arXiv:2603.17590v1 [math.CA] 18 Mar 2026

度量测度空间中的定量调和逼近与 Dorronsoro定理

MATTHEW HYDE

Abstract. 设 X 是一个 RCD(K, N) 空间，满足 $K \in \mathbb{R}$ 和 $N \in (1, \infty)$。我们根据一个量，对 Newton-Sobolev空间 $N^{1,2}(X)$ 作出刻画；该量衡量一个函数在局部（涵盖所有尺度和位置）被调和函数良好逼近的程度。我们还得到了另一种类似的刻画，进一步考虑了逼近用调和函数的局部振荡。即使在 $X = \mathbb{R}^n$ 的情形下，第一种刻画也是新的；第二种刻画是 RCD空间中 Dorronsoro定理的一个版本，并为欧几里得空间中的该定理（一个特殊情形）提供了新的证明。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 6 3. H-系数 15 4. 估计 H-系数 18 5. 估计振荡 H-RCD(K, N) 空间中的系数 22 6. 估计梯度 26 附录 A. 引理证明 3.6 32 参考文献 33

1. Introduction

众所周知，每个 Lipschitz 函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 在$\mathcal{L}^n$中几乎处处 $\mathbb{R}^n$可微，其中 $\mathcal{L}^n$ 表示 n维 Lebesgue测度——这就是 Rademacher 定理。虽然该定理揭示了f 在无穷小尺度上的丰富结构，却没有说明 f 在粗尺度上的结构。Dorronsoro 证明了 Rademacher 定理的一个定量版本，该版本确实提供了粗尺度上的结构信息 [Dor85]。以下是 Dorronsoro 定理的一个特例。

定理1.1。 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 。则 $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\Omega(f) := \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Omega_f(x,r)^2 \, \frac{dxdr}{r} < \infty. \tag{1.1}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 46E36, 30L99, 28A75.*Key words and phrases.* 可微性、Poincar´e 不等式、RCD 空间。M.H. 获得芬兰研究委员会通过项目 *Quantitative differentiability and rectifiability in metric spaces* 提供的资助，资助编号为 363800。

其中，

$$\Omega_f(x,r) = \inf_A \left(\fint_{B(x,r)} \left(\frac{f-A}{r} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中下确界取遍所有仿射函数 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。在这种情况下，可得 $\|f\|^2_{W^{1,\,2}(X)} \sim \|f\|^2_{L^2(X)} + \Omega(f)$。

换言之，Dorronsoro定理表明，函数属于 $W^{1,\,2}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当它在所有尺度和位置上都能被仿射函数充分良好地逼近，这一点由条件（1.1）量化。文献 [Dor85] 中的主要结果比上述表述更一般，对分数阶势空间也给出了类似刻画；然而，定理1.1 已在多种应用中证明其有效性。

定理1.1的一个重要应用是对一致可整集理论的研究。这些集合是一种对可整集的定量类比，最初由David和Semmes提出并发展 [DS91, DS93]。例如，定理1.1被用于 [DS91] 证明一致可整集满足所谓的强几何引理（一种定量切条件）；文献 [Azz21] 则利用它证明，支持Poincar´e不等式的欧几里得空间子集是一致可整的。Dorronsoro定理是定量微分的一个例子，即一种能够说明函数多快达到某个正则性阈值的结果。这类结果已被用于 [CN13a, CN13b] 研究几何分析和非线性偏微分方程中的部分正则性理论，用于 [Li14] 研究Carnot群的定量不可嵌入性，并用于 [CKN11]研究理论计算机科学中的最稀疏割问题。

本文旨在证明 Dorronsoro定理的一个版本，适用于满足黎曼曲率维数条件 RCD(K,N) 的度量测度空间类；该条件是对具有里奇曲率下界的黎曼流形类的推广。关于 RCD空间的相关背景和历史介绍，请参阅综述 [Amb18, Gig23]。这里我们先指出，RCD(K,N) 条件是曲率维数条件 CD(K,N) 的黎曼对应形式；后者由文献 [LV09] and[Stu06a, Stu06b] 独立提出。RCD(K,N) 和 CD(K,N) 条件都表示里奇曲率具有下界，但 RCD(K,N) 条件与 CD(K,N) 条件的区别在于，它排除了芬斯勒型几何。RCD(K,N) 空间的经典例子包括里奇曲率有下界的黎曼流形、里奇极限空间（见 [CC97]），以及（截面）曲率有下界的 Alexandrov空间（见 [Pet11, ZZ10]）。这类空间不一定局部欧氏，可以具有不唯一且非欧氏的切锥，也可能存在锥形奇点。

任何满足 RCD(K,N) 条件且具有 $K \in \mathbb{R}$ 和 $N \in (1,\infty)$ 的空间都满足 Rademacher 型定理。事实上，这类空间都是局部倍增的，并且根据 [Raj12a,Raj12b], ，它们满足 Heinonen 和 Koskela 意义下的局部 Poincar´e 不等式 [HK98], ，见（2.5）。Cheeger 的开创性工作 [Che99]由此推出，每个 Lipschitz 函数几乎处处都是无穷小广义线性的，这意味着，在这样的点上，该函数的每个放大极限都是调和的（通过最小化某种 Dirichlet 能量来定义），且具有常数能量密度；精确定义见 [Che99] 。

上述结果的一个定量版本见于 [Che12，Che23]，，其中证明了任意 Lipschitz 函数在多数位置和尺度上都能被调和函数良好逼近。这里，多数是通过某种弱卡尔*leson*条件来量化的。关于 RCD(K,N) 空间的另一项定量微分结果，同样以弱型卡尔leson条件表述，由于其（定量）可整流性性质，已在 [HVV24] 中得到证明。这些定量结果与定理 1.1的不同之处在于，它们仅控制表现出不良行为的尺度和位置的测度，并未提供衡量逼近效果的系数的可积性。

主要结果。 在下文的定理 A 中，我们刻画 Newton-Sobolev空间$N^{1,2}(X)$（见 [Sha00]），其中 X是一个 RCD(K,N) 空间。我们通过考察一个平方函数来得到这一刻画，其思路与定理1.1相同。该平方函数用于衡量与某个特定模型类的偏差。当然，在如此一般的情形下，仿射函数并无意义，因此我们定义了一个新的系数 H_f^{osc}，它衡量由调和函数进行的局部逼近，同时也考虑逼近函数梯度的振荡。

更确切地说，设 (X,d,μ) 是一个 RCD(K,N) 空间。对于函数 $f\in L^2(\mu)$ 和球 $B(x,r)\subset X$，定义

$$H_f^{\mathrm{osc}}(x,r)^2=\inf_h \fint_{B(x,r)}\left(\frac{f-h}{r}\right)^2+\left(g_h-\langle g_h\rangle_{B(x,r)}\right)^2 d\mu, \tag{1.2}$$

其中，下确界取遍所有满足以下条件的函数 h ：它们在 调和 (见 (2.10))于 $B(x,r)$ 中， g_h 是关于 h 在 $B(x,r)$ 中的最小弱上梯度（见 (2.4) ），并且$\langle g_h\rangle_{B(x,r)}$ 是 g_h 在 $B(x,r)$ 上的平均值。如前所述，调和性通过最小化某个 Dirichlet 能量来定义；最小上梯度是 $|\nabla h|$.<style id="

定义 H_f^{osc}的动机来自以下事实——函数 h： $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是仿射函数，当且仅当它是调和函数并满足 $g_h\equiv c$ ；也就是说，当且仅当它是广义线性的（参见 [Che12]）。人们很自然会尝试寻找定理1.1的一个版本，用广义线性函数的逼近来刻画 Sobolev 空间。然而，在如此一般的情形下，我们不能指望存在任何非恒定的广义线性函数。事实证明，量（1.2）可以很好地替代用广义线性函数进行逼近，而无需假设这类函数存在，如下文所示。

定理 A。 设 (X,d,μ) 为一个 $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间，满足 $K\in\mathbb{R}$ 和 $N\in(1,\infty)$；假设在 $K<0$的情形下， X 有界，并设 $f\in L^2(X)$。那么， $f\in N^{1,2}(X)$ 当且仅当

$$H^{\mathrm{osc}}(f):=\int_0^{\mathrm{diam}(X)}\int_X H_f^{\mathrm{osc}}(x,r)^2\,\frac{d\mu dr}{r}<\infty. \tag{1.3}$$

在这种情况下，我们有

$$\|\nabla f\|_{L^2(X)}^2\sim\left\|\frac{f-\langle f\rangle_X}{\mathrm{diam}(X)}\right\|_{L^2(X)}^2+H^{\mathrm{osc}}(f),$$

其中，隐含常数仅取决于 N 在 $K\geq 0$的情况下，并且仅取决于 N、K 以及$\mathrm{diam}(X)$ 在 $K<0$的情况下。这里， ∇ 是 X上的梯度算子的典范选择，参见小节*2*。

实际上，我们证明了定理 A 的一个版本，其中用另一个量 H_f^{RCD} 替代了 H_f^{osc}；该量 H_f^{RCD} 是根据 RCD空间上的 Hessian 定义的（参见定义 3.2）。定理 A 是这一更一般陈述的直接推论。我们用 H_f^{osc} 来表述定理 A，因为这一定义在更一般的度量空间中也有意义，例如支持 Poincar´e 不等式的空间。当 $X = \mathbb{R}^n$ 时，尽管尚不清楚 $H_f^{\mathrm{osc}}(x,r)$ 是否与 $\Omega f(x,r)$ 可比，但确实有 $H_f^{\mathrm{RCD}}(x,r) \sim \Omega f(x,r)$（引理 3.4）。因此，这里给出的定理 A 证明也为该情形下的定理1.1 提供了一种新的证明。

事实证明，在（1.2）中，刻画$N^{1,\,2}(X)$ 时，并不需要振荡项。事实上，我们按照（1.2）的形式定义了另一个系数 H_f，但省去了振荡项（定义3.1）。接下来，我们证明如下结论。

定理 B. 设(X,d,μ) 为一个$\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间，满足 $K \in \mathbb{R}$ 和 $N \in (1,\infty)$；若 $K < 0$，则假设 X 有界；令 $f \in L^2(X)$。那么，$f \in N^{1,\,2}(X)$ 当且仅当

$$H(f) := \int_0^{\mathrm{diam}(X)} \int_X H_f(x,r)^2 \, \frac{dxdr}{r} < \infty. \tag{1.4}$$

在这种情况下，我们有

$$\|\nabla f\|^2_{L^2(X)} \sim \left\| \frac{f - \langle f \rangle_X}{\mathrm{diam}(X)} \right\|^2_{L^2(X)} + H(f),$$

其中，隐含常数仅依赖于 N （当 $K \geq 0$时），而在 $K < 0$时，仅依赖于 N， K 以及$\mathrm{diam}(X)$ 。此处， ∇ 是 X上的梯度算子的典范选择，见第2节。

对于任意 $f \in N^{1,2}(X)$，由定理 A 可立即得到条件 (1.4)。因此，定理 B 的核心在于，条件 (1.4) 足以保证 $f \in N^{1,2}(X)$。结合定理 A 和定理 B 可知，具备 (1.4) 所述的良好调和逼近性质，会自我提升为具备 (1.3) 所述的良好调和逼近性质，且振荡受控。在欧几里得情形下，(1.4) 会自我提升为具备 (1.1) 意义下的良好仿射逼近。即使在欧几里得情形下，(1.4) 蕴含 $f \in N^{1,2}(X)$ 这一结论也是新的。总而言之，只要系数有意义，定理 1.1、A 和 B 就意味着

$$\Omega(f) \sim H^{\mathrm{osc}}(f) \sim H(f).$$

在此，自然会将定理 B 与 [AMV12中的定理 11] （在$p = 2$的情形下）进行比较。该文中，作者针对函数 f证明了一个 Dorronsoro 型估计： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 该估计通过一个平方函数来量化 $|f(x) - \langle f \rangle_{B(x,r)}|$ 在所有尺度和位置上的大小。从直观上说，这是通过衡量 f 在多大程度上满足平均值性质，来测量它与调和函数的偏离程度。

最后，除了关于 RCD空间 的主要结果外，我们还证明了一个定量可微性结果：对于支持 Poincar´e 不等式的倍增度量测度空间上的 Sobolev 函数。根据 [Che 99], ，可以为每个 $f \in N^{1,2}(X)$ 指定一个 Cheeger导数 Df。这种微分结构具有典范的 Cheeger能量，以及相对于该能量定义的 Cheeger 调和函数概念。因此，可以定义一个系数 $H_{f,D}$，用来量化 f 与一个 Cheeger

调和函数之间的偏离程度。上文的系数 H_f 实际上就是 $H_{\nabla,f}$，其中 ∇ 采用的是RCD空间上的典范梯度算子。在这种情况下，关于 ∇ 的 Cheeger 调和函数空间，恰好就是 [BB11]中考虑的调和函数空间。

在这一背景下，我们的结果如下。我们陈述了一个局部版本；取 $R \to \mathrm{dia}\,\mathrm{m}(X)$ 后，它蕴含相应的全局估计（如定理 A 和定理 B中所述）。

定理 C。设(X, d, μ) 是一个支持弱(1,2)-*Poincar´e* 不等式的倍增度量测度空间，设 D 是 X 上的 *Cheeger* 导数，且 $f \in N^{1,2}(X)$。那么，对每个球 $B = B(z, R)$，

$$\left\| \frac{f - \langle f \rangle_B}{R} \right\|^2_{L^2(B)} + \int_0^R \int_B H_{f,D}(x,r)^2 \, \frac{d\mu dr}{r} \lesssim \|Df\|^2_{L^2(AB)}, \tag{1.5}$$

其中 $A \geq 1$ 是弱 *Poincar´e* 不等式中膨胀常数的一个常数倍，隐含常数仅取决于倍增常数以及 *Poincar´e* 不等式中出现的常数。

补充说明与后续问题。除了上一小节提到的那些结果外，定量微分还在其他一些非欧几里得背景中得到了发展，参见 [AS14、Hof95、HN19]。虽然仍处于欧几里得背景，我们还提及 [AMV23], 的主要结果，它是定理 1.1 针对定义在一致可整子集上的函数的一个版本，其中该子集属于 $\mathbb{R}^n$.

