arXiv:2603.17649v1 [math.RA] 18 Mar 2026

齐性弗罗伊登塔尔代数与第一蒂茨构造

HOLGER P. PETERSSON 与 MANEESH THAKUR

摘要。域上的 Freudenthal 代数，基本上等同于在任意基域扩张下仍保持单纯的三次约旦代数。这些代数通过其自同构群和结构群，与任意域上的单代数群密切相关。本文主要探讨这些代数何时具有齐性，即其所有约旦同位体都彼此同构。我们通过提出齐性的若干必要且充分条件来回答这一问题，并将其与三次约旦代数的第一 Tits 构造联系起来；其中尤其研究了离散赋值下完备域上的 Freudenthal 除代数。我们还独立研究第一 Tits 构造，给出其局部版本，推导局部-整体原理，并探讨某些秩二环面能否嵌入阿尔伯特除代数的自同构群概形。

目录

1. 引言 1
2. 真 Freudenthal 代数与蒂茨构造 3
3. 不变量 7
4. 由第一 Tits 构造产生的子代数 10
5. 齐性判据 13
6. 严格齐次的真 Freudenthal 代数 17
7. Freudenthal 除代数与赋值 19
8. 分类定理 24
9. 后记：Clifford 型约旦代数 28
参考文献 29

1. 引言

本文将探讨三个重要代数概念之间的相互关系：弗罗伊登塔尔代数、齐次约当代数以及第一 Tits 构造。

首先，Freudenthal 代数构成一类代数结构，可视为（含幺）合成代数在次数 3 时的类比。正如合成代数属于更广泛的替代代数范畴，其中的元素满足一个泛二次方程，Freudenthal 代数也属于更广泛的 Jordan代数范畴，其中的元素满足一个泛三次方程。此外，合成代数只存在于维数为 1，2，4，8 的情形，而 Freudenthal 代数的维数则限于 1，3，6，9，15 和 27。除去较低的维数 1（基域）和 3（由三次 ´étale 代数构成的 Jordan代数），Freudenthal 代数是下述对象的扭形式：

2020 数学学科分类。 主要分类 17C40；次要分类 17A75、17C30、20G41。

其为由分裂合成代数中的元素构成的 3×3 厄米矩阵的 Jordan代数，且对角线上为标量；若基域的特征不为 2，则后一条件自动成立。

在考察合成代数和弗罗伊登塔尔代数与例外代数群之间的联系时，两者的相似性尤为显著。正如八元数代数与 G_2，型群的情形一样，从代数转到其自同构群概形，可得到 Albert 代数（即维数为 27 的弗罗伊登塔尔代数）与 F_4 型群之间的一一对应。Albert 代数与 D_4,E_6,E_7,E_8 型群之间也存在其他重要联系，尽管不如前述联系紧密。特别是，通过证明 Albert 除代数的结构群具有 $\mathsf{E}_{7,1}^{78}$ 和 $\mathsf{E}_{8,2}^{78}$ 型群的 Kneser-Tits猜想得以解决 R——其结构群的 [ACP21，Tha22]。

接下来，约旦代数的齐性与同位体这一概念密切相关。约旦代数 p 中的任一可逆元 J 都会在其底层向量空间上规范地诱导出一种新的约旦代数结构，记作 $J^{(p)}$，称为 p的 J-同位体，其单位元是 p 在 J中的逆元。 J 的同位体不一定与 J 同构；但若同构，则称 J 为齐次。之所以同位体及齐性概念十分重要，是因为许多与约旦代数相关的有用性质只在各位意义下成立，也就是说，这些性质对代数本身可能不成立，但转到适当的同位体后便会成立。例如，Albert [Alb65] 提出的每个 Albert 除代数是否都包含一个循环三次子域的问题，至今仍未解决；但在适当的同位体中，这一问题有肯定答案 [Tha21]。

处理弗罗伊登塔尔除代数时，两种蒂茨构造会发挥作用。这里需要我们关注的是第一构造（两者中较为基础的一种），以及它与合成代数的 Cayley-Dickson构造之间引人注目的类比。关于它与前述概念相互作用的一个初步例证，可见于 [PR84b，推论 4。9] , 该推论指出，由第一 Tits 构造产生的阿尔伯特除代数总是齐性的。一个自然的问题是：逆命题是否成立？每个齐性阿尔伯特除代数都是第一 Tits 构造吗？遗憾的是，由于我们未能从任何一个方向解决这一问题，我们决定对齐性弗罗伊登塔尔代数展开系统研究。本文旨在呈现我们的研究成果。

在接下来的两节中，除了确定记号和术语外，我们还将回顾一些关于该主题的基本事实，以便理解本文后续的发展。重点是弗罗伊登塔尔代数的（上同调）不变量–这是我们稍后将大量使用的工具。哪些不变量集合能够将某一特定类的弗罗伊登塔尔代数分类到同构（分别为各位）意义下，这一问题尤其重要。在此过程中，我们首先获得了对维数为 9 （命题3.6）的齐性弗罗伊登塔尔代数的刻画。

第 4 节专门讨论可称为阿尔伯特除代数第一 Tits 构造局部版本的内容。我们在此情形下推导出一个局部-整体原理（定理 4.1），并阐明它与某些秩 2-环面嵌入底层代数自同构群概形的可嵌入性之间的联系（定理 4.6）。

在第5节中，我们首先证明，与阿尔伯特除代数的情形相反，存在由第一 Tits 构造得到但并非齐次的九维 Freudenthal 除代数（例5.3）。随后，我们推导出约化（即非除代数）Freudenthal 代数为齐次代数的充要条件。作为

这些判据的主要结论，我们将证明，粗略地说，任何具有足够丰富结构、维数为 < 27 的齐性弗罗伊登塔尔代数类，都可以扩充为包含维数更高且性质几乎相同的代数（定理5.4）。特别地，如果给定域上由对称3×3矩阵构成的 Freudenthal 代数是齐次的，那么该域上的所有 Freudenthal 代数也都是齐次的（定理5.4 (c)）。

在第 6 节中，我们研究严格齐性的弗罗伊登塔尔代数，即它们在任意基域扩张下仍保持齐性。我们的方法给出了严格齐性弗罗伊登塔尔代数的完整分类（推论6.5）：它们要么是分裂的，要么同构于 $D^{(+)}$ 某个中心结合除代数 D，其次数为 3；或者是由第一 Tits 构造得到的阿尔伯特除代数。

在第 7 节和第 8 节中，我们研究离散赋值下完备域上的弗罗伊登塔尔除代数。此前只有针对阿尔伯特除代数开展过此类研究 [Pet75]。重访这项研究并将其结果推广到任意弗罗伊登塔尔除代数是有意义的，原因如下。一方面，我们得到了新的九维弗罗伊登塔尔除代数实例，它们是第一 Tits 构造且具有齐性（推论 8.4、8.6）；另一方面，我们得以纠正 [Pet75] 中对三次型的草率处理。在沿着上述思路发展理论时，我们充分利用了 [GPR24，第七章] 中提出的两种蒂茨构造方法，尤其是这一方法不仅适用于域，而且在很大程度上也适用于任意交换基环。

本文最后简要探讨了 Clif- ford 型齐次约当代数。我们尤其证明，带标记的 Pfister 二次型的 Jordan 代数是严格齐次的（推论9.2）。

2. 真 Freudenthal 代数与蒂茨构造

本文中，我们固定一个 k 任意特征的域。幺交换结合 k-代数范畴记为 k-**alg**。关于（含幺）合成代数、（三次）Jordan 代数（尤其是 Freudenthal 代数）及相关代数群的记号、术语和基本事实，请读者参阅 [GPR24] 和[KMRT98]；至于二次型，我们通常参考 [EKM08]。因此，在下面的回顾中，我们只介绍理解本文后续内容所绝对必需的知识。

2.1. 齐次约旦代数。 一个*Jordan* k-代数是一个向量空间 J，其上 k配备二次映射 $U\colon J \to \mathrm{End}_k(J)$，$x \mapsto U_x$，（-算子），以及一个特殊量 $1 = 1_J \in J$（单位元），满足以下恒等式

$$U_1 = \mathbf{1}_J, \quad U_{U_x y} = U_x U_y U_x, \quad U_x V_{y,x} = V_{x,y} U_x$$

在所有标量扩张中均成立，其中 $V_{x,y}z := U_{x,z}y$ for $x, y, z \in J$ and $U_{x,z} := U_{x+z} - U_x - U_z$ 是 U-算子的双线性化。若元素 $p \in J$ 满足 $U_p\colon J \to J$ 是双射，则称其为可逆元；此时，$p^{-1} := U_p^{-1} p$ 称为 J中的 p 的逆元。J 中可逆元的集合记为 $J^\times$。对于 $p \in J^\times$，向量空间J连同 U-算子 $x \mapsto U_x^{(p)} := U_x U_p$及单位元 $1^{(p)} := p^{-1}$再次构成一个 Jordan代数，称为 J 的 p-同位体，记为 $J^{(p)}$。同位体$J^{(p)}$, $p \in J^\times$通常不同构于 J；但若对所有 $p \in J^\times$它们都与 J同构，则称J 为齐次。 J的自拟同构，即从 J 到其各种同位体的同构，构成 GL(J) 的一个子群，记为 Str(J)，称为结构

