\qquad\qquad\times\hat{u}_0(\omega_1,\mathbf{q}_1,z_{int})\hat{u}_0(\omega_1,\mathbf{q}_1',z_{int})\hat{u}_0(\omega_2,\mathbf{q}_2,z_{int})\hat{u}_0(\omega_2,\mathbf{q}_2',z_{int})\\ &\qquad\qquad\times\hat{\Psi}(\omega_1,\mathbf{q}_1')\overline{\hat{\Psi}(\omega_2,\mathbf{q}_2')}\omega_1^4\omega_2^4 d\omega_1 d\omega_2 d\mathbf{y}_1' d\mathbf{y}_2' d\mathbf{q}_1' d\mathbf{q}_2' d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2.\end{aligned}$$

结合涨落的平稳性与引理 2.1，可得

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\big[e^{2i\omega_1\mathfrak{s}_0V(\mathbf{x}_{int}/\varepsilon^\gamma+\mathbf{y}_1'/\varepsilon^{\gamma-1/2}+\widetilde{\mathbf{y}}_1)}e^{2i\omega_2\mathfrak{s}_0V(\mathbf{x}_{int}/\varepsilon^\gamma+\mathbf{y}_2'/\varepsilon^{\gamma-1/2}+\widetilde{\mathbf{y}}_2)}\big]&\\ =\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\big[e^{2i\omega_1\mathfrak{s}_0V(\mathbf{y}_1'/\varepsilon^{\gamma-1/2}+\widetilde{\mathbf{y}}_1)}e^{2i\omega_2\mathfrak{s}_0V(\mathbf{y}_2'/\varepsilon^{\gamma-1/2}+\widetilde{\mathbf{y}}_2)}\big]&\\ =\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\big[e^{2i\omega_1\mathfrak{s}_0V(\mathbf{y}_1'/\varepsilon^{\gamma-1/2}+\widetilde{\mathbf{y}}_1)}\big]\mathbb{E}\big[e^{2i\omega_2\mathfrak{s}_0V(\mathbf{y}_2'/\varepsilon^{\gamma-1/2}+\widetilde{\mathbf{y}}_2)}\big]&\\ =\mathbb{E}\big[e^{2i\omega_1\mathfrak{s}_0V(0)}\big]\mathbb{E}\big[e^{2i\omega_2\mathfrak{s}_0V(0)}\big],&\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\big[\langle U^{\varepsilon,ref},\varphi\rangle^2_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\big]=\mathbb{E}\big[\langle U^{ref},\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\big]^2=\langle U^{ref},\varphi\rangle^2_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}.$$

因此，根据马尔可夫不等式，对于任意 $\eta>0$

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}\big(|\langle U^{\varepsilon,ref},\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}-\langle U^{ref},\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}|>\eta\big)\\ &\quad\le\frac{1}{\eta^2}\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\big[|\langle U^{\varepsilon,ref},\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}-\langle U^{ref},\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}|^2\big]\\ &\quad\le\frac{1}{\eta^2}\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\big[\langle U^{\varepsilon,ref},\varphi\rangle^2_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\big]+\langle U^{ref},\varphi\rangle^2_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}-2\langle U^{ref},\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\big[\langle U^{\varepsilon,ref},\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\big]\Big)=0,\end{aligned}$$

从而得证。 □

上述用于刻画镜面反射波的策略同样适用于刻画镜面透射波前：

$$U^{\varepsilon,tr}(s,\mathbf{y},\widetilde{\mathbf{y}}):=u^{\varepsilon,tr}\big(t^\varepsilon_{obs,tr}(\mathbf{y})+\varepsilon s,\mathbf{x}_{obs,tr}+\sqrt{\varepsilon}\mathbf{y}+\varepsilon^\gamma\widetilde{\mathbf{y}},z=0\big)\qquad(s,\mathbf{y})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,$$

其中 $u^{\varepsilon,\ tr}$ 的首阶表达式由（49）给出，而$\mathbf{x}_{obs,\ tr}$ 和 $t^\varepsilon_{obs,\ tr}$(y)分别定义于（41）和（42）中。 $U^{\varepsilon,\ tr}$ 的渐近行为由以下结果描述。

命题 **6.2** 族 $(U^{\varepsilon,tr})_\varepsilon$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{X})$ 中依概率收敛到确定性脉冲剖面

$$\begin{aligned}U^{tr}(s,\mathbf{y})=\frac{\mathcal{T}}{2(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\mathfrak{s}_0}{\mathfrak{s}_1}}\iint e^{-i\omega(s-\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}\hat{\mathcal{U}}_1(\omega,\mathbf{q},z_{tr}-z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q},z_{int})&\\ \times\phi_V(\omega(\mathfrak{s}_0-\mathfrak{s}_1))\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q})\omega^2d\omega d\mathbf{q},&\end{aligned}$$

其中， ϕ_V 由(55)定义，函数 $\hat{}\mathcal{U}j$ 由(36) 和(46)定义。

该结果的证明略去，因为其遵循与命题 6.1 的证明相同的思路。注意，脉冲轮廓U^{tr} 与针对平坦界面所得的脉冲轮廓 (40) 相似，但其初始条件通过核 ϕ_V 在时间上得到平滑，这反映了高度振荡的粗糙界面所引起的均匀化效应。

至于反射波，有效散射算子由下式给出

$$\mathbb{E}[K(\mathfrak{s}_0-\mathfrak{s}_1,\omega,\mathbf{q}',\mathbf{q})]=\frac{\omega^2}{(2\pi)^2}\int e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot\mathbf{y}'}\mathbb{E}\Big[e^{i\omega(\mathfrak{s}_0-\mathfrak{s}_1)V(\mathbf{y}')}\Big]d\mathbf{y}'=\delta(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\phi_V((\mathfrak{s}_0-\mathfrak{s}_1)\omega)$$

这是均匀化过程的结果。因此， ϕ_V 通过在频率上充当低通滤波器，描述了透射中的均匀化衍射效应，而狄拉克质量表明入射方向$\mathbf{q}'$ 未受影响。至于反射波，在 $\mathbf{x}_{obs,tr}$ 处观测到的镜面透射分量仍具有 $\sqrt{\varepsilon}$ 阶的光束宽度。因此，镜面透射锥或由 (44) 给出的角度 θ^0_{tr} 均未受到显著扰动。

7 情形 $\gamma>1/2$：非镜面反射贡献的非相干波动

由于上一节所述的均匀化现象，镜面分量通过因子 ϕ_V 呈现出随频率变化的有效衰减。本节旨在描述散射现象如何产生非相干波动，以解释未由镜面分量携带的能量。

I在本节中，我们分析以下反射波场，并将其称为散斑轮廓 ：

$$S^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}}):=\varepsilon^{1-2\gamma}u^{\varepsilon,ref}(t^\varepsilon_{obs,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{\mathbf{y}})+\varepsilon\widetilde{s},\mathbf{x}^\varepsilon_{obs,ref}(\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y})+\varepsilon^\gamma\widetilde{\mathbf{y}},z=0),\tag{57}$$

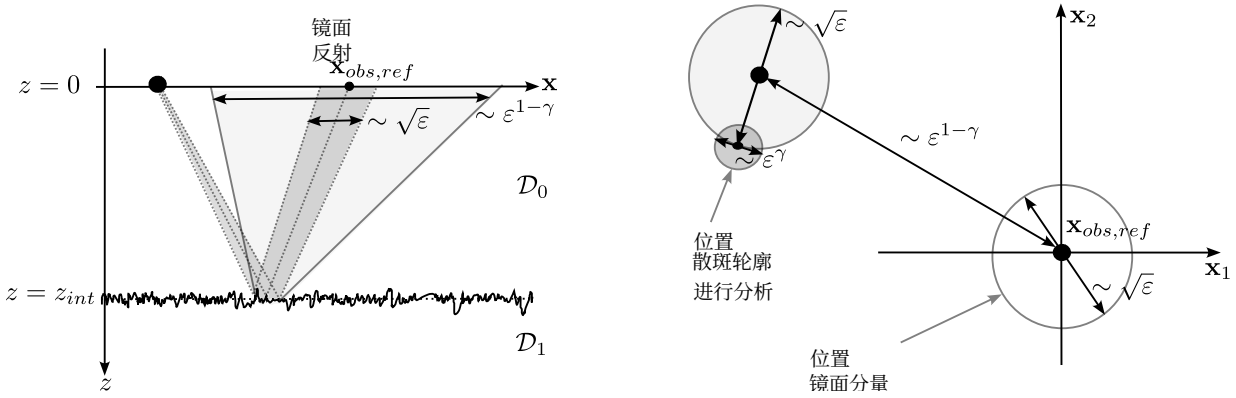

图10：左图展示了可以观测到散斑轮廓的区域（浅灰色）与镜面反射分量（灰色）的对比。右图展示了分析散斑轮廓所用的空间窗口。

其中

$$\mathbf{x}^{\varepsilon}_{obs,ref}(\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y}) := \mathbf{x}_{obs,ref} + \varepsilon^{1-\gamma}\bar{\mathbf{y}} + \sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{y}, \tag{58}$$

and

$$t^{\varepsilon}_{obs,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{\mathbf{y}}) := t_{obs,ref} + \varepsilon^{1-\gamma}\mathbf{k}_0\cdot\bar{\mathbf{y}} + \sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{y} + \varepsilon^{\gamma}\mathbf{k}_0\cdot\widetilde{\mathbf{y}} + \varepsilon^{2(1-\gamma)}\bar{s}. \tag{59}$$

下面命题 7.1 的证明采用了一种方式，能够为式（57）–（59）中引入的尺度变换提供依据。在推导过程中追踪相关尺度，使我们能够对这些尺度变换作出物理解释，下面就来说明。

回顾式（16），波场 $u^{\varepsilon,\ ref}$ 是在参考观测位置 $\mathbf{x}_{obs,\ ref}$ 附近观测的（对应于镜面反射分量），但现在观测范围扩展到一个大小为相对粗糙度参数的邻域

$$\varepsilon^{1-\gamma} = \frac{\lambda}{\ell_c} \sim \frac{r_0^2}{\ell_c L} \tag{60}$$

该邻域由变量 $\bar{\mathbf{y}}$ 参数化，其大小由近轴标度关系 $r_0^2 \sim \lambda L$ 给出。回顾一下， r_0 是光束半径， ℓ_c 是相关长度， λ 是中心波长。因此，可以观测到反射散斑的区域半径量级为 λ/ℓ_c。该区域对应于散斑锥，因此包含镜面锥；镜面锥是参考观测点周围的一个较小邻域。事实上，由于 $\gamma > 1/2$，该邻域大于光束宽度（量级为 $\sqrt{\varepsilon}$），而当 $\gamma = 1$ 时，其大小甚至可以达到一阶量级。我们将在下文看到，该半径还与源平面到界面的距离成正比；在我们的尺度变换中，这一距离为一阶量级。

变量 $\mathbf{y}$ 和 $\bar{\mathbf{y}}$ 分别描述光束宽度尺度和相关长度尺度上的变化（参见图10）。相关时间尺度以传播时间 $t_{obs,ref}$为中心，并根据观测偏移量（$\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y}\ \bar{\mathbf{y}}$）作三项修正（参见图 11），且处于一个比脉冲持续时间更长（量级为 ε）的时间窗口内。这个由变量 $\bar{s}$描述的时间窗口，其量级为

$$\varepsilon^{2(1-\gamma)} = \frac{r_0^2 c_0 T_0}{\ell_c^2 L} \sim \Big(\frac{\lambda}{\ell_c}\Big)^2,$$

也就是说，相对粗糙度参数的平方，其量级对应于观测平面上散斑持续时间的量级。这里， T_0 表示脉冲持续时间。式（57）中的变量 $\tilde{s}$ 描述脉冲宽度尺度上的涨落。

总而言之，对于镜面分量，时间持续长度为 O(ε)，镜面锥的空间宽度为 O($\sqrt{\varepsilon}$)；这两者也是镜面分量的相干尺度。相比之下，散斑分量的时间持续长度为 O($\varepsilon^{2(1-\gamma)}$)，相干时间为 O($\varepsilon$)。此外，散斑前沿的宽度为 O($\varepsilon^{1-\gamma}$)，空间相干长度为 O($\varepsilon^{\gamma}$)。因此，波场的时间支撑范围扩大了 $\varepsilon^{1-2\gamma}$ 倍，两个横向方向上的空间支撑范围各扩大了$\varepsilon^{(1-2\gamma)/2}$倍。根据能量守恒，这对应于波场振幅的标度关系：

$$\varepsilon^{-(1-2\gamma)}.$$

这解释了式（57）中的大振幅前因子 $\varepsilon^{1-2\gamma} \gg 1$ 。注意，增大 γ 会使界面更加粗糙，从而扩大散斑图样可被观测到的空间区域 $\mathbf{x}_{obs,\ ref}$ ，同时降低其幅度。

接下来，我们将分析散斑场$S^{\varepsilon,\ ref}$的二阶统计量和强度的渐近行为，以及这些量所呈现的自平均性质。 $S^{\varepsilon,\ ref}$的期望

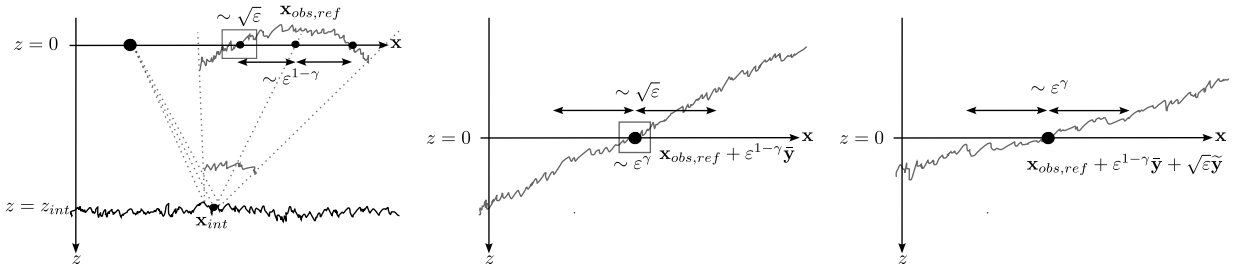

图 11：该图展示了式（59）中的各项。左图展示了散斑波前，其扩展尺度为相对粗糙度参数 $\varepsilon^{1-\gamma}$。中图放大至光束宽度 $\sqrt{\varepsilon}$ 的尺度，对应于镜面锥的尺度；右图则进一步放大至相关长度 ε^{γ}，即散斑锥内散斑起伏的尺度。这三个尺度均大于脉冲宽度 ε，图中以波前曲线上的随机涨落幅度表示脉冲宽度。为了准确表征散斑锥内不同位置的非相干波动，观测时间必须考虑所有这些尺度变换。

趋于零，这将在第 7.2 节中讨论；该节还将把散斑场本身的渐近行为刻画为零均值高斯随机场。

7.1 相关函数与强度函数

上述散斑轮廓的尺度变换 ε $S^{\varepsilon,\ ref}$ 可以通过仔细分析其相关函数来理解。该相关函数定义为在两个相邻点处取值的 $S^{\varepsilon,\ ref}$ 的乘积:

$$C^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1,\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2) := S^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1)S^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2), \tag{61}$$

及其对应的强度

$$\mathcal{J}^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}}) := \left|S^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}})\right|^2 = C^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}}).$$

以下结果 刻画了渐近平均相关函数。请注意，下面我们使用记号 on

$$X = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \qquad \text{and} \qquad \mathbb{X} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2.$$

命题 7.1 对于 $\gamma\in(1/2,\ 1]$ 和 $\bar{}\mathbf{y}\neq 0$，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\big[C^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1,\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2)\big] = \mathbf{C}^{ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\widetilde{s}_1-\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_1-\widetilde{\mathbf{y}}_2),$$

在 $\mathcal{S}'(\mathbb{X}\times X\times X)$ 中，其中

$$\mathbf{C}^{ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}}) := \frac{\mathcal{R}^2}{4(2\pi)^3}\iint e^{-i\omega(\widetilde{s}-\mathbf{p}\cdot\widetilde{\mathbf{y}})}\mathcal{A}(2s_0,\omega,\mathbf{p})|\hat{\Psi}|_2^2(\omega) \tag{62}$$
$$\times\,\delta(\bar{s}-z_{int}c_0\mathbf{p}^TA_0\mathbf{p}/2)\delta(\bar{\mathbf{y}}-z_{int}c_0A_0\mathbf{p})\omega^2 d\omega d\mathbf{p},$$

with

$$\mathcal{A}(v,\omega,d\mathbf{p}) := \int\mathbb{E}\big[e^{iv(V(\mathbf{y}')-V(0))}\big]e^{-i\omega\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}'}d\mathbf{y}', \tag{63}$$

and

$$|\hat{\Psi}|_2^2(\omega) := \frac{\omega^2}{(2\pi)^2}\int|\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q})|^2d\mathbf{q} = \int\Big|\int e^{i\omega s}\Psi(s,\mathbf{x})ds\Big|^2 d\mathbf{x}. \tag{64}$$

在 (62) 中，$\bar{}\mathbf{y}$ 中的空间窗口大于光束宽度，且源的贡献是在所有受支持的横向方向上积分得到的（见 (64)）。项 A$(\cdot\ \omega,\mathbf{p})$ 对应于随机界面在频率 ω 下产生的散射方向 $\mathbf{p}$ 的分布，并通过对 (63) 中的 $\mathbf{y}'$ 积分，与界面在相关长度尺度上的变化有关。根据博赫纳–欣钦定理，A 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义了一个有限正测度，我们在本文中称之为散射分布 。因此，经过适当归一化的 A 可改写为概率测度。为简化记号，尽管 A 是关于 $\mathbf{p}$ 的测度，在本文余下部分中我们仍使用记号 A$(v,\omega,\mathbf{p})$。此外，该分布将变量 $\widetilde{s}$ 和 $\bar{}\mathbf{y}$ 耦合起来，它们表示由.....产生的小尺度涨落

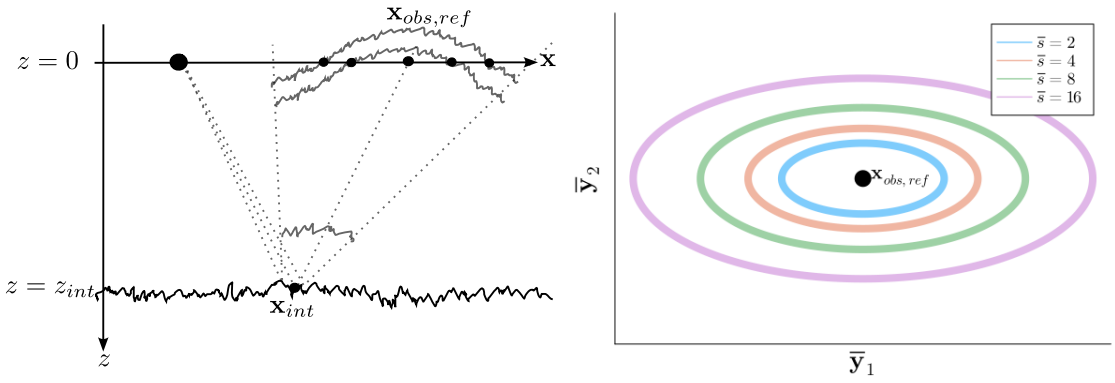

图12：左图展示了脉冲被粗糙界面反射的情形。当散斑穿过水平面时，会形成随时间演变的椭圆。右图展示了不同 $\bar{s}$ 值下的椭圆，其中心位于$\mathbf{x}_{obs,\,ref}$。对于右图，我们取$\mathbf{k}_0=(0.9/c_0,\ 0)^T$。