短语*Dorronsoro*定理 通常与定理 A中的一个不等式相关联，即 $H^{\mathrm{osc}}(f) \lesssim \|\nabla f\|^2$. 目前，这个不等式已有多种不同的证明，每种证明都在某种程度上依赖欧几里得结构或复分析技巧。例如，Dorronsoro 的原始证明以及 Azzam 提出的简短得多的证明 [Azz16]都关键性地依赖傅里叶变换；Hyt¨onen 和 Naor [HN19] 的证明依赖热流技术；Orponen 的证明 [Orp21]则以 Jones 的一个困难定理为出发点 [Jon90]。本文的证明仅依赖调和函数的基本性质及与之相关的基本不等式（例如 Caccioppoli不等式），其灵感来自 [Che12]中介绍的方法。据作者所知，逆向不等式仅见于 Dorronsoro 的原始论文。本文借鉴 [HN19]中的一些热流技术，给出这个不等式的另一种证明，并使其适用于RCD空间。

我们的主要结果仅刻画了 $N^{1,2}(X)$，而 Dorronsoro 的原始论文则刻画了（除其他对象外）所有 $N^{1,p}(X)$，其中 $1 < p < \infty$. 最明显的问题是，是否可以对A 证明定理 $p \neq 2$. 最后，每个有界的 Ahlfors 正则 RCD(K、 N)空间都满足弱 Poincar´é 不等式，并且是一致可整的（关于后一点，见 [HVV24] ）。自然会问，是否可以对 A 证明定理 X，使其满足弱 Poincar´é 不等式或成为一致可整的空间。

提纲。第2小节中，我们介绍关于索伯列夫空间、Poincar´é不等式和RCD空间的必要预备知识。熟悉这些概念的读者可以跳过本小节，仅在后续小节引用时再查阅。第3 小节中，我们更精确地定义各种 H-系数，并证明一些关于它们的基本结果。第4小节中，我们证明定理C。这也涵盖了定理仅当命题B 中的表述（见引理 4.8）。第5 小节中，我们

证明定理仅当命题A中的表述。第6小节中，我们证明定理若命题B中的表述。如上所述，这也涵盖了定理若命题A中的表述。

致谢。 我们感谢 Ivan Violo 对本文表述提出的诸多有益意见，并指出了几处拼写错误。

2. Preliminaries

全文中， C 表示某个绝对常数，其值可能逐行变化。若存在 $C \geq 1$ 使得 $a \leq Cb$， 则记作 $a \lesssim b$.若 C 依赖于参数 t，则记作 $a \lesssim_t b$. 若 $a \lesssim b$且 $b \lesssim a.$，则记作 $a \sim b$ 。类似地定义 $a \sim_t b$ 。

对于度量空间 $X = (X, d)$ ，我们用 $B(x, r)$ 表示以 x为中心、半径 为 r.的开球。因此，

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

若 $B \subseteq X$ 是 X, 中的一个球，我们可以分别用 x_B 和 r_B 表示其中心和半径，使得 $B = B(x_B, r_B)$ 。 注意，一般而言，一个球不能唯一确定其中心和半径。我们用 diam(E) 表示集合 $E \subseteq X$ 的直径，即

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}.$$

令 LIP(X) 表示 X 上 Lipschitz 函数的空间。对于开集 $\Omega \subset X$，令 $\mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 表示 Ω 中局部Lipschitz函数的空间，$\mathrm{LIP}_{\mathrm{c}}(\Omega)$ 表示 Ω 中具有紧支集的 Lipschitz 函数空间。

一个度量测度空间 是一个三元组 (X, d, μ)，其中 (X, d) 是可分度量空间，且 μ 是定义在 X 上的非平凡局部有限 Borel正则测度。若存在常数 $C_\mu \geq 1$ ，使得一个度量测度空间满足倍增 条件:

$$0 < \mu(B) \leq C_\mu \mu(2B) < \infty$$

对 X 中的所有球 B 均成立。我们称 C_μ 为倍增常数。

Christ-David 立方体。 在本文的多个地方，我们采用一种针对 X 定制的“二进立方体”版本会很方便。这些就是所谓的*Christ-David* 立方体，最初由 David [Dav88] 提出，并在 [Chr90] 中推广。

定理 2.1. 存在常数 $c_0, \rho \in (0,1)$ 使得以下结论成立。设(X, d, μ) 是一个倍增度量测度空间，且 X_k 是 X 中一列极大 ρ^k-分离网。存在 X 中的开集族 $\mathcal{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_k$ ，使得:

(1) 对每个 $k \in \mathbb{Z}$, $\mu(X \setminus \bigcup_{Q\in\mathcal{D}_k} Q) = 0$.*(2)* 若 $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D} = \bigcup_k \mathcal{D}_k$ 和 $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$, 则 $Q_1 \subseteq Q_2$ 或 $Q_2 \subseteq Q_1$.*(3)* 对于 $Q \in \mathcal{D}$，令 $k(Q)$ 为满足 $Q \in \mathcal{D}_k$ 的唯一整数，并设 $\ell(Q) = 5\rho^k$. 则存在 $x_Q \in X_k$ 使得

$$B(x_Q, c_0\ell(Q)) \subseteq Q \subseteq B(x_Q, \ell(Q)) =: B_Q.$$

在本文余下部分，我们固定常数 $(c_0,\rho)\in(0,1)$，使得定理2.1 成立。我们将满足定理2.1结论的开集族称为 *Christ-David* 立方体系统。给定一个 Christ-David 立方体系统 $\mathcal{D}$ 和$Q\in\mathcal{D}$，记 $\mathcal{D}(Q)$ 和 $\mathcal{D}_k(Q)$ 分别表示 的后代立方体 Q 以及 在第 Q 层的第k层后代立方体 k。也就是说，

$$\mathcal{D}(Q)=\{R\in\mathcal{D}\colon R\subseteq Q\}\quad\text{and}\quad\mathcal{D}_k(Q)=\mathcal{D}(Q)\cap\mathcal{D}_k.$$

本文中我们将反复用到一个关键事实，如下所述。证明很简单，因此略去。

引理 2.2。 设(X,d,μ) 是一个倍增度量测度空间，且 $\mathcal{D}$ 是 X 上的一个 *Christ-David* 立方体系。对每个 $A\geq 1$，存在 $C=C(A,C_\mu)$ 使得

$$\#\{R\in\mathcal{D}_k\colon AB_R\cap AB_Q\neq\emptyset\}\leq C$$

对所有 $Q\in\mathcal{D}_k$ 和 $k\in\mathbb{Z}$ 均成立。

以下来自 [HK12] 的结果将所谓的三分之一技巧 推广到了度量空间情形。

定理 2.3。 设(X,d,μ) 是一个倍增度量测度空间。存在常数 $M\geq 1$，它仅依赖于 c_0、ρ 和倍增常数；此外还存在有限多个 *Christ-David* 立方体系 $\mathcal{D}^j$，$j=1,\dots,M$，满足以下性质。对每个球 $B\subset X$，存在 $j\in\{1,\dots,M\}$ 和 $Q\in\mathcal{D}^j$，使得 $B\subseteq Q$ 且 $\ell(Q)\lesssim r_B$.

注2.4。 中的证明 [HK12]实际上表明 $B\subseteq {}^{c_0}_{4}B_Q$，参见其中的注4.13。

以下是定理 2.3的一个直接推论。

推论 2.5。 设(X,d,μ) 是一个倍增度量测度空间，$\mathcal{D}$ 是 X 上的一套 *Christ-David* 立方体，且 $Q_0\in\mathcal{D}_0$。存在 $N=N(C_\mu)\in\mathbb{N}$ 以及有限套 *Christ-David* 立方体 $\{\mathcal{D}^j\}_{j=1}^N$，使得，

$$\begin{aligned}&\textit{for each } Q\in\mathcal{D}\ \textit{there is } j\in\{1,\dots,N\}\ \textit{and } R_Q\in\mathcal{D}^j\\&\textit{such that } 10B_Q\subseteq R_Q\ \textit{and } \ell(R_Q)\lesssim\ell(Q).\end{aligned}\tag{2.1}$$

对于每个 $j\in\{1,\dots,N\}$ 和 $R\in\mathcal{D}^j$，我们有

$$\#\{Q\in\mathcal{D}\colon R_Q=R\}\lesssim_{C_\mu}1.\tag{2.2}$$

最后，存在一个正整数 $k^*\lesssim 1$，并且对于每个 $j\in\{1,\dots,N\}$，存在一个包含于 $3B_{Q_0}$ 中的不交立方体集合 $\{Q_0^{j,i}\}_{i\in I_j}$，使得，

$$\begin{aligned}&\textit{for each } Q\in\mathcal{D}_k(Q_0)\ \textit{with } k\geq k^*\\&\textit{there is } j\in\{1,\dots,N\}\textit{and } i\in I_j\ \textit{such that } R_Q\subseteq Q^{j,i}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

上梯度与牛顿-索博列夫空间。 上梯度最初由 [HK98] 引入。度量空间 (g 上的一个非负博雷尔函数 (X,d) 被称为实值函数 的上梯度，若对实值函数 u，不等式

$$|u(\gamma(a))-u(\gamma(b))|\leq\int_\gamma g\,ds\tag{2.4}$$

对每条可求长曲线 $\gamma\colon [a,b] \to X$ 都成立。这里，右侧 g 的积分是相对于由度量 d 诱导的沿 γ 的弧长测度计算的。

按照 [Sha00], ，我们将 Newton-Sobolev空间 $N^{1,p}(X)$ 定义为所有函数 $f \in L^p(X)$的集- 合，这些函数存在一个上梯度 $g \in L^p(X)$。 $N^{1,p}(X)$ 上的一个半范数由下式给出

$$\|u\|_{N^{1,p}}^p = \|u\|_{L^p}^p + \inf_g \|g\|_{L^p}^p,$$

其中，下确界取遍 g 的所有 u上梯度。根据 [Sha00]中的结果以及 Haj-lasz [Haj 03] 在情形 $p = 1$下的一个观察，存在唯一的最小 g_u，称为最小弱上梯度，它沿着 p-几乎每一条可求长曲线都是一个上梯度，且满足

$$\|u\|_{N^{1,p}}^p = \|u\|_{L^p}^p + \|g_u\|_{L^p}^p.$$

这里， p-几乎处处是相对于 p-模Mod$_p$ 定义的（见 [Hei01]），而最小意味着：对于任何沿着 $g_u \le g$ μ-几乎处处 g 的、沿 p-几乎每一条可求长曲线都是上梯度的

给定一个集合 $E \subseteq X$，将具有零边界值的 Newton 空间定义为

$$N_0^{1,p}(E) \coloneqq \{u \in N^{1,p}(X)\colon u = 0 \text{ } p\text{-quasi-everywhere in } X \setminus E\}.$$

在此， p-几乎处处 是相对于某种 p-容量在 X中定义的，参见例如 [Sha00]。最后，对于开集 $\Omega \subseteq X$，令

$$N_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\Omega) \coloneqq \{u \in L_{\mathrm{loc}}^2(\Omega)\colon \eta u \in N^{1,2}(X) \text{ for all } \eta \in \mathrm{LIP}_c(\Omega)\}.$$

Poincar´不等式。 按照 [HK98], ，若一个度量测度空间支持以下弱 $(q,\ p)$-*Poincar´* 不等式，则存在常数 $A_{\mathrm{PI}},\ C_{\mathrm{PI}} \ge 1$ 使得

$$\left(\fint_B |u - \langle u\rangle_B|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \le C_{\mathrm{PI}} r_B \left(\fint_{A_{\mathrm{PI}}B} g_u^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.5}$$

对于所有球 B （属于 X ）以及所有可积函数 $u\colon B \to \mathbb{R}$。在此以及本文余下部分中，

$$\langle u\rangle_B \coloneqq \fint_B u \, d\mu \coloneqq \frac{1}{\mu(B)} \int_B u \, d\mu$$

表示 u 在 B上的平均积分。

由 H¨older 不等式可轻易看出，对于较大的 q 和较小的 p，弱 Poincar´e 不等式更强。如果底层空间是倍增的，那么弱 (1，p)-Poincar´e 不等式具有自我改进性质。以下结果（参见[HK95，定理 5。1],）说明了这一点。

定理 2.6。 设 (X, d, μ) 是一个倍增度量测度空间，并且满足弱 $(1, p)$-*Poincar´é* 不等式。那么， X 满足某个弱 (q, p)-*Poincar´é* 不等式。特别地， X 满足弱 (p, p)-*Poincar´é* 不等式。

以下结果给出了在不相交开集上拼接具有零边界值的 Sobolev 函数的方法。

引理 *2.7.* 假设 (X, d, μ) 是一个支持弱 $(1, p)$-*Poincar´e* 不等式的倍增度量测度空间，并且 $f \in N^{1,2}(X)$。设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 中一族不相交开集，$\{\phi_i\}_{i\in I}$ 是定义在 X 上的一族函数，满足 $\phi_i \in N^{1,2}_0(U_i)$，且对每个 $i \in I.$，$\|g_{\phi_i}\|_{L^2(U_i)} \leq C\|g_f\|_{L^2(U_i)}$。那么，$f' := f + \sum_{i\in I} \phi_i \in N^{1,2}(X)$。

证明。由于 $\operatorname{supp}(\phi_i) \subseteq U_i$ 且 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是互不相交的集合族，因此有$f' \in L^2(X)$。因此，我们只需验证 f' 在 $L^2(X)$ 中有一个上梯度。根据 [HKST15，引理 6.2。2]，只需验证存在 $g \in L^2(X)$，它沿着几乎处处（相对于 f'）的可求长曲线是 p的一个上梯度。

我们考虑函数

$$g := g_f + \sum_{i\in I} g_{\phi_i}.$$

由于 $\phi_i \in N^{1,2}_0(U_i)$，其最小弱上梯度 g_{ϕ_i} 在 $X \setminus U_i$ 中几乎处处（相对于 μ）为零。接着，由于这些 U_i 互不相交，对于 $i \in I$，估计式$\|g_{\phi_i}\|_{L^2(U_i)} \leq C\|g_f\|_{L^2(U_i)}$ 推出 $\|g\|_{L^2(X)} \lesssim \|g_f\|_{L^2(X)}$，即 $g \in L^2(X)$。令 Γ 为 X 中可求长曲线的集合。令 Γ_f 为沿其 g_f 不是 f的上梯度的可求长曲线。类似地定义 Γ_{ϕ_i}。然后，令

$$\Gamma' = \Gamma \setminus \left(\Gamma_f \cup \bigcup_{i\in I} \Gamma_i \right).$$

根据 p-模数（[Hei01]）的可列次可加性，$\Gamma' \subseteq \Gamma$ 具有满 p-模数。此外，由于对每个 $\gamma \in \Gamma'$ 和 $i \in I$，g_f 都是 f 沿 γ 的上梯度，而g_{ϕ_i} 是 ϕ_i 沿 γ的上梯度，因此不难验证 g 是 f'沿 γ的上梯度。于是，g是 f'沿 p几乎处处（相对于模数）成立的可求长曲线的上梯度。□

以下索伯列夫型不等式在 [Bj¨o02] 中证明（见命题 3.1），证明基于 [KS01中的引理 2。8]。

引理 2.8。 设(X, d, μ) 是一个倍增度量测度空间，并支持弱(q, p)-庞加莱不等式。存在一个 $C > 0$，其仅依赖于倍增常数和 *PI* 常数，使得若 B 是 X 中的一个球，满足 $0 < r_B < (1/3)\operatorname{diam} X$ 且$u \in N^{1,p}_0(B)$，则

$$\left(\fint_B |u|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq Cr \left(\fint_B g_u^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

导数与 Cheeger 调和函数。在 [Che99]，Cheeger 研究了支持弱 Poincar´e 不等式的倍增度量测度空间上 Lipschitz 函数的可微性。他在这一背景下证明了以下对 Rademacher 定理的非凡推广。

定理 2.9. 设(X, d, μ) 是一个支持弱$(1, p)$-庞加莱不等式的倍增度量测度空间。存在一族可数的 *Borel* 集U_i和 *Lipschitz* 函数 $\varphi_i : X \to \mathbb{R}^N$，其中 N仅取决于倍增

常数和 *PI* 常数，且满足以下条件。首先，

$$\mu\left(X\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\right)=0.$$

其次，对每个 *Lipschitz* $f\colon X\to\mathbb{R}$ 以及几乎处处的 $x_0\in U_i$，存在唯一的 $Df(x_0)\in\mathbb{R}^N$（即 f 在 x_0 处的导数），使得

$$\limsup_{X\ni x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)\cdot(\varphi_i(x)-\varphi_i(x_0))|}{d(x,x_0)}=0.$$

算子 D <style id='4'}可扩展到牛顿-索伯列夫类$N^{1,\,p}(X)$ 中的所有函数（参见 [Che99，定理 4.47]）。此扩展是线性的，满足 Leibniz 法则，并且对每个 $u\in N^{1,\,p}(X)$，都有

$$|Du|\sim g_u\quad\mu\text{-a.e.},$$

其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^N$上的欧几里得范数。这启发了下面的定义。

定义 2.10. 若算子 $D\colon N^{1,\,2}(X)\to H$，其中 H是某个有限维 Hilbert空间，则称其为 *Cheeger*导数，如果它是线性的，满足 Leibniz 法则，并且对每个 $u\in N^{1,\,2}(X)$，

$$\|Du\|\sim g_u\quad\mu\text{-a.e.},\tag{2.6}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示由内积诱导的 H 上的范数。

一般而言，Cheeger导数并非唯一确定。然而，在某些空间（例如欧几里得空间和 RCD(K,N) 空间）上，这类算子有典范选择。下面我们定义 Cheeger 调和函数类。请注意，这类函数的集合取决于 Cheeger导数的选择。在本小节余下部分中，我们固定一个 Cheeger导数 $D\colon N^{1,2}(X)\to H$。记 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 H 上的内积，$\|\cdot\|$ 为由该内积诱导的范数。

定义 2.11。设 $U\subseteq X$为开集。若函数 $u\in N^{1,2\,\mathrm{loc}}(U)$ 满足以下条件，则称其在 U 中为*Cheeger* 调和

$$\int_U\|Du\|^2\,d\mu\le\int_U\|D(u+\phi)\|^2\,d\mu\quad\text{for all }\phi\in N_0^{1,2}(U).\tag{2.7}$$

等价地，若

$$\int_U\langle Du,D\phi\rangle\,d\mu=0\quad\text{for all }\phi\in N_0^{1,2}(U).\tag{2.8}$$