群，它对应于 J；因此，当且仅当其结构群在其可逆元上具有传递作用时， J 才是齐次的，这也就是该名称的由来。

2.2. 三**次约旦代数**。 按照 [GPR24， 34。1], 我们将 三次 *Jordan* 代数定义在 k 上，作为一个 Jordan k-代数 J 连同一个三次型 $N_J\colon\ J \to k$ （即 范数）， 也就是说，它是一个定义在 k 上的标量多项式律，次数为 3，并满足以下条件。

(a) N_J 允许 *Jordan* 复合 ，即满足以下方程

$$N_J(1_J) = 1, \quad N_J(U_x y) = N_J(x)^2 N_J(y)$$

严格成立，也就是说，在所有基域扩张中均成立。

(b) 对所有域扩张 K/k 及所有 $x \in J_K$ （ J 从 k 到 K的基变换）， 多项式

$$m_{J,x}(\mathbf{t}) = N_J(\mathbf{t}1_{J_K} - x) = \mathbf{t}^3 - T_J(x)\mathbf{t}^2 + S_J(x)\mathbf{t} - N_J(x)$$

满足以下方程

$$m_{J,x}(x) = (\mathbf{t}m_{J,x})(x) = 0.$$

这里， $T_J\colon\ J \to k$ （分别地， $S_J\colon\ J \to k$）被称为 J 的线性 （分别为二次）迹；这是有意义的，因为 T_J （分别地， S_J）是线性（分别为二次）型。相比之下，由下式定义的对称双线性型 $T_J\colon\ J \times J \to k$

$$T_J(x, y) := T_J(x)T_J(y) - S_J(x, y) \qquad (x, y \in J)$$

通过线性迹和双线性化二次型定义的形式称为 J 的双线性迹。 J 的伴随定义为二次映射

$$J \longrightarrow J, \quad x \longmapsto x^\sharp := x^2 - T_J(x)x + S_J(x)1_J.$$

注意，如果我们知道 J 的伴随和双线性迹，那么根据下式即可知道其约当结构

$$U_x y = T_J(x, y)x - x^\sharp \times y \tag{2.1}$$

对于 U-算子，其中 $x \times y = (x + y)^\sharp - x^\sharp - y^\sharp$ 表示双线性化伴随。最后，如果 J 的维数是有限的，且双线性迹是正则对称双线性型，则称 J 是正则的。

对前述设置进行直接修改，便可得到三次替代代数的概念。我们参考 [GPR24，第34节。11]详情请参见。

2.3. 真约化 Freudenthal 代数。所谓 k 上的 Freudenthal 代数，是指一种三次 Jordan k-代数 J，它或者同构于某个三次 ´étale k-代数 E 的 $E^{(+)}$，或者对任意域扩张 K/k，其基变换 J_K 都是一个单 Jordan$K$-代数 [GPR24, 34.17, 39.8]。若一个 Freudenthal k- 代数的维数至少为 6，则称其为真；若它包含一个初等标架，即由幂等元构成的完备正交系，且这些幂等元按其伴随为 0、线性迹为 1 的意义是初等的，则称其为约化。详见 [GPR24, §37] 。

根据 [GPR24， 41.1], 在 k 上的真约化弗罗伊登塔尔代数，在同构意义下，具有如下形式：$J := \mathrm{Her}_3(C, \Gamma)$，其中 C 是 k 上的合成代数，且 $\Gamma \in \mathrm{GL}_3(k)$ 是对角矩阵： $\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$，满足 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in k^\times$。回顾一下， J由所有 3×3 矩阵 x 组成，其元素属于 C，且为 Γ-厄米矩阵（即 $x = \Gamma^{-1}\bar{x}^\intercal\Gamma$），并且具有标量

沿对角线排列，后一条件对于 $\mathrm{char}(k) \neq 2$ 自动成立。从 [GPR24，36.4] 我们推得，J 的范数、伴随和双线性迹由以下公式给出

$$N_J(x) = \xi_1\xi_2\xi_3 - \sum \gamma_j\gamma_l\xi_i n_C(u_i) + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 t_C(u_1u_2u_3),$$
$$x^\sharp = \sum \Big(\big(\xi_j\xi_l - \gamma_j\gamma_l n_C(u_i)\big)e_{ii} + \big(-\xi_i u_i + \gamma_i\overline{u_j u_l}\big)[jl] \Big),$$

$$T_J(x,y) = \sum \big(\xi_i\eta_i + \gamma_j\gamma_l n_C(u_i, v_i)\big) \tag{2.2}$$

对于 $x = \sum(\xi_i e_{ii} + u_i[jl])$ $y = \sum(\eta_i e_{ii} + v_i[jl]) \in J$, $\xi_i, \eta_i \in k$, $u_i, v_i \in C$，我们始终遵循三元循环约定：像上面这样的无修饰求和，均取遍 (123) 的所有循环置换（ijl）。

回顾 [GPR24，练习 37.22 (b)]，在同构意义下，Γ 的对角元可在 k 中乘以任意非零平方因子，并且我们总可以假设 $\gamma_3 = 1$。特别地，我们令 $\mathrm{Her}_3(C) := \mathrm{Her}_3(C, \mathbf{1}_3)$。我们希望理解 $\mathrm{Her}_3(C)$的同位体。为此，我们需要对 [GPR24，练习 3723]. 做一个无伤大雅的变体。

命题 2.3。设 C 是一个合成 k-代数，$J := \mathrm{Her}_3(C)$并且

$$\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathrm{GL}_3(k).$$

取 $p := \sum \gamma_i e_{ii} \in J^\times$，定义如下映射

$$\sum(\xi_i e_{ii} + u_i[jl]) \longmapsto \sum \big((\gamma_i\xi_i)e_{ii} + (\gamma_j\gamma_l u_i)[jl]\big)$$

对于 $\xi_i \in k$、$u_i \in C$、$1 \leq i \leq 3$，定义一个同构 φ，将 $\mathrm{Her}_3(C, \Gamma)$ 映到同位体 $J^{(p^{-1})}$。

证明。根据 [GPR24，习题 37.23]，φ 是从 $\mathrm{Her}_3(C,\Gamma)^{(p)}$ 到 J 的一个同构，因此也是从 $\mathrm{Her}_3(C,\Gamma) = (\mathrm{Her}_3(C,\Gamma)^{(p)})^{(p^{-2})}$ 到 $J^{(\varphi(p^{-2}))} = J^{(p^{-1})}$ 的一个同构。□

推论 2.4。假设命题 2.3 中 C 的维数至多为二。那么 $\mathrm{Her}_3(C,\Gamma) \cong J$ 当且仅当存在 $g \in \mathrm{GL}_3(C)$使得 $gp\bar{g}^\mathsf{T} \in k\mathbf{1}_3$。

证明。根据该命题，$\mathrm{Her}_3(C,\Gamma) \cong J$ 当且仅当 $J^{(p^{-1})} \cong J$，而这又当且仅当某个 $\eta \in \mathrm{Str}(J)$ 满足 $\eta(p) = 1_J$ [GPR24, Thm. 31.22 (d)]。由于 J根据关于 C的假设，是一个以 C为元素的厄米矩阵全 Jordan 代数，J的结构群由变换 $x \mapsto \gamma g x \bar{g}^\mathsf{T}$组成，其中 $\gamma \in k^\times$、$g \in \mathrm{GL}_3(C)$[Jac76, Thms. 6−8]。结论得证。□

推论 2.5. 设 C 是一个合成 k-代数，且 $J := \mathrm{Her}_3(C)$。在同构意义下，J 的同位体恰好是如下形式：$\mathrm{Her}_3(C,\Gamma)$，其中 $\Gamma \in \mathrm{GL}_3(k)$是某个对角矩阵。

证明。若 C 是正则的，则这是 [GPR24，定理 40 的一个特例。10]。否则，(2.2) 推出 $C = k$ 且 $\mathrm{char}(k) = 2$。任意一个 $p \in J^\times$ 都可视为一个典范的三元正则对称双线性形式。根据 Albert 的定理 [Alb38，定理 8]，p要么可对角化，要么是交错的。但在 k上的交错三元对称双线性形式不可能是正则的。因此 p 是可对角化的，且可将命题 2.3 应用于 $\Gamma := p^{-1}$。□

非约化的真 Freudenthal 代数是 Jordan 除代数，因为其中所有非零元素都可逆 [GPR24，定理 39。6]Freudenthal 除代数只存在于某些维数 $1, 3, 9, 27$ [GPR24，定理 46。8]。可通过两种蒂茨构造找到例子 [GPR24，第七章]。第一 Tits 构造是两种构造中较易理解的一种，在本研究中发挥着尤为重要的作用。其主要组成部分可描述如下。

2.4. **第一蒂茨构造**。 第一 Tits 构造的输入由一个三次 alternative k代数 A 和一个标量 $\mu \in k$组成。其输出是一个三次 Jordan 代数$J = J(A,\ \mu)$，它作为 k 上的向量空间，是 A的三个副本的直和 $A \oplus Aj_1 \oplus Aj_2$；其三次 Jordan 代数结构的单位元、伴随和范数由下式给出

$$\begin{aligned} 1_J &= 1_A = 1_A + 0 \cdot j_1 + 0 \cdot j_2, \\ x^\sharp &= (x_0^\sharp - \mu x_1 x_2) + (\mu x_2^\sharp - x_0 x_1) j_1 + (x_1^\sharp - x_2 x_0) j_2, \\ N_J(x) &= N_A(x_0) + \mu N_A(x_1) + \mu^2 N_A(x_2) - \mu T_A(x_0 x_1 x_2) \end{aligned} \tag{2.6}$$