随机界面分别在脉冲宽度（波长尺度）和界面相关长度的尺度上演化。命题 7.1 的证明推迟至第 9.1 节。

现在，我们对式（62）给出两种互补的解释。首先，对于固定的偏移位置 $\bar{\mathbf{y}}$，利用$\mathbf{p}$中的狄拉克分布，我们得到

$$\mathbf{C}^{ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\tilde{s},\tilde{\mathbf{y}})=\frac{\mathcal{R}^2c_0^2\mathcal{s}_0^4}{4(2\pi)^3z_{int}^2}\delta\Big(\bar{s}-\frac{\bar{\mathbf{y}}^TA_0^{-1}\bar{\mathbf{y}}}{2z_{int}c_0}\Big)\int e^{-i\omega(\tilde{s}-\bar{\mathbf{y}}^TA_0^{-1}\tilde{\mathbf{y}}/(z_{int}c_0))}|\hat{\Psi}|_2^2(\omega)\mathcal{A}\Big(2\mathcal{s}_0,\omega,\frac{A_0^{-1}\bar{\mathbf{y}}}{z_{int}c_0}\Big)\omega^2d\omega,\quad(65)$$

with

$$A_0^{-1}=c_0\mathcal{s}_0(\mathbf{I}_2-c_0^2\mathbf{k}_0\otimes\mathbf{k}_0),\quad(66)$$

由于我们假设 $|\mathbf{k}_0|<c_0^{-1}$，因此该值为正。由此，对于给定的偏移位置 $\bar{\mathbf{y}}$，观测到散斑时的相对时间延迟参数可明确表示为

$$\bar{s}=\frac{\bar{\mathbf{y}}^TA_0^{-1}\bar{\mathbf{y}}}{2z_{int}c_0}\geq 0.$$

反过来，对于给定的时间 $\bar{s}$，非相干波动分布在由 $\bar{s}=\bar{\mathbf{y}}^TA_0^{-1}\bar{\mathbf{y}}/(2z_{int}c_0)$ 定义的椭圆上，示意见图12。

由于 $\mathbf{C}^{ref}$ 与变量 $\mathbf{y}$ 无关（该变量与光束宽度尺度上的变化相关），因此，对于给定的 $\bar{s}$，这些椭圆的统计特性在大小与光束宽度相当的区域内相同。然而，正如我们将在推论 7.1 中看到的，当在两个相距一个光束宽度尺度的不同点观测散斑时（即，我们考虑两个不同的点 $\mathbf{y}_1$ 和 $\mathbf{y}_2$，而非单个 $\mathbf{y}$），它们的贡献在统计上相互独立。此外，相关函数会随变量$\tilde{s}$和 $\tilde{\mathbf{y}}$衰减，其对应的时间尺度为脉冲持续时间，空间尺度为界面起伏的相关长度。因此，$\mathbf{C}^{ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}}\ \tilde{s}_1-\tilde{s}_2,\tilde{\mathbf{y}}_1-\tilde{\mathbf{y}}_2)$表示两个相邻点处的平均相关函数，并且相对于小尺度涨落变量 $\tilde{s}$ 和 $\tilde{\mathbf{y}}$呈现渐近平稳性。在（65）式中，这两个变量通过傅里叶表示中的复指数项相互耦合。相关性随这些变量衰减，是由源分布的频率带宽以及对 ω的积分共同保证的；该积分反映了界面散射所引起的频率耦合。

同样，散斑轮廓携带的平均强度为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}[\mathcal{I}^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\tilde{s},\tilde{\mathbf{y}})]=\mathbf{C}^{ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},0,0),$$

它与$\mathbf{y}$无关，也与小尺度涨落变量 $\tilde{s}$ 和 $\tilde{\mathbf{y}}$无关。因此，强度在这些尺度上是均匀的，且仅随 $\bar{s}$ 和 $\bar{\mathbf{y}}$变化。

最后，我们指出，镜面分量（对应于 $\bar{\mathbf{y}}=0$）本身并不会对 $\mathbf{C}^{ref}$产生贡献。事实上，极限 $\mathbf{C}^{ref}$ 是在 $S'(\mathbb{X}\times X\times X)$ 中得到的，其中涉及在远大于镜面锥尺寸的区域上对 $\bar{\mathbf{y}}$ 进行积分。在这一框架下，可以证明镜面分量的显式贡献可忽略不计。然而，在镜面锥的方向上，将会观察到第5节和第6节中讨论的镜面反射；与此处讨论的散斑分量相比，该分量确实很大。

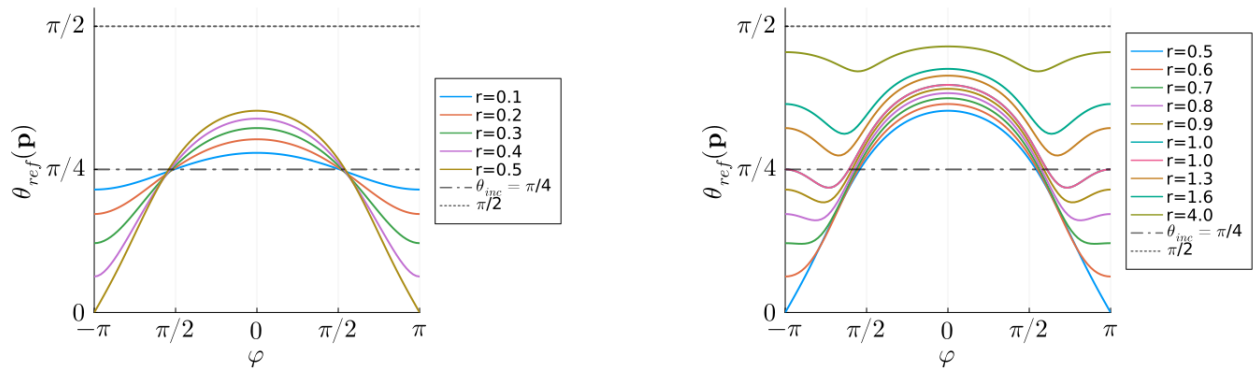

图13：入射角 θ_{inc} （点划线）的示意图，描述由入射波束和反射镜面分量定义的锥体，以及反射方位角 θ_{ref} （$\mathbf{p}$） $\in$ （0， $\pi/2$），对于 $\gamma = 1$ 和$\mathbf{p} = \beta_1\mathbf{k}_0 + \beta_2\mathbf{k}_0^{\perp}$，其中（$\beta_1$， β_2） $= r$ （cos(φ)，sin(φ)）。

广义反射斯涅尔定律。 相关函数（62）可用于推导广义反射斯涅尔定律。由（62）中的狄拉克质量可知，对于给定的方向 $\mathbf{p}$，可以在相对位置处观察到由此产生的散斑

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{\mathbf{p}}^{ref} := z_{int}c_0A_0\mathbf{p}, \tag{67}$$

以及对应的时间延迟

$$\bar{s} = s_{\mathbf{p}}^{ref} := \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}_{\mathbf{p}}^{ref}/2 = z_{int}c_0\mathbf{p}^TA_0\mathbf{p}/2 \geq 0.$$

这两个量取决于源到界面的距离 z_{int} 。因此，该距离会影响反射散斑锥的大小，以及观测其演化的时间窗口。

经过一些代数运算，可以将入射角和反射角之间的标准反射关系（34）推广如下。对于给定的角频率 ω 和非零慢度向量 $\mathbf{k}_0$ （因此 $\theta_{inc} > 0$），根据参数化（58）和表达式（67），我们有

$$\begin{aligned}\frac{\tan(\theta_{ref}^{\varepsilon}(\mathbf{p}))}{\tan(\theta_{inc})} &= \frac{|\mathbf{x}_{int} + \varepsilon^{1-\gamma}\mathbf{y}_{\mathbf{p}}^{ref}|}{|\mathbf{x}_{int}|} \\ &= \sqrt{\left(1 + \xi_{\varepsilon}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}_0}{\cos^2(\theta_{inc})}\right)^2 + \xi_{\varepsilon}^2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}_0^{\perp})^2},\end{aligned} \tag{68}$$

其中

$$\xi_{\varepsilon} = \varepsilon^{1-\gamma}\frac{c_0^2}{\sin^2(\theta_{inc})}, \qquad \mathbf{k}_0^{\perp} = (-\mathbf{k}_{0,2}, \mathbf{k}_{0,1})^T,$$

并且，对于按照散射分布 A(2$\mathscr{s}_0, \omega, \cdot$) 分布的 $\mathbf{p}$。

最后，我们得到

$$\sin(\theta_{ref}^{\varepsilon}(\mathbf{p})) = \sin(\theta_{inc}) + \sin(\theta_{inc})\left(\sqrt{\frac{\Xi_{ref}^{\varepsilon}(\mathbf{p})}{1 + \sin^2(\theta_{inc})\left(\Xi_{ref}^{\varepsilon}(\mathbf{p}) - 1\right)}} - 1\right),$$

其中

$$\Xi_{ref}^{\varepsilon}(\mathbf{p}) = \left(1 + \xi_{\varepsilon}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}_0}{\cos^2(\theta_{inc})}\right)^2 + \xi_{\varepsilon}^2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}_0^{\perp})^2.$$

利用 (60) 以及 sin(θ_{inc}) $= c_0|\mathbf{k}_0|$ ，即可得到 (3)（回顾 (28) 和 (34)）。

我们将 F 称为 参见图 13，了解 $\theta_{ref}^{\varepsilon}$(p) 的示意图，其中 $\gamma = 1$，即处于粗糙界面区间 $\lambda \sim \ell_c$ for

其中， peni散斑锥的角度为 O(1)。

情形 $\gamma \in$ (1/2， 1) 会使散斑锥的开口角相对较小，并且我们有展开 ion

$$\sin(\theta_{ref}^{\varepsilon}(\mathbf{p})) = \sin(\theta_{inc}) + \varepsilon^{1-\gamma}\frac{c_0\mathbf{p}\cdot\widehat{\mathbf{k}}_0}{\cos^2(\theta_{inc})} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2(1-\gamma)}|\mathbf{p}|^2),$$

with $\widehat{\mathbf{k}}_0 = \mathbf{k}_0/|\mathbf{k}_0|$，这再次利用 (60) 对应于 (5)。注意，通过截断展开，我们还有

$$\theta^{\varepsilon}_{ref}(\mathbf{p}) = \theta_{inc} + \varepsilon^{1-\gamma}\frac{c_0\mathbf{p}\cdot\widehat{\mathbf{k}}_0}{\cos^3(\theta_{inc})} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2(1-\gamma)}|\mathbf{p}|^2),$$

对应于（6）。

我们注意到，反射散斑分量的横向支撑此时为 $O(\varepsilon^{1-\gamma}L)$，其中$L$ 表示从源到界面的距离。这与 Itô-Schrödinger 方程情形下的异常光束扩展形成对比：在该情形中，波束通过具有体散射的随机介质传播，异常光束扩展对应于宽度 $O(\varepsilon^{1/2}L^{3/2})$ [21]。

对于 $\mathbf{k}_0 = 0$ （因此 $\theta_{inc} = 0$），反射公式化简为 $\tan(\theta^{\varepsilon}_{ref}(\mathbf{p})) = \varepsilon^{1-\gamma}c_0|\mathbf{p}|$，即

$$\theta^{\varepsilon}_{ref}(\mathbf{p}) = \arctan(\varepsilon^{1-\gamma}c_0|\mathbf{p}|). \tag{69}$$

下面的结果描述了 $C^{\varepsilon,ref}$ 在 $\varepsilon \to 0$ 时的统计稳定化。换言之，当针对变量 $\widetilde{s}$ 和 $\widetilde{\mathbf{y}}$，对两个相邻点处的散斑轮廓进行相关时，其在高频区间 $\varepsilon \to 0$ 中的极限变得确定，并且与命题 7.1 中给出的平均相关函数一致。

命题 7.2 我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1,\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2) = \mathbf{C}^{ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\widetilde{s}_1-\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_1-\widetilde{\mathbf{y}}_2)$$

依概率收敛于 $\mathcal{S}'(\mathbb{X}\times X\times X)$，其中确定性极限 $\mathbf{C}^{ref}$ 由 (62) 定义。

相同的结果也适用于强度函数，它也依概率收敛于 $\mathcal{S}'(\mathbb{X}\times X\times X)$：

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{C}^{ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},0,0).$$

命题 7.2 的证明见第 9.2 节。

7.2 非相干波动统计

首先在傅里叶域中，针对脉冲宽度和相关长度的尺度，对反射散斑轮廓的统计特性进行精确分析，具体通过

$$\hat{S}^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\omega,\mathbf{p}) := \varepsilon^{1-2\gamma}\iint e^{i\omega(\widetilde{s}-\mathbf{p}\cdot\widetilde{\mathbf{y}})}u^{\varepsilon,ref}\big(t^{\varepsilon}_{obs,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{\mathbf{y}})+\varepsilon\widetilde{s},\mathbf{x}^{\varepsilon}_{obs,ref}(\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y})+\varepsilon^{\gamma}\widetilde{\mathbf{y}},z=0\big)d\widetilde{s}d\widetilde{\mathbf{y}},$$

其中$\mathbf{x}^{\varepsilon}_{obs,\,ref}$ 和 $t^{\varepsilon}_{obs,\,ref}$ 分别由（58）和（59）给出。如（62）所述，远离镜面分量处观测非相干波动的位置和时间可用散射方向$\mathbf{p}$表示：

$$\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}} := z_{int}c_0A_0\mathbf{p} \qquad \text{and} \qquad s^{ref}_{\mathbf{p}} := z_{int}c_0\mathbf{p}^TA_0\mathbf{p}/2. \tag{70}$$

由于相关函数（62）具有奇异性质，其中在$\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}}$和 $s^{ref}_{\mathbf{p}}$处包含狄拉克质量，因此我们不直接研究 $\hat{S}^{\varepsilon,\,ref}$，而是研究其经过调和（磨光）后的版本：

$$\hat{\mathcal{S}}^{\varepsilon,ref}_{\mathbf{y}}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\omega,\mathbf{p}) := \hat{S}^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\omega,\mathbf{p})\frac{1}{\varepsilon^{3(\gamma-1/2)}}\varphi^{1/2}\Big(2\frac{\bar{s}-s^{ref}_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}},2\frac{\bar{\mathbf{y}}-\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}}\Big), \tag{71}$$

其中，我们乘以对称磨光函数的平方根，以便在 $s^{ref}_{\mathbf{p}}$和$\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}}$附近平滑相关函数。这一奇异性源于本文所考虑的临界尺度，在该尺度下，波长与界面起伏的振幅处于同一量级。这会导致技术上的困难，因此需要引入平滑场 $\hat{S}^{\varepsilon,\,ref}$。

这种平滑可以解释为对信号进行加窗。写作

$$\bar{s} = s^{ref}_{\mathbf{p}} + \varepsilon^{2(\gamma-1/2)}\widetilde{s} \qquad \text{and} \qquad \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}} + \varepsilon^{2(\gamma-1/2)}\widetilde{\mathbf{y}}, \tag{72}$$

其中 $\widetilde{s}$ 和 $\widetilde{\mathbf{y}}$ 在式（71）的窗支撑范围内取值，相应的观测位置和时间为

$$\mathbf{x}^{\varepsilon}_{obs,ref}(\mathbf{p}) := \mathbf{x}_{obs,ref} + \varepsilon^{1-\gamma}\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}} + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{y} + \varepsilon^{\gamma}\widetilde{\mathbf{y}},$$

and

$$t^{\varepsilon}_{obs,ref}(\mathbf{p}) := t_{obs,ref} + \varepsilon^{1-\gamma}\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}} + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{y} + \varepsilon^{\gamma}\mathbf{k}_0\cdot\widetilde{\mathbf{y}} + \varepsilon^{2(1-\gamma)}s^{ref}_{\mathbf{p}} + \varepsilon\widetilde{s}.$$

因此，时间上的加窗尺度为脉冲宽度，空间上的加窗尺度为相关长度。

由于与光束宽度尺度 $\sqrt{\varepsilon}$ 相关的变量$\mathbf{y}$对散斑相关函数没有特殊作用，为简便起见，我们先固定$\mathbf{y}$，稍后再讨论其作用。

在本节中，我们将散斑图样视为以散射方向$\mathbf{p}$为指标的随机场，并旨在描述其在对应于界面起伏相关长度的空间尺度，以及对应于脉冲宽度的时间尺度上的统计行为。首阶近似下，$\hat{\mathsf{S}}_{\mathbf{y}}^{\varepsilon,ref}$为

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{y}}^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\omega,\mathbf{p}) \simeq & \frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^2\varepsilon^{7(\gamma-1/2)+1}}\iint e^{-i\omega\bar{s}/\varepsilon^{2\gamma-1}}e^{i\omega\mathbf{p}\cdot\bar{\mathbf{y}}/\varepsilon^{2\gamma-1}}e^{i\omega\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}/\varepsilon^{\gamma-1/2}}e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{p}/\varepsilon^{\gamma-1/2})\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_{int})/\sqrt{\varepsilon}} \\ & \times e^{2i\omega\mathfrak{s}_0V(\mathbf{x}'/\varepsilon^{\gamma})}\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{p}/\varepsilon^{\gamma-1/2},z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}') \\ & \times \omega^2 d\mathbf{x}'d\mathbf{q}'\varphi^{1/2}\Big(2\frac{\bar{s}-s_{\mathbf{p}}^{ref}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}},2\frac{\bar{\mathbf{y}}-\mathbf{y}_{\mathbf{p}}^{ref}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}}\Big).\end{aligned} \tag{73}$$

注意，$\hat{\mathsf{S}}_{\mathbf{y}}^{\varepsilon,ref}$的期望在首阶近似下为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{y}}^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\omega,\mathbf{p})\big] \simeq & \frac{\mathcal{R}}{2\varepsilon^{7(\gamma-1/2)}}e^{-i\omega\bar{s}/\varepsilon^{2\gamma-1}}e^{i\omega\mathbf{p}\cdot\bar{\mathbf{y}}/\varepsilon^{2\gamma-1}}e^{i\omega\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}/\varepsilon^{\gamma-1/2}}\mathbb{E}\big[e^{2i\omega\mathfrak{s}_0V(0)}\big] \\ & \times \hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{p}/\varepsilon^{\gamma-1/2},2z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{p}/\varepsilon^{\gamma-1/2})\varphi^{1/2}\Big(2\frac{\bar{s}-s_{\mathbf{p}}^{ref}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}},2\frac{\bar{\mathbf{y}}-\mathbf{y}_{\mathbf{p}}^{ref}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}}\Big),\end{aligned}$$