定义 2.12。设 $U\subseteq X$为开集，且 $f\in N^{1,2}(U)$。若函数 $u\in N^{1,2}(U)$ 满足u在 U中为 Cheeger 调和，且对某个 $\phi\in N^{1,2}{}_0(U)$，$u=f+\phi$，则称其为满足关于 f 迹的弱意义下的狄利克雷问题解。

狄利克雷问题的此类解的存在性是以下结论的推论。

定理 2.13 ([Che99，定理 7。12])。设(X,d,μ) 是一个支持弱$(1,\,2)$-*Poincar´e* 不等式的倍增度量测度空间。对于每个开集$U\subset X$和 $f\in N^{1,\,2}(U)$，都存在一个满足迹的弱意义的 f狄利克雷问题解。

度量空间上的 Cheeger 调和函数满足 Caccioppoli 不等式。欧几里得证明（例如参见 [GM12，定理 4。1]）在这一情形下同样适用，但为完整起见，我们仍将其列出。

引理 2.14。 设 (X, d, μ) 是一个满足 $(1, 2)$-*Poincar´e* 不等式的倍增度量测度空间，$U \subseteq X$ 是开集，且 $u \in N^{1,2}_{\mathrm{loc}}(U)$ 在 U 中是 *Cheeger* 调和的。则，对于任意满足 $2B \subseteq U$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的球 B，

$$\int_B \|Du\|^2 \, d\mu \lesssim_{C_\mu, C_{\mathrm{PI}}} \frac{1}{r_B^2} \int_{2B} |u - \lambda|^2 \, d\mu.$$

证明。 不妨设 $r_B = 1$. 令 $\eta\colon X \to [0, 1]$ 是一个 Lipschitz 函数，满足 $\eta \equiv 1$ 在 B 上，$\eta \equiv 0$ 在 $X \setminus 2B$ 上，并且 $|D\eta| \lesssim 1$. 根据 McShane-Whitney 延拓定理，很容易构造出这样的函数（Lipschitz 函数的导数的绝对值受其 Lipschitz 常数控制）。令 $\phi = (u - \lambda)\eta^2$ 代入（2.8）并应用 Leibniz 法则可得

$$\int_U \|Du\|^2 \eta^2 \, d\mu + \int_U 2(u - \lambda)\eta \langle Du, D\eta \rangle \, d\mu = 0.$$

利用 $\mathrm{supp}(\eta) \subseteq 2B \subseteq U$ 这一事实，并应用 H¨older 不等式，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{2B} \|Du\|^2 \eta^2 \, d\mu &\lesssim \int_{2B} |u - \lambda| \eta \|Du\| \|D\eta\| \, d\mu \\ &\lesssim \left(\int_{2B} \|Du\|^2 \eta^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2B} \|D\eta\|^2 |u - \lambda|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

因此，由于 $\eta \equiv 1$ 在 B 上，

$$\int_B \|Du\|^2 \, d\mu \leq \int_{2B} \|Du\|^2 \eta^2 \, d\mu \lesssim \int_{2B} \|D\eta\|^2 |u - \lambda|^2 \, d\mu \lesssim \int_{2B} |u - \lambda|^2 \, d\mu,$$

如所需。 □

RCD空间。本小节介绍证明定理 A 和定理 B所需的 RCD空间主要性质。正如引言中提到的，我们建议读者参阅综述 [Amb18、Gig23] 及其中的参考文献，以全面了解这一理论（本文仅略作介绍）。

RCD空间的一项主要特征使我们能够证明定理 A，这就是存在 Hessian（作用于足够光滑的函数），这一理论由 [Gig18]发展。我们利用这样一个事实：经过适当缩放后，局部 L^2-范数 $|\mathrm{Hess}(f)|$ 与局部 L^2-振荡 $|\nabla f|$相当，见推论 2.21 和引理 2.22。在讨论这一点之前，我们简要概述 RCD空间上的梯度（∇）、拉普拉斯算子（Δ）和 Hessian（Hess），以及它们的相关性质。由于我们不会直接使用定义，因此略去部分细节。完整细节见 [Gig18] 。

索伯列夫空间。 我们关注上述对象如何作用于 Sobolev 函数。在 [Gig18], 中使用的 Sobolev 空间，记作 $W^{1,2}(X)$，是 [AGS14] 中构建的空间，其定义基于测试计划。与 Newton 空间类似，对每个 $f \in W^{1,2}(X)$，都有一个最小弱上梯度，记作 $|Df|_w$。事实证明，空间 $W^{1,2}(X)$ 与 Newton 空间在以下意义下重合（参见 [EBS24]）：

(1) 如果 $f \in N^{1,\,2}(X)$，那么 $f \in W^{1,\,2}(X)$，且 $g_f = |Df|_w$几乎处处成立。

(2) 如果 $f \in W^{1,2}(X)$，那么 f具有一个 Borel代表 $f \overline{\in} N^{1,2}(X)$，且 $g_f = \dagger Df|_w$ 几乎处处成立。

因此，在引用RCD文献中的各种必要结果时，我们将等价地用 $N^{1,2}(X)$的形式表述。

梯度算子。 RCD空间的一个定义性特征是，假设 $N^{1,2}(X)$ 是一个Hilbert空间。这一条件在 [Gig18] 中被称为无穷小*Hilbert*性，由 [Gig15] 引入。在此假设下，存在唯一的一对 $(L^0(TX)\ \nabla)$，其中 $L^0(TX)$ 是一个 L^0-范数模（见 [Gig18]），且 $\nabla\colon N^{1,2}(X) \to L^0(TX)$，称为梯度算子，是一个满足以下条件的线性连续映射：

$$|\nabla f| = g_f \quad \text{almost everywhere.} \tag{2.9}$$

梯度算子满足Leibniz 法则、链式法则和局部性，即

$$\nabla f = \nabla g \text{ almost everywhere in } \{f = g\}.$$

此外，无穷小Hilbert性的假设意味着 $L^0(TX)$ 是一个 *Hilbert*模，并且可以赋予一个典范内积 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$. 特别地，梯度算子 ∇ 根据定义 2.10 定义了一个Cheeger 导数。

拉普拉斯算子与调和函数。设 $U \subseteq X$ 为开集，并令 $D(\Delta, U)$ 表示所有满足以下条件的函数 $f \in N^{1,2}_{\mathrm{loc}}(U)$ 所构成的空间：存在 $h \in L^2(U)$ 使得

$$\int hg\, d\mu = -\int \langle \nabla f, \nabla g \rangle\, d\mu \quad \text{for all } g \in N^{1,2}_0(U). \tag{2.10}$$

函数 h 称为 的拉普拉斯算子， Δf. 记作$D(\Delta) := D(\Delta, X)$。若元素 $f \in D(\Delta, U)$ 在 中调和，即 $\Delta f = 0$。注意，这等价于说， f 在 中关于微分（定义 2.11 ）是 Cheeger 调和的，微分为 ∇。

注 2.15。由于 $|\nabla u| = g_u$ μ-几乎处处成立（见 [AGS13]），上述意义下的调和与著作 [BB11]中所采用意义下的调和相同。在 $X = \mathbb{R}^n$ 的情形下，由 (2.9) 可知，存在一个线性等距映射T，将 $L^0(TX)$ 映到 $\mathbb{R}^n$ 上的向量场空间，并且对每个 $f \in N^{1,2}(\mathbb{R}^n)$，都有 $\nabla_{\mathrm{Euc}} f = T(\nabla f)$；见 [Gig18，注 2.2.4]。特别地，上述调和函数空间与通常的 $\mathbb{R}^n$. 上的调和函数空间一致

全局*Hessian*。RCD空间中的Hessian概念由 [Gig18]提出。其定义相当复杂，因此我们建议读者参阅上述论文以获取完整细节。下面给出概要。

其上的测试函数空间为 X

$$\mathrm{Test}(X) := \{f \in L^\infty(\mu) \cap \mathrm{LIP}(X) \cap D(\Delta) : \Delta f \in N^{1,2}(X)\}.$$

对于每个 $f \in$Test(X)，都存在一个映射 Hess$(f) : [L^0(TX)]^2 \to L^0(\mu)$，它是双线性、对称且连续的。这通过公式诱导出一个连续线性映射 Hess$(f) : L^0(TX) \to L^0(TX)$

$$\langle \mathrm{Hess}(f)(v), w \rangle = \mathrm{Hess}(f)(v, w), \quad w \in L^0(TX).$$

由 [Gig18，方程 3.3。34] 可知

$$2\mathrm{Hess}(f)(\nabla f)=\nabla|\nabla f|^2=2|\nabla f|\nabla|\nabla f|. \tag{2.11}$$

此外（参见 [Gig18，第 3 节。2]），存在一个函数 $|\cdot|_{\mathrm{HS}}:L^0(TX)\to L^0(\mu)$，满足对于 μ-几乎处处的 $x\in X$，

$$|\cdot|_{\mathrm{HS}}(x)\text{ defines a norm on }L^0(TX). \tag{2.12}$$

函数 $|\cdot|_{\mathrm{HS}}$ 称为希尔伯特–施密特范数。它满足

$$|\mathrm{Hess}(f)(v)|\le|\mathrm{Hess}(f)|_{\mathrm{HS}}|v|,\quad v\in L^0(TX) \tag{2.13}$$

最后，映射

$$f\mapsto\mathrm{Hess}(f)\text{ is linear.}$$

局部海森矩阵。一般而言，我们希望能够对局部属于 $\mathsf{Test}(X)$ 的函数求海森矩阵。可将其精确定义如下。对于开集 $\Omega\subseteq X$，令

$$\mathrm{Test}_{\mathrm{loc}}(\Omega)=\{f\in\mathrm{LIP}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\cap D(\Delta,\Omega)\colon \Delta f\in N^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\}.$$

若 $\eta\in\mathsf{Test}(X)$ 且 $\mathsf{supp}(\eta)\subset\subset\Omega$，并且 $u\in\mathsf{Test}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，则 $\eta u\in\mathsf{Test}(X)$。因此，对于任意 $f\in\mathsf{Test}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，我们可以定义函数 $|\mathsf{Hess}(f)|_{\mathrm{HS}}\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，其定义为

$$|\mathrm{Hess}(f)|_{\mathrm{HS}}:=|\mathrm{Hess}(\eta f)|_{\mathrm{HS}},\ \mu\text{-a.e. in }\Omega' \tag{2.14}$$

对于 Ω 中每个具有紧支集的 $\eta\in\mathsf{Test}(X)$，满足 $\eta=1$ on $\Omega'\subset\subset\Omega$。这一定义良好，这归因于 Hessian 的局部性。

引理 2.16. 设 $\Omega\subseteq X$。对于每个 $f,g\in\mathrm{Test}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，我们有

$$\big||\mathrm{Hess}(f)|_{\mathrm{HS}}-|\mathrm{Hess}(g)|_{\mathrm{HS}}\big|\le|\mathrm{Hess}(f-g)|_{\mathrm{HS}}\quad\mu\text{-a.e. in }\Omega.$$

证明。设 $\Omega'\subset\subset\Omega$，并固定某个 $\eta\in\mathrm{Test}(X)$，其在 Ω 中具有紧支集且满足 $\eta=1$ on Ω'。由 (2.12)、(2.14)、反三角不等式以及映射 $h\mapsto\mathrm{Hess}(h)$ 的线性性可得

$$\begin{aligned}\big||\mathrm{Hess}(f)|_{\mathrm{HS}}-|\mathrm{Hess}(g)|_{\mathrm{HS}}\big|&=\big||\mathrm{Hess}(\eta f)|_{\mathrm{HS}}-|\mathrm{Hess}(\eta g)|_{\mathrm{HS}}\big|\\&\le|\mathrm{Hess}(\eta(f-g))|_{\mathrm{HS}}=|\mathrm{Hess}(f-g)|_{\mathrm{HS}}\end{aligned}$$

μ-几乎处处成立于 Ω'。由于 Ω' 是任意的，证明至此完成。 □

主要结果。现在，我们已经具备陈述本小节主要结果所需的一切。固定一个度量测度空间 (X,d,μ)，它是某些 $K\in\mathbb{R}$ 和 $N\in(1,\infty)$ 下的 $\mathsf{RCD}(K,N)$。

注 2.17。 一般而言，以下结果中的依赖关系会因 $K\ge0$ 或 $K<0$ 而异。为了更高效地表述这种二分情形，我们定义

$$\mathfrak{c}(X)=\begin{cases}N & \text{if } K\ge0;\\ (K,N,\mathrm{diam}(X)) & \text{if } K<0.\end{cases} \tag{2.15}$$

由 $\mathsf{CD}(K,N)$ [Stu06b定理 2.3] 可得

$$(X,d,\mu)\text{ is doubling with constant depending only on }\mathfrak{c}(X).$$

它还满足一个 (1,2)-Poincaŕe 不等式。

定理 2.18 ([Raj12a, Raj12b])。 空间 $(X,\ d,\ \mu)$ 满足一个弱 $(1,\ 2)$-*Poincar´e* 不等式，其 *Poincar´e* 常数 C_{PI} 仅取决于 $\mathfrak{c}(X)$，且膨胀常数由 $A_{\mathrm{PI}} = 2$ 给出。

下一个结果保证存在梯度和拉普拉斯算子均有界的隆起函数。

命题 2.19 ([MN19, 引理 3。1])。 对任意 $x \in X,\ R > 0$ 和 $0 < r < R$，存在一个 *Lipschitz* 函数 $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ 使得

(1) $0 \le \psi \le 1$ 在 X上， $\psi \equiv 1$ 在 B上(x, r) 且 $\operatorname{supp}(\psi) \subset B(x, 2r)$; *(2)* $r^2|\Delta\psi| + r|\nabla\psi| \lesssim_{\mathfrak{c}(X)} 1$.

该空间还满足博赫纳型不等式，由此我们将推导出调和函数 Hessian 的 Hessian 型 Caccioppoli 不等式估计（推论 2.21）。

定理 2.20 ([Gig18，定理 3.3。8])。 给定 $u \in \mathrm{Test}(X)$，有

$$\int_X -\frac{1}{2}\langle\nabla|\nabla u|^2, \nabla\phi\rangle\, d\mu \ge \int_X \left(|\mathrm{Hess}(u)|^2_{\mathrm{HS}} + \langle\nabla u, \nabla\Delta u\rangle + K|\nabla u|^2\right)\phi\, d\mu$$

对所有 $\phi \in L^\infty(X) \cap N^{1,\ 2}(X)$。

推论 2.21。 设 $\Omega \subset X$ 为开集。对于任意在 Ω 中调和的 $h\colon X \to \mathbb{R}$，以及满足 $5B \subseteq \Omega$ 的任意球 B，有

$$\int_B |r_B \mathrm{Hess}(h)|^2_{\mathrm{HS}}\, d\mu \lesssim_{\mathfrak{c}(X)} \int_{2B} |\nabla h|^2\, d\mu.$$

证明。固定一个函数 h 和如上的一个球 B。根据定义， $h \in D(\Delta, \Omega)$，这意味着由 Jia14 定理 1.1] 可知 $h \in \mathrm{LIP}(4B)$。由命题 2.19，存在一个截断函数 $\theta \in \mathrm{Test}(X)$，使得 $\theta \equiv 1$ 在 $3B$ 上成立，且 $\mathrm{supp}(\theta) \subseteq 4B$. 。容易验证， $u \coloneqq \theta h \in \mathrm{Test}(X)$，并且 $u \equiv h$ 在 $3B$ 上成立。再次应用命题 2.19，存在一个截断函数 ϕ，使得 $\phi \equiv 1$ 在 B 上成立，$\mathrm{supp}(\phi) \subseteq 2B$，并且$r_B^2|\Delta\phi| \lesssim_{\mathfrak{c}(X)} 1$. 。注意，由于 h （因此 u）在 $2B$ 上是 Cheeger 调和的，且 $\mathrm{supp}(\phi) \subset 2B$.，所以 $\langle\nabla u、\ \nabla\Delta u\rangle\phi \equiv 0$ 在 X 上成立。应用定理 2.20 以及关于 ϕ 的分部积分公式 (2.10)，我们得到

$$\begin{aligned}\int_B |\mathrm{Hess}(h)|^2_{\mathrm{HS}}\, d\mu &= \int_B |\mathrm{Hess}(u)|^2_{\mathrm{HS}}\, d\mu \le \int_X |\mathrm{Hess}(u)|^2_{\mathrm{HS}}\phi\, d\mu \\ &\le \int_X \frac{1}{2}|\nabla u|^2\Delta\phi - K|\nabla u|^2\phi\, d\mu \\ &\lesssim_{\mathfrak{c}(X)} r_B^{-2}\int_{2B} |\nabla u|^2\, d\mu = r_B^{-2}\int_{2B} |\nabla h|^2\, d\mu,\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