对于 $x = x_0 + x_1 j_1 + x_2 j_2$、 x_0， x_1， $x_2 \in A$， J 的双线性迹为

$$T_J(x, y) = T_A(x_0 y_0) + \mu T_A(x_1 y_2) + \mu T_A(x_2 y_1), \tag{2.7}$$

其中 $y = y_0 + y_1 j_1 + y_2 j_2$、 y_0， y_1， $y_2 \in A$。

命题 2.8。 对于三次交错 k-代数 A 和 $\mu \in k$，以下条件等价。

(i) $J(A$、 $\mu)$ 是正则 *Freudenthal* 代数。
(ii) $J(A$、 $\mu)$ 是正则的。(iii) A是正则的，并且 $\mu \in k^\times$。

证明。 (i)⇒(ii)。显然。
(ii)⇒(iii)。应用（2.7）。
(iii)⇒(i)。设 $J :=J\ (A,\ \mu)$，并注意到条件 (iii) 在基变换下保持不变，而条件 (i) 在忠实平坦下降下保持不变 [GPR24，推论 39。32]。因此，必要时可假设 k 是代数闭的。由 [GPR24，习题 42。21], 因此，剩下需要考虑以下情形。

1°. $A = k$，特征为 char(k) $\neq 3$。于是 $E = k[\mathrm{t}]/(\mathrm{t}^3 - \mu)$ 是 k 上的三次 étale 代数，且 $J \cong E^{(+)}$ 是 Freudenthal 代数。
2°. $A = k \times C$，其中 C 是正则的合成 k-代数。于是由 [GPR24, Exc. 42.27 (a)] 可得 $J \cong \mathrm{Her}_3(C, \Gamma)$、 $\Gamma = \mathrm{diag}(-1, -1, 1)$，且这是一个约化 Freudenthal 代数。$3^\circ$. A 是一个次数为 3 的中心单纯结合 k-代数。于是 J 是一个 Albert 代数[GPR24, Cor. 42.15]。□

第一 Tits 构造有两个重要性质，将在本研究中发挥关键作用。第一个可见于 [GPR24，推论 46。12]。

命题 2.9。对于三次可替代 k-代数 A 和 $\mu \in k$，第一 *Tits* 构造$J(A, \mu)$ 是三次约旦除代数，当且仅当 A 是除代数且 $0 \neq \mu \notin N_A(A^\times)$。□

我们所指的第二个性质可见于 [Jac68，定理 IX。22] 当$\mathrm{char}(k) \neq 2$ 时；一般情形见 [McC70，定理 8] ；另见 [GPR25，推论 A4。5]。

定理 2.10。设 J 是一个 *Albert* k-代数， A 是一个次数3 的中心单结合代数，定义在 k 上，且 $A^{(+)}$ 是 J 的子代数。那么存在一个 $\lambda \in k^\times$，使得包含映射 $A^{(+)} \hookrightarrow J$ 可扩展为从 J (A, λ) 到 J 的同构。□

2.5. **第二 Tits 构造**。 第二 Tits 构造最一般的形式并未出现在本文中。相反，遵循 [GPR24第 44 页的论述即可。5] 并考虑

- 一个结合含对合系统 $\mathscr{B}=(K,B,\tau)$，定义为由一个维数为 $r\in\{1,2\}$ 的合成 k-代数 K、一个三次结合 K-代数 B 以及 B 的一个 K/k-对合 τ 组成；并且

- 一个适用于 $\mathscr{B}$ 的可容许标量，即一对 $(p,\ \mu)\in J_0^{\times}\times K^{\times}$ ($J_0:=H(\mathscr{B})$，B 中 τ-对称元素的 Jordan k-代数)，满足 $N_B(p)=n_K(\mu)$

作为输入。随后，输出将是一个三次 Jordan k-代数 $J=J(\mathscr{B},\ p,\ \mu)$，其向量空间为 $J_0\oplus Bj$ J_0 与 B 在 k 上的直和，并具有如下三次 Jordan 代数结构，其单位元、伴随和范数分别为

$$1_J=1_B=1_B+0\cdot j,$$
$$x^{\sharp}=\big(x_0^{\sharp}-up\tau(u)\big)+\big(\bar{\mu}\tau(u^{\sharp})p^{-1}-x_0u\big)j,$$
$$N_J(x)=N_{J_0}(x_0)+\mu N_B(u)+\bar{\mu}\overline{N_B(u)}-T_{J_0}\big(x_0,up\tau(u)\big) \tag{2.11}$$

对于 $x=x_0+uj$、$x_0\in J_0$、$u\in B$，J 的双线性迹为

$$T_J(x,y)=T_{J_0}(x_0,y_0)+T_B\big(up\tau(v)\big)+T_B\big(vp\tau(u)\big), \tag{2.12}$$

其中 $y=y_0+vj,\ y_0\in J_0,\ v\in B$。在此语境下，我们更具体地称 $\mathscr{B}$ 为一种 r^{th} 类型的结合含对合系统，并称 Core($\mathscr{B}$) $:=K$ 为其核心。

尽管第二 Tits 构造比第一 Tits 构造更难处理，但两者之间存在密切联系。例如，若 $\mathscr{B}$ 如上所述属于第二类，则 $J_K\cong J(B,\mu)$ 是一个第一 Tits 构造，见 [GPR24，推论 44。20]。由于 K 在 k上忠实平坦，结合命题 2.8 可得

命题 2.13。设 $\mathscr{B}=(K,B,\tau)$ 是定义在 k上的第二类结合含对合系统，且 (p,μ) 是 $\mathscr{B}$的一个可容许标量。第二 *Tits* 构造 $J(\mathscr{B},p,\mu)$是定义在 k 上的正则 *Freudenthal* 代数，当且仅当 B 在 K上正则。□

我们为第一 Tits 构造指出的两个重要性质，在第二 Tits 构造中也有自然的类似性质，见 [GPR24，定理 46。10]（或见 [Jac68，习题 IX.12。5] 以及 [McC70，定理。9],另见 [GPR25，定理 A4。4]）。

命题 2.14。若 $\mathscr{B}=(K,B,\tau)$ 是 k 上的第二类结合含对合系统，且 k 上的 $\mathscr{B}$ 的一个可容许标量为 (p,μ)，则 $J(\mathscr{B},p,\mu)$ 是三次 *Jordan* 除代数，当且仅当 $H(\mathscr{B})$ 和 $\mu\notin N_B(B^{\times},)$ 是三次 *Jordan* 除代数。□

定理 *2.15*。设 J 是一个 *Albert* k 代数，且 (B,τ) 是 k 上一个带酉对合的三次中心单结合代数，使得 $H(B,\tau)$ 是 J 的子代数。令 $K:=Cent(B)$ 且 $\mathscr{B}:=(K,B,\tau)$，则存在 $\mathscr{B}$ 的一个可容许标量 (p,μ)，使得包含映射 $H(B,\tau)\hookrightarrow J$ 可扩张为一个同构 $J(B,\tau,p,\mu):=J(\mathscr{B},p,\mu)$ 到 J。□

3. 不变量

本节中，我们依照文献中的多种资料，为任意真弗洛伊登塔尔代数 over k 配备不变量。以下概念至关重要。

3.1. 约化模型与坐标维数。设 J 是一个真 Freudenthal k 代数。依照 [PR96b], , J 的约化模型定义为一个在 k 上的约化 Freudenthal 代数 J_{red}，使得对于所有域扩张 K/k，若基变换 J_K 在 K 上约化，则 $J_K\cong(J_{\mathrm{red}})_K$。$J$ 的约化模型总是存在，并且在同构意义下唯一 [PR96b，定理 2.8]。但请注意，这一结果只有在维数 9 和 27 时才不是平凡的，因为在互补的维数 6 和 15 中，真 Freudenthal 代数是

约化的，因此它们本身就是约化模型。对于任意真 Freudenthal k 代数 J，其约化模型 J_{red} 具有某种坐标合成代数，该代数在同构意义下唯一，其维数今后称为 J 的坐标维数 。

3.2. **不变量模 2。** 设 C 是一个维数为 2^r、$0 \le r \le 3$ 的复合 k 代数，$\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathrm{GL}_3(k)$，且 $J = \mathrm{Her}_3(C, \Gamma)$ 是相应的真约化 Freudenthal k 代数。那么

$$f_r(J) := n_C \tag{3.1}$$

是一个 r-Pfister 二次型，并且是 J 的同位不变量，它可将真约化弗罗伊登塔尔代数按同位分类 [GPR24，定理 41。8]；它称为 r不变量 模 2，属于 J。

若 J 正则，我们定义

$$f_{r+2}(J) := n_C \perp Q_J, \quad Q_J := \langle \gamma_2\gamma_3, \gamma_3\gamma_1, \gamma_1\gamma_2 \rangle \otimes n_C, \tag{3.2}$$

它是一个$(r+2)$-Pfister 二次型，也是不变量 J [GPR24，引理 41。7],称为其 $(r+2)$-不变量 模 2。注意，对于 $\gamma_3 = 1$,

$$f_{r+2}(J) = \langle\langle -\gamma_1, -\gamma_2 \rangle\rangle \otimes n_C = \langle 1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1\gamma_2 \rangle \otimes n_C, \tag{3.3}$$