因此，对于任意测试函数 $\phi\in\mathsf{S}(X\times X,\mathbb{C})$，经变量变换 (72) 以及 $\mathbf{p}\to\varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{q}$后，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\big\langle\hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{y}}^{\varepsilon,ref},\phi\big\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\big] \simeq & \frac{\varepsilon^{\gamma-1/2}\mathcal{R}}{2}\iiiint e^{-i\omega s_{\mathbf{q}}}e^{-i\omega\widetilde{s}}e^{i\omega\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}\mathbb{E}\big[e^{2i\omega\mathfrak{s}_0V(0)}\big] \\ & \times\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q})\varphi^{1/2}(2\widetilde{s},2\widetilde{\mathbf{y}})\overline{\phi(0,0,\omega,0)}\omega^2d\widetilde{s}d\widetilde{\mathbf{y}}d\omega d\mathbf{q}.\end{aligned} \tag{74}$$

特别地，

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathbb{E}\big[\hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{y}}^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\omega,\mathbf{p})\big]=0$$

在 $\mathsf{S}'(X\times X,\mathbb{C})$ 中，因此渐近随机场的均值为零。这里我们通过指定 $\mathbb{C}$ 位于温和分布空间 $\mathsf{S}'(X\times X,\mathbb{C})$ 中，强调散斑的傅里叶变换具有复值性质。

定理 7.1 对于任意固定的 $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2$，族 $(\hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{y}}^{\varepsilon,ref})_{\varepsilon}$ 在$\mathcal{S}'(X\times X,\mathbb{C})$ 中依分布收敛于复值零均值高斯随机场 $\hat{\mathcal{S}}^{ref}$，该场与$\mathbf{y}$无关，其协方差函数为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\mathcal{S}}^{ref}(\phi_1)\hat{\mathcal{S}}^{ref}(\phi_2)] = & \int\cdots\int\hat{\mathcal{R}}_{ref}(\bar{s}_1,\bar{s}_2,\bar{\mathbf{y}}_1,\bar{\mathbf{y}}_2,\omega_1,-\omega_2,d\mathbf{p}_1,d\mathbf{p}_2) \\ & \times\overline{\phi_1(\bar{s}_1,\bar{\mathbf{y}}_1,\omega_1,\mathbf{p}_1)\phi_2(\bar{s}_2,\bar{\mathbf{y}}_2,\omega_2,\mathbf{p}_2)}d\bar{s}_1d\bar{s}_2d\bar{\mathbf{y}}_1d\bar{\mathbf{y}}_2d\omega_1d\omega_2,\end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\mathcal{S}}^{ref}(\phi_1)\overline{\hat{\mathcal{S}}^{ref}(\phi_2)}] = & \int\cdots\int\hat{\mathcal{R}}_{ref}(\bar{s}_1,\bar{s}_2,\bar{\mathbf{y}}_1,\bar{\mathbf{y}}_2,\omega_1,\omega_2,d\mathbf{p}_1,d\mathbf{p}_2) \\ & \times\overline{\phi_1(\bar{s}_1,\bar{\mathbf{y}}_1,\omega_1,\mathbf{p}_1)}\phi_2(\bar{s}_2,\bar{\mathbf{y}}_2,\omega_2,\mathbf{p}_2)d\bar{s}_1d\bar{s}_2d\bar{\mathbf{y}}_1d\bar{\mathbf{y}}_2d\omega_1d\omega_2,\end{aligned} \tag{76}$$

对于 $\phi_1,\phi_2\in\mathcal{S}(X\times X,\mathbb{C})$。核 $\hat{\mathcal{K}}^{ref}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{R}}_{ref}(\bar{s}_1,\bar{s}_2,\bar{\mathbf{y}}_1,\bar{\mathbf{y}}_2,\omega_1,\omega_2,d\mathbf{p}_1,d\mathbf{p}_2) = & \frac{(2\pi)^3\mathcal{R}^2}{4}\mathcal{A}(2\mathfrak{s}_0,\omega_1,\mathbf{p}_1)|\hat{\Psi}|_2^2(\omega_1)\hat{\varphi}(\omega_1,\mathbf{p}_1)\delta(\bar{s}_1-s_{\mathbf{p}_1}^{ref})\delta(\bar{\mathbf{y}}_1-\mathbf{y}_{\mathbf{p}_1}^{ref}) \\ & \times\delta(\omega_1-\omega_2)\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\delta(\bar{s}_1-\bar{s}_2)\delta(\bar{\mathbf{y}}_1-\bar{\mathbf{y}}_2)d\mathbf{p}_1d\mathbf{p}_2.\end{aligned}$$

这里，由于包含 $\bar{s}_j$ 和 $\bar{\mathbf{y}}_j$, $j=1,2$ 的狄拉克质量的存在，散斑相对于这些变量表现为高斯白噪声；在两个不同的位置 $\bar{\mathbf{y}}_1$ 和 $\bar{\mathbf{y}}_2$（或两个不同的时刻$\bar{s}_1$ 和 $\bar{s}_2$）观测时，散斑彼此独立。事实上，若 ϕ_1 和 ϕ_2 在任一变量上的支集不相交，则 (75) 和 (76) 中的积分为零。定理 7.1 的证明见第 10 节。

定理 7.1 的陈述对固定的 $\mathbf{y}$成立。然而，对于 $\mathbf{y}$的两个不同取值，可以证明

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathbb{E}\big[\big\langle\hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{y}_1}^{\varepsilon,ref},\phi_1\big\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\big\langle\hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{y}_2}^{\varepsilon,ref},\phi_2\big\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\big]=0,$$

对于任意 $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\in\mathbb{R}^2$ 以及任意测试函数 $\phi_1,\phi_2\in\mathsf{S}(X\times X,\mathbb{C})$，这意味着两个随机场渐近不相关。第 9.1 节末尾将讨论这一点。更准确地说，有以下结果。

推论 7.1 对于 $n\geq1$ 以及任意固定且互不相同的$\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n\in\mathbb{R}^2$，族$(\hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{y}_1}^{\varepsilon,ref},\ldots,\hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{y}_n}^{\varepsilon,ref})_{\varepsilon}$在$\mathcal{S}_n'$ 中依分布收敛（该空间是$\mathcal{S}'(X\times X,\mathbb{C})$的 n 重笛卡尔积），收敛到极限$(\hat{\mathcal{S}}_1^{ref},\ldots,\hat{\mathcal{S}}_n^{ref})$，它由 n 个定理 *7.1* 中定义的高斯随机场$\hat{\mathcal{S}}^{ref}$ 的独立副本构成。

换句话说，对于给定的位置 $\bar{\mathbf{y}}$，在这两个点观察到的散斑

$$\mathbf{x}_{obs,ref} + \varepsilon^{1-\gamma}\bar{\mathbf{y}} + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{y}_1 \qquad \text{and} \qquad \mathbf{x}_{obs,ref} + \varepsilon^{1-\gamma}\bar{\mathbf{y}} + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{y}_2,$$

其距离 $|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|$ 为光束宽度量级的点彼此独立。

现在，实值温和随机场

$$\mathcal{S}^{\varepsilon,ref}_{\mathbf{y}}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}}) := \frac{1}{(2\pi)^3}\iint e^{-i\omega(\widetilde{s}-\mathbf{p}\cdot\widetilde{\mathbf{y}})}\hat{\mathcal{S}}^{\varepsilon,ref}_{\mathbf{y}}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\omega,\mathbf{p})\omega^2 d\omega d\mathbf{p},$$

描述了脉冲宽度和相关长度尺度上的时间与空间变化。对于这个随机场，我们有如下结果。

推论 7.2 对于 $n \geq 1$ 以及任意固定且彼此不同的 $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^2$，族 $(\mathcal{S}^{\varepsilon\ ref}_{\mathbf{y}_1}, \ldots, \mathcal{S}^{\varepsilon\ ref}_{\mathbf{y}_n})_\varepsilon$ 在 $\mathcal{S}'_n$ 中依分布收敛到 $(\mathcal{S}^{ref}_1, \ldots, \mathcal{S}^{ref}_n)$，该族由 n 个实值、均值为零、平稳（关于 $(\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}})$）的高斯随机场的独立副本组成，其协方差函数为

$$\mathbb{E}[\mathcal{S}^{ref}(\phi_1)\mathcal{S}^{ref}(\phi_2)] = \int\cdots\int \mathcal{K}_{ref}(\bar{s}_1,\bar{s}_2,\bar{\mathbf{y}}_1,\bar{\mathbf{y}}_2,\widetilde{s}_1-\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_1-\widetilde{\mathbf{y}}_2) \times \phi_1(\bar{s}_1,\bar{\mathbf{y}}_1,\widetilde{s}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1)\phi_2(\bar{s}_2,\bar{\mathbf{y}}_2,\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2)d\bar{s}_1 d\bar{s}_2 d\bar{\mathbf{y}}_1 d\bar{\mathbf{y}}_2 d\widetilde{s}_1 d\widetilde{s}_2 d\widetilde{\mathbf{y}}_1 d\widetilde{\mathbf{y}}_2 \quad (77)$$

对于 $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(X\times X)$。核 $\mathcal{K}^{ref}$ 定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{ref}(\bar{s}_1,\bar{s}_2,\bar{\mathbf{y}}_1,\bar{\mathbf{y}}_2,\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}}) &= \frac{\mathcal{R}^2}{4(2\pi)^3}\iint e^{-i\omega(\widetilde{s}-\mathbf{p}\cdot\widetilde{\mathbf{y}})}\mathcal{A}(2\mathcal{s}_0,\omega,\mathbf{p})|\hat{\Psi}|_2^2(\omega)\hat{\varphi}(\omega,\mathbf{p}) \\ &\qquad \times \delta(\bar{s}_1 - s^{ref}_{\mathbf{p}})\delta(\bar{\mathbf{y}}_1 - \mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}})\delta(\bar{s}_1-\bar{s}_2)\delta(\bar{\mathbf{y}}_1-\bar{\mathbf{y}}_2)\omega^2 d\omega d\mathbf{p} \\ &= \frac{\mathcal{R}^2 c_0^2 \mathcal{s}_0^4}{4(2\pi)^3 z_{int}^2}\int e^{-i\omega(\widetilde{s}-\bar{\mathbf{y}}_1^T A_0^{-1}\widetilde{\mathbf{y}}/(z_{int}c_0))}|\hat{\Psi}|_2^2(\omega)\mathcal{A}\Big(2\mathcal{s}_0,\omega,\frac{A_0^{-1}\bar{\mathbf{y}}_1}{z_{int}c_0}\Big)\hat{\varphi}\Big(\omega,\frac{A_0^{-1}\bar{\mathbf{y}}_1}{z_{int}c_0}\Big)\omega^2 d\omega \\ &\qquad \times \delta\Big(\bar{s}_1 - \frac{\bar{\mathbf{y}}_1^T A_0^{-1}\bar{\mathbf{y}}_1}{2z_{int}c_0}\Big)\delta(\bar{s}_1-\bar{s}_2)\delta(\bar{\mathbf{y}}_1-\bar{\mathbf{y}}_2).\end{aligned}$$

这里，A_0^{-1}由 (66)给出

协方差核 $\mathbf{K}^{ref}$ 直接刻画了高斯散斑图样在观测平面 $z=0$ 中的形成及其随时间的演变。具体而言，在给定时间 $\bar{s}$下，散斑形成满足 $\bar{s} = \bar{\mathbf{y}}^T A_0^{-1}\bar{\mathbf{y}}/(2z_{int}c_0)$ 的椭圆。

本节最后，我们讨论具有自平均性质的相关函数 (61) 与在傅里叶域中仍具有随机性的散斑场 (71) 之间的区别。对于相关函数，散斑轮廓在给定的 $\bar{s}$ 和 $\bar{\mathbf{y}}$ 附近相关。因此，研究 S′ 中相关函数的二阶矩，相当于考察散斑的四阶矩，但其中两个因子局域在 $(\bar{s}_1,\bar{\mathbf{y}}_1)$ 附近，另外两个局域在 $(\bar{s}_2,\bar{\mathbf{y}}_2)$ 附近。当这两个观测点相距较远时，每个点附近的相关散斑都涉及快速振荡的相位项；这些相位项在与光滑测试函数进行测试时会相互抵消，因此两部分贡献在统计上相互独立：

$$\mathbb{E}[C^{\varepsilon,ref}(\bar{s}_1,\bar{\mathbf{y}}_1)C^{\varepsilon,ref}(\bar{s}_2,\bar{\mathbf{y}}_2)] \simeq \mathbb{E}[C^{\varepsilon,ref}(\bar{s}_1,\bar{\mathbf{y}}_1)]\mathbb{E}[C^{\varepsilon,ref}(\bar{s}_2,\bar{\mathbf{y}}_2)],$$

从而在 S′ 中依概率收敛。

本节转而研究散斑本身，将其视为以散射方向 $\mathbf{p}$ 为指标的随机场；对于每个 $\mathbf{p}$，它对应的观测时间为 $\bar{s} = s^{ref}_{\mathbf{p}}$，位置为 $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}}$。在这种表述下，场本身不会发生统计稳定化（自平均），而定理 7.1 则通过一个高斯随机场描述衍射方向 $\mathbf{p}$ 之间的统计耦合。在涉及随机体涨落的波传播问题中，也观察到了波场与其相关函数之间的类似区别，参见例如 [4, 5, 6, 26, 37]。

8 $\gamma > 1/2$ 的情形：非镜面透射贡献的非相干波动

按照处理反射分量时采用的相同策略，透射散斑轮廓为

$$S^{\varepsilon,tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}}) := \varepsilon^{1-2\gamma}u^{\varepsilon,tr}(t^{\varepsilon}_{obs,tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{\mathbf{y}}) + \varepsilon\widetilde{s}, \mathbf{x}^{\varepsilon}_{obs,tr}(\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y}) + \varepsilon^{\gamma}\widetilde{\mathbf{y}}, z = z_{tr}),$$

其中 $u^{\varepsilon,tr}$ 在首阶近似下由式（49）给出，

$$\mathbf{x}^{\varepsilon}_{obs,tr}(\mathbf{y},\bar{\mathbf{y}}) := \mathbf{x}_{obs,tr} + \varepsilon^{1-\gamma}\bar{\mathbf{y}} + \sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{y},$$

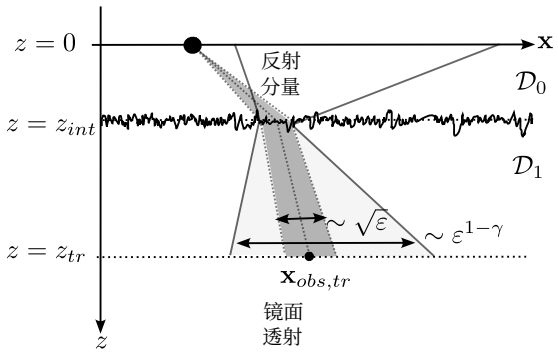

图14：示意了可观测到透射散斑轮廓的区域（浅灰色），并与镜面透射分量（灰色）作比较。

and

$$t^{\varepsilon}_{obs,tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{\mathbf{y}}) := t_{obs,tr} + \varepsilon^{1-\gamma}\mathbf{k}_0\cdot\bar{\mathbf{y}} + \sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{y} + \varepsilon^{\gamma}\mathbf{k}_0\cdot\widetilde{\mathbf{y}} + \varepsilon^{2(1-\gamma)}\bar{s}.$$

与反射波场类似，透射波场 $u^{\varepsilon,tr}$ 是在镜面透射分量的观测位置$\mathbf{x}_{obs,tr}$ 附近一个量级为相对粗糙度参数 $\lambda/\ell_c=\varepsilon^{1-\gamma}$ 的区域内观测到的，该区域比光束宽度更大（因为 $\gamma>1/2$）。我们还通过$\mathbf{y}$ 和 $\widetilde{\mathbf{y}}$分别考察光束宽度尺度上的变化以及相关长度量级的涨落（示意图见图10右图）。散斑轮廓 $S^{\varepsilon,tr}$ 是在传播时间 $t_{obs,tr}$附近的时间尺度上观测到的，并包含三个取决于观测偏移量的修正项（$\bar{\mathbf{y}}$、$\mathbf{y}$和 $\widetilde{\mathbf{y}}$）。整体观测窗口的时间量级为 $\varepsilon^{2(1-\gamma)}$，大于脉冲宽度；我们还通过变量 $\widetilde{s}$分辨脉冲宽度尺度上的涨落。最后，前因子 $\varepsilon^{1-2\gamma}\gg 1$ 表征散斑分量的幅值。请注意，随着 γ 增大（即界面变得更粗糙），在$\mathbf{x}_{obs,tr}$ 附近能够观测到散斑图样的区域会扩大，散斑持续时间（由项 $\varepsilon^{2(1-\gamma)}\bar{s}$表征）也会延长，而散斑幅值则会减小。

与反射散斑类似， $S^{\varepsilon,tr}$ 的第一矩在高频极限下趋于零，因此我们关注其二点统计量和强度。

8.1 相关函数与强度。

$S^{\varepsilon,tr}$ 两个相邻点处的相关函数定义为

$$C^{\varepsilon,tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1,\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2) := S^{\varepsilon,tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1)S^{\varepsilon,tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2),$$

相应的强度定义为

$$\mathcal{J}^{\varepsilon,tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}}) := \left|S^{\varepsilon,tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}})\right|^2 = C^{\varepsilon,tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}}).$$

以下结果刻画了渐近相关函数。

命题8.1 对于 $\gamma\in(1/2,\ 2]$ 以及 $\bar{\mathbf{y}}\neq 0$，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C^{\varepsilon,tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1,\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2) = \mathbf{C}^{tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\widetilde{s}_1-\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_1-\widetilde{\mathbf{y}}_2),$$

以概率收敛于$\mathcal{S}'(\mathbb{X}\times X\times X)$，其中

$$\mathbf{C}^{tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}}) := \frac{\mathcal{T}^2\mathfrak{s}_0}{4\mathfrak{s}_1(2\pi)^3}\iint e^{-i\omega(\widetilde{s}-\mathbf{p}\cdot\widetilde{\mathbf{y}})}\mathcal{A}(\mathfrak{s}_0-\mathfrak{s}_1,\omega,\mathbf{p})|\hat{\Psi}|_2^2(\omega)\delta(\bar{s}-s^{tr}_{\mathbf{p}})\delta(\bar{\mathbf{y}}-\mathbf{y}^{tr}_{\mathbf{p}})\omega^2 d\omega d\mathbf{p}, \qquad (78)$$