最后，我们来验证一个关于 $\mathrm{Hess}(f)$ 的 $|\nabla f|$ 弱 Poincar´e 不等式。

引理 2.22。 对于每个球 B *in* X 以及每个 $f \in$测试(X)，我们有

$$\int_B ||\nabla f| - \langle|\nabla f|\rangle_B|^2\, d\mu \lesssim_{\mathfrak{c}(X)} \int_{4B} r_B^2|\mathrm{Hess}(f)|^2_{\mathrm{HS}}\, d\mu.$$

证明。 由定理 2.6 和定理 2.18 可知 (X, d, μ) 支持一个弱 (2,2)-Poincar´e 不等式，其常数 C'_{PI} 仅取决于 $\mathfrak{c}(X)$ 和膨胀系数

常数为 4。由此以及 (2.9) 可得

$$\int_B ||\nabla f| - \langle |\nabla f| \rangle_B|^2 \, d\mu \lesssim_{\mathfrak{c}(X)} \int_{4B} |\nabla |\nabla f||^2 \, d\mu.$$

由局部性可知，$|\nabla|\nabla f|| = 0$几乎处处于 $\{|\nabla f| = 0\}$中。由等式（2.13）和（2.11）可得，$|\nabla|\nabla f|| \le |\mathrm{Hess}(f)|_{\mathrm{HS}}$几乎处处于 $\{|\nabla f| > 0\}$中。特别地，根据前一个不等式，我们有

$$\int_B ||\nabla f| - \langle |\nabla f| \rangle_B|^2 \, d\mu \lesssim_{\mathfrak{c}(X)} \int_{4B} |\mathrm{Hess}(f)|_{\mathrm{HS}}^2 \, d\mu,$$

如所需。 □

3. Properties of the H-coefficients

这里，我们定义并研究量 $H_{f,\ D}$ 和 H_f^{RCD}（回顾引言中 H_f^{osc} 的定义）。第一个量用于衡量到 Cheeger 调和函数类的局部距离，第二个量用于衡量到 Hessian 受控的调和函数类的局部距离。

定义 3.1。设 $(X,\ d,\ \mu)$ 是一个倍增度量测度空间，且满足弱 (1，2)-Poincar´e 不等式，并设 D 是 X 上的一个 Cheeger导数。对每个$f\colon X \to \mathbb{R}$，$x \in X$ 且 $0 < r < \mathrm{diam}(X)$，定义

$$H_{f,D}(x,r)^2 := \inf_h H_{f,D}(x,r;h)^2 := \inf_h \fint_{B(x,r)} \left(\frac{f-h}{r}\right)^2 \, d\mu,$$

其中下确界取遍所有满足以下条件的函数 $h\colon X \to \mathbb{R}$：它们在 $B(x,r)$ 中关于 D 是 Cheeger 调和的。若 X 是一个 $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间，我们记作 $H_f := H_{\nabla,f}$.

定义 3.2. 设 (X,d,μ) 是一个 $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间。对每个 $f\colon X \to \mathbb{R}, x \in X$ 且 $0 < r < \mathrm{diam}(X)$，定义

$$H_f^{\mathrm{RCD}}(x,r)^2 := \inf_h H_f^{\mathrm{RCD}}(x,r;h) = \inf_h \fint_{B(x,r)} \left(\frac{f-h}{r}\right)^2 + r^2 |\mathrm{Hess}(h)|_{\mathrm{HS}}^2 \, d\mu,$$

其中下确界取遍所有满足以下条件的函数 $h\colon X \to \mathbb{R}$：它们在$B(x,r)$ 中是调和的。

注 3.3. 在 $B = B(x,r)$ 的情形下，我们有时记作 $H_{f,D}(B)$ 和$H_{f,D}(B;h)$，分别表示量 $H_{f,D}(x,r)$ 和 $H_{f,D}(x,r;h)$。对于系数 H_f 和 H_f^{RCD}，我们也采用类似的约定。

若 X 是一个 $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间，其中 $K \in \mathbb{R}$ 且 $N \in (1,\infty)$（若 X）$< \infty$，且 $K < 0$），则由引理 2.22 立即可得

$$H_f(x,r) \le H_f^{\mathrm{osc}}(x,r) \lesssim_{\mathfrak{c}(X)} H_f^{\mathrm{RCD}}(x,4r) \tag{3.1}$$

对每个 $x \in X$ 和 $0 < r < \mathrm{diam}(X)$。以下结论表明，在 $\mathbb{R}^n$，通常的 Dorronsoro 系数 Ω_f 与 H_f^{RCD}相当。

引理 3.4. 对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$、$0 < r < \infty$ 和 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，

$$\Omega_f(x,r) \le H_f^{\mathrm{RCD}}(x,r) \lesssim \Omega_f(x,r).$$

证明。由定义可立即得出 $H_f^{\mathrm{RCD}} \leq \Omega$，因为任何仿射函数 A 都是调和的，且 $|\mathrm{Hess}(A)|_{\mathrm{HS}} = 0$。这里，$|\cdot|_{\mathrm{HS}}$ 是矩阵的通常希尔伯特-施密特范数。对于第二个不等式，固定 $x \in \mathbb{R}^n$、$0 < r < \infty$ 和 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. 令 $\varepsilon > 0$ 和 $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 在 $B(x,r)$ 中为调和函数，使得

$$\fint_{B(x,r)} \left(\frac{f-h}{2r}\right)^2 + |r\mathrm{Hess}(h)|_{\mathrm{HS}}^2 \, d\mu \leq H_f^{\mathrm{RCD}}(x,r) + \varepsilon. \tag{3.2}$$

定义一个仿射函数 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 如下

$$A(y) = h(x) + \langle \nabla h \rangle_{B(x,r)} \cdot (y - x).$$

于是，

$$\begin{aligned}\Omega_f(x,r)^2 &\leq \fint_{B(x,r)} \left(\frac{f-A}{2r}\right)^2 dy \\ &\lesssim \fint_{B(x,r)} \left(\frac{f-h}{2r}\right)^2 dy + \fint_{B(x,r)} \left(\frac{h-A}{2r}\right)^2 dy,\end{aligned}$$

其中在第二个不等式中，我们用到了这样一个事实：对于 a，$b \geq 0$ 有 $(a+b)^2 \leq 4(a^2+b^2)$。由于 A 和 h 在 $B(x,r)$ 中都是调和函数，平均值性质表明 $\langle h - A \rangle_{B(x,r)} = h(x) - A(x) = 0$. 因此，应用通常的庞加莱不等式（回想一下 $\nabla A = \langle \nabla h \rangle_{B(x,r)}$），我们有

$$\Omega_f(x,r)^2 \lesssim \fint_{B(x,r)} \left(\frac{f-h}{2r}\right)^2 dy + \fint_{B(x,r)} |\nabla h - \langle \nabla h \rangle_{B(x,r)}|^2 \, dy. \tag{3.3}$$

再次应用庞加莱不等式，得到

$$\begin{aligned}\fint_{B(x,r)} |\nabla h - \langle \nabla h \rangle_{B(x,r)}|^2 \, dy &= \sum_{i=1}^N \fint_{B(x,r)} |\partial_{x_i} h - \langle \partial_{x_i} h \rangle_{B(x,r)}|^2 \, dy \\ &\lesssim \fint_{B(x,r)} |r\nabla \partial_{x_i} h|^2 \, dy = \sum_{i,j=1}^n \fint_{B(x,r)} |r\partial_{x_i x_j} h|^2 \, dy \\ &= \fint_{B(x,r)} |r\mathrm{Hess}(h)|_{\mathrm{HS}}^2 \, dy.\end{aligned}$$

这与（3.2）和（3.3）一起，意味着 $\Omega f(x,\ r) \lesssim H_f^{\mathrm{RCD}}(x,\ r) + \varepsilon$. 由于 ε 是任意的，证明至此完成。□

下面的引理给出了 H 系数的上界以及一种半连续性性质。

引理 3.5. 设 (X, d, μ) 是一个支持弱 $(1,2)$-庞加莱不等式的倍增度量测度空间，并且 D 是 X 上的 ***Cheeger*** 导数。那么，对于任意 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 以及任意一对球 $B \subseteq B'$,

$$H_{f,D}(B)^2 \mu(B) \lesssim_{C_{\mathrm{PI}}} \|Df\|_{L^2(A_{\mathrm{PI}}B)}^2 \tag{3.4}$$

and

$$H_{f,D}(B) \lesssim \left(\frac{C_\mu^k r_{B'}}{r_B}\right) H_{f,D}(B'), \tag{3.5}$$

其中 $k = \lceil \frac{1}{2}\log(\frac{r_{B'}}{r_B}) \rceil$. 若 (X,d,μ) 是一个 $\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间，那么 (3.4) 和 (3.5) 也成立，其系数为 H_f^{RCD}，导数为 $D = \nabla$.

证明。 我们将证明在 (X,d,μ) 是 RCD 空间的情形下， H_f^{RCD} 的估计成立。对于 $H_{f,D}$，证明几乎完全相同，因此省略细节。首先，将 $\langle f\rangle_B$ 视为 X 上的函数（它是调和函数，且 Hessian 为零）， Poincar´e 不等式意味着

$$H_f^{\mathrm{RCD}}(B)^2 \le \fint_B \left(\frac{f-\langle f\rangle_B}{r_B}\right)^2 d\mu \lesssim_{C_{\mathrm{PI}}} \fint_{A_{\mathrm{PI}}B} |\nabla f|^2\, d\mu.$$

由此可直接得到方程（3.4）。对于（3.5）， 令 $\varepsilon>0$ 并令 $h\colon X\to\mathbb{R}$ 是 B' 中的一个调和函数，使得

$$H_f^{\mathrm{RCD}}(B';h) \le H_f^{\mathrm{RCD}}(B') + \varepsilon.$$

于是，由于 h 在 B 中是调和的， $\mu(B')\ge\mu(B)$，且 $r_B\ge r_{B'}$，我们有

$$\begin{aligned} H_f^{\mathrm{RCD}}(B)^2 &\le \fint_B \left(\frac{f-h}{r_B}\right)^2 d\mu + \fint_B |r_B \mathrm{Hess}(h)|_{\mathrm{HS}}^2\, d\mu \\ &\le \frac{\mu(B')r_{B'}^2}{\mu(B)r_B^2}\fint_{B'} \left(\frac{f-h}{r_{B'}}\right)^2 d\mu + \fint_{B'} |r_{B'}\mathrm{Hess}(h)|_{\mathrm{HS}}^2\, d\mu \\ &\le \frac{\mu(B')r_{B'}^2}{\mu(B)r_B^2}\fint_{B'} \left(\frac{f-h}{r_{B'}}\right)^2 + |r_{B'}\mathrm{Hess}(h)|_{\mathrm{HS}}^2\, d\mu. \end{aligned}$$

容易验证，我们对 k 的选取意味着 $B'\subseteq 2^kB$. 。因此，由倍增性质以及我们对 h的选取，

$$H_f^{\mathrm{RCD}}(B)^2 \le \left(\frac{C_\mu^k r_{B'}}{r_B}\right)^2 \left(H_f^{\mathrm{RCD}}(B')^2+\varepsilon\right).$$

现在，取 $\varepsilon\to 0$ 即完成证明。 □

对于 $z\in X$ 和 $0<R\le \mathrm{diam}(X)$，定义

$$H_D(f,z,R) := \int_0^R \int_{B(z,R)} H_{f,D}(x,r)^2\, \frac{d\mu dr}{r},$$

其中我们定义 $B(x,\infty):=X$。对于子集 $\mathcal{D}'\subseteq\mathcal{D}$ 和参数 $\lambda\ge 1$，定义

$$H_D(f,\mathcal{D}',\lambda) := \sum_{Q\in\mathcal{D}'} H_{f,D}(\lambda B_Q)^2\mu(Q)$$

类似地定义 $H^{\mathrm{RCD}}(f,z,R)$ 和 $H^{\mathrm{RCD}}(f,\mathcal{D}',\lambda)$。

下一个结果为我们提供了一种在离散和连续Carleson条件之间进行转换的方法。对于满足如引理 3.5 中半连续性性质的系数，这种对应关系现已成为标准做法。然而，我们未能在文献中找到精确的类似结果，因此在附录中给出了证明。

引理 3.6. 设(X,d,μ) 是一个支持弱$(1,2)$-*Poincar´e* 不等式的倍增度量测度空间，且 D 是 X上的 *Cheeger*导数。我们有以下推论。

(1) 对每个 $z \in X$ 和 $0 < R < \operatorname{diam}(X)$，若 $k \in \mathbb{Z}$ 满足 $5\rho^k \geq R$ 和$\lambda \geq 3$，则

$$H_D(f, z, R) \lesssim_{\lambda, C_\mu} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_k \\ Q \cap B(z,R) \neq \emptyset}} H_D(f, \mathcal{D}(Q), \lambda).$$

(2) 对每个 $k \in \mathbb{Z}$、$Q \in \mathcal{D}_k$ 和 $\lambda \geq 1$，我们有

$$H_D(f, \mathcal{D}(Q), \lambda) \lesssim_{C_\mu} H_D(f, x_Q, 2\lambda\rho^{-1}).$$

此外，当 $R = \operatorname{diam}(X) = \infty$ 时，我们有

$$H_D(f, \mathcal{D}, \lambda) \lesssim_{\lambda, C_\mu} H_D(f, z, \infty).$$

如果 (X, d, μ) 是某个 $K \in \mathbb{R}$ 和 $N \in (1, \infty)$ 空间上的 $\mathrm{RCD}(K, N)$ 空间，那么系数 $H^{\mathrm{RCD}}(f, z, R)$ 和 $H^{\mathrm{RCD}}(f, \cdot, \lambda)$ 也具有相同的性质。

4. Estimating the H-coefficients

在本小节中，我们证明定理C。我们还将说明定理 C 如何推出定理 B 中的仅当 命题。全文中，$X = (X, d, \mu)$ 表示一个固定的倍增度量测度空间，它满足弱 (1，2)-Poincaŕe 不等式；D 表示 X 上的 Cheeger导数。我们还固定一个函数 $f \in N^{1,2}(X)$。为简便起见，我们将记作

$$H \coloneqq H_{f,D}.$$

由弱 (2,2)-Poincaŕé 不等式（参见定理 2.18和定理 2.6）可直接推出

$$\left\| \frac{f - f_{B(z,R)}}{R} \right\|^2_{L^2(B(z,R))} \lesssim \|\nabla f\|^2_{L^2(B(z, A_{\mathrm{PI}} R))}$$

对所有 $z \in X$ 和 $0 < R < \operatorname{diam}(X)$，且依赖关系正确。因此，只需估计式（1.5）中的第二项。为此，我们希望将主要结论中出现的积分离散化。暂且假设 $\mathcal{D}$ 是 X 上的一组 Christ-David 立方体，且 $k \in \mathbb{Z}$ 是满足以下条件的最小整数 $5\rho^k \geq R$。由其最小性可知，$5\rho^k < \rho^{-1} R$。因此，若 $Q \in \mathcal{D}_k$ 满足 $Q \cap B(z, R) \neq \emptyset$且 $A \geq 1$，则有

$$AB_Q \subseteq B(z, 10A\rho^k + R) \subseteq 20A\rho^{-1} B(z, R).$$

根据这一观察以及引理 3.6 (1)，只需证明下面的命题。

命题 4.1。设 $\mathcal{D}$ 为 X上的一组 *Christ-David* 立方体。对于每个 $Q_0 \in \mathcal{D}$，有

$$\sum_{Q \in \mathcal{D}(Q_0)} H(3B_Q)^2 \mu(Q) \lesssim_{C_\mu, C_{\mathrm{PI}}, A_{\mathrm{PI}}} \|Df\|^2_{L^2(3A_{\mathrm{PI}} B_{Q_0})}.$$

我们首先证明以下先验的较弱结果。

引理 4.2。设 $\mathcal{D}$ 是 X 上的一个 *Christ-David* 立方体系统。对于每个 $Q_0 \in \mathcal{D}$，我们有

$$\sum_{Q \in \mathcal{D}(Q_0)} H(Q)^2 \mu(Q) \lesssim_{C_\mu, C_{\mathrm{PI}}} \|Df\|^2_{L^2(Q_0)}.$$