这确实是一个 Pfister 二次型。对于 $\mathrm{char}(k) \neq 2$，模 2 不变量可以通过伽罗瓦上同调来解释（借助 Arason 不变量），即作为元素 $f_{r+i}(J) \in H^{r+i}(k, \mathbb{Z}/2)$，$i = 0$，2。按照 [GPR24, 41.11] 的记号，$f_r(J) = \mathrm{Pf}_J$,$f_{r+2}(J) = \mathrm{Pf}_J^{+2}$，因此我们可以由 [GPR24, Thm. 41.21] 得出，模 2 不变量是正则真约化弗罗伊登塔尔代数的分类不变量。

若 J 是任意一个坐标维数为 k 的正则真 Freudenthal 2^r -代数，如 3.1 所述，我们通过转到约化模型，得到 模 2 不变量:

$$f_r(J) := f_r(J_{\mathrm{red}}), \quad f_{r+2}(J) := f_{r+2}(J_{\mathrm{red}}). \tag{3.4}$$

但在这个更一般的情形下，模 2 不变量不再是分类不变量；事实上，还有另一个重要的不变量——模 3 不变量，需要借助它来解决问题。为此，我们分别讨论维数 9 和 27 的情形。

3.3. **不变量：维数为 9 的弗罗伊登塔尔代数。** 维数为 9 的弗罗伊登塔尔代数与次数为 3 且带有酉对合的中心单结合代数密切相关。更具体地说，我们从 [GPR24，习题 55。12]和 [GPR25，习题 55。12] 推导出，三次约当 k代数 J 是维数为 9 的弗罗伊登塔尔代数，当且仅当存在一个中心单结合 k代数 (B, τ)，其次数为3 且带有酉对合 [GPR24，44.23，习题 9。33] 使得

$$J \cong H(B, \tau) = \{u \in B \mid \tau(u) = u\} \tag{3.5}$$

作为三次约当 k-代数；在这种情况下，(B, τ) 在同构意义下唯一。

通过 J来实现（3.5），如3.2 中所定义的模 2 不变量可如下纳入这一框架。

- $f_1(J)$ 是 $K := \mathrm{Cent}(B)$ 的同构类，其中 B 的中心是一个二次´étale k-代数。由于 K 是分裂二次 ´étale $k \times k$ 的 k-形式，我们也可以将 $f_1(J)$ 视为 $\in H^1(k, \mathbb{Z}/2)$ 中的一个元素 $f_1(J)$。由于域上的合成代数由其范数分类，我们也可以将 $f_1(J)$ 等同于 K 的范数，进而等同于 k 上的 Pfister 1-形式，这与 3.2 一致。

- $f_3(J)$ 是由 τ 确定的 Pfister 3-形式，定义见 [KMRT98, (19.4)]；也可以将其视为 k上的八元数代数，记作 $\mathrm{Oct}(\tau)$，这是 [GPR24,Exc. 46.23 (a)]采用的观点。

我们将 J 的模 3 不变量定义为

- 类 $g_2(J)$ 在 B 的布劳尔群中的 K。若 K 是一个域，则我们可将$g_2(J)$ 视为一个元素 $g_2(J) \in H^2(k,\mu_{[\mathbf{K}]})$ [KMRT98，(30.16)]。

根据 [KMRT98，定理 (30.21)] 和 [Pet04，定理 2。4]，f_1，f_3，g_2 是9维弗罗伊登塔尔代数 J在 k上的分类不变量。注意，J是一个除代数，当且仅当 $g_2(J) \neq 0$。

3.4. 同位体与特征对合。若 J 是一个维数为 9 的 Freudenthal k-代数，则其所有同位体也都是如此。更确切地说，若对于某个带酉对合的次数 3 中心单代数 k，有 $J \cong H(B,\tau)$，则对于任意可逆元 $p \in J$ [GPR24, 31，均有 $J^{(p)} \cong H(B,\tau^p)$。15],其中 τ^p, $u \mapsto p^{-1}\tau(u)p$ 是 p 对 τ[的扭转 GPR24, 10。8]由此可知，f_1, g_2 是九维 Freudenthal 代数的同位不变量，即在取同位体时保持不变。令 $K := \mathrm{Cent}(B)$，再回顾一下，映射 $p \mapsto \tau^p$ 给出了从 $J^\times$ 到 B [上的 K/k-对合集合的满射 Sch85, 定理 8.7。4]此外，B 的 K/k-对合由不变量 f_3 ([KMRT98, 定理 (19.6)], [Pet04, 定理 2。4]) 分类。

一个 K/k-对合 τ 上的 B 称为 特殊的，如果 3-Pfister 二次型 $f_3(J)$是双曲的（[KMRT98, (19.8)], [Pet04, 2.6]），等价地，相应的八元数代数是分裂的。特殊的 K/k-对合总是存在于 B 上，前提是 B 至少存在 K/k- 对合（[KMRT98, (19.12)], [Pet04, 定理 2。10]）。因此，以上汇集的结果得出以下结论。

命题 3.6。设 (B,τ) 是一个次数为 3 的中心单简单结合 k-代数，带有酉对合，并令 $K := \mathrm{Cent}(B)$。则以下条件等价。

(i) 九维 *Freudenthal* k-代数 $H(B,\tau)$ 是齐次的。(ii) 所有 K/k-对合在 B 上都共轭。(iii) 所有 K/k-对合在 B 上都是特殊的。(iv) $H(B,\tau)^\times = k^\times\{b\tau(b) \mid b \in B^\times\}$。(v) 每个包含 $H(B,\tau)$ 作为子代数的 *Albert* k-代数都是 *first Tits* 构造。(vi) 每个包含 $H(B,\tau)$ 作为子代数的约化 *Albert* k-代数都是分裂的。

证明。由上文可知，(i)、(ii) 和 (iii) 等价。令 $J_0 := H(B, \tau)$，接下来只需证明以下蕴含关系。

(i)⇔(iv)。根据 [Jac76，定理 6,7]，的结构群 由以下变换组成：$x \mapsto \lambda bx\tau(b)$ 其中 $\lambda \in k^\times$，$b \in B^\times$。因此，(iv) 等价于：在结构群的作用下，的轨道为全部 $J_0^\times$；进而等价于 J_0 齐次。

(iii)⇒(v)。设 (iii) 成立，并令 A 为 k 上的一个 Albert 代数，其中包含 $H(B,\tau)$ 作为子代数。根据定理 2.15，我们可以将其写为 $A = J(B,\tau,u,\mu)$，其中 (u,μ) 是某个可容许标量。现在，$f_3(A) = n_C$，其中 C是 $H(B,\tau^v)$ 的八元数代数，$v := u^{-1}$[PR95，定理 1.8]。根据 (iii)，τ^v 是特殊的，因此 C 必定是分裂的，从而迫使 A 成为第一 Tits 构造。

(v)⇒(vi). 每个由第一 Tits 构造得到的约化 Albert 代数都是分裂的 [PR84b，推论 4。2]。

(vi)⇒(iii). 假设 $u \in B$的范数为1。那么 $A := J(B, \tau, v, 1)$，$v = u^{-1}$根据命题 2.9是一个约化 Albert 代数，包含 $H(B, \tau)$ 作为子代数。因此，由 (vi) 可知，A 是

分裂。因此，它的八元数代数也是分裂的，并且与 τ^u 的八元数代数相同。因此 τ^u 是特殊的。若 $u \in B^\times$ 任意，则 $w := N_B(u)^{-1}u^3 = N_B(u)^{-1}U_u u$ 的范数为 1，且 $J_0^{(w)} \cong J_0^{(u)}$。因此，$\tau^w$ 是特殊的，并与 τ^u 共轭，这迫使 τ^u 也为特殊的。□

这个命题在以下结果中尤为有用，该结果见 [KMRT98，定理 (19.14)] 和 [Pet04，定理 3。1]

定理 3.7。 设 (B, τ) 是一个次数为3 且带酉对合的中心单简单结合 k-代数。当且仅当 *Freudenthal* k-代数 $H(B, \tau)$ 是第一 *Tits* 构造时，对合 τ 才是特殊的：存在一个三次 *étale* k-代数 E 和一个标量 $\mu \in k^\times$，使得 $H(B, \tau) \cong J(E, \mu)$。□

3.5. **不变量：Albert 代数**。 与 9 维 Freudenthal 代数类似，Albert 代数，也就是 27 维 Freudenthal 代数，有三个重要不变量；在排除某些较小特征后，这些不变量可以作上同调解释。设 A 为一个 Albert k-代数。

- $f_3(A)$ 和 $f_5(A)$ 是 $r = 3$ 的模 2 不变量，定义见第 3.2 节。与九维弗罗伊登塔尔代数的情形一样，$f_3(A)$ 可解释为一个八元数代数，记作 Oct(A)，称为 A 的八元数代数。根据 [KMRT98，命题（40.5）] 以及 [Pet04，定理 4.10]，我们回顾如下：Oct(A) 是分裂的，当且仅当 A 是第一 Tits 构造。
- $g_3(A)$ 是 A 的模 3 不变量；若 char(k) $\neq 3$，则它属于 $H^3(k, \mathbb{Z}/3)$。关于该不变量的精确定义，见 [KMRT98，第 537], [页，PR96a，PR97]。g_3 的一个特别重要的性质是，它能够刻画除代数：A 是阿尔伯特除代数，当且仅当 $g_3(A) \neq 0$。 [KMRT98，定理 40.8],[PR96a，定理 3.2], [PR97，定理 7]

我们注意到，f_3 和 g_3 是同位不变量，而 f_5 不是 [Pet19，推论 60]。如果 k 的特征不为2 或3，那么 f_3、f_5、g_3 是 Albert 代数的上同调不变量，而且基本上不存在其他不变量 [Gar09，命题 8。6], [GMS03，定理 22。5]。Serre 提出了一个尚未解决的问题 [Ser95]：Albert 代数是否由其不变量分类?