其中 $\mathcal{A}$ 由 (63)定义， $|\hat{\Psi}|_2^2$ 由 (64)定义，并且

$$s^{tr}_{\mathbf{p}} = (z_{tr}-z_{int})c_1\mathbf{p}^TA_1\mathbf{p}/2\geq 0, \qquad and \qquad \mathbf{y}^{tr}_{\mathbf{p}} = (z_{tr}-z_{int})c_1A_1\mathbf{p}.$$

证明从略，因为它与命题 7.1 和 7.2 的证明基本相同。

对于反射波场，相关函数可以改写为

$$\mathbf{C}^{tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}}) = \frac{\mathcal{T}^2c_1^2\mathfrak{s}_0\mathfrak{s}_1^3}{4(2\pi)^3(z_{tr}-z_{int})^2}\delta\Big(\bar{s}-\frac{\bar{\mathbf{y}}^TA_1^{-1}\bar{\mathbf{y}}}{2(z_{tr}-z_{int})c_1}\Big)\int e^{-i\omega(\widetilde{s}-\bar{\mathbf{y}}^TA_1^{-1}\widetilde{\mathbf{y}}/((z_{tr}-z_{int})c_1))}|\hat{\Psi}|_2^2(\omega)$$
$$\times\,\mathcal{A}\Big(\mathfrak{s}_0-\mathfrak{s}_1,\omega,\frac{A_1^{-1}\bar{\mathbf{y}}}{(z_{tr}-z_{int})c_1}\Big)\omega^2 d\omega,$$

with

$$A_1^{-1} = c_1\sigma_1(\mathbf{I}_2 - c_1^2\mathbf{k}_0\otimes\mathbf{k}_0). \tag{79}$$

因此，对于给定的位置 $\bar{\mathbf{y}}$，观测到散斑的观测时间为

$$\bar{s} = \bar{\mathbf{y}}^T A_1^{-1}\bar{\mathbf{y}}/(2(z_{tr}-z_{int})c_1) \geq 0,$$

时间相关长度与初始脉冲持续时间同阶 ε，通过变量 $\tilde{s}$ 表示。同样，对于给定的时间 $\bar{s}$，非相干波动支撑在由 $\bar{s} = \bar{\mathbf{y}}^T A_1^{-1}\bar{\mathbf{y}}/(2(z_{tr}-z_{int})c_1)$ 定义的椭圆上。相关函数在对应于脉冲持续时间的时间尺度上，以及通过 $\tilde{s}$ 和 $\tilde{\mathbf{y}}$ 分别对应于界面起伏相关长度的空间尺度上衰减。相对于（$\tilde{s}$，$\tilde{\mathbf{y}}$）再次观察到平稳性，且 $\mathbf{C}^{tr}$ 不依赖于 $\mathbf{y}$，这对应于光束宽度尺度上的变化。类似地，散斑轮廓所携带的平均强度满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g^{\varepsilon,tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\tilde{s},\tilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{C}^{tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},0,0),$$

以概率收敛。该极限既不依赖于 $\mathbf{y}$，也不依赖于小尺度变量 $\tilde{s}$ 和 $\tilde{\mathbf{y}}$。因此，强度在这些尺度上是均匀的，仅随 $\bar{s}$ 和 $\bar{\mathbf{y}}$ 变化。

广义透射斯涅尔定律。如前所述，在（78）中，散斑锥的空间窗口大于光束宽度。对于给定的方向 $\mathbf{p}$，在位置 $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{\mathbf{p}}^{tr}$ 处观察到的散斑出现在相应的时间 $\bar{s} = s_{\mathbf{p}}^{tr} \geq 0$，根据（27）及假设 $|\mathbf{k}_0| < 1/c_0 < 1/c_1$，该时间为非负。注意，对于 $\gamma = 1$（对应于与波长同阶的相关长度），在距$\mathbf{x}_{obs,\ tr}$ 为一阶的距离处即可观察到散斑。

用透射角表示，对于给定频率 ω 和非零慢度向量 $\mathbf{k}_0$（即 $\theta_{inc} > 0$），经过一些代数运算，我们得到透射角与镜面透射角 θ_{tr}^0 之间在 ε首阶下的关系：

$$\begin{aligned}\frac{\tan(\theta_{tr}^{\varepsilon}(\mathbf{p}))}{\tan(\theta_{tr}^0)} &= \frac{|\mathbf{x}_{obs,tr} - \mathbf{x}_{int} + \varepsilon^{1-\gamma}\mathbf{y}_{\mathbf{p}}^{tr}|}{|\mathbf{x}_{obs,tr} - \mathbf{x}_{int}|} \\ &= \sqrt{\Big(1+\xi_\varepsilon\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}_0}{\cos^2(\theta_{tr}^0)}\Big)^2 + \xi_\varepsilon^2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}_0^{\perp})^2}, \qquad \xi_\varepsilon = \varepsilon^{1-\gamma}\frac{c_0^2}{\sin^2(\theta_{inc})},\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{p}$ 服从散射分布 $A(\sigma_0 - \sigma_1,\omega,\cdot)$。根据这一关系，透射的标准斯涅尔定律可推广如下：

$$\frac{\sin(\theta_{tr}^{\varepsilon}(\mathbf{p}))}{c_1} = \frac{\sin(\theta_{inc})}{c_0} + |\mathbf{k}_0|\left(\sqrt{\frac{\Xi_{tr}^{\varepsilon}(\mathbf{p})}{1+\sin^2(\theta_{tr}^0)\Big(\Xi_{tr}^{\varepsilon}(\mathbf{p})-1\Big)}} - 1\right), \qquad \Xi_{tr}^{\varepsilon}(\mathbf{p}) = \Big(1+\xi_\varepsilon\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}_0}{\cos^2(\theta_{tr}^0)}\Big)^2 + \xi_\varepsilon^2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}_0^{\perp})^2,$$

这等价于（4）。对于 $\gamma \in (1/2,1)$，可得微扰关系

$$\frac{\sin(\theta_{tr}^{\varepsilon}(\mathbf{p}))}{c_1} = \frac{\sin(\theta_{inc})}{c_0} + \varepsilon^{1-\gamma}\frac{\mathbf{p}\cdot\widehat{\mathbf{k}}_0}{\cos^2(\theta_{tr}^0)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2(1-\gamma)}|\mathbf{p}|^2),$$

其中 $\widehat{\mathbf{k}}_0 = \mathbf{k}_0/|\mathbf{k}_0|$。由此可得近似式

$$\theta_{tr}^{\varepsilon}(\mathbf{p}) = \theta_{tr}^0 + \varepsilon^{1-\gamma}\frac{c_1\mathbf{p}\cdot\widehat{\mathbf{k}}_0}{\cos^3(\theta_{tr}^0)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2(1-\gamma)}|\mathbf{p}|^2),$$

结合（60），可得（7）。

最后，对于零慢度矢量$\mathbf{k}_0 = 0$（即 $\theta_{inc} = 0$），透射角满足 $\tan(\theta_{tr}^{\varepsilon}(\mathbf{p})) = \varepsilon^{1-\gamma}c_1|\mathbf{p}|$，因此

$$\theta_{tr}^{\varepsilon}(\mathbf{p}) = \arctan(\varepsilon^{1-\gamma}c_1|\mathbf{p}|). \tag{80}$$

8.2 非相干波动的统计特性

傅里叶域中的透射散斑可表示为

$$\hat{S}^{\varepsilon,tr}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\omega,\mathbf{p}) := \varepsilon^{1-2\gamma}\iint e^{i\omega(\tilde{s}-\mathbf{p}\cdot\tilde{\mathbf{y}})}u^{\varepsilon,tr}\big(t_{obs,tr}^{\varepsilon}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}}) + \varepsilon\tilde{s},\mathbf{x}_{obs,tr}^{\varepsilon}(\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y}) + \varepsilon^{\gamma}\tilde{\mathbf{y}}\big)d\tilde{s}d\tilde{\mathbf{y}}.$$

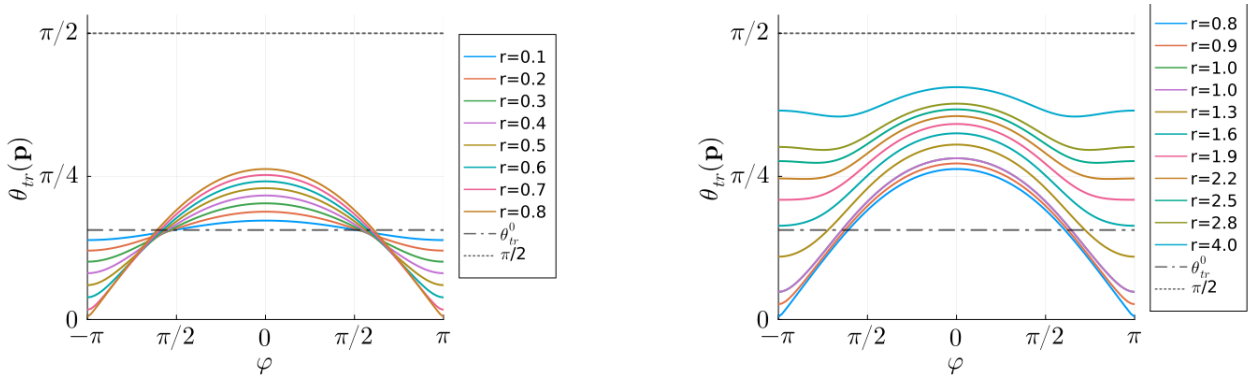

图15：入射角为 $\theta_{inc} = \pi/4$, $\gamma = 1$, $c_0 = 1.5$, $c_1 = 1$ 时，镜面透射角 θ^0_{tr}（点划线）和透射角 $\theta_{tr}(\mathbf{p}) \in (0, \pi/2)$ 的示意图，其中 $\mathbf{p} = \beta_1\mathbf{k}_0 + \beta_2\mathbf{k}_0^\perp$，且 $(\beta_1, \beta_2) = r(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$。

如式（78）所述，我们观测到镜面分量以外的非相干波动的位置和时间可用散射方向 $\mathbf{p}$ 表示：

$$\mathbf{y}^{tr}_{\mathbf{p}} := (z_{tr} - z_{int})c_1 A_1 \mathbf{p} \qquad \text{and} \qquad s^{tr}_{\mathbf{p}} := \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}^{tr}_{\mathbf{p}}/2 = (z_{tr} - z_{int})c_1 \mathbf{p}^T A_1 \mathbf{p}/2. \tag{81}$$

对于反射散斑轮廓，由于相关函数具有奇异性，在观测时间和位置处包含狄拉克质量，因此我们转而研究 $\hat{}\mathcal{S}^{\varepsilon,\ tr}$ 的温和化版本：

$$\hat{\mathcal{S}}^{\varepsilon,tr}_{\mathbf{y}}(\bar{s}, \bar{\mathbf{y}}, \omega, \mathbf{p}) := \hat{S}^{\varepsilon,tr}(\bar{s}, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, \omega, \mathbf{p}) \frac{1}{\varepsilon^{3(\gamma-1/2)}} \varphi^{1/2}\Big(2\frac{\bar{s} - s^{tr}_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}}, 2\frac{\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^{tr}_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}}\Big),$$

对于固定的 $\mathbf{y}$，我们乘以对称磨光函数的平方根，以便在 $\bar{s} = s^{tr}_{\mathbf{p}}$ 和 $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^{tr}_{\mathbf{p}}$ 附近对相关函数进行平滑处理。刻画透射散斑的结果如下。

定理 8.1 对于 $n \geq 1$ 以及任意固定的两两不同的 $\mathbf{y}_1$, ..., $\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^2$，族 $(\hat{}\mathcal{S}^{\varepsilon\ tr}_{\mathbf{y}_1}, \ldots, \hat{}\mathcal{S}^{\varepsilon\ tr}_{\mathbf{y}_n})_\varepsilon$ 在 $\mathcal{S}'_n$ 中依分布收敛于 $(\hat{}\mathcal{S}^{tr}_{\mathbf{y}_1}, \ldots, \hat{}\mathcal{S}^{tr}_{\mathbf{y}_n})$，该对象由 n 个复值零均值高斯随机场 $\hat{}\mathcal{S}^{tr}$ 的独立副本组成，其协方差函数与（75）和（76）类似，但核为

$$\hat{\mathcal{K}}_{tr}(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{y}}_2, \omega_1, \omega_2, d\mathbf{p}_1, d\mathbf{p}_2) = \frac{(2\pi)^3 \mathcal{T}^2 \boldsymbol{\delta}_0}{4\boldsymbol{\delta}_1} \mathcal{A}(\boldsymbol{\delta}_0 - \boldsymbol{\delta}_1, \omega_1, \mathbf{p}_1)|\hat{\Psi}|^2_2(\omega_1)\hat{\varphi}(\omega_1, \mathbf{p}_1)$$
$$\times \delta(\omega_1 - \omega_2)\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\delta(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)\delta(\bar{\mathbf{y}}_1 - \bar{\mathbf{y}}_2)\delta(\bar{s}_1 - s^{tr}_{\mathbf{p}_1})\delta(\bar{\mathbf{y}}_1 - \mathbf{y}^{tr}_{\mathbf{p}_1})d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2.$$

定理 8.1 的证明从略，因为它遵循与定理 7.1 的证明相同的步骤（见第 10 节），并结合推论 7.1。特别是，在距离至少达到光束宽度量级处观测到的散斑彼此独立。

对于实值温和随机场

$$\mathcal{S}^{\varepsilon,tr}_{\mathbf{y}}(\bar{s}, \bar{\mathbf{y}}, \widetilde{s}, \widetilde{\mathbf{y}}) := \frac{1}{(2\pi)^3} \iint e^{-i\omega(\widetilde{s} - \mathbf{p}\cdot\widetilde{\mathbf{y}})} \hat{\mathcal{S}}^{\varepsilon,tr}_{\mathbf{y}}(\bar{s}, \bar{\mathbf{y}}, \omega, \mathbf{p})\omega^2 d\omega d\mathbf{p},$$

它表示时刻 $s^{tr}_{\mathbf{p}}$ 和位置 $\mathbf{y}^{tr}_{\mathbf{p}}$ 附近的散斑信号，我们有以下结果。

推论 8.1 对于 $n \geq 1$ 以及任意固定的 $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^2$，族 $(\mathcal{S}^{\varepsilon\ tr}_{\mathbf{y}_1}, \ldots, \mathcal{S}^{\varepsilon\ tr}_{\mathbf{y}_n})_\varepsilon$ 在 $\mathcal{S}'_n$ 中依分布收敛到由 n 个 $\mathcal{S}^{tr}$ 的独立副本组成的实值零均值高斯随机场 $(\mathcal{S}^{tr}_1, \ldots, \mathcal{S}^{tr}_n)$，其协方差函数类似于 (77)，但核为

$$\mathcal{K}_{tr}(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{y}}_2, \widetilde{s}, \widetilde{\mathbf{y}}) = \frac{\mathcal{T}^2 \boldsymbol{\delta}_0}{4\boldsymbol{\delta}_1 (2\pi)^3} \iint e^{-i\omega(\widetilde{s} - \mathbf{p}\cdot\widetilde{\mathbf{y}})} \mathcal{A}(\boldsymbol{\delta}_0 - \boldsymbol{\delta}_1, \omega, \mathbf{p})|\hat{\Psi}|^2_2(\omega)\hat{\varphi}(\omega, \mathbf{p})$$
$$\times \delta(\bar{s}_1 - s^{tr}_{\mathbf{p}})\delta(\bar{\mathbf{y}}_1 - \mathbf{y}^{tr}_{\mathbf{p}})\delta(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)\delta(\bar{\mathbf{y}}_1 - \bar{\mathbf{y}}_2)\omega^2 d\omega d\mathbf{p}$$
$$= \frac{\mathcal{T}^2 c_1^2 \boldsymbol{\delta}_0 \boldsymbol{\delta}_1^3}{4(2\pi)^3 (z_{tr} - z_{int})^2} \int e^{-i\omega(\widetilde{s} - \bar{\mathbf{y}}^T A_1^{-1}\widetilde{\mathbf{y}}/((z_{tr} - z_{int})c_1))}|\hat{\Psi}|^2_2(\omega)$$
$$\times \mathcal{A}\Big(\boldsymbol{\delta}_0 - \boldsymbol{\delta}_1, \omega, \frac{A_1^{-1}\bar{\mathbf{y}}}{(z_{tr} - z_{int})c_1}\Big)\hat{\varphi}\Big(\omega, \frac{A_1^{-1}\bar{\mathbf{y}}}{(z_{tr} - z_{int})c_1}\Big)\omega^2 d\omega$$
$$\times \delta\Big(\bar{s}_1 - \frac{\bar{\mathbf{y}}_1^T A_1^{-1}\bar{\mathbf{y}}_1}{2(z_{tr} - z_{int})c_1}\Big)\delta(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)\delta(\bar{\mathbf{y}}_1 - \bar{\mathbf{y}}_2).$$

这里，A_1^{-1}由（79）给出。

协方差 K_{tr} 还直接表征高斯散斑随时间到达观测平面 $z = z_{tr}$ 的情况，并且其支撑集位于椭圆 $\bar{s} = {}^{-}\mathbf{y}^T A_1^{-1}{}^{-}\mathbf{y}/(2($ $z_{tr} - z_{int})c_1)$上。

9 命题 7.1 和命题 7.2 的证明

本节旨在证明期望相关函数的收敛性及其统计稳定性。证明过程也自然地说明了式 (57)–(59) 中引入的尺度变换为何合理。

9.1 命题 7.1 的证明

回顾式 (48)，反射波场的期望相关函数在首阶近似下为

$$\begin{aligned} C_\varepsilon &:= \mathbb{E}[u^{\varepsilon,ref}(t_1,\mathbf{x}_1,z=0)u^{\varepsilon,ref}(t_2,\mathbf{x}_2,z=0)] \\ &\simeq \frac{\mathscr{R}^2}{4(2\pi)^{10}\varepsilon^2}\int\cdots\int e^{-i\omega_1(t_1-2\mathscr{s}_0 z_{int}-\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{k}_0)/\varepsilon}e^{i\omega_2(t_2-2\mathscr{s}_0 z_{int}-\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{k}_0)/\varepsilon} \\ &\qquad\times\mathbb{E}\big[e^{2i\omega_1\mathscr{s}_0 V(\mathbf{x}_1'/\varepsilon^\gamma)}e^{-2i\omega_2\mathscr{s}_0 V(\mathbf{x}_2'/\varepsilon^\gamma)}\big] \\ &\qquad\times e^{i\omega_1\mathbf{q}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_1'-\mathbf{x}_{int})/\sqrt{\varepsilon}}e^{i\omega_1\mathbf{q}_1'\cdot(\mathbf{x}_1'-\mathbf{x}_{int})/\sqrt{\varepsilon}} \\ &\qquad\times e^{-i\omega_2\mathbf{q}_2\cdot(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_2'-\mathbf{x}_{int})/\sqrt{\varepsilon}}e^{-i\omega_2\mathbf{q}_2'\cdot(\mathbf{x}_2'-\mathbf{x}_{int})/\sqrt{\varepsilon}} \\ &\qquad\times\hat{u}_0(\omega_1,\mathbf{q}_1,z_{int})\hat{u}_0(\omega_1,\mathbf{q}_1',z_{int})\overline{\hat{u}_0(\omega_2,\mathbf{q}_2,z_{int})\hat{u}_0(\omega_2,\mathbf{q}_2',z_{int})} \\ &\qquad\times\hat{\Psi}(\omega_1,\mathbf{q}_1')\overline{\hat{\Psi}(\omega_2,\mathbf{q}_2')}\omega_1^4\omega_2^4 d\omega_1 d\omega_2 d\mathbf{x}_1' d\mathbf{x}_2' d\mathbf{q}_1' d\mathbf{q}_2' d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2. \end{aligned}$$