注 4.3。 命题 4.1 与引理 4.2 的主要区别在于，我们对系数 $H_f(Q)$ 求和，而不是对 $H_f(3B_Q)$。 在本小节末尾，我们将说明如何通过应用三分之一技巧 ，从引理 4.2 推出命题*4.1* （定理2.3）。

固定一组 Christ-David 立方体 $\mathcal{D}$ 在 X 上和 $Q_0 \in \mathcal{D}$. 上。通过缩放，不妨设 $Q_0 \in \mathcal{D}_0$ （因此 $\ell(Q_0) = 5$）。对于 $Q \in \mathcal{D}$, 令

$$h^Q = f + \phi^Q \in N^{1,2}(Q)$$

是以下狄利克雷问题的一个解： f 在 Q中的迹的弱意义下，其中$\phi^Q \in N^{1,\,2\,0}(Q)$ （回忆定理 2.13 中此类解的存在性）。由定义 3.1 可知， $H(Q) \leq H(Q; h^Q)$ 对每个 $Q \in \mathcal{D}$都成立。因此，我们的主要工作将是证明以下结论。

引理 4.4。我们有

$$\sum_{Q \in \mathcal{D}(Q_0)} H(Q; h^Q)^2 \mu(Q) \lesssim \|Df\|^2_{L^2(Q_0)}. \tag{4.1}$$

我们正式开始证明引理 4.4。令 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 表示非负整数集。对每个整数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，定义函数 f_k: $X \to \mathbb{R}$ 如下:

$$f_k = f + \sum_{Q \in \mathcal{D}_k(Q_0)} \phi^Q.$$

最小弱上梯度的一个基本性质是 $g_{u+v} \leq g_u + g_v$ 和$g_{-u} = g_u$ (见 [HKST15])。利用这一点，以及每个 $h^Q = f + \phi^Q$都是 f 在 Q中的狄利克雷问题的解这一事实，方程 (2.6) 和 (2.7) 得出

$$\|g_{\phi^Q}\|_{L^2(Q)} \leq \|g_{h^Q}\|_{L^2(Q)} + \|g_f\|_{L^2(Q)} \lesssim \|g_f\|_{L^2(Q)}.$$

因此，应用引理 2.7 并取数据 f, $\{Q\}_{Q \in \mathcal{D}_k}$ 和 $\{\phi_Q\}_{Q \in \mathcal{D}}$，可得

$$f_k \in N^{1,2}(X).$$

此外，由于 $\phi^Q \in N^{1,\,2\,0}(R)$ 对满足 $Q \subseteq R$ 的 $Q \in \mathcal{D}_k \cup \mathcal{D}_{k+1}$ 和 $R \in \mathcal{D}_k$ 均成立，因此可得

$$f_{k+1}|_R - f_k|_R = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{D}_k \cup \mathcal{D}_{k+1} \\ Q \subseteq R}} \phi^Q \in N^{1,2}_0(R). \tag{4.2}$$

最后，注意到 (4.1) 的左侧可写为

$$\sum_{Q \in \mathcal{D}(Q_0)} H(Q; h^Q)^2 \mu(Q) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{f - f_k}{\varrho_k} \right\|^2_{L^2(Q_0)}. \tag{4.3}$$

回忆一下定理 ρ 中的常数所起的作用 2.1。对每个整数 $k \in \mathbb{Z}$，令

$$\varrho_k := 5\rho^k \tag{4.4}$$

然后，令

$$K_1 = \left\{ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \left\| \frac{f_{k+1} - f_k}{\varrho_k} \right\|_{L^2(Q_0)} \leq \frac{1}{4} \left\| \frac{f - f_k}{\varrho_k} \right\|_{L^2(Q_0)} \right\}.$$

引理 4.5。 假设 $\{k, k+1, \dots, M-1\} \subseteq K_1$。那么，我们有

$$\sum_{i=k}^{M} \left\| \frac{f - f_i}{\varrho_i} \right\|_{L^2(Q_0)}^2 \lesssim \left\| \frac{f - f_M}{\varrho_M} \right\|_{L^2(Q_0)}^2 .$$

证明。 不失一般性，我们可以假设 $k = 0$。将两边平方并使用不等式 $\sum_{i=0}^{M} a_i^2 \leq (\sum_{i=0}^{M} a_i)^2$ 对于 $a_i \geq 0$， 只需证明

$$\sum_{i=0}^{M} \left\| \frac{f - f_i}{\varrho_i} \right\|_{L^2(Q_0)} \lesssim \left\| \frac{f - f_M}{\varrho_M} \right\|_{L^2(Q_0)} . \tag{4.5}$$

利用三角不等式，交换求和顺序，对几何级数求和，并使用 K_1 的定义，我们将 (4.5) 的左侧估计为不超过

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{M} \left[\left(\frac{\varrho_M}{\varrho_i} \right) \left\| \frac{f - f_M}{\varrho_M} \right\|_{L^2(Q_0)} + \sum_{j=i}^{M-1} \left(\frac{\varrho_j}{\varrho_i} \right) \left\| \frac{f_{j+1} - f_j}{\varrho_j} \right\|_{L^2(Q_0)} \right] \\
&\quad = \sum_{i=0}^{M} \left(\frac{\varrho_M}{\varrho_i} \right) \left\| \frac{f - f_M}{\varrho_M} \right\|_{L^2(Q_0)} + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{\varrho_j}{\varrho_i} \right) \left\| \frac{f_{j+1} - f_j}{\varrho_j} \right\|_{L^2(Q_0)} \\
&\quad \leq 2 \left\| \frac{f - f_M}{\varrho_M} \right\|_{L^2(Q_0)} + 2 \sum_{j=0}^{M-1} \left\| \frac{f_{j+1} - f_j}{\varrho_j} \right\|_{L^2(Q_0)} \\
&\quad \leq 2 \left\| \frac{f - f_M}{\varrho_M} \right\|_{L^2(Q_0)} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{M-1} \left\| \frac{f - f_j}{\varrho_j} \right\|_{L^2(Q_0)} .
\end{aligned}$$

整理上述不等式可得 (4.5)。 □

引理 4.6。 对于每个 $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们有

$$\sum_{k=0}^{M} \left\| \frac{f - f_k}{\varrho_k} \right\|_{L^2(Q_0)}^2 \lesssim \left\| \frac{f - f_M}{\varrho_M} \right\|_{L^2(Q_0)}^2 + \sum_{k=0}^{M-1} \left\| \frac{f_{k+1} - f_k}{\varrho_k} \right\|_{L^2(Q_0)}^2 . \tag{4.6}$$

证明。 令 $\{k_j\}_{j=1}^{N}$ 为 K_2 中元素的一个枚举：$= \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus K_1$ 介于 0 和 M （含端点）之间，并按如下方式排序： $k_j < k_{j+1}$ 对所有 j. 于是，(4.6) 的左侧可以写成

$$\sum_{k=0}^{k_1} \left\| \frac{f - f_k}{\varrho_k} \right\|_{L^2(Q_0)}^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \left\| \frac{f - f_k}{\varrho_k} \right\|_{L^2(Q_0)}^2 + \sum_{k=k_N+1}^{M} \left\| \frac{f - f_k}{\varrho_k} \right\|_{L^2(Q_0)}^2 . \tag{4.7}$$

注意到

$$\sum_{k=0}^{k_1} \left\| \frac{f - f_k}{\varrho_k} \right\|_{L^2(Q_0)}^2 \lesssim \left\| \frac{f - f_{k_1}}{\varrho_{k_1}} \right\|_{L^2(Q_0)}^2 .$$

确实，若 $0 \in K_2$，则 $k_1 = 0$ ，且估计显然成立。若 $0 \in K_1$，则 $k \in K_1$对所有 $0 \leq k < k_1$ 成立，上述估计便可由引理 4.5立即得到。直接将引理 4.5应用于（4.7）中的其余项，并利用

K_2 的定义（即 K_1 的补集），现在我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{M}\left\|\frac{f-f_k}{\varrho_k}\right\|_{L^2(Q_0)}^2 &\lesssim \sum_{j=1}^{N}\left\|\frac{f-f_{k_j}}{\varrho_{k_j}}\right\|_{L^2(Q_0)}^2+\left\|\frac{f-f_M}{\varrho_M}\right\|_{L^2(Q_0)}^2\\ &\lesssim \sum_{j=1}^{N}\left\|\frac{f_{k_j+1}-f_{k_j}}{\varrho_{k_j}}\right\|_{L^2(Q_0)}^2+\left\|\frac{f-f_M}{\varrho_M}\right\|_{L^2(Q_0)}^2.\end{aligned}$$

不等式（4.6）由此立即得到。 □

回顾（4.3），取 $M\to\infty$.后，下面的引理便完成了引理 4.4 的证明（因此也完成了引理 4.2 的证明）。

引理 4.7。 对于每个 $M\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们有

$$\sum_{k=0}^{M}\left\|\frac{f-f_k}{\varrho_k}\right\|_{L^2(Q_0)}^2\lesssim\|Df\|_{L^2(Q_0)}^2.$$

证明。 暂且固定 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。由（4.2），我们有 $f_{k+1}|_Q-f_k|_Q\in_N{}^{1,\,2\,0}(Q)$ 对每个 $Q\in\mathcal{D}_k$. 均成立。因此，应用引理 2.8 并利用正交条件（2.8）（因为 f_k 在每个 $Q\in\mathcal{D}_k$上都是 Cheeger 调和的），我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f_{k+1}-f_k}{\varrho_k}\right\|_{L^2(Q)}^2&\lesssim\|Df_{k+1}-Df_k\|_{L^2(Q)}^2\\ &=\|Df_{k+1}\|_{L^2(Q)}^2-2\int_Q\langle Df_{k+1},Df_k\rangle\,d\mu+\|Df_k\|_{L^2(Q)}^2\\ &=\|Df_{k+1}\|_{L^2(Q)}^2-\|Df_k\|_{L^2(Q)}^2.\end{aligned}$$

对 $Q\in\mathcal{D}_k$ 求和，便得到

$$\left\|\frac{f_{k+1}-f_k}{\varrho_k}\right\|_{L^2(Q_0)}^2=\|Df_{k+1}\|_{L^2(Q_0)}^2-\|Df_k\|_{L^2(Q_0)}^2.$$

同样，

$$\left\|\frac{f-f_M}{\varrho_k}\right\|_{L^2(Q_0)}^2\lesssim\|Df\|_{L^2(Q_0)}^2-\|Df_M\|_{L^2(Q_0)}^2.$$

结合引理4.6 与前两个估计，并对一个望远镜级数求和，我们得到

$$\sum_{k=0}^{M}\left\|\frac{f-f_k}{\varrho_k}\right\|_{L^2(Q_0)}^2\lesssim\|Df\|_{L^2(Q_0)}^2-\|Df_0\|_{L^2(Q_0)}^2\leq\|Df\|_{L^2(Q_0)}^2.$$

□

命题 *4.1* 的证明。 设 $\mathcal{D}$ 是 X 上的一组 Christ-David 立方体，且 $Q_0\in\mathcal{D}$. 不失一般性，假设 $Q_0\in\mathcal{D}_0$。设

$$N,k^*\in\mathbb{N},\quad\{\mathcal{D}^j\}_{j=1}^N,\quad\{R_Q\}_{Q\in\mathcal{D}}\quad\text{and}\quad\{Q_0^{j,i}\}_{i\in I_j}$$

满足推论 2.5 的结论。由（2.1）和引理 3.5 可得

$$H(3B_Q)\lesssim_{C_\mu}H(R_Q). \tag{4.8}$$

由（3.4）以及球 $\{3A_{\mathrm{PI}}B_Q\colon\ Q\in\mathcal{D}_k\}$ 具有有界重叠（常数取决于 A_{PI} 和 C_μ）且包含于 $3A_{\mathrm{PI}}B_{Q_0}$，可得

$$\sum_{k=0}^{k^*}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k(Q_0)}H(3B_Q)^2\mu(Q)\lesssim_{A_{\mathrm{PI}},C_\mu}\sum_{k=0}^{k^*}\|Df\|^2_{L^2(3A_{\mathrm{PI}}B_{Q_0})}\lesssim\|Df\|^2_{L^2(3A_{\mathrm{PI}}B_{Q_0})}.$$

为处理较小立方体上的求和，我们应用（2.2）、（2.3）、（4.8）以及引理4.2得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=k^*}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k(Q_0)}H(3B_Q)^2\mu(Q)&\lesssim_{C_\mu}\sum_{k=k^*}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k(Q_0)}H(R_Q)^2\mu(Q)\\&\lesssim_{C_\mu}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i\in I_j}\sum_{R\in\mathcal{D}^j(Q_0^{j,i})}H(R)^2\mu(Q)\\&\lesssim_{C_\mu,C_{\mathrm{PI}}}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i\in I_j}\|Df\|^2_{L^2(Q_0^{j,i})}\lesssim_{C_\mu}\|Df\|^2_{L^2(3B_{Q_0})},\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

引理 4.8. 定理 C 推出了定理 B中的仅当部分。

证明。设 (X,d,μ) 是满足定理 A 假设的 RCD(K,N) 空间，并且 $f\in N^{1,2}(X)$。回顾定义 3.1 和第 2 节可知，$H_f:=H_{\nabla,f}$ 且 ∇ 是 Cheeger导数，只需确认 (X,d,μ) 是倍增的，并且满足具有正确依赖关系的弱 Poincar´e 不等式。这由定理 2.18 得出。□

5. Estimating the oscillatory H-coefficients in 在 RCD(K,N) 空间中估计振荡 H 系数 spaces

在本小节中，我们证明定理A 和定理A 的B的4节开头所述的充分性。只需证明，H系数的积分可以由导数控制。利用（3.1）并取 $R\to$直径(X)，即可由以下结果得出结论。

定理 5.1。设(X,d,μ) 为一个$\mathrm{RCD}(K,N)$ 空间，且 $K\in\mathbb{R}$ 和 $N\in(1,\infty)$，并假设在 $K<0$ 的情况下 X 有界。令 $f\in N^{1,2}(X)$。那么，对于每个 $z\in X$ 和 $0<R<$ 直径 (X)，有

$$\int_0^R\int_{B(z,R)}H_f^{\mathrm{RCD}}(x,r)^2\,\frac{dxdr}{r}\lesssim_{\mathfrak{c}(X)}\|\nabla f\|^2_{L^2(B(z,AR))},$$

其中 $A=120\rho^{-1}A_{\mathrm{PI}}$ 和 $\mathfrak{c}(X)$ 如 (2.15)所示。

本小节余下部分的目标是证明定理 5.1 。固定满足定理5.1 假设的 (X,d,μ)，并在本小节余下部分固定一个 Sobolev 函数 $f\in N^{1,2}(X)$。根据与第 4 节开头类似的论证，只需证明以下结论。

命题 5.2。设 $\mathcal{D}$ 是 X 上的一个 *Christ-David* 立方体系统，且 $Q_0\in\mathcal{D}$。那么，

$$\sum_{Q\in\mathcal{D}(Q_0)}H_f^{\mathrm{RCD}}(3B_Q)^2\mu(Q)\lesssim_{\mathfrak{c}(X)}\|\nabla f\|^2_{L^2(6A_{\mathrm{PI}}B_{Q_0})}.$$

与上一小节一样，我们将证明下面引理 先验给出的较弱估计 5.3 。将 H_f 替换为 H_f^{RCD} 后，引理 5.3足以推出命题 5.2 这一点，可以通过与引理4.4 足以推出命题 4.1的论证完全相同的论证看出，参见第 4小节末尾。细节从略。

引理 5.3。 设 $\mathcal{D}$ 是定义在 X 和 $Q_0 \in \mathcal{D}$上的一组 *Christ-David* 立方体。那么，

$$\sum_{Q\in\mathcal{D}(Q_0)} H_f^{\mathrm{RCD}}(Q)^2\mu(Q) \lesssim_{\mathfrak{c}(X)} \|\nabla f\|^2_{L^2(3A_{\mathrm{PI}}B_{Q_0})}.$$

注 5.4。 回顾定理 2.18 ，倍增常数和 Poincar´e 常数（C_μ， C_{PI}）仅依赖于 $\mathfrak{c}$（X），因此下文的估计可以依赖于这些量。由于 $A_{\mathrm{PI}} = 2$，我们将不再追踪隐含常数对 A_{PI}的依赖。