4. 由第一蒂茨构造得到的子代数

本节研究由第一 Tits 构造得到的 Albert 除代数的九维子代数。为方便起见，我们将这一情形形式化如下。

4.1. **可分三次子域上的第一 Tits 构造**。设 A是一个 Albert 除 k代数，且 $L \subseteq A$ 是一个可分三次子域。若存在某个 $\lambda \in k^\times$，使得包含映射 $L \hookrightarrow A$ 可扩张为从第一 Tits 构造 $J(L, \lambda)$到 A的嵌入，则称 A 为在 L上的第一 *Tits* 构造。基于这一术语，本节的第一个结果可视为关于第一 Tits 构造的局部-整体原理。

定理 4.1。 一个 *Albert* 除代数 k 是第一 *Tits* 构造，当且仅当它在 A 的每个可分三次子域上都是第一 *Tits* 构造。

为证明此结论，我们需要一个重要结果，出自 [Tha21]:

定理 4.2. 设 A 为 k 上的 *Albert* 除代数。则存在 $v \in A^\times$，使得同位体 $A^{(v)}$ 是循环的，即包含一个循环三次子域。□

推论 4.3. 设 A 是 k 上的齐次 *Albert* 除代数。则 A 是循环的。□

定理 4.1 的证明。“仅当”方向已在 [PR84b，推论 4.5]中得到证明。为证明其逆命题，我们假设 A 在每个可分三次子域上都是第一 Tits 构造，并须证明 A 是第一 Tits 构造。设 $v \in A$ 是一个非标量元素，即 $v \notin k$。令 $L = k[v]$ 为由 v生成的 A 的子代数。根据 [GPR24，命题 46.6]，L是 A的一个三次子域。先假设 L 是可分的。令 $w := v^{-1}$ 和R_w : $L \to L$表示由 w给出的右齐次映射。于是 $R_w(v) = 1$。由于 A 在 L上是第一 Tits 构造，存在 $\lambda \in k^\times$ 使得 $L \subseteq S := J(L, \lambda) \subseteq A$。令 $\chi : S \to S$为由下式给出的映射

$$\chi(l_0 + l_1 j_1 + l_2 j_2) = w l_0 + (l_1 w) j_1 + (w^{-1} l_2 w^\sharp) j_2$$

对于 $l_0, l_1, l_2 \in L$。由 [GPR24，习题 42.25]，可知 $\chi \in \mathrm{Str}(S)$。根据 [Tha19，定理 4.4]，我们得出 χ可以扩展为某个元素 $\widetilde{\chi} \in \mathrm{Str}(A)$。换言之，$\widetilde{\chi} \in \mathrm{Str}(A)$ 满足 $\widetilde{\chi}(v) = 1$。由此可得 $A^{(v)} \cong A$。若 L 不可分，则 k 的特征为 3，且 $T_A(v) = T_A(v^\sharp) = 0$。因此，对于某个 $\alpha \in k^\times$，有 $U_v v = v^3 = \alpha . 1_A$ 。于是再次得到 $A^{(v)} \cong A$。因此 A 是齐次的，故由推论 4.3 可知，A 包含一个三次循环子域 M。A 是域 M 上的第一 Tits 构造，因此得到 $\nu \in k^\times$，使得 $M \subseteq J(M, \nu) \subseteq A$。但 M 是循环的，因此取其伽罗瓦群的一个生成元σ，便可构造循环 k-代数 $D := (M/k, \sigma, \nu)$。它是 k 上的一个次数为 3 的中心结合除代数，且满足 $D^{(+)} \cong J(M, \nu)$ [PR86，命题 5.1]。因此 $D^{(+)}$ 是 A 的子代数，而 A 是一个第一 Tits 构造。□

例 4.4. 一般矩阵。考虑 [Pet99] 中定义的整环上一般矩阵的 Albert 代数，并将其传递到中心闭包，我们得到一个定义在适当域 F 上的 Albert 除代数 A[，它是纯第二 Tits 构造[Pet99，定理 1]。事实上，它与第一 Tits 构造的距离已远至极限。我们声称：A 不含任何可分三次子域（在 F 上），使其在该子域上成为第一 Tits 构造。确实，若 $L \subseteq A$ 是一个可分三次子域，则 A 的二次迹限制在 $L^\perp$ 上（$L^\perp$ 是相对于双线性迹的 L 的正交补）一方面是各向异性的 [Pet99，定理 2]，；另一方面，它在符号相差至多一个负号的意义下，是由 L 上 Springer 形式的线性迹所诱导的 Scharlau 转移 [GPR24，练习 42.16(a)]。因此，L 的 Springer 形式也具有各向异性，由此根据 [PR84b，定理 4.4] 得出所述结论。□

若 A 是一个并非由第一 Tits 构造得到的阿尔伯特除代数，定理 4.1蕴含 A 在 A的某些可分三次子域处并非第一 Tits 构造。但在其他子域处，它完全可能是第一 Tits 构造。因此，找出明确给出必要且充分条件的判据，以确定 A在各个可分三次子域处是否为第一 Tits 构造，便颇有意义。我们将在下文提出的一个条件，涉及代数群 2 秩环面 $\mathbf{Aut}(A)$ 中的某些环面；该群是 A的自同构群。下面的引理将为此铺平道路。

回顾一下，对于带有酉 K/k 对合 σ的中心单代数（B, σ），其中 K 是 B的中心，SU(B, σ) 中的极大 k-环面恰好具有 $T = \mathrm{SU}(E, \sigma)$ 的形式，其中 $E \subseteq B$ 是一个极大交换 σ-稳定 ´étale K-子代数（参见 [Rog90], 3.4）。

引理 4.5. 设(B, σ) 是一个次数为3 的中心结合除代数，带有关于 K/k 的酉对合，其中 K 是 B 的中心。设$\mathbf{T}$为最大 k-环面$\mathbf{SU}(E, \sigma)/\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{PSU}(B, \sigma)$，其中 $E \subseteq B$ 是 K 的一个 σ-稳定可分三次扩张

且$\mathbf{Z}$是$\mathbf{SU}(B,\sigma)$的中心。设 $g \in T := \mathbf{T}(k)$ 由 $p \in \mathbf{SU}(E,\sigma)$ 表示。则 $p^3 \in \mathbf{SU}(E,\sigma)(k)$。

证明。令 $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$，其中 k_s 是 k的可分闭包。由于$\mathbf{T}$定义在 k和 $g \in T$上，我们有 $\gamma(g) = g$，对所有 $\gamma \in \Gamma$均成立。设 $g \in T$由 $p \in \mathbf{SU}(E, \sigma)$ 表示，即 $g = p\mathbf{Z}$。由此可得 $p^{-1}\gamma(p) \in \mathbf{Z}$，对所有 $\gamma \in \Gamma$均成立。由于$\mathbf{Z}$是一个3-挠阿贝尔群，因此 p^3 在 Γ 作用下不变，从而 $p^3 \in \mathbf{SU}(E, \sigma)(k)$。□

我们回顾 [KMRT98，第291页及命题（18.24）] 中的结论：一个 ´étale k-代数 L 的判别式是一个二次 ´étale 代数，其定义在 k上，记作 $\Delta(L)$。代数群之间的等源嵌入是指核有限（且为中心）的同态。基于此，我们现在可以证明：

定理 4.6。设 A 是域 k 上的阿尔伯特除代数，且 $L \subseteq A$ 是一个可分三次子域。记 $\mathbf{L}^{(1)}$ 为 L中范数为1的元素构成的环面，则以下条件等价。

(i) A是域 L上的第一 *Tits* 构造。(ii) L的判别式是 $\mathrm{Oct}(A)$的子代数。(iii) 秩为2的环面 $\mathbf{L}^{(1)}$ 通过同源嵌入 $\mathbf{Aut}(A)$，其定义域为 k。

证明。(i)⇔(ii)。记 Δ 为 L的判别式。由 [PR84b，定理 4.4]，(i)成立当且仅当 L 的伽罗瓦闭包是 A的分裂域。因此，只需证明后一个条件等价于 Δ 是 Oct(A)的子代数。先假设 L是循环的。则 Δ 分裂，且 L 与其自身的伽罗瓦闭包一致。现在，L 是 A 的分裂域，当且仅当 A_L 分裂，当且仅当 $\mathrm{Oct}(A_L) \cong \mathrm{Oct}(A)_L$ [Pet04，定理 4.10] 分裂，当且仅当 Oct(A)分裂（由 Springer 定理 [EKM08，推论 18.5]，因为 $[L : k]$ 是奇数），当且仅当 Oct(A)包含Δ（因为 Δ 分裂）。另一方面，如果 L 不是循环的，那么 Δ 是一个域，且 L_Δ 是 L的伽罗瓦闭包。现在，L_Δ 分裂 A 当且仅当它在 Δ上分裂 A_Δ，当且仅当 $\mathrm{Oct}(A_\Delta) \cong \mathrm{Oct}(A)_\Delta$ 分裂（由前一种情形），当且仅当 Δ 是 Oct(A) 的子域。