为方便记号，我们用 L_j, $j = 1$, ..., 6 表示上述表达式中对应于各行的因子，因此

$$C_\varepsilon \simeq \frac{\mathscr{R}^2}{4(2\pi)^{10}\varepsilon^2}\int\cdots\int L_1\times L_2\times L_3\times L_4\times L_5\times L_6\,\omega_1^4\omega_2^4 d\omega_1 d\omega_2 d\mathbf{x}_1' d\mathbf{x}_2' d\mathbf{q}_1' d\mathbf{q}_2' d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2. \tag{82}$$

为了使因子 L_2 存在非平凡极限，我们引入变量替换

$$\mathbf{x}_1' \to \mathbf{x}_{int} + \mathbf{r}' + \varepsilon^\gamma \mathbf{y}'/2 \qquad \text{and} \qquad \mathbf{x}_2' \to \mathbf{x}_{int} + \mathbf{r}' - \varepsilon^\gamma \mathbf{y}'/2,$$

因此，根据平稳性

$$L_2 = \varepsilon^{2\gamma}\mathbb{E}\Big[e^{2i\omega_1\mathscr{s}_0 V((\mathbf{x}_{int}+\mathbf{r}')/\varepsilon^\gamma+\mathbf{y}'/2)}e^{-2i\omega_2\mathscr{s}_0 V((\mathbf{x}_{int}+\mathbf{r}')/\varepsilon^\gamma-\mathbf{y}'/2)}\Big] = \varepsilon^{2\gamma}\mathbb{E}\Big[e^{2i\omega_1\mathscr{s}_0 V(\mathbf{y}'/2)}e^{-2i\omega_2\mathscr{s}_0 V(-\mathbf{y}'/2)}\Big], \tag{83}$$

其中，项 $\varepsilon^{2\gamma}$ 来自变量变换。经过这两次变量变换，乘积$L_3\times L_4$ 变为

$$\begin{aligned} L_3\times L_4 = e^{i\mathbf{r}'\cdot(\omega_1(\mathbf{q}_1'-\mathbf{q}_1)-\omega_2(\mathbf{q}_2'-\mathbf{q}_2))/\sqrt{\varepsilon}} \\ \times e^{i\varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{y}'\cdot(\omega_1(\mathbf{q}_1'-\mathbf{q}_1)+\omega_2(\mathbf{q}_2'-\mathbf{q}_2))/2} \\ \times e^{i\omega_1\mathbf{q}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_{obs,ref})/\sqrt{\varepsilon}}e^{-i\omega_2\mathbf{q}_2\cdot(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_{obs,ref})/\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

由于$\mathbf{r}'$ 仅出现在第一个指数因子 $e^{i\mathbf{r}'\cdot(\omega_1(\mathbf{q}_1'-\mathbf{q}_1)-\omega_2(\mathbf{q}_2'-\mathbf{q}_2))/\sqrt{\varepsilon}}$中，对$\mathbf{r}'$ 积分即可得到狄拉克分布

$$(2\pi)^2\varepsilon\delta(\omega_1(\mathbf{q}_1'-\mathbf{q}_1)-\omega_2(\mathbf{q}_2'-\mathbf{q}_2)).$$

为 了保留 L_2中出现的$\mathbf{y}'$依赖关系，我们进一步引入变量变换 les

$$\mathbf{q}_j \to \mathbf{q}_j' - \mathbf{p}_j/\varepsilon^{\gamma-1/2} \qquad j = 1,2,$$

由此得到

$$\begin{aligned} \int L_3\times L_4\,d\mathbf{r}' = (2\pi)^2\varepsilon^{-2\gamma+2}\delta(\omega_1\mathbf{p}_1-\omega_2\mathbf{p}_2)\,e^{i\mathbf{y}'\cdot(\omega_1\mathbf{p}_1+\omega_2\mathbf{p}_2)/2}e^{-i(\omega_1\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1-\omega_2\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2)/\varepsilon^\gamma} \\ \times e^{i\omega_1\mathbf{q}_1'\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_{obs,ref})/\sqrt{\varepsilon}}e^{-i\omega_2\mathbf{q}_2'\cdot(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_{obs,ref})/\sqrt{\varepsilon}}, \end{aligned}$$

利用狄拉克质量的存在来写出

$$e^{-i\omega_1\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_{obs,ref})/\varepsilon^\gamma}e^{i\omega_2\mathbf{p}_2\cdot(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_{obs,ref})/\varepsilon^\gamma} = e^{-i\omega_1\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1/\varepsilon^\gamma}e^{i\omega_2\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2/\varepsilon^\gamma}.$$

我们接着进行进行变量替换 $\omega_j\mathbf{p}_j \mapsto \mathbf{p}j$，这样（82）中的 $\omega_1^4\omega_2^4$ 就被替换为 $\omega_1^2\omega_2^2$，并得到 n

$$\int L_3 \times L_4 \, d\mathbf{r}' = (2\pi)^2\varepsilon^{-2\gamma+2}\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\, e^{i\mathbf{y}'\cdot\mathbf{p}_1} e^{-i\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)/\varepsilon^\gamma} \times e^{i\omega_1\mathbf{q}_1'\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_{obs,ref})/\sqrt{\varepsilon}} e^{-i\omega_2\mathbf{q}_2'\cdot(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_{obs,ref})/\sqrt{\varepsilon}}.$$

上述方程中的快速相位 $e^{-i\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)/\varepsilon^\gamma}$ 以及 L_1中涉及 t_j 的相应相位项促使我们选择

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x} + \varepsilon^\gamma\widetilde{\mathbf{y}}_j, \qquad \text{and} \qquad t_j = t + \varepsilon^\gamma\mathbf{k}_0\cdot\widetilde{\mathbf{y}}_j + \varepsilon\widetilde{s}_j \qquad j=1,2, \tag{84}$$

其中我们将在下文指定 $\mathbf{x}$ 和 t 。作此选择后，我们得到

$$\int L_3 \times L_4 \, d\mathbf{r}' = (2\pi)^2\varepsilon^{-2\gamma+2}\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\, e^{i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{y}'} e^{-i\mathbf{p}_1\cdot(\widetilde{\mathbf{y}}_1-\widetilde{\mathbf{y}}_2)} \times e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{obs,ref})\cdot(\omega_1\mathbf{q}_1'-\omega_2\mathbf{q}_2')/\sqrt{\varepsilon}} e^{i\varepsilon^{\gamma-1/2}(\omega_1\mathbf{q}_1'\cdot\widetilde{\mathbf{y}}_1-\omega_2\mathbf{q}_2'\cdot\widetilde{\mathbf{y}}_2)},$$

而因子 L_1 则化简为

$$L_1 = e^{-i(\omega_1-\omega_2)(t-2s_0z_{int}-\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}_0)/\varepsilon} e^{-i(\omega_1\widetilde{s}_1-\omega_2\widetilde{s}_2)}.$$

关于项 L_5，在完成上述所有变量变换后，我们得到

$$\begin{aligned} L_5 &= \hat{u}_0\Big(\omega_1, \mathbf{q}_1' - \frac{\mathbf{p}_1}{\omega_1\varepsilon^{\gamma-1/2}}, z_{int}\Big)\hat{u}_0(\omega_1,\mathbf{q}_1',z_{int}) \\ &\quad\times \overline{\hat{u}_0\Big(\omega_2, \mathbf{q}_2' - \frac{\mathbf{p}_1}{\omega_2\varepsilon^{\gamma-1/2}}, z_{int}\Big)\hat{u}_0(\omega_2,\mathbf{q}_2',z_{int})} \\ &= e^{-iz_{int}c_0\mathbf{p}_1^TA_0\mathbf{p}_1(1/\omega_1-1/\omega_2)/\varepsilon^{2\gamma-1}} e^{2iz_{int}c_0(\mathbf{q}_1'-\mathbf{q}_2')^TA_0\mathbf{p}_1/\varepsilon^{\gamma-1/2}}\, \hat{u}_0(\omega_1,\mathbf{q}_1',2z_{int})\overline{\hat{u}_0(\omega_2,\mathbf{q}_2',2z_{int})}. \end{aligned}$$

这两个快速振荡相位因子的存在表明，应引入以下变量变换

$$\omega_1 = \omega + \varepsilon^{2\gamma-1}h/2, \qquad \omega_2 = \omega - \varepsilon^{2\gamma-1}h/2, \tag{85}$$

and

$$\mathbf{q}_1' = \mathbf{q} + \varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{r}/2, \qquad \mathbf{q}_2' = \mathbf{q} - \varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{r}/2.$$

在 ε 的首阶下，这给出

$$\begin{aligned} L_5\times L_6 &\simeq \varepsilon^{4\gamma-2}e^{ihz_{int}c_0\mathbf{p}_1^TA_0\mathbf{p}_1/\omega^2}e^{2iz_{int}c_0\mathbf{r}^TA_0\mathbf{p}_1}|\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q})|^2\omega^4, \\ L_2 &\simeq \varepsilon^{2\gamma}\mathbb{E}\big[e^{2i\omega s_0(V(\mathbf{y}')-V(0))}\big], \\ \int L_3\times L_4\, d\mathbf{r}' &\simeq (2\pi)^2\varepsilon^{-2\gamma+2}\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\, e^{i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{y}'}e^{-i\mathbf{p}_1\cdot(\widetilde{\mathbf{y}}_1-\widetilde{\mathbf{y}}_2)}e^{i\omega(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{obs,ref})\cdot\mathbf{r}/\varepsilon^{1-\gamma}}e^{ih\varepsilon^{2\gamma-3/2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{obs,ref})\cdot\mathbf{q}}, \\ L_1 &\simeq e^{-ih(t-2s_0z_{int}-\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}_0)/\varepsilon^{2(1-\gamma)}}e^{-i\omega(\widetilde{s}_1-\widetilde{s}_2)}. \end{aligned} \tag{86}$$

这里，我们利用了式 (83) 中 V 的平稳性来简化 L_2 的表达式。最后两个关系自然地促使我们选择观测变量

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{obs,ref} + \varepsilon^{1-\gamma}\bar{\mathbf{y}} + \sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{y} \qquad \text{and} \qquad t = t_{obs,ref} + \varepsilon^{1-\gamma}\mathbf{k}_0\cdot\bar{\mathbf{y}} + \sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{y} + \varepsilon^{2(1-\gamma)}\bar{s}.$$

汇总所有项，并在进行变量替换 $\mathbf{p}\mapsto-\omega\mathbf{p}$ 后，我们得到

$$C_\varepsilon \simeq \frac{\varepsilon^{4(\gamma-1/2)}\mathscr{R}^2}{4(2\pi)^8}\int\cdots\int e^{-i\omega(\widetilde{s}_1-\widetilde{s}_2-\mathbf{p}\cdot(\widetilde{\mathbf{y}}_1-\widetilde{\mathbf{y}}_2))}e^{i\omega\mathbf{r}\cdot\bar{\mathbf{y}}}e^{-ih\bar{s}}e^{-i\omega\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}'}\mathbb{E}\big[e^{2i\omega s_0(V(\mathbf{y}')-V(0))}\big] \times e^{-2i\omega z_{int}c_0\mathbf{r}^TA_0\mathbf{p}}e^{ihz_{int}c_0\mathbf{p}^TA_0\mathbf{p}}|\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q})|^2\,\omega^6 dh d\omega d\mathbf{q} d\mathbf{y}' d\mathbf{r} d\mathbf{p}.$$

在进行变量替换 $\mathbf{p}\to-\omega\mathbf{p}$ 后。作为结果，该极限不依赖于变量 $\mathbf{y}$。因此，对于任意测试函数 φ、ψ 和 ϕ，我们得到

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to0}\iiint \mathbb{E}\big[\big\langle S^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y}),\varphi\big\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\big\langle S^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y}),\psi\big\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\big]\phi(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y})d\bar{s}d\bar{\mathbf{y}}d\mathbf{y} \\ &\qquad = \int\cdots\int \mathbf{C}^{ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\widetilde{s}_1-\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_1-\widetilde{\mathbf{y}}_2)\varphi(\widetilde{s}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1)\psi(\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2)\phi(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y})d\bar{s}d\bar{\mathbf{y}}d\mathbf{y}d\widetilde{s}_1d\widetilde{s}_2d\widetilde{\mathbf{y}}_1d\widetilde{\mathbf{y}}_2, \end{aligned}$$

其中，$\mathbf{C}^{ref}$ 由式 (62) 定义。命题 7.1 的证明至此结束。

最后我们指出，若考虑两个不同的波束尺度变量 $\mathbf{y}_1$ 和 $\mathbf{y}_2$ ，使得在式 (84) 和 (84) 中 $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathsf{O}(\sqrt{\varepsilon})$，则还会出现一个额外的振荡因子

$$e^{i\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2)/\varepsilon^{\gamma-1/2}}$$

appe（86）中的.....。在这种情况下，我们在光束宽度尺度上得到渐近去相关 :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\cdots\int \mathbb{E}\big[S^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y}_1,\widetilde{s}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1)S^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y}_2,\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2)\big] \\ \times\varphi(\mathbf{y}_1,\widetilde{s}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1)\psi(\mathbf{y}_2,\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2)\phi(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y})d\bar{s}d\bar{\mathbf{y}}d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2d\widetilde{s}_1d\widetilde{s}_2d\widetilde{\mathbf{y}}_1d\widetilde{\mathbf{y}}_2=0.$$

在光束宽度尺度上不存在相关性，这是推论 7.1 和 7.2 中所述独立性性质的基础，也适用于透射散斑的相应结果。

9.2 命题 7.2 的证明

本节证明相关函数的统计稳定化，即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\big[C^{\varepsilon,ref}(\phi,\varphi,\psi)^2\big]=C^{ref}(\phi,\varphi,\psi)^2,$$

其中

$$C^{ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1,\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2)=\mathbf{C}^{ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\widetilde{s}_1-\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_1-\widetilde{\mathbf{y}}_2).$$

根据马尔可夫不等式，对于任意 $\eta>0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}\big(\big|C^{\varepsilon,ref}(\phi,\varphi,\psi)-C^{ref}(\phi,\varphi,\psi)\big|>\eta\big)=0,$$

由此得到依概率收敛。证明与命题 7.1 的证明非常相似，因此我们只强调额外的关键要点。

在 ε 的首阶项中，反射散斑轮廓可写为

$$S^{\varepsilon,ref}(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y},\widetilde{s},\widetilde{\mathbf{y}})\simeq\frac{\mathscr{R}}{2(2\pi)^5\varepsilon^{2\gamma}}\iiint e^{-i\omega\bar{s}/\varepsilon^{2\gamma-1}}e^{-i\omega\widetilde{s}}e^{i\omega\mathbf{q}\cdot\bar{\mathbf{y}}/\varepsilon^{\gamma-1/2}}e^{i\omega\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}e^{i\varepsilon^{\gamma-1/2}\omega\mathbf{q}\cdot\widetilde{\mathbf{y}}} \\ \times e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_{int})/\sqrt{\varepsilon}}e^{2i\omega\vartheta_0V(\mathbf{x}'/\varepsilon^\gamma)} \\ \times\hat{u}_0(\omega,\mathbf{q},z_{int})\hat{u}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}')\omega^4d\omega d\mathbf{x}'d\mathbf{q}'d\mathbf{q}.$$

因此，对于测试函数 $\phi\in\mathsf{S}(\mathbb{X})$ 和 $\varphi,\ \psi\in\mathsf{S}(X)$,

$$C^{\varepsilon,ref}(\phi,\varphi,\psi):=\frac{\mathscr{R}^2}{4(2\pi)^{10}\varepsilon^{4\gamma}}\int\cdots\int e^{-i(\omega_1-\omega_2)\bar{s}/\varepsilon^{2\gamma-1}}e^{-i(\omega_1\widetilde{s}_1-\omega_2\widetilde{s}_2)} \\ \times e^{i(\omega_1\mathbf{q}_1-\omega_2\mathbf{q}_2)\cdot\bar{\mathbf{y}}/\varepsilon^{\gamma-1/2}}e^{i(\omega_1\mathbf{q}_1-\omega_2\mathbf{q}_2)\cdot\mathbf{y}}e^{i\varepsilon^{\gamma-1/2}(\omega_1\mathbf{q}_1\cdot\widetilde{\mathbf{y}}_1-\omega_2\mathbf{q}_2\cdot\widetilde{\mathbf{y}}_2)} \\ \times e^{i\omega_1(\mathbf{q}_1'-\mathbf{q}_1)\cdot(\mathbf{x}_1'-\mathbf{x}_{int})/\sqrt{\varepsilon}}e^{-i\omega_2(\mathbf{q}_2'-\mathbf{q}_2)\cdot(\mathbf{x}_2'-\mathbf{x}_{int})/\sqrt{\varepsilon}} \\ \times e^{2i\vartheta_0(\omega_1V(\mathbf{x}_1'/\varepsilon^\gamma)-\omega_2V(\mathbf{x}_2'/\varepsilon^\gamma))} \\ \times\hat{u}_0(\omega_1,\mathbf{q}_1,z_{int})\hat{u}_0(\omega_1,\mathbf{q}_1',z_{int})\overline{\hat{u}_0(\omega_2,\mathbf{q}_2,z_{int})\hat{u}_0(\omega_2,\mathbf{q}_2',z_{int})} \\ \times\hat{\Psi}(\omega_1,\mathbf{q}_1')\overline{\hat{\Psi}(\omega_2,\mathbf{q}_2')}\phi(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\mathbf{y})\varphi(\widetilde{s}_1,\widetilde{\mathbf{y}}_1)\psi(\widetilde{s}_2,\widetilde{\mathbf{y}}_2) \\ \times\omega_1^4\omega_2^4d\omega_1d\omega_2d\bar{s}d\widetilde{s}_1d\widetilde{s}_2d\mathbf{x}_1'd\mathbf{q}_1'd\mathbf{q}_1d\mathbf{x}_2'd\mathbf{q}_2'd\mathbf{q}_2d\bar{\mathbf{y}}d\mathbf{y}d\widetilde{\mathbf{y}}_1d\widetilde{\mathbf{y}}_2.$$