我们现在正式开始引理 5.3的证明。固定一组定义在$\mathcal{D}$ 上的 Christ-David 立方体 X 和 $Q_0 \in \mathcal{D}$。不妨假设 $Q_0 \in \mathcal{D}_0$ ，从而ℓ（Q_0）$= 5$. 令

$$N, k^* \in \mathbb{N}, \quad \{\mathcal{D}^j\}_{j=1}^N, \quad \{R_Q\}_{Q\in\mathcal{D}} \quad \text{and} \quad \{Q_0^{j,i}\}_{i\in I_j}$$

满足推论 2.5的结论。下面的结果将被多次使用。

引理 5.5。 我们有

$$\sum_{k=k^*}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k(Q_0)} H_f(R_Q)^2\mu(R_Q) \lesssim_{C_\mu, C_{\mathrm{PI}}} \|\nabla f\|^2_{L^2(3B_{Q_0})}.$$

证明。 应用（2.2）和（2.3），可得

$$\sum_{k=k^*}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k(Q_0)} H_f(R_Q)^2\mu(R_Q) \lesssim_{C_\mu} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i\in I_j}\sum_{Q\in\mathcal{D}^j(Q_0^{j,i})} H_f(Q)^2\mu(Q). \tag{5.1}$$

然后，应用引理 4.2，利用 $N = N(C_\mu)$ 以及 $\{Q_0^{j,i}\}$ 是包含于 $3B_{Q_0}$ 中的不交立方体，可知（5.1）的右端由 $\|\nabla f\|^2_{L^2(3B_{Q_0})}$ 的某个常数倍控制，其中该常数仅依赖于 $\mathfrak{c}(X)$、C_μ 和 C_{PI}。

□

对于每个 $Q \in \mathcal{D}_{k^*-1}$，令 $l_Q\colon X \to \mathbb{R}$ 为常值函数

$$l_Q(x) = \langle f\rangle_{3B_Q}.$$

对于每个满足 $k \geq k^*$， 的 $Q \in \mathcal{D}_k$ ，令 $l_Q\colon X \to \mathbb{R}$ 为一个在 R_Q 中调和并满足以下条件的函数

$$H_f(R_Q; l_Q) \lesssim H_f(R_Q). \tag{5.2}$$

对于每个整数 $k \geq k^* - 1$，通过 $g_k\colon Q_0 \to \mathbb{R}$ 定义

$$g_k = \sum_{Q\in\mathcal{D}_k(Q_0)} |\mathrm{Hess}(l_Q)|_{\mathrm{HS}}\mathbb{1}_Q. \tag{5.3}$$

注意， $g_{k^*-1} \equiv 0$。

引理 5.6. 我们有

$$\sum_{Q\in\mathcal{D}(Q_0)} H_f^{\mathrm{RCD}}(Q)^2\mu(Q) \lesssim_{C_\mu,C_{\mathrm{PI}}} \|\nabla f\|^2_{L^2(\lambda B_{Q_0})} + \sum_{k=k^*}^{\infty} \|\varrho_k g_k\|^2_{L^2(Q_0)}, \tag{5.4}$$

其中 $\lambda = \text{最大值}\{3, A_{\mathrm{PI}}\}$。

证明。 由引理 3.5，可得

$$H_f^{\mathrm{RCD}}(Q)^2\mu(Q) \lesssim_{C_\mu,C_{\mathrm{PI}}} \|\nabla f\|^2_{L^2(A_{\mathrm{PI}}B_Q)}$$

对每个 $Q \in \mathcal{D}$. 由于球的集合 $\{A_{\mathrm{PI}}B_Q\}_{Q\in\mathcal{D}_k}$ 包含于 $A_{\mathrm{PI}}B_{Q_0}$，且对每个 $k \geq 0$ 具有有界重叠（这取决于倍增常数 C_μ和 A_{PI}），并且 $k^* \lesssim 1$，可得

$$\sum_{k=0}^{k^*}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k(Q_0)} H_f^{\mathrm{RCD}}(Q)^2\mu(Q) \lesssim_{C_\mu,C_{\mathrm{PI}},A_{\mathrm{PI}}} \|\nabla f\|^2_{L^2(A_{\mathrm{PI}}B_{Q_0})}.$$

展开定义后， $\mathcal{D}_k(Q_0)$ 中满足 $k \geq k^*$ 的立方体上的和有如下上界：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=k^*}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k(Q_0)} H_f^{\mathrm{RCD}}(Q;l_Q)^2\mu(Q)\\
&= \sum_{k=k^*}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k(Q_0)} H_f(Q;l_Q)^2\mu(Q) + \sum_{k=k^*}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k(Q_0)} \|\operatorname{diam}(Q)|\mathrm{Hess}(l_Q)|_{\mathrm{HS}}\|^2_{L^2(Q)}\\
&\lesssim \sum_{k=k^*}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k(Q_0)} H_f(R_Q;l_Q)^2\mu(R^Q) + \sum_{k=k^*}^{\infty} \|\varrho_k g_k\|^2_{L^2(Q_0)}\\
&\lesssim_{C_\mu,C_{\mathrm{PI}}} \|\nabla f\|^2_{L^2(3B_{Q_0})} + \sum_{k=k^*}^{\infty} \|\varrho_k g_k\|^2_{L^2(Q_0)},
\end{aligned}$$

其中，在第一个不等式中，我们使用了 g_k （见（5.3）中的定义以及 $Q \subseteq R_Q$这一事实；在第二个不等式中，我们结合引理5.2使用了（5.5）。 □

根据引理 5.6，如果我们能够将（5.4）中的最后一项控制在$\|\nabla f\|^2_{L^2(3A_{\mathrm{PI}}B_{Q_0})}$以内，引理 5.3 的证明就完成了。这将是本小节剩余部分的目标。为此，我们首先将 $\mathbb{Z}_{\geq k^*}$（整数集合 $k \geq k^*$）划分为

$$\begin{aligned}
K_3 &:= \left\{k \in \mathbb{Z}_{\geq k^*} : \|g_k - g_{k-1}\|_{L^2(Q_0)} \leq \tfrac{1}{2}\|g_k\|_{L^2(Q_0)}\right\}\\
K_4 &:= \mathbb{Z}_{\geq k^*} \setminus K_3.
\end{aligned}$$

引理 5.7。 假设 $\{k+1,\dots,M\} \subseteq K_3$。那么，我们有

$$\sum_{i=k}^{M} \|\varrho_i g_i\|^2_{L^2(Q_0)} \lesssim \|\varrho_k g_k\|^2_{L^2(Q_0)}. \tag{5.5}$$

证明。 为简便起见，我们将 $\|\cdot\|_{L^2(Q_0)}$ 记作 $\|\cdot\|.$。将两边平方并利用不等式 $\sum_{i=k}^M a_i^2 \leq (\sum_{i=k}^M a_i)^2$ （当 $a_i \geq 0$，时），只需证明

$$\sum_{i=k+1}^{M} \|\varrho_i g_i\| \lesssim \|\varrho_k g_k\|.$$

注意，我们从 $i=k+1$ (这 $i=k$ 项在 (5.5) 中显然不超过右侧）。现在，利用三角不等式，交换求和顺序，对几何级数求和，并利用 K_3 的定义，我们对 (5.5) 的左侧作如下估计，

$$\begin{aligned}\sum_{i=k+1}^{M}\|\varrho_i g_i\| &\le \sum_{i=k+1}^{M}\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_k}\right)\|\varrho_k g_k\| + \sum_{i=k+1}^{M}\sum_{j=k}^{i-1}\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_j}\right)\|\varrho_j(g_{j+1}-g_j)\| \\ &= \sum_{i=k+1}^{M}\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_k}\right)\|\varrho_k g_k\| + \sum_{j=k}^{M-1}\sum_{i=j+1}^{M}\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_j}\right)\|\varrho_j(g_{j+1}-g_j)\| \\ &\le \|\varrho_k g_k\| + \sum_{j=k}^{M-1}\|\varrho_j(g_{j+1}-g_j)\| \le \|\varrho_k g_k\| + \frac{1}{2}\sum_{j=k}^{M-1}\|\varrho_{j+1}g_{j+1}\|.\end{aligned}$$

重新整理上述不等式即可得到所需的估计。 □

引理 5.8. 对于每个整数 $M\ge 1$，我们有

$$\sum_{k=k^*}^{M}\|\varrho_k g_k\|_{L^2(Q_0)}^2 \lesssim \sum_{k=k^*-1}^{M-1}\|\varrho_k(g_{k+1}-g_k)\|_{L^2(Q_0)}^2. \tag{5.6}$$

证明。 同样，为简洁起见，记 $\|\cdot\|_{L^2(Q_0)}$ 为 $\|\cdot\|$. 令 $\{k_i\}_{i=1}^N$ 为 K_4 中介于 k^* 和 M 之间（含端点）且满足以下排序的元素的一个枚举： $k_i<k_{i+1}$ 对所有 i。由于 $g_{k^*-1}\equiv 0$，因此 $k^*\in K_4$ （否则，$\|g_{k^*}\|\le\frac{1}{2}\|g_{k^*}\|$ 根据 K_3的定义）。因此，(5.6) 的左侧可写为

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1}\|\varrho_k g_k\|^2 + \sum_{k=k_N}^{M}\|\varrho_k g_k\|^2.$$

根据引理 5.7 以及 K_4的定义，现在有

$$\sum_{k=k^*}^{M}\|\varrho_k g_k\|^2 \lesssim \sum_{i=1}^{N}\|\varrho_{k_i}g_{k_i}\|^2 \lesssim \sum_{i=1}^{N}\|\varrho_{k_i-1}(g_{k_i}-g_{k_i-1})\|^2,$$

这意味着 (5.6)。 □

引理 5.9。 对每个整数 $M\ge 1$ ，我们有

$$\sum_{k=k^*}^{M}\|\varrho_k g_k\|_{L^2(Q_0)}^2 \lesssim_{C_\mu,C_{\mathrm{PI}}} \|\nabla f\|_{L^2(3A_{\mathrm{PI}}B_{Q_0})}^2.$$

证明。 首先，根据引理 5.8，

$$\begin{aligned}\sum_{k=k^*}^{M}\|\varrho_k g_k\|_{L^2(Q_0)}^2 &\lesssim \sum_{k=k^*-1}^{M-1}\|\varrho_k(g_{k+1}-g_k)\|_{L^2(Q_0)}^2 \\ &= \sum_{k=k^*-1}^{M-1}\sum_{Q\in\mathcal{D}_{k+1}(Q_0)}\|\varrho_k(g_{k+1}-g_k)\|_{L^2(Q)}^2.\end{aligned} \tag{5.7}$$

取定某个 $Q\in\mathcal{D}_{k+1}$ 并令 $Q'\in\mathcal{D}_k$ 满足 $Q\subseteq Q'$. 首先假设 $k\ge k^*$。在这种情况下，回顾 (5.2) 和 (5.3)，可知 $g_{k+1}\mathbb{1}_Q=|\mathrm{Hess}(l_Q)|_{\mathrm{HS}}\mathbb{1}_Q$，其中 $l_Q\colon X\to\mathbb{R}$ 在 $R_Q\supseteq 10B_Q$. 上是调和的。同样，$g_k\mathbb{1}_{Q'}=|\mathrm{Hess}(l_{Q'})|_{\mathrm{HS}}\mathbb{1}_{Q'}$

对于某个函数 $l_{Q'}\colon X \to \mathbb{R}$ 其在 $R_{Q'} \supseteq 10B_{Q'} \supseteq 10B_Q$上是调和的。应用引理 2.14、引理 2.16、推论 2.21 以及 (5.2)，得到

$$\begin{aligned}\|\varrho_k(g_{k+1}-g_k)\|^2_{L^2(Q)} &= \|\varrho_k|\mathrm{Hess}(l_Q - l_{Q'})|_{\mathrm{HS}}\|^2_{L^2(Q)}\\ &\lesssim_{\mathfrak{c}(X),C_\mu,C_{\mathrm{PI}}} \left\|\frac{l_Q - l_{Q'}}{\varrho_k}\right\|^2_{L^2(4B_Q)}\\ &\lesssim \left\|\frac{f-l_Q}{\varrho_{k+1}}\right\|^2_{L^2(4B_Q)} + \left\|\frac{f-l_{Q'}}{\varrho_k}\right\|^2_{L^2(4B_Q)}\\ &\lesssim H_f(R_Q)^2\mu(R_Q) + H_f(R_{Q'})^2\mu(R_{Q'}).\end{aligned} \tag{5.8}$$

如果 $k = k^* - 1$，类似的论证可推出

$$\|\varrho_0(g_{k^*} - g_{k^*-1})\|^2_{L^2(Q)} \lesssim_{\mathfrak{c}(X),C_\mu,C_{\mathrm{PI}}} H_f(R_Q)^2\mu(R_Q) + \|\nabla f\|^2_{L^2(3A_{\mathrm{PI}}B_{Q_0})}. \tag{5.9}$$

事实上，只需修改5.8中的最后一步估计。回顾一下，对于 $Q' \in \mathcal{D}_{k^*-1}$，我们有 $l_{Q'} \equiv \langle f\rangle_{3B_{Q'}}$。由庞加莱不等式以及 $'$这一事实可得 $4B_Q \subseteq 3B_{Q'}$

$$\left\|\frac{f-l_{Q'}}{\varrho_k}\right\|^2_{L^2(4B_Q)} \leq \left\|\frac{f-l_{Q'}}{\varrho_k}\right\|^2_{L^2(3B_{Q'})} \lesssim_{C_{\mathrm{PI}}} \|\nabla f\|^2_{L^2(3A_{\mathrm{PI}}B_{Q_0})}.$$

回到 (5.7)，应用 (5.8)、(5.9) 以及引理 5.5，现在可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=k^*}^{M}\|\varrho_k g_k\|^2_{L^2(Q_0)} &\lesssim_{\mathfrak{c}(X)} \|\nabla f\|^2_{L^2(3A_{\mathrm{PI}}B_{Q_0})} + \sum_{k=k^*}^{M}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k(Q_0)} H_f(R_Q)^2\mu(R_Q)\\ &\lesssim_{\mathfrak{c}(X)} \|\nabla f\|^2_{L^2(3A_{\mathrm{PI}}B_{Q_0})},\end{aligned}$$

由此证明完毕。 □

6. Estimating the gradient

在本小节中，我们证明定理 B的剩余推论。具体而言，梯度的范数可由 H_f 系数的平方和控制。请回想，这也意味着定理A的剩余推论。固定一个空间 (X, d, μ)，它是某些 K, N对应的 RCD($K \in \mathbb{R}$，$N \in 1, \infty$) 空间；并假设在 X) $< \infty$ 的情况下，diam($K < 0$。此外，固定某个 $f \in L^2(X)$，在本小节余下部分中均使用它。

同样，我们希望通过引理 3.6进行离散化。暂且假设 diam$(X) < \infty$，并令 $k^* \in \mathbb{Z}$ 为满足 $30\rho^{k^*} \leq \mathrm{diam}(X)/2$的最小整数。为后续使用，我们注意到，最小性意味着

$$(\rho/6)\,\mathrm{diam}(X) < 5\rho^{k^*}. \tag{6.1}$$

采用这种选择 k^*，若 $Q \in \mathcal{D}_{k^*}$，则 $6B_Q$ 包含在一个半径为 diam$(X)/2$的球中。此外， C_μ所决定的 $\mathcal{D}_k$中至多只有有限个立方体，这意味着相应的球也只有有限个。因此，由引理 3.6(2)，

$$\sum_{k=k^*}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{D}_k} H_f(6B_Q)^2\mu(Q) \lesssim_{C_\mu} \int_0^{\mathrm{diam}(X)}\int_X H_f(x,r)^2\,\frac{d\mu dr}{r}.$$

若 $\operatorname{diam}(X) = \infty$，则由引理 3.6 (2) 结合$k^* = -\infty$可立即得到相同的估计。因此，只需证明以下结论。

命题 6.1。 设 $\mathcal{D}$ 是 X 上的一组 *Christ-David* 立方体，并令 k^* 如上所述。若

$$\sum_{k=k^*}^{\infty} \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} H_f(6B_Q)^2 \mu(Q) < \infty,$$

则 $f \in N^{1,\,2}(X)$。在这种情况下，

$$\|\nabla f\|_{L^2(X)}^2 \le C_1 \left\| \frac{f - \langle f \rangle_X}{\operatorname{diam}(X)} \right\|_{L^2(X)}^2 + C_2 \sum_{k=k^*}^{\infty} \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} H_f(6B_Q)^2 \mu(Q)$$