(i)⇒(iii)。假设对于某个 $a \in k^\times$，$J(L,a) \subseteq A$。由 (3.5) 可得，对于某个带酉对合的中心单纯结合 k-代数 (B,σ)，其次数为 3，$J(L,a) \cong H(B,\sigma)$；而定理 2.15 蕴含，对于相对于 (B,σ) 的某个可容许标量 (u,μ)，$A \cong J(B,\sigma,u,\mu)$。我们有 $J(L,a) = L \oplus Lj_1 \oplus Lj_2$，并且根据（[KMRT98], 29.16, 37.B），

$$\mathbf{Aut}(J(L,a))^\circ = \mathbf{PGU}(B,\sigma) = \mathbf{SU}(B,\sigma)/\mathbf{Z},$$

其中 $\mathbf{Z}$ 是 $\mathbf{SU}(B,\sigma)$ 的中心（参见 [KMRT98, 23.4]）。对于 $R \in k$-**代数** 以及 $p \in \mathbf{L}^1(R)$，映射

$$\phi(R)_p \colon J(L,a)_R \longrightarrow J(L,a)_R,\ x_0 + x_1 j_{1R} + x_2 j_{2R} \longmapsto x_0 + (x_1 p^{-1}) j_{1R} + (p x_2) j_{2R}$$

对 $x_0, x_1, x_2 \in L_R$ 保持单位元不变，并根据 (2.6) 保持范数不变，因此是 $J(L,a)_R$ [的自同构（GPR24，例 34.18]）。于是我们得到一个定义在 k 上的嵌入 $\mathrm{L}^{(1)} \to \mathrm{Aut}(J(L,a))$。$\mathrm{Aut}(J(L,a))$ 中的极大 k-环面具有 $\mathrm{SU}(E,\sigma)/\mathrm{Z}$ 的形式，其中 $E \subseteq B$ 是一个 σ-稳定的三次 étale 子代数 ´，它包含 K，而 Z 是 $\mathrm{SU}(B,\sigma)$ 的中心。因此，对于某个如上的 σ-稳定 $E \subseteq B$，有 $\mathrm{L}^{(1)} \cong \cong \mathrm{SU}(E,\sigma)/\mathrm{Z}$。设 $\phi : \mathrm{L}^{(1)} \cong \to \mathrm{SU}(E,\sigma)/\mathrm{Z}$ 是一个定义在 k 上的同构。回顾一下，$\mathrm{SU}(B,\sigma)$ 的中心 Z 是 3-扭元。

设 $\phi(p) = a_p\mathrm{Z}$，其中 $a_p \in \mathrm{SU}(E,\sigma)$。根据引理 4.5，$a_p^3 \in \mathrm{SU}(E,\sigma)(k)$。根据引理 4.5，映射 $\eta_p \colon A = J(B,\sigma,u,\mu) \longrightarrow A$ 由 $\eta_p(b,x) = (a_p^3 b a_p^{-3}, a_p^3 x)$ 给出，它是定义在 k 上的 A 的自同构。因此，映射 $\mathrm{L}^{(1)} \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$ 由$p \mapsto \eta_p$ 给出，是定义在 k 上良定义的等源嵌入。

(iii)⇒(i)。这在 [Hoo18，定理 4 中得到证明。12]。如果秩-2-环面 $\mathbf{L}^{(1)}$ 通过同源嵌入$\mathbf{Aut}(A)$ 至 k，那么 L 的判别式是 $\mathrm{Oct}(A)$ 的一个子代数。现在使用 (ii)⇒(i)。□

推论4.7。 若要使八元数除代数 k-*algebra* C 同构于某个定义在 k 上的 *Albert* 除代数的八元数代数，则必须存在一个 k 的可分二次域扩张，它不同构于 C的任何子代数。

证明。 设 A 是定义在 k 上的 Albert 除代数，且具有 $C \cong \mathrm{Oct}(A)$。反设每个 k 的可分二次域扩张都同构于 C的一个子代数。由定理 4.6， A在每个可分三次子域上都是第一 Tits 构造。由定理 4.1，因此， A 是第一 Tits 构造，这迫使 $C \cong \mathrm{Oct}(A)$ 分裂，矛盾。 □

注记4.8。 当然，前一推论所述的必要条件并非充分条件。设 C 是定义在 $\mathbb{Q}$上的唯一八元数除代数；有理数域 [GPR24，推论23。23]。不存在定义在 $\mathbb{Q}$ 上、以 C 为相伴八元数代数的 Albert 除代数，理由很简单：所有有理Albert代数都是约化的 [GPR24，推论46。17], 然而，与 $\mathbb{Q}$ 的任何子代数都不同构的（可分）二次域扩张 C 却为数众多：所有实二次数域。

在定理 4.6中，我们可以不要求 L 是 A的子代数。更准确地说，我们有如下结论：

推论4.9。 设 A 是域 k 上的阿尔伯特除代数。那么 $f_5(A) = 0$ 当且仅当存在一个等基的 k-嵌入 $\mathbf{L}^{(1)} \to \mathbf{Aut}(A)$，其中 L 是 k 的三次可分域扩张。

证明。若 $f_5(A) = 0$，则我们可以将 $A = J(B, \sigma, u, \mu)$ 写成第二 Tits 构造，其中 σ 是 B 上的特殊幺正对合，且 (u, μ) 是一个可容许标量 [Pet04，定理 4.4]。根据 ([Pet04，定理 3.1])，存在一个三次可分域扩张 L/k,$L \subseteq H(B, \sigma)$，其判别式为 $K = \mathrm{Cent}(B)$。由定理 4.6，存在一个 k-等基的k-嵌入 $\mathrm{L}^{(1)} \to \mathrm{Aut}(A)$。反向结论见 [Hoo18]。□

注 4.10. 在 [Hoo18，定理 4.3], 中，已证明：若 A 是 k 上的一个 Albert 代数，且 $\mathrm{Aut}(A)$ 允许一个等源 k-嵌入 $\mathrm{L}^{(1)} \to \mathrm{Aut}(A)$，其中 L/k 是三次循环域扩张，则 $f_3(A) = 0$，也就是说， A 是第一构造。前述推论可视为对此结果的推广。具体而言，若在 k 上有一个等源嵌入 $\mathrm{L}^{(1)} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(A)$，其中 L 是 k 的循环三次域扩张，则 $A \otimes_k L$ 是分裂的。为此，注意到由于 L 是循环的，环面 $\mathrm{L}^{(1)}$ 在将标量从 k 扩张到 L 后变为分裂，因此 $\mathrm{Aut}(A_L)$ 含有一个秩为 2 的分裂环面。然而，包含秩为 2 的分裂环面的 F_4 型群必定是分裂的（参见 [Tit66], 《蒂茨指标》表 II）。因此 $\mathrm{Aut}(A_L)$ 是分裂的，A_L 也如此。于是，根据 [PR84a，定理 2]， L 嵌入 A 的一个同位体 A' 中；并且根据定理 4.6， L 的判别式是 $\mathrm{Oct}(A')$ 的一个子代数。由于将 A 换为同位体不会改变 $\mathrm{Oct}(A)$，可知 $\mathrm{Oct}(A)$ 也包含 L 的判别式作为子代数。但由于 L 是 k 上的循环扩张，其判别式是分裂的，故 $\mathrm{Oct}(A)$ 分裂，因此 A 是第一构造。

5. 齐性判据

我们开始列举判据，再次回顾以下 [PR84b的结果，不过这次我们采用更正式的表述。推论 4。9]。

定理 5.1。 每个由第一 *Tits* 构造得到的 *Albert* 除代数 k都是齐次的。 □

我们马上会看到，这一定理对维数为 9 的 Freudenthal 除代数的类似结论并不成立。为证明这一点，我们结合（3.5）与 3.4 中存在特征对合这一事实，以及定理3.7 ，得到

命题 5.2。 每个维数为 9的 *Freudenthal* 除代数都有一个同位体是第一 *Tits* 构造。□

例 5.3。 (a) 设 J 是一个非第一 Tits 构造的 Freudenthal 除代数 k。根据命题 5.2， J 及其任何同位体都不是齐次的。特别地，存在一些维数为 9 的 Freudenthal 除代数，它们是第一 Tits 构造，却不是齐次的。

(b) 如何找到不能由第一 Tits 构造得到的维数为 9 的 Freudenthal 除代数? 为阐明这一点，我们回到例 A 中域 F 上的阿尔伯特除代数4.4 ，并选取一个维数为 $J \subseteq A$ 的 Freudenthal 子代数9 [GPR24，定理 45。11]。给定任意可分三次子域 $L \subseteq J$， A 不是第一 Tits 构造 L（例 4.4），因此不存在一个 $a \in F^\times$ 满足 $J \cong J$（L， a）。因此 J 不是第一 Tits 构造。

下面我们将进一步探讨 Freudenthal 代数成为齐性代数的判据。为了恰当地表述我们将在此过程中得到的主要结果，还需要在概念上做一些准备。

5.1. **拟齐次 Freudenthal 代数**。 如果一个真 Freudenthal k-代数 J 在取同位体时其不变量不变，则称其为拟齐次。记 2^r 为 J 的坐标维数，并注意到，对于 $r = 1$， $f_r(J)$ 和 $g_2(J)$ 是各位不变量，而对于 $r = 3$， $g_3(J)$ 是各位不变量，则 J 是拟齐次的，当且仅当对所有 $p \in J^\times$，$f_{r+2}(J^{(p)}) = f_{r+2}(J)$。