取 $\mathsf{C}^{\varepsilon,\ ref}(\phi,\ \varphi,\ \psi)^2$ 的期望，得到

$$E_\varepsilon:=\mathbb{E}\Big[e^{2i\vartheta_0\sum_{j=1}^2\omega_{1,j}V(\mathbf{x}_{1,j}'/\varepsilon^\gamma)-\omega_{2,j}V(\mathbf{x}_{2,j}'/\varepsilon^\gamma)}\Big].$$

引入变量变换，对于 $j=1,\ 2$,

$$\mathbf{x}_{1,j}'\to\mathbf{x}_{int}+\mathbf{r}_j'+\varepsilon^\gamma\mathbf{y}_j'/2\qquad\text{and}\qquad\mathbf{x}_{2,j}'\to\mathbf{x}_{int}+\mathbf{r}_j'-\varepsilon^\gamma\mathbf{y}_j'/2,\qquad j=1,2,$$

并利用 V 的平稳性，我们可以将 E_ε 改写为

$$E_\varepsilon=\mathbb{E}\Big[e^{2i\vartheta_0\sum_{j=1}^2\omega_{1,j}V((\mathbf{x}_{int}+\mathbf{r}_j')/\varepsilon^\gamma+\mathbf{y}_j'/2)-\omega_{2,j}V((\mathbf{x}_{int}+\mathbf{r}_j')/\varepsilon^\gamma-\mathbf{y}_j'/2)}\Big] \\ =\mathbb{E}\Big[e^{2i\vartheta_0(\omega_{1,1}V(\mathbf{r}_1'/\varepsilon^\gamma+\mathbf{y}_1'/2)-\omega_{2,1}V(\mathbf{r}_1'/\varepsilon^\gamma-\mathbf{y}_1'/2))}e^{2i\vartheta_0(\omega_{1,2}V(\mathbf{r}_2'/\varepsilon^\gamma+\mathbf{y}_2'/2)-\omega_{2,2}V(\mathbf{r}_2'/\varepsilon^\gamma-\mathbf{y}_2'/2))}\Big].$$

由于 $\gamma > 1/2$，点 $\mathbf{r}_1'/\varepsilon^\gamma$ 和 $\mathbf{r}_2'/\varepsilon^\gamma$ 渐近地相距越来越远（当 $\mathbf{r}_1' \neq \mathbf{r}_2'$ 时），根据引理 2.1，我们得到如下因式分解

$$E_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\simeq} \mathbb{E}\Big[e^{2i\vartheta_0(\omega_{1,1}V(\mathbf{r}_1'/\varepsilon^\gamma+\mathbf{y}_1'/2)-\omega_{2,1}V(\mathbf{r}_1'/\varepsilon^\gamma-\mathbf{y}_1'/2))}\Big]\mathbb{E}\Big[e^{2i\vartheta_0(\omega_{1,2}V(\mathbf{r}_2'/\varepsilon^\gamma+\mathbf{y}_2'/2)-\omega_{2,2}V(\mathbf{r}_2'/\varepsilon^\gamma-\mathbf{y}_2'/2))}\Big].$$

此时，可以对每个因子重复命题 7.1 证明中的同一系列变量变换和振荡积分论证。由此，对每个 $j = 1,2$，相应项都收敛到 $C^{ref}(\phi,\varphi,\psi)$，因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\big[C^{\varepsilon,ref}(\phi,\varphi,\psi)^2\big] = C^{ref}(\phi,\varphi,\psi)^2.$$

命题 7.2 的证明至此完成。

10 定理 7.1 的证明

证明沿用 [18, 第 9.3 节4] 中提出的策略。我们通过研究所有有限维矩的收敛性，刻画散斑的极限律。随后，二阶矩的一致有界性可推出紧性。

设 $\phi \in S(X\times X,\mathbb{C})$ 为一个测试函数。将 ϕ 应用于 (73)，得到

$$\begin{aligned}
J^\varepsilon(\phi) &:= \big\langle \hat{S}^{\varepsilon,ref}_{\mathbf{y}}, \phi\big\rangle_{S',S}\\
&\simeq \frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^2\varepsilon^{7(\gamma-1/2)+1}}\int\cdots\int e^{-i\omega\bar{s}/\varepsilon^{2\gamma-1}}e^{i\omega\mathbf{p}\cdot\bar{\mathbf{y}}/\varepsilon^{2\gamma-1}}e^{i\omega\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}/\varepsilon^{\gamma-1/2}}e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{p}/\varepsilon^{\gamma-1/2})\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_{int})/\sqrt{\varepsilon}}\\
&\qquad\times e^{2i\omega\vartheta_0 V(\mathbf{x}'/\varepsilon^\gamma)}\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{p}/\varepsilon^{\gamma-1/2},z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}')\\
&\qquad\times\varphi^{1/2}\Big(2\frac{\bar{s}-s^{ref}_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}},2\frac{\bar{\mathbf{y}}-\mathbf{y}^{ref}_p}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}}\Big)\overline{\phi(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\omega,\mathbf{p})}\omega^2 d\omega d\bar{s}d\mathbf{x}'d\mathbf{q}'d\bar{\mathbf{y}}d\mathbf{p}.
\end{aligned}$$

利用随机界面 V 的平稳性，不失一般性地，我们可以假设

$$\mathbf{x}_{int} = 0.$$

证明依赖于计算 $J^\varepsilon(\phi)$的所有矩的极限。其关键机制是对空间积分变量$\mathbf{x}'$ 进行配对，以消去快速振荡相位，并结合引理 2.1 中陈述的混合性质。为组织这些配对，我们按照相应的频率ω对变量排序。

我们将 $J^\varepsilon(\phi)$分解为正、负频率贡献，写作

$$J^\varepsilon_\pm := \int_0^\infty \mathcal{J}^\varepsilon(\pm\omega)d\omega,$$

with

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^\varepsilon(\omega) :=& \frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^2\varepsilon^{7(\gamma-1/2)+1}}\int\cdots\int e^{-i\omega\bar{s}/\varepsilon^{2\gamma-1}}e^{i\omega\mathbf{p}\cdot\bar{\mathbf{y}}/\varepsilon^{2\gamma-1}}e^{i\omega\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}/\varepsilon^{\gamma-1/2}}e^{i\omega(\mathbf{q}'-\mathbf{p}/\varepsilon^{\gamma-1/2})\cdot\mathbf{x}'/\sqrt{\varepsilon}}e^{2i\omega\vartheta_0 V(\mathbf{x}'/\varepsilon^\gamma)}\\
&\times\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{p}/\varepsilon^{\gamma-1/2},z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega,\mathbf{q}',z_{int})\hat{\Psi}(\omega,\mathbf{q}')\varphi^{1/2}\Big(2\frac{\bar{s}-s^{ref}_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}},2\frac{\bar{\mathbf{y}}-\mathbf{y}^{ref}_p}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}}\Big)\\
&\times\overline{\phi(\bar{s},\bar{\mathbf{y}},\omega,\mathbf{p})}\omega^2 d\bar{s}d\mathbf{x}'d\mathbf{q}'d\mathbf{p}d\bar{\mathbf{y}}.
\end{aligned}$$

偶数阶矩。 我们先考虑 $J^\varepsilon(\phi)$的偶数阶矩。将积分按 ω 分解为正、负频率后，得到

$$\mathbb{E}\big[J^\varepsilon(\phi)^{2n}\big] = \sum_{l=0}^{2n}\binom{2n}{l}M_\varepsilon(l,2n-l),$$

其中

$$M_\varepsilon(l,2n-l) := \mathbb{E}\big[(J^\varepsilon_+)^l(J^\varepsilon_-)^{2n-l}\big]. \tag{87}$$

这里我们使用变量替换 $\omega\mapsto-\omega$，将负频率的贡献改写为关于 $J^\varepsilon(-\omega)$ 的形式。

对 $M_\varepsilon(l,2n-l)$ 渐近行为的分析，依赖于将与相同频率相关联的空间变量进行配对，并利用随机界面的混合性质所引起的去相关。如下文所示，只有完全频率配对的构型会在极限 $\varepsilon\to 0$ 下作出贡献，从而得到高斯统计。

情形 $l=n$。现在我们分析矩 $M_\varepsilon(n,n)$，它将在 $\varepsilon\to 0$ 时提供唯一的非平凡贡献。根据定义，我们有

$$M_\varepsilon(n,n)=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^n\mathcal{J}^\varepsilon(\omega_{1,j})\mathcal{J}^\varepsilon(-\omega_{2,j})\Big]d\omega_{1,j}d\omega_{2,j}.$$

利用关于 ω 变量的对称性，我们可以将频率限制为有序频率：

$$M_\varepsilon(n,n)=n!^2\int_{\{0<\omega_{1,1}<\cdots<\omega_{1,n}\}}\int_{\{0<\omega_{2,1}<\cdots<\omega_{2,n}\}}\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^n\mathcal{J}^\varepsilon(\omega_{1,j})\mathcal{J}^\varepsilon(-\omega_{2,j})\Big]d\omega_{1,j}d\omega_{2,j}.$$

然后通过变量替换将正频率与负频率配对

$$\omega_{1,j}\to\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2\qquad\text{and}\qquad\omega_{2,j}\to\omega_j-\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2,$$

并引入 H_n^ε 排序约束在 h 变量中的像：

$$H_n^\varepsilon=\Big\{(h_1,\dots,h_n):\quad h_j\in\Big(2\frac{\omega_j-\omega_{j+1}}{\varepsilon^{2\gamma-1}}+h_{j+1},2\frac{\omega_j-\omega_{j-1}}{\varepsilon^{2\gamma-1}}+h_{j-1}\Big),\qquad j\in\{1,\dots,n\}\Big\},$$

其中使用约定 $\omega_{n+1}=\infty, h_{n+1}=\omega_0=h_0=0$。特别地，当 $\varepsilon\to 0$ 时，定义域 H_n^ε 变为 $\mathbb{R}^n$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}M_\varepsilon(n,n)&=\varepsilon^{n(2\gamma-1)}n!^2\int_{\{0<\omega_1<\cdots<\omega_n\}}\int_{H_n^\varepsilon}\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^n\mathcal{J}^\varepsilon(\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)\mathcal{J}^\varepsilon(-\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)\Big]d\omega_j dh_j\\&=\frac{n!^2\mathcal{R}^{2n}}{4^n(2\pi)^{4n}\varepsilon^{n(12(\gamma-1/2)+2)}}\\&\qquad\times\int_{\{0<\omega_1<\cdots<\omega_n\}}\int_{H_n^\varepsilon}\int\cdots\int\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^nM_\varepsilon^j\Big]\prod_{j=1}^n\prod_{l=1,2}d\omega_j dh_j d\bar{s}_{l,j}d\mathbf{x}'_{l,j}d\mathbf{q}'_{l,j}d\mathbf{p}_{l,j}d\bar{\mathbf{y}}_{l,j},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}M_\varepsilon^j:=\;&e^{-i\omega_j(\bar{s}_{1,j}-\bar{s}_{2,j})/\varepsilon^{2\gamma-1}}e^{-ih_j(\bar{s}_{1,j}+\bar{s}_{2,j})/2}\\&\times e^{i((\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)\mathbf{p}_{1,j}\cdot(\bar{\mathbf{y}}_{1,j}+\varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{y})-(\omega_j-\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)\mathbf{p}_{2,j}\cdot(\bar{\mathbf{y}}_{2,j}+\varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{y})/\varepsilon^{2\gamma-1}}\\&\times e^{i((\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)\mathbf{q}'_{1,j}\cdot(\bar{\mathbf{y}}_{1,j}+\varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{y})-(\omega_j-\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)\mathbf{q}'_{2,j}\cdot(\bar{\mathbf{y}}_{2,j}+\varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{y})/\varepsilon^{\gamma-1/2}}\\&\times e^{-i((\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)\mathbf{p}_{1,j}\cdot\mathbf{x}'_{1,j}-(\omega_j-\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)\mathbf{p}_{2,j}\cdot\mathbf{x}'_{2,j})/\varepsilon^\gamma}\\&\times e^{2i\vartheta_0((\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)V(\mathbf{x}'_{1,j}/\varepsilon^\gamma)-(\omega_j-\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)V(\mathbf{x}'_{2,j}/\varepsilon^\gamma))}\\&\times\hat{\mathcal{U}}_0(\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2,\mathbf{p}_{1,j}/\varepsilon^{\gamma-1/2}+\mathbf{q}'_{1,j},z_{int})\overline{\hat{\mathcal{U}}_0(\omega_j-\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2,\mathbf{p}_{2,j}/\varepsilon^{\gamma-1/2}+\mathbf{q}'_{2,j},z_{int})}\\&\times\hat{\mathcal{U}}_0(\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2,\mathbf{q}'_{1,j},z_{int})\overline{\hat{\mathcal{U}}_0(\omega_j-\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2,\mathbf{q}'_{2,j},z_{int})}\\&\times\hat{\Psi}(\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2,\mathbf{q}'_{1,j})\overline{\hat{\Psi}(\omega_j-\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2,\mathbf{q}'_{2,j})}\\&\times\varphi^{1/2}\Big(2\frac{\bar{s}_{1,j}-s^{ref}_{\mathbf{p}_{1,j}}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}},2\frac{\bar{\mathbf{y}}_{1,j}-\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}_{1,j}}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}}\Big)\varphi^{1/2}\Big(2\frac{\bar{s}_{2,j}-s^{ref}_{\mathbf{p}_{2,j}}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}},2\frac{\bar{\mathbf{y}}_{2,j}-\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}_{2,j}}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}}\Big)\\&\times\overline{\phi(\bar{s}_{1,j},\bar{\mathbf{y}}_{1,j},\mathbf{y},\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2,\mathbf{p}_{1,j}+\varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{q}'_{1,j})}\\&\times\overline{\phi(\bar{s}_{2,j},\bar{\mathbf{y}}_{2,j},\mathbf{y},-\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2,\mathbf{p}_{2,j}+\varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{q}'_{2,j})}\\&\times(\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)^2(\omega_j-\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)^2\end{aligned}$$

经过变量替换后

$$\mathbf{p}_{1,j}\to\varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{q}'_{1,j}+\mathbf{p}_{1,j}\qquad\text{and}\qquad\mathbf{p}_{2,j}\to\varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{q}'_{2,j}+\mathbf{p}_{2,j}.$$

接下来，我们在空间中进行变量替换：

$$\mathbf{x}'_{1,j}\to\mathbf{r}'_j+\varepsilon^\gamma\mathbf{y}'_j/2\qquad\text{and}\qquad\mathbf{x}'_{2,j}\to\mathbf{r}'_j-\varepsilon^\gamma\mathbf{y}'_j/2,$$

对 M_ε^j 中的随机相位项取期望，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} e^{2i\mathfrak{s}_0((\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)V(\mathbf{r}_j/\varepsilon^\gamma+\mathbf{y}_j'/2)-(\omega_j-\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)V(\mathbf{r}_j/\varepsilon^\gamma-\mathbf{y}_j'/2))}\Big] &\simeq \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\big[e^{2i\omega_j\mathfrak{s}_0(V(\mathbf{r}_j/\varepsilon^\gamma+\mathbf{y}_j'/2)-V(\mathbf{r}_j/\varepsilon^\gamma-\mathbf{y}_j'/2))}\big]\\ &\simeq \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\big[e^{2i\omega_j\mathfrak{s}_0(V(\mathbf{y}_j'/2)-V(-\mathbf{y}_j'/2))}\big]\\ &\simeq \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\big[e^{2i\omega_j\mathfrak{s}_0(V(\mathbf{y}_j')-V(0))}\big]\end{aligned}$$

如 $\varepsilon\to 0$。这里，因式分解用到了引理 2.1，最后两步用到了 V 的平稳性。由于所得表达式不再依赖于$\mathbf{r}_j'$，对$\mathbf{r}_j'$ 变量积分会产生狄拉克质量。事实上，剩余的对$\mathbf{r}_j'$ 的依赖仅通过

$$e^{i((\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)\mathbf{p}_{1,j}-(\omega_j-\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)\mathbf{p}_{2,j})\cdot\mathbf{r}_j'/e^\gamma}$$

因此，对$\mathbf{r}_j'$ 积分可得

$$(2\pi)^{2n}\varepsilon^{2n\gamma}\prod_{j=1}^{n}\delta((\omega_j+\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)\mathbf{p}_{1,j}-(\omega_j-\varepsilon^{2\gamma-1}h_j/2)\mathbf{p}_{2,j}).$$

接着，我们利用这些约束，将每个 j 化为单个散射方向变量$\mathbf{p}^j$。在 ε 的首阶下，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n}M_\varepsilon^j\Big] \simeq \prod_{j=1}^{n} & e^{-i\omega_j(\bar s_{1,j}-\bar s_{2,j})/\varepsilon^{2\gamma-1}}e^{-ih_j((\bar s_{1,j}+\bar s_{2,j})/2-s^{ref}_{\mathbf{p}_j^j})}e^{ih_j\mathbf{p}_j\cdot(\bar{\mathbf{y}}_{1,j}-\bar{\mathbf{y}}_{2,j})/2}e^{i\omega_j\mathbf{p}_j\cdot(\bar{\mathbf{y}}_{1,j}-\bar{\mathbf{y}}_{2,j})/\varepsilon^{2\gamma-1}}\\ &\times e^{i\omega_j(\mathbf{q}_{1,j}'\cdot(\bar{\mathbf{y}}_{1,j}-\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}_j^j})-\mathbf{q}_{2,j}'\cdot(\bar{\mathbf{y}}_{2,j}-\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}_j^j}))/\varepsilon^{\gamma-1/2}}e^{i\omega_j(\mathbf{q}_{1,j}'-\mathbf{q}_{2,j}')\cdot\mathbf{y}}\\ &\times\mathbb{E}\big[e^{2i\omega_j\mathfrak{s}_0(V(\mathbf{y}_j')-V(0))}\big]e^{-i\omega_j\mathbf{y}_j'\cdot\mathbf{p}_j}\\ &\times\hat{\mathcal{U}}_0(\omega_j,\mathbf{q}_{1,j}',2z_{int})\overline{\hat{\mathcal{U}}_0(\omega_j,\mathbf{q}_{2,j}',2z_{int})}\hat\Psi(\omega_j,\mathbf{q}_{1,j}')\overline{\hat\Psi(\omega_j,\mathbf{q}_{2,j}')}\\ &\times\varphi^{1/2}\Big(2\frac{\bar s_{1,j}-s^{ref}_{\mathbf{p}_j^j}}{\varepsilon^{2\gamma-1}},2\frac{\bar{\mathbf{y}}_{1,j}-\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}_j^j}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}}\Big)\varphi^{1/2}\Big(2\frac{\bar s_{2,j}-s^{ref}_{\mathbf{p}_j^j}}{\varepsilon^{2\gamma-1}},2\frac{\bar{\mathbf{y}}_{2,j}-\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}_j^j}}{\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}}\Big)\\ &\times\overline{\phi(\bar s_{1,j},\bar{\mathbf{y}}_{1,j},\omega_j,\mathbf{p}_j)\phi(\bar s_{2,j},\bar{\mathbf{y}}_{2,j},-\omega_j,\mathbf{p}_j)}\omega_j^2.\end{aligned}$$