存在某个绝对常数 C_1 以及某个常数 C_2，仅依赖于 $\mathfrak{c}(X)$，如 (2.15)所示。

为证明命题 6.1，我们将利用热半群的若干性质。考虑算子 $-\Delta$，它是作用于 X上的非负定自伴算子。与 热半群 相关联的 $-\Delta$ 是由下式给出的一族 $\{H_t\}_{t \ge 0}$ 从 $L^2(X)$ 到其自身的算子： $H_t := e^{\Delta t}$。它满足以下一系列性质（例如，参见 [FOT11]）。

(H1) 对每个 $s,\ t > 0$,

$$H_{s+t} = H_s H_t.$$

（H2）对每个 $g \in L^2$（X），

$$\|H_t g - g\|_{L^2(X)} \to 0 \text{ as } t \to 0.$$

（H3）对每个 $t > 0$，若 $\|\cdot\|_{2\to 2}$ 表示从 L^2 到 L^2 的算子范数，则

$$\|H_t\|_{2\to 2} \le 1 \quad \text{and} \quad \|\nabla H_t\|_{2\to 2} \le c t^{-\frac{1}{2}}.$$

（H4）对每个 $t > 0$ 和 $g \in L^2$（X），

$$H_t g \in D(\Delta) \quad \text{and} \quad \partial_t H_t g = \Delta H_t g.$$

（H5）对任意连续的 ϕ: $[0,\infty) \to [0,\infty)$， ϕ（$-\Delta$）是一个非负定的自伴算子，并且与 H_t、 $t > 0$ 对易。

注意到，由（2.10）以及（$-\Delta$）$^{\frac{1}{2}}$ 是非负自伴的这一事实，我们有

$$\|\nabla g\|^2 = \langle -\Delta g, g \rangle = \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} g\|^2 \tag{6.2}$$

对所有 $g \in D$（Δ）均成立。

最后，我们还需要下面这个引理，其实其中的内容已经包含在[HN19] （见其中的方程（55）–（58））中。为完整起见，我们给出简短的证明。

引理 6.2。 对于每个 $g \in L^2$（X），我们有

$$\int_0^\infty \|\sqrt{t}\nabla H_t g\|_{L^2(X)}^2 \frac{dt}{t} \lesssim \int_0^\infty \|\sqrt{t}\nabla H_t (H_{3t} - H_t) g\|_{L^2(X)}^2 \frac{dt}{t}.$$

证明。为简洁起见，记 $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L^2(X)}$。由（H3）和（6.2），我们知道$\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} H_t g\| \to 0$当 $t \to \infty$时。因此，我们可以写成

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{\frac{1}{2}} H_t g &= \sum_{k=-1}^{\infty} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \left(H_{2^{k+1}t} g - H_{2^{k+2}t} g\right) \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} H_{2^k t} \left(H_{2^k t} - H_{3\cdot 2^k t}\right) g.\end{aligned}$$

应用这一点、等式（6.2）、三角不等式（在 $L^2((0,\infty)\ dt/t;\ L^2(X,\mathbb{R}))$，并作变量替换 $s = 2^{\frac{k}{2}}$，可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty \|\sqrt{t}\nabla H_t g\|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\int_0^\infty \|\sqrt{t}\nabla H_{2^k t}\left(H_{3\cdot 2^k t} - H_{2^k t}\right) g\|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} \left(\int_0^\infty \|\sqrt{t}\nabla H_t \left(H_{3t} - H_t\right) g\|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left(\int_0^\infty \|\sqrt{t}\nabla H_t \left(H_{3t} - H_t\right) g\|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

正如所需。 □

确立这些性质后，我们回到命题 6.1 的证明。首先，(H3) 表明 $H_s f \in N^{1,2}(X)$ 对所有 $s > 0$ 都成立。然后，由于映射$g \mapsto \|\nabla g\|_{L^2(X)}$ 关于 L^2 中的收敛是下半连续的（见[Che99，定理 2。5]），且 $H_s f \to f$ 在 L^2 中随 $s \to 0$（回忆 (H2)），因此只需证明以下结论。

引理 6.3。令 $\mathcal{D}$ 为 X 上的一个 *Christ-David* 立方体系，并令 k^* 如上所述。则有

$$\|\nabla H_s f\|^2_{L^2(X)} \leq C_1 \left\|\frac{f - \langle f\rangle_X}{\operatorname{diam}(X)}\right\|^2_{L^2(X)} + C_2 \sum_{k=k^*}^{\infty} \sum_{Q\in\mathcal{D}_k} H_f(6B_Q)^2 \mu(Q) \tag{6.3}$$

对于某个绝对常数 C_1 以及某个仅依赖于 $\mathfrak{c}(X)$ 的常数 C_2，也就是说，两者都独立于 s。

引理 6.3的证明将在下文给出。固定一组 Christ- David 立方体 $\mathcal{D}$，并固定某个 $s > 0$。我们首先证明如下结论。

引理 6.4。设 $\alpha := (\rho/6)$。我们有

$$\|\nabla H_s f\|^2_{L^2(X)} \lesssim \left\|\frac{f - \langle f\rangle_X}{\operatorname{diam}(X)}\right\|^2_{L^2(X)} + \int_0^{\alpha \operatorname{diam}(X)} \left\|\frac{H_{2t_2} f - f}{t}\right\|^2_{L^2(X)} \frac{dt}{t}. \tag{6.4}$$

证明。为简洁起见，记 $f_s := H_s f$。令 $\{E_\lambda : \lambda > 0\}$ 为 $L^2(X$上与 $-\Delta$相关联的唯一投影算子谱族，并考虑谱表示 $-\Delta = \int_0^\infty \lambda\, dE_\lambda$. 由于 $f_s \in D(\Delta)$，由（6.2）可得，

谱理论中的标准恒等式以及恒等式 $\lambda = 2\int_0^\infty \lambda^2 e^{-2\lambda t}\,dt$，可得

$$\begin{aligned}\|\nabla f_s\|^2 = \int_0^\infty \lambda\, d\langle E_\lambda f_s, f_s\rangle &= 2\int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^2 e^{-2\lambda t}\, d\langle E_\lambda f_s, f_s\rangle dt \\ &= 2\int_0^\infty \|\nabla H_t g_s\|^2\, dt,\end{aligned}$$

其中 $g_s := (-\Delta)^{\frac{1}{2}} f_s$ 和 $\int G(x)dF(x)$ 是勒贝格–斯蒂尔切斯积分。将 t 乘除，并应用引理 6.2 和 (6.2)，得到

$$\|\nabla f_s\|^2 = \int_0^\infty \|\sqrt{t}\nabla H_t g_s\|^2 \frac{dt}{t} \lesssim \int_0^\infty \|\sqrt{t}(-\Delta)^{\frac{1}{2}} H_t\,(H_{3t} - H_t)\, g_s\|^2 \frac{dt}{t}.$$

应用 (H3) 中的第一个估计（分三次使用），将 $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ 与 H_t 交换，应用 (6.2) 并作变量替换 $t = s^2$，可得

$$\begin{aligned}\|\nabla f_s\|^2 &\lesssim \int_0^\infty \|H_{3t} g_s - H_t g_s\|^2 \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \|\nabla H_t (H_{2t} f_s - f_s)\|^2 \frac{dt}{t} \\ &\lesssim \int_0^\infty \left\| \frac{H_{2t^2} f_s - f_s}{t} \right\|^2 \frac{dt}{t} \le \int_0^\infty \left\| \frac{H_{2t^2} f - f}{t} \right\|^2 \frac{dt}{t}.\end{aligned} \tag{6.5}$$

若 $\operatorname{diam}(X) = \infty$，则上述不等式恰为 (6.4)，结论成立。反之，设 $\operatorname{diam}(X) < \infty$。由倍增性可知 $\mu(X) < \infty$。因此，$\langle f\rangle_X \in L^2(X)$。由于常值函数对每个 H_t 均在 $t > 0$ 下保持不变，我们可应用 (H3) 进行估计，得到

$$\|H_{2t^2} f - f\| \le \|H_{2t^2} f - H_{2t^2}\langle f\rangle_X\| + \|f - \langle f\rangle_X\| \le 2\|f - \langle f\rangle_X\|.$$

将其代入（6.5），最后一项的上界为以下表达式的某个常数倍

$$\|f - \langle f\rangle_X\|^2 \int_{\alpha\operatorname{diam}(X)}^\infty \frac{dt}{t^3} + \int_0^{\alpha\operatorname{diam}(X)} \left\| \frac{H_{2t^2} f - f}{t} \right\|^2,$$

它与（6.4）右侧相当。 □

（6.4）右侧的第一项恰好是（6.3）右侧出现的第一项。因此，本小节接下来的目标是估计（6.4）右侧的第二项。我们先将积分拆分为两部分。

对每个 $k \ge k^*$，定义一个函数 $p_k\colon X \to \mathbb{R}$ 如下。首先，应用命题 2.19，构造一个单位分解 $\{\theta_Q\}_{Q\in\mathcal{D}_k}$，使其满足以下性质

$$\operatorname{supp}(\theta_Q) \subseteq 3B_Q,\ |\nabla\theta_Q(y)| \lesssim \ell(Q)^{-1},\ |\Delta\theta_Q(y)| \lesssim \ell(Q)^{-2},\ \text{and}\ \sum_{Q\in\mathcal{D}_k} \theta_Q(y) = 1$$

对所有 $Q \in \mathcal{D}_k$ 和 $y \in X$，其中隐含常数依赖于 $\mathfrak{c}(X)$。Fo r $Q \in \mathcal{D}_k$，令 $h_Q\colon X \to \mathbb{R}$ 为一个在 $6B_Q$ 上调和且满足以下条件的函数

$$H_f(6B_Q; h_Q) \lesssim H_f(6B_Q).$$

那么，定义 p_k 为

$$p_k := \sum_{Q\in\mathcal{D}_k} \theta_Q h_Q.$$

令 ϱ_k 如（4.4）中所述，并回顾一下，选择它是为了使得 $\ell(Q) = \varrho_k$ 对每个 $Q \in \mathcal{D}_k$ 都成立。根据（6.1）以及我们根据引理 6.4 对 α 的选择，我们知道α直径$(X) \leq \varrho_{k^*}$。由此和（H3）可得

$$\int_0^{\alpha \operatorname{diam}(X)} \left\| \frac{H_{2t^2} f - f}{t} \right\|_{L^2(X)}^2 \frac{dt}{t}$$

$$\lesssim \sum_{k=k^*}^{\infty} \int_{\varrho_{k+1}}^{\varrho_k} \left\| \frac{f - p_k}{t} \right\|^2 \frac{dt}{t} + \sum_{k=k^*}^{\infty} \int_{\varrho_{k+1}}^{\varrho_k} \left\| \frac{H_{2t^2} p_k - p_k}{t} \right\|^2 \frac{dt}{t} =: I_1 + I_2.$$

引理 6.5。我们有

$$I_1 \lesssim_{C_\mu} \sum_{k=k^*}^{\infty} \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} H_f(6B_Q)^2 \mu(Q).$$

证明。 暂且固定某个 $k \geq k^*$ 和 $x \in Q \in \mathcal{D}_k$。由于 $\operatorname{supp}(\theta_R) \subseteq 3B_R$且 $\{\theta_R\}_{R \in \mathcal{D}_k}$ 是单位分解，我们有

$$f(x) - p_k(x) = \sum_{\substack{R \in \mathcal{D}_k \\ Q \cap 3B_R \neq \emptyset}} \theta_R(x)(f(x) - h_R(x)).$$

因此，通过应用引理 2.2 和不等式

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i \right)^2 \leq N^2 \sum_{i=1}^N a_i^2, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{6.6}$$

我们得到

$$|f(x) - p_k(x)|^2 \lesssim_{C_\mu} \sum_{\substack{R \in \mathcal{D}_k \\ Q \cap 3B_R \neq \emptyset}} |f(x) - h_R(x)|^2. \tag{6.7}$$

特别地，回忆一下 H_f的定义，对于每个 $t \in (\varrho_{k+1}, \varrho_k)$，我们有

$$\int_Q \left(\frac{f - p_k}{t} \right)^2 d\mu \lesssim_{C_\mu} \sum_{\substack{R \in \mathcal{D}_k \\ Q \cap 3B_R \neq \emptyset}} H_f(3B_R; h_R)^2 \mu(R).$$

利用这一估计，结合引理2.2以及我们对 h_Q 可得

$$I_1 \lesssim_{C_\mu} \sum_{k=k^*}^{\infty} \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} \sum_{\substack{R \in \mathcal{D}_k \\ Q \cap 3B_R \neq \emptyset}} H_f(3B_R; h_Q)^2 \mu(R) \lesssim_{C_\mu} \sum_{k=k^*}^{\infty} \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} H_f(6B_Q)^2 \mu(Q).$$

□

下面的引理完成引理6.3的证明。

引理 6.6. 我们有

$$I_2 \lesssim_{\mathfrak{c}(X)} \sum_{k=k^*}^{\infty} \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} H_f(6B_Q)^2 \mu(Q).$$

证明。回顾（H4）可知 $\partial_u H_u = \Delta H_u$ 对每个 $u > 0$。因此，我们可以写成

$$I_2 = \sum_{k=k^*}^{\infty} \int_{\varrho_{k+1}}^{\varrho_k} \left\| \frac{1}{t} \int_0^{2t^2} \partial_u H_u p_k \, du \right\|^2 \frac{dt}{t} = \sum_{k=k^*}^{\infty} \int_{\varrho_{k+1}}^{\varrho_k} \left\| \frac{1}{t} \int_0^{2t^2} \Delta H_u p_k \, du \right\|^2 \frac{dt}{t}.$$

由 H¨older 不等式，利用 Δ 与 H_u 可交换，以及 $\|H_u\|_{2\to 2} \le 1$，我们得到，对于任意 $k \ge k^*$ 和 $t \in (\varrho_{k+1}, \varrho_k)$，

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t} \int_0^{2t^2} \Delta H_u p_k \, du \right\|^2 &\lesssim \int_X t^2 \fint_0^{2t^2} |H_u \Delta p_k|^2 \, du d\mu \lesssim \fint_0^{2t^2} \|\varrho_k H_u \Delta p_k\|^2 \, du \\ &\le \|\varrho_k \Delta p_k\|^2. \end{aligned}$$

在证明的其余部分，我们将证明

$$\|\varrho_k \Delta p_k\|^2 = \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} \int_Q |\varrho_k \Delta p_k|^2 \, d\mu \lesssim_{\mathfrak{c}(X)} \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} H_f(6B_Q)^2 \mu(Q).$$

暂时固定某个 $Q \in \mathcal{D}_k$。由于 $\{\theta_R\}_{R \in \mathcal{D}_k}$ 是一个单位分解，故有

$$h_Q - p_k = \sum_{R \in \mathcal{D}_k} \theta_R \left(h_Q - h_R \right).$$

特别地，对 Δ 应用链式法则，并回忆函数 h_Q 和h_R 分别在 $6B_Q$ 和 $6B_R$，上是调和的，若 $x \in Q$，则

$$\begin{aligned} \Delta p_k(x) &= \Delta(h_Q - p_k)(x) \\ &= \sum_{R \in \mathcal{D}_k} \left[\Delta\theta_R(x)(h_Q - h_R)(x) + \nabla\theta_R(x) \cdot \nabla(h_Q - h_R)(x) \right]. \end{aligned}$$

利用截断函数的梯度和拉普拉斯算子的界，并按照我们在（6.7）中所作的估计（应用引理 2.2 和（6.6））， 我们有

$$|\Delta p_k|^2 \lesssim_{\mathfrak{c}(X), C_\mu} \sum_{\substack{R \in \mathcal{D}_k \\ Q \cap 3B_R \neq \emptyset}} \left| \frac{h_Q - h_R}{\varrho_k^2} \right|^2 + \left| \frac{\nabla h_Q - \nabla h_R}{\varrho_k} \right|^2 \quad \text{on } Q. \tag{6.8}$$