齐性真 Freudenthal 代数显然是拟齐次的。反过来，由于约化的或维数为 < 27 的真 Freudenthal 代数可由其不变量分类，因此它们是拟齐次的，当且仅当它们是齐性的。另一方面，由于我们不知道 Albert 代数是否可由其不变量分类，因此也不知道非齐性的拟齐次 Albert 代数是否确实存在；若存在，它们必定是除代数。

采用上述术语，我们现在可以陈述本节的主要结果。

定理 5.4. (a)如果所有维数为15的 *Freudenthal* k代数都是齐次的，那么所有定义在 k 上的 *Albert* 代数都是准齐性的。
(b) 如果所有维数为9 的约化 *Freudenthal* k代数都是齐次的，那么定义在 k上、维数为 ≥ 9 的所有 *Freudenthal* 代数也都是齐次的。
(c) 如果$\mathrm{Her}_3(k)$ 是齐次的，那么定义在 k上的所有 *Freudenthal* 代数也都是齐次的。

该定理的证明依赖于若干判据，它们阐明了单个 Freudenthal 代数成为（准）齐性的必要条件和／或充分条件。

命题 5.5. 坐标维数为 2^r 的真 *Freudenthal* k代数是准齐性的，当且仅当对所有 $p \in J^\times$， $f_{r+2}(J^{(p)})$ 都是双曲的。

证明。 设 J 是一个准齐性的真 Freudenthal 代数。只需证明，对于某个 $p \in J^\times$，$f_{r+2}(J^{(p)})$ 是双曲的。若 J 是约化的，则由

[GPR24，定理 41。26]。若 J 是维数为 9 且以 (3.5) 的形式给出的除代数，则由特征对合的存在性可得（参见 3.4）。最后，若 J 是阿尔伯特除代数，则由 [Pet04，定理 4。7]。□

命题 5.6。 (a) 设 J 是一个维数为9的弗罗伊登塔尔 k代数。若 J_{red} 是齐次的，则 J 是齐次的。
(b) 设 A 是一个 ***Albert*** k代数。若 A_{red} 是齐次的，则 A 是准齐性的。

证明。 我们通过考虑一个坐标维数为 k 的弗罗伊登塔尔代数 J， 2^r， $r = 1, 3$，同时处理这两种情况。我们必须证明，对于所有 $f_{r+2}(J^{(p)}) = f_{r+2}(J)$ ，$p \in J^{\times}$。由于 f_r 是一个各位不变量，我们可以应用（3.4）并得到

$$f_r\big((J^{(p)})_{\mathrm{red}}\big) = f_r(J^{(p)}) = f_r(J) = f_r(J_{\mathrm{red}}).$$

但是， f_r 是约化真弗罗伊登塔尔代数的一个分类同位不变量。因此，$(J^{(p)})_{\mathrm{red}}$ 与 J_{red} 同位，进而同构，因为根据假设， J_{red} 是齐次的。这意味着

$$f_{r+2}(J^{(p)}) = f_{r+2}\big((J^{(p)})_{\mathrm{red}}\big) = f_{r+2}(J_{\mathrm{red}}) = f_{r+2}(J),$$

正如所需。 □

从某种意义上说，命题 5.6 将任意真齐性弗罗伊登塔尔代数的研究简化为对约化代数的研究。因此，在本节余下部分，我们认为有理由将注意力限制在这一特殊情形上。

我们用 I 表示维特环 $W(k)$中的基本理想，即由菲斯特双线性形式 $\langle 1, -a\rangle = \langle\langle a\rangle\rangle$ （ $a \in k^{\times}$）生成的理想。对于k上的正则二次型 q ，

$$\mathrm{Ann}_{W(k)}(q) := \{c \in W(k) | c.q = 0 \text{ in the Witt group of } k\},$$

它是在 $W(k)$中的湮灭子。现在我们可以证明：

命题 5.7。 若 C 是 k 上的正则合成代数，且 $J := \mathrm{Her}_3(C)$，则下列条件等价。

(i) J 是齐次的。(ii) 对于所有的 γ、 $\delta \in k^{\times}$，***Pfister*** 二次型 $\langle\langle \gamma$、$\delta\rangle\rangle \otimes n_C$ 是双曲的。(iii) 对于所有的 $\gamma \in k^{\times}$，***Pfister*** 二次型 $\langle\langle\gamma\rangle\rangle \otimes n_C = n_C \oplus (-\gamma)n_C$ 是万能的。(iv) $I^2 \subseteq \mathrm{Ann}^{W(k)}(n_C)$。

证明。设 $\dim_k(C) = 2^r$，并注意到由推论 2.5 可知， J的同位体在同构意义下恰好是形如 $\mathrm{Her}_3(C, \Gamma)$ 的代数，其中 $\Gamma \in \mathrm{GL}_3(k)$ 是某个对角矩阵。因此，(i)⇔(ii)由命题 5.5 和 (3.3) 得出。对于 γ、 $\delta \in k^{\times}$ 和 $q := \langle\langle\gamma\rangle\rangle \otimes n_C$，我们有 $\langle\langle\gamma$、 $\delta\rangle\rangle \otimes n_C = \langle\langle\delta\rangle\rangle \otimes n_C$。因此，(ii)⇔(iii) 由 EKM08，命题 9.8] 得出。最后，(ii)⇔(iv)由以下事实得出： I^2 由 $\langle\langle\gamma$、 $\delta\rangle\rangle$、 γ、 $\delta \in k^{\times}$生成。□

推论 5.8. 维数不为6 的分裂 ***Freudenthal*** 代数是齐次的。

证明。 维数为 1 或3 的弗罗伊登塔尔代数即使不是分裂的也都是齐次的。因此，我们只需考虑维数至少为 9的分裂 Freudenthal 代数，令$J = \mathrm{Her}_3(C)$ 其中 C 是维数至少为 2 的正则分裂合成代数。由于 n_C是双曲的，命题5.7 的条件 (ii) 显然成立，因此可知 J 是齐次的。 □

命题 5.9. 对于一个四元数 k-代数 B，以下条件等价。

(i) $\mathrm{Her}_3(B)$ 是齐次的。(ii) 任何包含 B 作为子代数的 k 上的八元数代数，其范数都是普适的。

在这种情况下，任何其八元数代数包含 B 作为子代数的 k 上的 *Albert* 代数都是准齐次的。

证明。任何满足 (ii) 的八元数代数的范数都具有 $\langle\langle\delta\rangle\rangle \otimes n_B$ 的形式，其中$\delta \in k^\times$。因此，(i)⇔(ii) 可由命题 5.7 对 $C = B$ 推出。在最后一个结论中，设 A 是一个 Albert k-代数，满足 $B \subseteq C := \mathrm{Oct}(A)$。由于 $C \cong \mathrm{Oct}(A_{\mathrm{red}})$，命题 5.6 (b) 允许我们假设 A 是约化的。由 (ii) 可知 n_C 是万能的，因此对所有 $\delta \in k^\times$，$\langle\langle\delta\rangle\rangle \otimes n_C$ 也是万能的，结论由命题 5.7 得出。□

命题 5.10。对于二次 *étale* k-代数 K，以下条件等价。

(i) $\mathrm{Her}_3(K)$ 是齐次的。(ii) 不存在包含 K 作为子代数的八元数除 k-代数。

(iii) 任何包含 K 作为子代数的四元数 k-代数的范数都是万能的。在此情形下，对于任何包含 K 作为子代数的 k 上的合成代数 C，$\mathrm{Her}_3(C)$ 都是齐次的。

证明。(i)⇔(ii)。任何包含 K 作为子代数的 k 上的八元数代数 C 的范数都具有形式 $n_C \cong \langle\langle\gamma, \delta\rangle\rangle \otimes n_K$ 其中 γ，$\delta \in k^\times$。由命题 5.7，因此，任何这样的 C 是分裂的，当且仅当 (i) 成立。

(i)⇔(iii)。任何包含 K 作为子代数的 k 上的四元数代数 C 的范数都具有形式 $n_C \cong \langle\langle\gamma\rangle\rangle \otimes n_K$ 其中 $\gamma \in k^\times$。由命题 5.7，n_C 对于任何这样的 C，其范数是万能的，当且仅当 (i) 成立。

在最后的陈述中，先假设 C 是八元数代数。由 (ii)，C 是分裂的，因此$\mathrm{Her}_3(C)$也是分裂的，特别是，$\mathrm{Her}_3(C)$是齐次的（推论 5.8）。另一方面，若 C 是四元数代数，则 n_C 由 (iii) 可知是万能的，因此对于任意$\langle\langle\gamma\rangle\rangle \otimes n_C$，$\gamma \in k^\times$也都是万能的。因此，$\mathrm{Her}_3(C)$ 由命题 5.7可知是齐次的。□

命题 5.11。若 k 的特征不为二，则 $\mathrm{Her}_3(k)$ 是齐次的，当且仅当 k上不存在四元数除代数。

证明。由于 $\mathrm{char}(k) \neq 2$，我们按通常方式将 k上的二次型与对称双线性型对应起来。对于任意 $\gamma, \delta \in k^\times$，二次型 $\langle\langle\gamma, \delta\rangle\rangle \otimes n_k$ 是四元数代数 (γ, δ) 的范数，因此它是双曲的，当且仅当 (γ, δ) 是分裂的。于是，由命题 5.7 可得结论，其中 $C := k$ 根据我们对 k 的假设，是一个正则的复合 k- 代数。□