现在，作如下变量变换

$$\bar s_{1,j}\to s^{ref}_{\mathbf{p}_j}+\bar s_j+\varepsilon^{2\gamma-1}\widetilde{s}_j/2,\qquad\text{and}\qquad \bar s_{2,j}\to s^{ref}_{\mathbf{p}_j}+\bar s_j-\varepsilon^{2\gamma-1}\widetilde{s}_j/2,$$

对 h_j 积分后，所得项 $e^{-ih_j(\bar s_j-s^{ref}{}_{\mathbf{p}^j})}$ 为

$$2\pi\delta(\bar s_j).$$

类似地，令

$$\bar{\mathbf{y}}_{1,j}\to\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}_j}+\bar{\mathbf{y}}_j+\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}\widetilde{\mathbf{y}}_j/2,\qquad\text{and}\qquad \bar{\mathbf{y}}_{2,j}\to\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}_j}+\bar{\mathbf{y}}_j-\varepsilon^{2(\gamma-1/2)}\widetilde{\mathbf{y}}_j/2$$

连同

$$\mathbf{q}_{1,j}'\to\mathbf{q}_j+\varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{r}_j/2,\qquad\text{and}\qquad \mathbf{q}_{2,j}'\to\mathbf{q}_j-\varepsilon^{\gamma-1/2}\mathbf{r}_j/2,$$

那么，$\mathbf{q}_{1,j}'-\mathbf{q}_{2,j}'$ 中的振荡因子产生

$$e^{i\omega_j(\mathbf{q}_{1,j}'-\mathbf{q}_{2,j}')\cdot\bar{\mathbf{y}}_j/\varepsilon^{\gamma-1/2}}=e^{i\omega_j\mathbf{r}_j\cdot\bar{\mathbf{y}}_j},$$

因此，对$\mathbf{r}^j$ 积分可得

$$(2\pi)^2\delta(\bar{\mathbf{y}}_j)/\omega_j^2.$$

因此，$(h_j,\bar s_j,\mathbf{r}j,\bar{\ }\mathbf{y}j)$中的积分收敛到 $\bar s_j=0$ 和 $\bar{\ }\mathbf{y}_j=0$。

汇总所有这些约化并取极限 $\varepsilon\to 0$，得到

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}M_\varepsilon(n,n)=\frac{(2\pi)^n n!^2\mathcal{R}^{2n}}{4^n}\int_{\{0<\omega_1<\cdots<\omega_n\}}\int\cdots\int\prod_{j=1}^{n} & e^{-i\omega_j\widetilde{s}_j}e^{i\omega_j\mathbf{p}_j\cdot\widetilde{\mathbf{y}}_j}\\ &\times\mathbb{E}\big[e^{2i\omega_j\mathfrak{s}_0(V(\mathbf{y}_j')-V(0))}\big]e^{-i\omega_j\mathbf{y}_j'\cdot\mathbf{p}_j}\\ &\times|\hat\Psi(\omega_j,\mathbf{q}_j)|^2\varphi^{1/2}(\widetilde{s}_j,\widetilde{\mathbf{y}}_j)\varphi^{1/2}(-\widetilde{s}_j,-\widetilde{\mathbf{y}}_j)\\ &\times\overline{\phi(s^{ref}_{\mathbf{p}_j},\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}_j},\omega_j,\mathbf{p}_j)\phi(s^{ref}_{\mathbf{p}_j},\mathbf{y}^{ref}_{\mathbf{p}_j},-\omega_j,\mathbf{p}_j)}\\ &\times d\omega_j d\widetilde{s}_j d\widetilde{\mathbf{y}}_j d\mathbf{q}_j d\mathbf{y}_j' d\mathbf{p}_j,\end{aligned}$$

并利用 ω_j 的对称性

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon(n,n) = \frac{n!}{2^n}\Big(\frac{\mathcal{R}^2}{2}\int_0^\infty \mathcal{G}^0(\omega)d\omega\Big)^n.$$

最后，利用 V 的平稳性以及平滑核 φ 的对称性（因此 $\varphi^{1/2}(x)\varphi^{1/2}(-x) = \varphi(x)$）

$$\sigma_{ref}^2 := \frac{\mathcal{R}^2}{2}\int_0^\infty \mathcal{G}^0(\omega)d\omega = \frac{\mathcal{R}^2}{4}\int \mathcal{G}^0(\omega)d\omega = \frac{(2\pi)^3\mathcal{R}^2}{4}\int \hat{\varphi}(\omega,\mathbf{p})\mathcal{A}(2\mathfrak{s}_0,\omega,\mathbf{p})|\hat{\Psi}|_2^2(\omega) \times \overline{\phi(s_{\mathbf{p}}^{ref},\mathbf{y}_{\mathbf{p}}^{ref},\omega,\mathbf{p})\phi(s_{\mathbf{p}}^{ref},\mathbf{y}_{\mathbf{p}}^{ref},-\omega,\mathbf{p})}d\omega d\mathbf{p}, \tag{88}$$

其中 $|\hat{}\Psi|_2^2$ 在 (64) 中定义，A 在 (63) 中定义。

情形 $l \neq n$。在这种情况下，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon(l,2n-l) = 0,$$

对任意 $l \neq n$，其中 $M_\varepsilon(l,2n-l)$ 由 (87) 定义，且

$$M_\varepsilon(l,2n-l) = \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{l}\mathcal{G}^\varepsilon(\omega_{1,j})d\omega_{1,j}\prod_{j'=1}^{2n-l}\mathcal{G}^\varepsilon(-\omega_{2,j'})d\omega_{2,j'}\Big].$$

关键观察是，当 $l \neq n$时，正频率因子 J_+^ε 与负频率因子 J_-^ε 的数量不平衡。因此，在对频率排序并尝试像情形 $l = n$ 中那样将它们配对后，必然至少剩下 $|l-n|$ 个未配对因子。每个未配对因子都会产生形如 $e^{-i\omega_j s^{ref}_{\mathbf{p}_j}/\varepsilon^{2\gamma-1}}$ 的快速振荡相位，且无法由任何共轭相位抵消。由于所有频率 ω 都严格为正，这些振荡在所有可能的变量变换后仍然存在，不会相互抵消。因此，被积函数中含有频率量级为 $\varepsilon^{-(2\gamma-1)}$ 的高度振荡因子，而标准的非平稳相位论证表明

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon(l,2n-l) = 0.$$

将此结果与主导项 $M_\varepsilon(n,\ n)$ 的计算结合，可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\big[J^\varepsilon(\phi)^{2n}\big] = \frac{n!}{2^n}\sigma_{ref}^{2n} = \mathbb{E}[\big\langle\hat{\delta}_{\mathbf{y}}^{ref},\phi\big\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}^{2n}]. \tag{89}$$

奇数阶矩。对于任意奇数阶矩，在 $M_\varepsilon(l,\ 2n+1-l)$ 中，J_+^ε 与 J_-^ε 的数量必然不平衡，对任意 $l \in \{0,\ \ldots,\ 2n+1\}$ 均如此。与偶数阶矩且 $l \neq n$ 的情形一样，并非所有快速相位因子都能相互抵消。因此，相应的振荡积分在极限 $\varepsilon \to 0$ 下趋于零，我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\big[J^\varepsilon(\phi)^{2n+1}\big] = 0.$$

期望（1 阶矩）的情形由 (74) 给出。

紧性。当对取实值的测试函数 $\phi \in \mathcal{S}(X\times X)$ 作用时，$\hat{}\mathcal{S}_{\mathbf{y}}^{\varepsilon\ ref},$ 的实部和虚部的紧性推出其紧性。这些紧性性质由 J^ε 对测试函数的二阶矩收敛得到

$$\phi_r(s,\mathbf{y},\omega,\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(\phi(s,\mathbf{y},\omega,\mathbf{p}) + \phi(s,\mathbf{y},-\omega,\mathbf{p})) \qquad \text{and} \qquad \phi_i(s,\mathbf{y},\omega,\mathbf{p}) = \frac{1}{2i}(\phi(s,\mathbf{y},\omega,\mathbf{p}) - \phi(s,\mathbf{y},-\omega,\mathbf{p})).$$

事实上，对于这两个测试函数，我们有

$$J^\varepsilon(\phi_r) = \big\langle Re(\hat{\delta}_{\mathbf{y}}^{ref}),\phi\big\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \qquad \text{and} \qquad J^\varepsilon(\phi_i) = \big\langle Im(\hat{\delta}_{\mathbf{y}}^{ref}),\phi\big\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}.$$

协方差公式 (75) 和 (76)。这些公式由 $n = 1$ 的 (88) 和 (89) 以及标准的极化恒等式推出

$$J^\varepsilon(\phi_1)J^\varepsilon(\phi_2) = \frac{1}{4}\Big((J^\varepsilon(\phi_1+\phi_2))^2 - (J^\varepsilon(\phi_1-\phi_2))^2\Big),$$

and

$$J^\varepsilon(\phi_1)\overline{J^\varepsilon(\phi_2)} = \frac{1}{4i}\Big((J^\varepsilon(\phi_1+i\overline{\phi_2^-}))^2 - (J^\varepsilon(\phi_1-i\overline{\phi_2^-}))^2\Big),$$

其中 $\phi_2^-(\omega) = \phi_2(-\omega)$。定理 7.1 的证明至此结束。

A 跳跃条件和连续性关系的证明

T本节旨在论证由源在平面 $z=0$ 上引起的跳跃条件
t项，以及波场在随机扰动界面两侧满足的连续性关系。为推导这些关系，将波动方程 (8) 的解 u 分解为

$$u(t,\mathbf{x},z)=u^-(t,\mathbf{x},z)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(z)+u^+(t,\mathbf{x},z)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(z), \tag{90}$$

其中 u^+ 满足

$$\Delta u^+-\frac{1}{c^2(\mathbf{x},z)}\partial_{tt}^2u^+=0\qquad (t,\mathbf{x},z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R},$$

且 u^- 满足

$$\Delta u^--\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt}^2u^-=0\qquad (t,\mathbf{x},z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}.$$

A.1 源位置平面 $z=0$ 两侧的跳跃条件

将分解式 (90) 代入波动方程 (8)，在分布意义下得到

$$\begin{aligned}\Psi\Big(\frac{t-\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}}{T_0},\frac{\mathbf{x}}{r_0}\Big)\delta'(z)=\Delta u-\frac{1}{c^2(\mathbf{x},z)}\partial_{tt}^2u=\big(\partial_zu^+(t,\mathbf{x},z=0)-\partial_zu^-(t,\mathbf{x},z=0)\big)\delta(z)\\+\big(u^+(t,\mathbf{x},z=0)-u^-(t,\mathbf{x},z=0)\big)\delta'(z).\end{aligned}$$

辨识出 $\delta(z)$ 和 $\delta'(z)$ 的系数后，我们得到跳跃条件

$$\begin{aligned}u(t,\mathbf{x},z=0^+)-u(t,\mathbf{x},z=0^-)&=\Psi\Big(\frac{t-\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}}{T_0},\frac{\mathbf{x}}{r_0}\Big),\\ \partial_zu(t,\mathbf{x},z=0^+)-\partial_zu(t,\mathbf{x},z=0^-)&=0.\end{aligned} \tag{91}$$

A.2 穿过随机扰动界面的连续性关系

首先推导随机扰动界面处对于 u^+ 的连续性关系，然后采用与上一小节相同的方法将其推广到 $u_。$ 将项 u^+ 分解为

$$u^+(t,\mathbf{x},z)=u_0^+(t,\mathbf{x},z)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(z-z_{int}(\mathbf{x}))+u_1^+(t,\mathbf{x},z)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(z-z_{int}(\mathbf{x})), \tag{92}$$

其中

$$z_{int}(\mathbf{x}):=z_{int}+\sigma V(\mathbf{x}/\ell_c).$$

函数 u_0^+ 满足

$$\Delta u_0^+-\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt}^2u_0^+=0\qquad (t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\qquad \text{for}\qquad z<z_{int}(\mathbf{x}),$$

而 u_1^+ 满足

$$\Delta u_1^+-\frac{1}{c_1^2}\partial_{tt}^2u_1^+=0\qquad (t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\qquad \text{for}\qquad z>z_{int}(\mathbf{x}).$$

为将界面展平，我们引入平移后的场

$$U(t,\mathbf{x},Z)=u^+(t,\mathbf{x},Z+z_{int}(\mathbf{x}))$$

其满足

$$\Delta_\perp U+\Big(1+\frac{\sigma^2}{\ell_c^2}|\nabla_\perp V(\mathbf{x}/\ell_c)|^2\Big)\partial_{ZZ}^2U-\frac{1}{c^2(\mathbf{x},Z+z_{int}(\mathbf{x}))}\partial_{tt}^2U-\frac{\sigma}{\ell_c^2}(\Delta_\perp V(\mathbf{x}/\ell_c))\partial_ZU-\frac{\sigma}{\ell_c}\nabla_\perp V(\mathbf{x}/\ell_c)\cdot\nabla_\perp\partial_ZU=0. \tag{93}$$

在新的变量中，分解式（92）变为

$$U(t,\mathbf{x},Z)=U_0(t,\mathbf{x},Z)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(Z)+U_1(t,\mathbf{x},Z)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(Z), \tag{94}$$

其中 U_0 和 U_1 满足

$$\Delta_\perp U_j+\Big(1+\frac{\sigma^2}{\ell_c^2}|\nabla_\perp V(\mathbf{x}/\ell_c)|^2\Big)\partial_{ZZ}^2U_j-\frac{1}{c_j^2}\partial_{tt}^2U_j-\frac{\sigma}{\ell_c^2}(\Delta_\perp V(\mathbf{x}/\ell_c))\partial_ZU_j-\frac{\sigma}{\ell_c}\nabla_\perp V(\mathbf{x}/\ell_c)\cdot\nabla_\perp\partial_ZU_j=0,$$

对于 $j=0$,1. 将分解式（94）代入（93）得到

$$\begin{aligned}0=\delta(Z)\Big(\Big(1+\frac{\sigma^2}{\ell_c^2}|\nabla_\perp V(\mathbf{x}/\ell_c)|^2\Big)\Big(\partial_Z U_1(Z=0)-\partial_Z U_0(Z=0)\Big)\\ -\frac{\sigma}{\ell_c^2}(\Delta_\perp V(\mathbf{x}/\ell_c))(U_1(Z=0)-U_0(Z=0))\\ -\frac{\sigma}{\ell_c}\nabla_\perp V(\mathbf{x}/\ell_c)\cdot(\nabla_\perp U_1(Z=0)-\nabla_\perp U_0(Z=0))\Big)\\ +\delta'(Z)\Big(1+\frac{\sigma^2}{\ell_c^2}|\nabla_\perp V(\mathbf{x}/\ell_c)|^2\Big)\Big(U_1(Z=0)-U_0(Z=0)\Big)\end{aligned}$$

δ' 中的项给出 U_1（$Z=0$）$=U_0$（$Z=0$），接着 $\nabla_\perp U_1$（$Z=0$）$=\nabla_\perp U_0$（$Z=0$），因此δ 中的项只给出 $\partial_Z U_1$（$Z=0$）$=\partial_Z U_0$（$Z=0$）。回到原变量，我们得到以下关系

$$u_0^+(z=z_{int}(\mathbf{x}))=u_1^+(z=z_{int}(\mathbf{x}))\qquad\text{and}\qquad\partial_z u_0^+(z=z_{int}(\mathbf{x}))=\partial_z u_1^+(z=z_{int}(\mathbf{x})),$$

从而得到 u的连续性关系

$$u(z=z_{int}(\mathbf{x})^+)=u(z=z_{int}(\mathbf{x})^-)\qquad\text{and}\qquad\partial_z u(z=z_{int}(\mathbf{x})^+)=\partial_z u(z=z_{int}(\mathbf{x})^-).$$

B 引理 2.1 的证明

证明通过对 n进行归纳法来完成。我们重点证明引理的第二个断言，因为第一个断言可用相同的论证得到：只需考虑关于单个自变量的函数 g_j，并令$\mathbf{y}_j=0$。当 $n=1$时，该关系显然成立。假设该命题对 n 项成立，下面证明其对 $n+1$ 项也成立。为此，我们写出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1^\eta X_2^\eta]&=\mathbb{E}[X_1^\eta X_2^\eta]-\mathbb{E}[X_1^\eta]\mathbb{E}[X_2^\eta]+\mathbb{E}[X_1^\eta]\mathbb{E}[X_2^\eta]\\&=Corr(X_1^\eta,X_2^\eta)\sqrt{Var(X_1^\eta)Var(X_2^\eta)}+\mathbb{E}[X_1^\eta]\mathbb{E}[X_2^\eta],\end{aligned}$$

with

$$X_1^\eta:=g_{n+1}\Big(V\Big(\frac{\mathbf{x}_{n+1}}{\eta}+\frac{\mathbf{y}_{n+1}}{2}\Big),V\Big(\frac{\mathbf{x}_{n+1}}{\eta}-\frac{\mathbf{y}_{n+1}}{2}\Big)\Big)\qquad\text{and}\qquad X_2^\eta:=\prod_{j=1}^n g_j\Big(V\Big(\frac{\mathbf{x}_j}{\eta}+\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big),V\Big(\frac{\mathbf{x}_j}{\eta}-\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big)\Big),$$

根据归纳假设，所需的因子分解性质对X_2^η 成立。因此，我们只需证明

$$\lim_{\eta\to0}Corr(X_1^\eta,X_2^\eta)=0,$$

因为

$$Var(X_1^\eta)Var(X_2^\eta)\le\sup_{j,v_1,v_2}|g_j(v_1,v_2)|^{2(n+1)}<\infty.$$

现在，利用 (19)，我们得到

$$Corr(X_1^\eta,X_2^\eta)\le\rho\Big(\min_{\substack{j=1,\dots,n\\ \nu_1,\nu_2=\pm}}\Big|\frac{\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_j}{\eta}+\nu_1\frac{\mathbf{y}_{n+1}}{2}+\nu_2\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big|\Big),$$

with

$$\min_{\substack{j=1,\dots,n\\ \nu_1,\nu_2=\pm}}\Big|\frac{\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_j}{\eta}+\nu_1\frac{\mathbf{y}_{n+1}}{2}+\nu_2\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big|\ge\min_{j=1,\dots,n}\frac{|\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_j|}{\eta}-\frac{|\mathbf{y}_{n+1}|}{2}-\max_{j=1,\dots,n}\frac{|\mathbf{y}_j|}{2}\xrightarrow[\eta\to0]{}\infty,$$