由于 h_Q 和 h_R 分别在 $6B_Q$ 和 $6B_R$上调和，且 $Q \cap 3B_R \subseteq 3B_Q \cap 3B_R$，我们可以应用卡乔波利不等式（引理2.14）得到

$$\begin{aligned} \int_Q \sum_{\substack{R \in \mathcal{D}_k \\ Q \cap 3B_R \neq \emptyset}} |\nabla h_Q - \nabla h_R|^2 \, d\mu &\lesssim_{\mathfrak{c}(X)} \sum_{\substack{R \in \mathcal{D}_k \\ Q \cap 3B_R \neq \emptyset}} \int_{6B_Q \cap 6B_R} \left(\frac{h_Q - h_R}{\varrho_k} \right)^2 d\mu \\ &\lesssim_{C_\mu} \sum_{\substack{R \in \mathcal{D}_k \\ Q \cap 3B_R \neq \emptyset}} \int_{6B_R} \left(\frac{f - h_R}{\ell(R)} \right)^2 d\mu \\ &\lesssim_{C_\mu} \sum_{\substack{R \in \mathcal{D}_k \\ Q \cap 3B_R \neq \emptyset}} H_f(6B_R)^2 \mu(R), \end{aligned} \tag{6.9}$$

其中在第二个不等式中，我们加上再减去 f，并应用了三角不等式。结合（6.8）和（6.9），再结合引理 2.2 并利用我们对 h_Q的选择，

我们得到

$$\|\varrho_k \Delta p_k\|^2 = \sum_{Q\in\mathcal{D}_k} \int_Q |\varrho_k \Delta p_k|^2 \, d\mu \lesssim_{\mathfrak{c}(X)} \sum_{Q\in\mathcal{D}_k} \sum_{\substack{R\in\mathcal{D}_k \\ Q\cap 3B_R\neq\emptyset}} H_f(6B_R)^2 \mu(R)$$
$$\lesssim_{C_\mu} \sum_{Q\in\mathcal{D}_k} H_f(6B_Q)^2 \mu(Q),$$

如所需。 □

Appendix A. Proof of Lemma 3.6

对于每个 $k\in\mathbb{Z}$，我们将记 $\varrho_k := 5\rho^k$。

蕴含（1）的证明。 固定陈述中的 z, R, k 和 λ。令 $\mathcal{Q}_m$ 表示满足 $Q\cap B(x,R)\neq\emptyset$ 的 $Q\in\mathcal{D}_m$ 的集合。由于 $R\le\varrho_k$，我们首先注意到

$$H_D(f,z,R) \lesssim \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{Q\in\mathcal{Q}_m} \fint_{\varrho_{m+1}}^{\varrho_m} \int_Q H_{f,D}(x,r)^2 \, d\mu dr. \tag{A.1}$$

暂时固定一些 $m\ge k$ 和 $Q\in\mathcal{Q}_m$，并考虑 $(x,r)\in Q\times(\varrho_{m+1},\varrho_m)$。由于 $x\in Q$, $r\le\varrho_m$ 和 $\lambda\ge 3$，由三角不等式可得 $B(x,r)\subseteq 3B_Q\subseteq\lambda B_Q$。利用这一点以及 $\lambda\ell(Q)=\lambda\varrho_m\lesssim_\lambda r$，(3.5) 现在推出

$$H_{f,D}(B(x,r)) \lesssim_{\lambda,C_\mu} H_{f,D}(\lambda B_Q).$$

由于上述估计对任意的 $(x,r)\in Q\times(\varrho_{m+1},\varrho_m)$ 均成立，将其代回 (A.1) 得到

$$H_D(f,z,R) \lesssim_{\lambda,C_\mu} \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{Q\in\mathcal{Q}_m} \fint_{\varrho_{m+1}}^{\varrho_m} \int_Q H_{f,D}(\lambda B_Q)^2 \, d\mu dr$$
$$= \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{Q\in\mathcal{Q}_m} H_{f,D}(\lambda B_Q)^2 \mu(Q).$$

由于对于每个 $Q\in\mathcal{Q}_m$，在 $m\ge k$ 的条件下，都存在 $Q'\in\mathcal{Q}_k$ 使得 $Q\subseteq Q'$，因此第一条蕴含的证明到此完成。□

蕴含（2）的证明。我们先说明（2）的第一部分如何推出第二部分。事实上，若第一部分成立，则对于每个 $k\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\sum_{Q\in\mathcal{D}_k} H_D(f,\mathcal{D}(Q),\lambda) \lesssim_{C_\mu} \sum_{Q\in\mathcal{D}_k} H_D(f,x_Q,\lambda'\ell(Q)),$$

其中 $\lambda' := 2\lambda\rho^{-1}$。由引理 2.2，球 $\{\lambda' B_Q\}_{Q\in\mathcal{D}_k}$ 的重叠有界，且界仅依赖于 λ 和 C_μ。因此，

$$\sum_{Q\in\mathcal{D}_k} H_D(f,\mathcal{D}(Q),\lambda) \lesssim_{\lambda,C_\mu} \int_0^{\lambda'\varrho_k} \int_X H_{f,D}(x,r)^2 \, \frac{d\mu dr}{r} \le H_D(f,x,\infty).$$

取 $k\to-\infty$ 后，第二部分的证明即告完成。

现在，我们来证明 (2) 的第一部分。固定陈述中所述的某个 k, Q 和 λ。展开 $H_D(f, \mathcal{D}(Q)\ \lambda)$ 的定义，可得

$$H_D(f, \mathcal{D}(Q), \lambda) = \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{T \in \mathcal{D}_m(Q)} \fint_{2\lambda\varrho_m}^{2\lambda\varrho_{m-1}} \int_T H_{f,D}(\lambda B_T)^2 \, d\mu dr \tag{A.2}$$

固定 $m \geq k$ 和 $T \in \mathcal{D}_m(Q)$ 不变。若 $(x, r) \in T \times (2\lambda\varrho_m, 2\lambda\varrho_{m-1})$，则由三角不等式可得 $\lambda B_T \subseteq B(x, r)$。又因为 $r \sim \lambda\ell(Q)$，由 (3.5) 可得

$$H_{f,D}(\lambda B_T) \lesssim_{C_\mu} H_{f,D}(x, r).$$

由于上述估计对任意 $(x, r) \in T \times (2\lambda\varrho_m, 2\lambda\varrho_{m-1})$ 均成立，将其代回 (A.2) 得

$$\begin{aligned} H_D(f, \mathcal{D}(Q), \lambda) &\lesssim_{C_\mu} \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{T \in \mathcal{D}_m(Q)} \int_{2\lambda\varrho_m}^{2\lambda\varrho_{m-1}} \int_T H_{f,D}(x, r)^2 \, \frac{d\mu dr}{r} \\ &= \int_0^{2\lambda\varrho_{k-1}} \int_Q H_{f,D}(x, r)^2 \, \frac{d\mu dr}{r} \leq H_D(f, x_Q, 2\lambda\rho^{-1}\ell(Q)). \end{aligned}$$

□

References

[AMV12] R. Alabern、J. Mateu 和 J. Verdera。《Sobolev 空间的一种新刻画》。$\mathbb{R}^n$，354(2):589–626，2012年。[Amb18] L. Ambrosio。《度量测度空间中的微积分、热流与曲率-维数界》。载于 *Proceedings of the international congress of mathematicians 2018*， *ICM*2018年，*Rio de Janeiro*， *Brazil*， *August 1–9*， *2018. Volume I. Plenary lectures*，第301–340页。新泽西州哈肯萨克：世界科学出版社；里约热内卢：巴西数学会（SBM），2018年。[AGS13] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savar´e。《度量测度空间中 Lipschitz 函数的稠密性与弱梯度的等价性》。*Rev. Mat. Iberoam.*，29(3):969–996，2013年。[AGS14] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savar´e。《度量测度空间中的微积分与热流，以及在具有下界里奇曲率的空间中的应用》。 *Invent. Math.*，195(2):289–391，2014年。[Azz16] J. Azzam。《拟对称映射的双利普希茨部分》。 *Rev. Mat. Iberoam.*，32 2 589( ): –648，2016年。[Azz21] J. Azzam。《Poincar´e 不等式与一致可整性》。 *Rev. Mat. Iberoam.*，37 6 2161( ): –2190，2021年。[AMV23] J. Azzam、M. Mourgoglou 和 M. Villa。《一致可整集上的定量可微性及其在索伯列夫迹定理中的应用》。2023年。[AS14] J. Azzam 和 R. Schul。《定量度量微分定理》。

Proc. Am. Math.， ( ): –。[

Soc. 142 4 1351 1357, 2014

BB11] A. Bj ¨ ¨ *Nonlinear potential theory on metric spaces* 17 *EMS*

Tracts Math. ¨ ，卷。苏黎世：欧洲数学会（EMS），。[Bj¨o02] J. Bj¨orn。《度量空间上拟极小函数的边界连续性》。 *Ill. J. Math.*，46 2 383 403，2002年 ( ): –。[Che99] J. Cheeger。《度量测度空间上 Lipschitz 函数的可微性》。

2011

orn 和 J. Bjorn。《》，

Geom.， ( ): –。[

Funct. Anal. 9 3 428 517, 1999

Che12] J. Cheeger。《定量微分：一般表述》。

Commun. Pure Appl.， ( ): –。[

Math. 65 12 1641 1670, 2012

Che23] J. Cheeger。《 *PI* 空间与里奇曲率下界空间上的定量微分》。 *Pure Appl. Math. Q.*，19(6):2841–2867，2023年。[CC97] J. Cheeger 和 T. H. Colding。《具有下界里奇曲率的空间结构研究 I 》。 *J. Differ. Geom.*，46(3):406–480，1997 年。

[CKN11] J. Cheeger、B. Kleiner 和 A. Naor。《从海森堡群到 L_1的 Lipschitz 映射的压缩界》。 *Acta Math.*，207(2):291–373，2011年。[CN13a] J. Cheeger 和 A. Naber。《里奇曲率下界与奇异集的定量行为》。 *Invent. Math.*，191(2):321–339，2013年。[CN13b] J. Cheeger 和 A. Naber。《定量分层以及调和映射与极小流的正则性》。 *Commun. Pure Appl. Math.*，66(6):965–990，2013年。[Chr90] M. Christ。《一个 $T(b)$定理及关于解析容量与柯西积分的评注》。*Colloq. Math.*，60/61(2):601–628，1990年。[Dav88] G. David。《曲面上的 Lipschitz 图块与奇异积分》。 *Rev. Mat. Iberoam.*，4(1):73–114，1988年。[DS91] G. David 和 S. Semmes。《 *Singular integrals and rectifiable sets in R^n. Au-delà des* 》，卷。法 *graphes Lipschitziens* 193 *Astérisque* 国数学会，1991年。[DS93] G. David 和 S. Semmes。《 *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*》，第38卷，*Math. Surv. Monogr.* 美国数学会，1993年。[Dor85] J. R. Dorronsoro。《势空间的一种刻画》。 *Proc. Am. Math. Soc.*，95:21–31，1985年。[EBS24] S. Eriksson-Bique 和 E. Soltanis。《极小上梯度的沿曲线刻画及索伯列夫微分的构造》。 *Anal. PDE*，17(2):455–498，2024年。[FOT11] M. Fukushima、Y. Oshima 和 M. Takeda。 *Dirichlet forms and symmetric Markov* 《*processes.* 19 *De Gruyter Stud. Math.* 2 》，卷。柏林：德格鲁伊特，第2版修订扩充版，2011年。[GM12] M. Giaquinta 和 L. Martinazzi。《 *An introduction to the regularity theory for elliptic systems harmonic maps and minimal graphs* 11 *Appunti Sc. Norm. Super.* 》，，卷。 *Pisa (N.S.)*。比萨：诺玛莱出版社，第2版，2012年。[Gig15] N. Gigli。《 *On the differential structure of metric measure spaces and applications*》，第1113卷，*Mem. Am. Math. Soc.* 普罗维登斯，罗得岛州：美国数学会（AMS），2015年。[Gig18] N. Gigli。《 *Nonsmooth differential geometry – an approach tailored for spaces with Ricci* 》，卷。 *curvature bounded from below* 1196 *Mem. Am. Math. Soc.* 普罗维登斯，罗得岛州：美国数学会（AMS），2018年。[Gig23] N. Gigli。《De Giorgi 与 Gromov 携手合作》。 *arXiv preprint arXiv:2306.14604*，2023年。[Haj03] P. Haj ´ *Heat kernels and analysis on* lasz。《度 *manifolds graphs* 量测度空间上的索伯列夫空间》。载于，， *and metric spaces. Lecture notes from a quarter program on heat* ，，，，，，， *kernels random walks and analysis on manifolds and graphs April 16–July 13 2002 Paris France* 173 218 ，，第–页。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学会（AMS），2003年。[HK95] P. Haj-lasz 和 P. Koskela。《 Sobolev 遇见 Poincar´e》。 *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I*，320 10 1211( ): –1215，1995年。[Hei01] J. Heinonen。《 *Lectures on analysis on metric spaces*》。Universitext。纽约州纽约：施普林格，2001年。[HK98] J. Heinonen 和 P. Koskela。《受控几何度量空间中的拟共形映射》。 *Acta Math.*，181(1):1–61，1998年。[HKST15] J. Heinonen、P. Koskela、N. Shanmugalingam 和 J. T. Tyson。《 *Sobolev spaces on metric measure spaces. An approach based on upper gradients* 27 *New* 》，卷。 *Math. Monogr.*剑桥：剑桥大学出版社，2015年。[Hof95] S. Hofmann。《抛物型奇异积分交换子的一种刻画》，载于 *Fourier analysis and partial differential equations. Proceedings of the conference held in Miraflores de la Sierra Madrid Spain June 15–20 1992* 195 210 ，，，，，第–页。佛罗里达州博卡拉顿：CRC出版社，1995年。[HVV24] M. Hyde、M. Villa 和 I. Y. Violo。《里奇曲率下界与一致可整性》。 *Ann. Fenn. Math.*，49(2):751–772，2024年。[HK12] T. Hyt¨onen 和 A. Kairema。《倍增度量空间中的二进立方体系统》。*Colloq. Math.*，126(1):1–33，2012年。[HN19] T. Hyt ¨ *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 21 11 3415 3466, 2019 onen 和 A. Naor。《热流与定量微分》。，( ): –。

[Jia14] R. Jiang. 在度量测度空间中重新审视Cheeger-调和函数。
J. Funct. , ( ) : –。
Anal. 266 3 1373 1394, 2014
[Jon90] P. W. Jones。可整集与旅行商问题。 *Invent. Math.*，102 1 1( ): –15，1990年。[KS01] J. Kinnunen 和 N. Shanmugalingam。度量空间上拟极小化子的正则性。*Manuscr. Math.*，105(3): 401–423，2001年。[Li14] S. Li。Carnot群的粗微分与定量不可嵌入性。
J. , ( ) : –。
Funct. Anal. 266 7 4616 4704, 2014
[LV09] J. Lott 和 C. Villani。通过最优传输研究度量测度空间的里奇曲率。*Ann. Math. (2)*，169(3): 903–991，2009年。[MN19] A. Mondino 和 A. Naber。具有Ricci曲率下界的度量测度空间的结构理论。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，21(6): 1809–1854，2019年。[Orp21] T. Orponen。Dorronsoro估计的积分几何方法。
Int. Math. Res. , ( ) : –。
Not. 2021 22 17170 17200, 2021
[Pet11] A. Petrunin。Alexandrov遇见Lott-Villani-Sturm。 *Münster J. Math.*，4 64，2011 1 53( ): –。[Raj12a] T. Rajala。在满足Sturm曲率-维数条件的度量空间中具有有界密度的插值测度。 *J. Funct. Anal.*，263(4): 896–924，2012年。[Raj12b] T. Rajala。由度量空间上的稳定曲率条件导出的局部Poincar´e不等式。 *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*，44(3-4): 477–494，2012年。[Sha00] N. Shanmugalingam。Newton 空间：将索伯列夫空间扩展到度量测度空间。 *Rev. Mat. Iberoam.*，16(2): 243–279，2000年。[Stu06a] K.-T. Sturm。论度量测度空间的几何。I。 *Acta Math.*，196 131，2006 1 65( ): –。[Stu06b] K.-T. Sturm。论度量测度空间的几何。II。 *Acta Math.*，196(1): 133–177，2006年。[ZZ10] H.-C. Zhang 和 X.-P. Zhu。Alexandrov空间上的里奇曲率与刚性定理。 *Commun. Anal. Geom.*，18(3): 503–554，2010年。

Matthew Hyde, Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä, P.O. Box 35 (MaD) FI-40014 University of Jyväskylä Finland , ,
Email address: matthew.j.hyde@jyu.fi