因为所有的 $\mathbf{x}j$ 都两两不同。结合衰减假设 (18) 与等价性结果 (20)，我们得出

$$\lim_{\eta\to0}Corr(X_1^\eta,X_2^\eta)=0.$$

最后，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{\eta\to0}\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n+1}g_j\Big(V\Big(\frac{\mathbf{x}_j}{\eta}+\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big),V\Big(\frac{\mathbf{x}_j}{\eta}-\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big)\Big)\Big]&=\lim_{\eta\to0}\prod_{j=1}^{n+1}\mathbb{E}\Big[g_j\Big(V\Big(\frac{\mathbf{x}_j}{\eta}+\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big),V\Big(\frac{\mathbf{x}_j}{\eta}-\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big)\Big)\Big]\\&=\prod_{j=1}^{n+1}\mathbb{E}\Big[g_j\Big(V\Big(\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big),V\Big(-\frac{\mathbf{y}_j}{2}\Big)\Big)\Big],\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由随机场 V 的平稳性得出。引理 2.1 的证明至此完成。

C 引理 4.1 的证明

该引理的证明依赖于一系列变换，这些变换明确揭示了界面起伏在反射与透射过程中的作用。这些变换包括：(*i*) 关于时间和横向变量进行傅里叶变换，(*ii*) 根据源缩放对对偶变量进行重新缩放，以及 (*iii*) 对垂直波数进行领先阶展开。

我们首先对连续性关系 (47) 关于时间和横向变量进行傅里叶变换。然后引入变量替换 $\mathbf{k} \to \mathbf{k}_0/\sqrt{\varepsilon} + \mathbf{q}$，以对应源分布 (29) 的缩放。此变量替换应用于 (47) 中出现的所有傅里叶变量。此外，我们使用 (26) 中给出的垂直波数展开，即

$$\mathfrak{s}_j^\varepsilon\Big(\mathbf{q} + \frac{\mathbf{k}_0}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) = \mathfrak{s}_j + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \qquad \text{for } j = 0, 1. \tag{95}$$

最后，通过 $\mathbf{q} \to \mathbf{k} - \mathbf{k}_0/\sqrt{\varepsilon}$ 还原到原始对偶变量，我们得到随机界面处关于 ε 的首阶连续性关系：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{s}_0}}\check{u}_\omega^{\varepsilon,inc}(\mathbf{x}, z_{int})e^{i\omega\mathfrak{s}_0 V(\mathbf{x}/\varepsilon^\gamma)} + \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{s}_0}}\check{u}_\omega^{\varepsilon,ref}(\mathbf{x}, z_{int})e^{-i\omega\mathfrak{s}_0 V(\mathbf{x}/\varepsilon^\gamma)} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{s}_1}}\check{u}_\omega^{\varepsilon,tr}(\mathbf{x}, z_{int})e^{i\omega\mathfrak{s}_1 V(\mathbf{x}/\varepsilon^\gamma)}, \\
&\sqrt{\mathfrak{s}_0}\check{u}_\omega^{\varepsilon,inc}(\mathbf{x}, z_{int})e^{i\omega\mathfrak{s}_0 V(\mathbf{x}/\varepsilon^\gamma)} - \sqrt{\mathfrak{s}_0}\check{u}_\omega^{\varepsilon,ref}(\mathbf{x}, z_{int})e^{-i\omega\mathfrak{s}_0 V(\mathbf{x}/\varepsilon^\gamma)} = \sqrt{\mathfrak{s}_1}\check{u}_\omega^{\varepsilon,tr}(\mathbf{x}, z_{int})e^{i\omega\mathfrak{s}_1 V(\mathbf{x}/\varepsilon^\gamma)},
\end{aligned} \tag{96}$$

其中，入射、反射和透射的傅里叶分量定义为

$$\begin{aligned}
\check{u}_\omega^{\varepsilon,inc}(\mathbf{x}, z) &:= \frac{\omega^2}{(2\pi)^2\varepsilon}\int e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}/\sqrt{\varepsilon}}\frac{\hat{a}_{0,\omega}^\varepsilon(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega}}e^{i\omega\mathfrak{s}_0^\varepsilon(\mathbf{k})(z-z_{int})/\varepsilon}d\mathbf{k}, \\
\check{u}_\omega^{\varepsilon,ref}(\mathbf{x}, z) &:= \frac{\omega^2}{(2\pi)^2\varepsilon}\int e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}/\sqrt{\varepsilon}}\frac{\hat{b}_\omega^{\varepsilon,ref}(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega}}e^{-i\omega\mathfrak{s}_0^\varepsilon(\mathbf{k})(z-z_{int})/\varepsilon}d\mathbf{k}, \\
\check{u}_\omega^{\varepsilon,tr}(\mathbf{x}, z) &:= \frac{\omega^2}{(2\pi)^2\varepsilon}\int e^{i\omega\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}/\sqrt{\varepsilon}}\frac{\hat{a}_\omega^{\varepsilon,tr}(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega}}e^{i\omega\mathfrak{s}_1^\varepsilon(\mathbf{k})(z-z_{int})/\varepsilon}d\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

展开式 (95) 对于确定模态振幅 $\hat{b}^{\varepsilon,ref}_{,\omega}(\mathbf{k})$ 和 $\hat{a}^{\varepsilon,tr}_{,\omega}(\mathbf{k})$ 的首阶表达式至关重要。求解方程组 (96) 得到

$$\begin{aligned}
\check{u}_\omega^{\varepsilon,ref}(\mathbf{x}, z_{int}) &= \mathcal{R}\,\check{u}_\omega^{\varepsilon,inc}(\mathbf{x}, z_{int})e^{2i\omega\mathfrak{s}_0 V(\mathbf{x}/\varepsilon^\gamma)}, \\
\check{u}_\omega^{\varepsilon,tr}(\mathbf{x}, z_{int}) &= \mathcal{T}\,\check{u}_\omega^{\varepsilon,inc}(\mathbf{x}, z_{int})e^{i\omega(\mathfrak{s}_0-\mathfrak{s}_1)V(\mathbf{x}/\varepsilon^\gamma)},
\end{aligned}$$

从而得到反射与透射振幅：

$$\begin{aligned}
\hat{b}_\omega^{\varepsilon,ref}(\mathbf{k}) = \frac{\varepsilon\mathcal{R}\omega^2}{2(2\pi)^2}\iint\, & e^{-i\omega\mathbf{x}'\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')/\sqrt{\varepsilon}}e^{i\omega\mathfrak{s}_0^\varepsilon(\mathbf{k}')z_{int}/\varepsilon}e^{2i\omega\mathfrak{s}_0 V(\mathbf{x}'/\varepsilon^\gamma)} \\
&\times\sqrt{\omega\mathfrak{s}_0^\varepsilon(\mathbf{k}')}\hat{\Psi}\Big(\omega, \mathbf{k}' - \frac{\mathbf{k}_0}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)d\mathbf{x}'d\mathbf{k}', \\
\hat{a}_\omega^{\varepsilon,tr}(\mathbf{k}) = \frac{\varepsilon\mathcal{T}\omega^2}{2(2\pi)^2}\iint\, & e^{-i\omega\mathbf{x}'\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')/\sqrt{\varepsilon}}e^{i\omega\mathfrak{s}_0^\varepsilon(\mathbf{k}')z_{int}/\varepsilon}e^{i\omega(\mathfrak{s}_0-\mathfrak{s}_1)V(\mathbf{x}'/\varepsilon^\gamma)} \\
&\times\sqrt{\omega\mathfrak{s}_0^\varepsilon(\mathbf{k}')}\hat{\Psi}\Big(\omega, \mathbf{k}' - \frac{\mathbf{k}_0}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)d\mathbf{x}'d\mathbf{k}'.
\end{aligned}$$

为消除源分布的缩放效应，我们引入变量替换

$$\mathbf{k} \to \frac{\mathbf{k}_0}{\sqrt{\varepsilon}} + \mathbf{q} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{k}' \to \frac{\mathbf{k}_0}{\sqrt{\varepsilon}} + \mathbf{q}'.$$

再次利用（95），我们得到 ε 处首阶反射波场和透射波场：

$$\begin{aligned}
u^{\varepsilon,ref}(t, \mathbf{x}, z=0) \simeq \frac{\mathcal{R}}{2(2\pi)^5\varepsilon}\iiiint\, & e^{-i\omega(t-2\mathfrak{s}_0 z_{int}-\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}_0)/\varepsilon}e^{2i\omega\mathfrak{s}_0 V(\mathbf{x}'/\varepsilon^\gamma)} \\
&\times e^{i\omega\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'-\mathbf{x}_{int})/\sqrt{\varepsilon}}e^{i\omega\mathbf{q}'\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_{int})/\sqrt{\varepsilon}} \\
&\times\hat{\mathcal{U}}_0(\omega, \mathbf{q}, z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega, \mathbf{q}', z_{int})\hat{\Psi}(\omega, \mathbf{q}')\omega^4 d\omega d\mathbf{x}' d\mathbf{q}' d\mathbf{q},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
u^{\varepsilon,tr}(t, \mathbf{x}, z=z_{tr}) \simeq \frac{\mathcal{T}}{2(2\pi)^5\varepsilon}\sqrt{\frac{\mathfrak{s}_0}{\mathfrak{s}_1}}\iiiint\, & e^{-i\omega(t-\mathfrak{s}_0 z_{int}-\mathfrak{s}_1(z_{tr}-z_{int}))-\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}_0)/\varepsilon}e^{i\omega(\mathfrak{s}_0-\mathfrak{s}_1)V(\mathbf{x}'/\varepsilon^\gamma)} \\
&\times e^{i\omega\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'-\mathbf{x}_{tr})/\sqrt{\varepsilon}}e^{i\omega\mathbf{q}'\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_{int})/\sqrt{\varepsilon}} \\
&\times\hat{\mathcal{U}}_1(\omega, \mathbf{q}, z_{tr}-z_{int})\hat{\mathcal{U}}_0(\omega, \mathbf{q}', z_{int})\hat{\Psi}(\omega, \mathbf{q}')\omega^4 d\omega d\mathbf{x}' d\mathbf{q}' d\mathbf{q}.
\end{aligned}$$

这些表达式可以用式（50）中定义的散射算子 K^ε 来重写，由此完成引理的证明。

参考文献

[1] *F. Aieta*、*P. Genevet*、*N. Yu*、*M. A. Kats*、*Z. Gaburro* 和 *F. Capasso*，《各向异性光学天线超表面利用相位不连续实现光的面外反射与折射》，*Nano Lett.*，*12*，*1702–1706*页。[2] *R. Alonso*、*L. Borcea* 和 *J. Garnier*，《随机边界波导中的波传播》，*Commun. Math. Sci.*，*11*（*2012*年），*233–267*页。[3] *G. Bal*、*J. B. Keller*、*G. C. Papanicoalou* 和 *L. Ryzhik*，《界面处发生反射与透射的声波输运理论》，*Wave Motion*，*30*（*1999*年），*303–327*页。[4] *G. Bal*、*T. Komorowski* 和 *L. Ryzhik*，《随机介质中波的动力学极限》，*Kinet. Relat. Mod.*，*3*（*2010*年），*529-644*页。[5] *G. Bal*、*T. Komorowski* 和 *L. Ryzhik*，《随机薛定谔方程解的相位渐近行为》，*Arch. Rat. Mech. Anal.*，*100*（*2011*年），*613–664*页。[6] *G. Bal* 和 *A. Nair*，《长距离随机波过程的复高斯性》，*arXiv:2402.17107*[7] *J.P. Banon*、*Ø. S. Hetland* 和 *I. Simonsen*，《弱粗糙介电表面偏振光散射的物理学：*Yoneda* 散射与布儒斯特散射现象》，*Phys. Rev. A*，*99*（*2019*年），*023834*。[8] *F. G. Bass* 和 *I. M. Fuks*，《统计粗糙表面的波散射》，自然哲学国际丛书，爱思唯尔，*2013*年。[9] *P. Billingsley*，《概率测度的收敛》，第*2*版，*Wiley InterScience*，*1999*年。[10] *R.C. Bradley*，《随机场的等价混合条件》，*Ann. Probab.*，*21*（*1993*年），*1921-1926*页。[11] *H. Brezis*，《泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程》，施普林格，纽约，*2011*年。[12] *H. Contopanagos*、*B. Dembart*、*M. Epton*、*J.J. Ottusch*、*V. Rokhlin*、*J.L. Visher* 和 *S.M. Wandzura*，《三维电磁散射的良态边界积分方程》，*IEEE Trans. Antennas Propag.*，*50*（*2002*年），*1824–1830*页。[13] *G. Da Prato* 和 *J. Zabczyk*，《无限维随机方程》，剑桥大学出版社，*2014*年。[14] *M. Darmon*、*V. Dorval* 和 *F. Baqu´e*，《粗糙表面声散射模型：简要综述与最新进展》，*Appl. Sci.*，*10*（*2020*年），*8305*。[15] *D. A. Dawson* 和 *G. C. Papanicolaou*，《随机波过程》，*Appl. Math. Optim.*，*12*（*1984*年），*97–114*页。[16] *J. A. DeSanto*，《粗糙界面的散射》，*Radio Sci.*，*16*（*1981*年），*1021–1024*页。[17] *T.M. Elfouhaily* 和 *C.A. Gu´erin*，《随机粗糙表面近似散射波理论的批判性综述》，*Waves in Random Media*，*14*（*2004*年），*R1–R40*页。[18] *J.P. Fouque*、*J. Garnier*、*G. Papanicolaou* 和 *K. Sølna*，《随机分层介质中的波传播与时间反演》，施普林格，纽约，*2007*年。[19] *B. Gallas*、*A. Maurel*、*J.J. Marigo* 和 *A. Ourir*，《周期性粗糙表面的光散射：等效跳跃条件》，*J. Opt. Soc. Am. A*，*12*（*2017*年），*2181–2188*页。[20] *J.V. Garcia-Ramos* 和 *J.A. S´anchez-Gil*，《随机自仿射分形金属表面散射电磁波的远场强度》，*Waves in Random Media*，*7*（*1997*年），*285–293*页。[21] *J. Garnier* 和 *K. Sølna*，《白噪声区域随机介质中的耦合傍轴波方程》，*Ann. Applied Probability*，*19*（*2009*年），*318–346*页。[22] *J. Garnier* 和 *K. Sølna*，《一般随机双曲系统的白噪声抛物近似》，*SIAM Multiscale Model. Simul.*，*13*（*2015*年），*1022–1060*页。[23] *J. Garnier* 和 *K. Sølna*，《通过入射角上的散斑强度相关性实现散射介质成像》，*Inverse Probl.*，*34*（*2018*年），*094003*。[24] *J. Garnier* 和 *K. Sølna*，《随机介质中的无创成像》，*SIAM J. Appl. Math.*，*78*（*2018*年），*3296–3315*页。

[25] *C. Gomez*，《具有粗糙边界的水下声波导中的波传播》，*Commun. Math. Sci.*，*13*（*2015*年），第*2005–205*页。[26] *Y. Gu* 和 *T. Komorovski*，《随机薛定谔方程中的高斯涨落》，偏微分方程通讯，*46*（*2021*年），第*201–232*页。[27] *A. Ishimaru*，《随机介质中的波传播与散射》，第*2*卷，学术出版社，*1978*年。[28] *A. Ishimaru*，《随机介质与粗糙表面中的波传播与散射》，*IEEE*会刊，*79*（*1991*年），第*1359–1366*页。[29] *O. Katz*、*P. Heidmann*、*M. Fink* 和 *S. Gigan*，《通过散斑相关性穿过散射层并绕过拐角进行无创单次成像》，《自然·光子学》，*8*（*2014*年），第*784–790*页。[30] *Z. Li*、*X. Lin*、*M. Torres*、*H. Zhao*，《非均匀介质中加权极小曲面的广义斯涅尔定律》，《分析方法与应用》，*10*（*2003*年），第*199–214*页。[31] *P. Li*、*H. Wu* 和 *W. Zheng*，《无界粗糙表面的电磁散射》，*SIAM J. Math. Anal.*，*43*（*2011*年），第*1205–1231*页。[32] *A.A. Maradudin*、*T. Michel*、*A.R. McGurn* 和 *E.R. M´endez*，《随机光栅对光的增强背向散射》，《物理年鉴》，*203*（*1990*年），第*255–307*页。[33] *A.A. Maradudin*，《光散射与纳米尺度表面粗糙度》，施普林格，*2007*年。[34] *I. Mitoma*，《关于 *S′*-过程的样本连续性》，《日本数学会杂志》，*35*（*1983*年），第*629–636*页。[35] *J. Nevard* 和 *J.B. Keller*，《粗糙边界与界面的均匀化》，*SIAM J. Appl. Math.*，*57*（*1997*年），第*1660–1686*页。[36] *J. A. Ogilvy*，《随机粗糙表面的波散射理论》，*CRC*出版社，*1991*年。[37] *G. Papanicolaou*、*L. Ryzhik* 和 *K. Sølna*，《*Itˆo-Schr¨odinger* 方程中由横向多样性产生的自平均》，*SIAM Multiscale Model. Simul.*，*6*（*2007*年），第*468–492*页。[38] *J.A. S´anchez-Gil*、*J.V. Garc´ıa-Ramos* 和 *E.R. M´endez*，《具有纳米尺度截断的自仿射分形银表面的光散射：远场与近场计算》，《美国光学学会杂志》，*19*（*2002*年），第*901–911*页。[39] *A. Santenac* 和 *J. Daillant*，《粗糙表面波散射的统计方面》，载于 *Daillant, J.*、*Gibaud, A.*（编），《*X*射线与中子反射》，《物理学讲义专著》第*58*卷，施普林格，柏林，*1999*年。[40] *F. Sayas*、*O. Bruno*、*V. Dominguez*，《用于表面散射问题的高阶 *Nyström* 积分方程方法的收敛性分析》，《数值数学》，*124*（*2013*年），第*603–645*页。[41] *C.J.R Sheppard*，《生物组织和细胞中光散射的分形模型》，《光学快报》，*32*（*2007*年），第*142–144*页。[42] *F. Shi*、*M.J.S. Lowe* 和 *R.V. Craster*，《利用弹性动力学基尔霍夫近似计算随机粗糙固-固界面产生的漫散射与透射弹性波》，《物理评论 *E*》，*95*（*2017*年），*214305*。[43] *I. Simonsen*、*D. Vandembroucq* 和 *S. Roux*，《自仿射表面的波散射》，《物理评论*E*》，*61*（*2000*年），第*5914–5917*页。[44] *N. Yu*、*P. Genevet*、*M. A. Kats*、*F. Aieta*、*J.-P. Tetienne*、*F. Capasso* 和 *Z. Gaburro*，《具有相位不连续的光传播：反射与折射的广义定律》，《科学》，*334*（*2011*年），第*333–337*页。