不仅前面的证明在特征二下不成立，结论本身也不成立。这将由下一个命题及其后的注释推出。

命题 5.12. 如果 k 的特征为二，那么$\mathrm{Her}_3(k)$是齐次的，当且仅当k 是完美的。在这种情况下，k上不存在四元数除代数。

证明。如果 k 是完美的，那么 $k^2 = k$。由于任意对角矩阵$\Gamma \in \mathrm{GL}_3(k)$的对角元都可以乘以任意非零平方因子而改变，而不改变 $\mathrm{Her}_3(k, \Gamma)$ 的同构类，因此我们得到 $\mathrm{Her}_3(k, \Gamma) \cong J := \mathrm{Her}_3(k)$，所以 J是齐次的。如果 k 不是完美的，那么存在 $\gamma \in k^\times \setminus k^{\times 2}$，且 [GPR24，例 39.35] 中取 $\Gamma := \mathrm{diag}(1, 1, \gamma)$ 表明 $\mathrm{Her}_3(k, \Gamma)$ 不同构于 J。因此 J不是齐次的。最后一个结论由 [GPR24，习题 19.27]推出。□

注 5.13。 命题5.12 最后一个结论的逆命题并不成立：设 F 是一个特征二的代数闭域，并且 $k:=F((\mathbf{t}))$ 是关于变量 $\mathbf{t}$ 的形式洛朗级数域， F。尽管 k 不是完美的，因此根据命题 $\mathrm{Her}_3(k)$ 不是齐次的，但 5.12，在 k [Pet74上不存在四元数除代数，命题 1, 2]。

定理 5.4 的证明。（a）设 A 是一个 Albert k-代数，任取一个四元数子代数$B\subseteq \mathrm{Oct}(A)$并应用命题 5.9。

（b）由命题 5.6（a），所有 9 维的 Freudenthal k-代数，无论是约化的还是除代数，都是齐次的。接下来设 B 是一个四元数代数，且 A 是一个定义在 k上的 Albert 代数。在第一种情形中，任取一个二次 ´étale 子代数 $K\subseteq B$；在第二种情形中，取 $K\subseteq C:=$ Oct(A)。由假设，Her$_3$(K) 是齐次的，因此命题 5.10 蕴含 Her$_3$(B) 也是齐次的，而 C 是分裂的。但这意味着 A 是一个第一 Tits 构造，因此由定理 5.1 可知它是齐次的。

（c）由（b）可知，只需证明对所有二次 ´étale k-代数 K，Her$_3$(K) 都是齐次的。我们需要证明，对任意对角矩阵 $\Gamma=$diag($\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$) $\in$GL$_3$(k)，都有 Her$_3$(K,Γ) $\cong J:=$ Her$_3$(K)。由假设可得 Her$_3$(k, Γ) $\cong$Her$_3$(k)，因此推论 2.4 蕴含，对某个 $g\in$GL$_3$(k)，有 $gp\bar{g}^{\mathsf{T}}=gpg^{\mathsf{T}}\in k\mathbf{1}_3$， $p:=\sum\gamma_i e_{ii}\in$ Her$_3$(k) $\subseteq J$。在 k 而非 K 中解读这一结果，并再次应用推论 2.4，即得所述结论。□

例 5.14. 在 [PR84b]中已经指出，5.7 的命题现在再次表明，坐标范数为万能范数的正则真约化弗罗伊登塔尔代数是齐次的。 然而，反命题并不成立，即便在阿尔伯特代数这一特殊情形下也不成立。

为说明这一点，对任意正整数 n，令 $k_n:=$C((t1, . . . , t$_n$)) 为变量 t1, . . . , t$_n$ 的迭代形式洛朗级数域，其系数属于复数域。根据 [Pet74]，的主要结果，存在 k_1 上的分歧二次扩张、 k_2 上的分歧四元数代数，以及 k_3 上的分歧八元数代数。因此，我们可以找到 k_4 上的非分歧八元数代数 C，其范数因而不是万能范数。另一方面，Springer 理论 [Spr55] 关于局部域上剩余形式的理论表明，对于任意 n， k_n 上的各向异性二次型的维数至多为 2^n。特别地，5-Pfister 形式 f_5(A)（其中 $A:=$ Her$_3$(C)）是各向同性的，因而是双曲的，进而在 W(k_4) 中为零，这迫使 A 成为齐次的。

6. 严格齐次真 Freudenthal 代数

我们称一个 Jordan代数 J 在 k 上严格齐次， $J\otimes_k L$ 若对于所有域扩张 L的 k，它都是齐次的。本节将研究这类代数。根据定理 5.1，第一 Tits 构造 Albert 代数就是这类代数的例子。为了探讨哪些真 Freudenthal 代数是严格齐次的，我们需要一个初等的技术性结果。

命题 6.1. 设 $q:\ V\to k$ 是 k 上的一个各向异性二次型，并假设$\mathbf{s}$、$\mathbf{t}$ 是相互独立的不定元。那么，二次型 $q_K\oplus \mathbf{s}q_K$ 在域$K:=k(\mathbf{s}$、$\mathbf{t})$ 上不表示元素 $\mathbf{t}\in K$。

证明。 为简便起见，我们始终用 q 代替 q_K。反证，存在元素 $x,y\in V_K$ 使得 $q(x)+\mathbf{s}q(y)=\mathbf{t}$。于是 $x\neq 0$ 或 $y\neq 0$。写作

$$x=\frac{u(\mathbf{s},\mathbf{t})}{g(\mathbf{s},\mathbf{t})},\quad y=\frac{v(\mathbf{s},\mathbf{t})}{g(\mathbf{s},\mathbf{t})}$$

其中 $u(\mathbf{s},\mathbf{t})$ $v(\mathbf{s},\mathbf{t}) \in V[\mathbf{s},\mathbf{t}] := V \otimes_k k[\mathbf{s},\mathbf{t}]$ 不同时为零，且 $0 \neq g(\mathbf{s},\mathbf{t}) \in k[\mathbf{s},\mathbf{t}]$, 我们可以通分，从而得出结论

$$q\big(u(\mathbf{s},\mathbf{t})\big) + \mathbf{s}q\big(v(\mathbf{s},\mathbf{t})\big) = \mathbf{t}g(\mathbf{s},\mathbf{t})^2. \tag{6.2}$$

对于某些 $m,n,p \in \mathbb{N}$，我们有如下展开式

$$\begin{aligned} u(\mathbf{s},\mathbf{t}) &= u_m(\mathbf{s})\mathbf{t}^m + \cdots, \\ v(\mathbf{s},\mathbf{t}) &= v_n(s)\mathbf{t}^n + \cdots, \\ g(\mathbf{s},\mathbf{t}) &= g_p(\mathbf{s})\mathbf{t}^p + \cdots, \end{aligned}$$

其中 $\cdots$ 表示关于 $\mathbf{t}$ 的低次项， $u_m(\mathbf{s})$ $v_n(\mathbf{s}) \in V[\mathbf{s}]$， $0 \neq g_p(\mathbf{s}) \in k[\mathbf{s}]$，并且当 $u(\mathbf{s},\mathbf{t}) \neq 0$ 时， $u_m(\mathbf{s}) \neq 0$（相应地，当 $v(\mathbf{s},\mathbf{t}) \neq 0$ 时， $v_n(\mathbf{s}) \neq 0$）。由此我们得到

$$\begin{aligned} q\big(u(\mathbf{s},\mathbf{t})\big) &= q\big(u_m(\mathbf{s})\big)\mathbf{t}^{2m} + \cdots, \\ q\big(v(\mathbf{s},\mathbf{t})\big) &= q\big(v_n(\mathbf{s})\big)\mathbf{t}^{2n} + \cdots, \\ g(\mathbf{s},\mathbf{t})^2 &= g_p(\mathbf{s})^2\mathbf{t}^{2p} + \cdots, \end{aligned}$$

其中 $q(u_m(\mathbf{s}))$（相应地， $q(v_n(\mathbf{s}))$) 在 $u(\mathbf{s},\mathbf{t})$（相应地， $v(\mathbf{s},\mathbf{t})$) 非零，因为 $q_{k(\mathbf{s})}$仍然是各向异性的。将其代入（6.2），我们推出

$$q\big(u_m(\mathbf{s})\big)\mathbf{t}^{2m} + \cdots + \mathbf{s}q\big(v_n(\mathbf{s})\big)\mathbf{t}^{2n} + \cdots = g_p(\mathbf{s})^2\mathbf{t}^{2p+1} + \cdots. \tag{6.3}$$

这里，右侧关于 $\mathbf{t}$ 的次数为奇数，因此一旦证明左侧关于 $\mathbf{t}$ 的次数为偶数，就会得到矛盾。若 $m \neq n$，这显然成立。另一方面，若 $m = n$，则左侧关于$\mathbf{t}$ 的最高次项的系数为

$$q\big(u_m(\mathbf{s})\big) + \mathbf{s}q\big(v_n(\mathbf{s})\big),$$

除非两个加项都非零，否则它不可能为零。但此时，它是关于$\mathbf{s}$的两个非零多项式之和，第一个加项的次数为偶数，第二个加项的次数为奇数。因此，这个和本身不为零。由此可见，在所有情况下，(6.3) 的左侧关于$\mathbf{t}$的次数均为偶数。□

作为上述命题的直接推论，我们得到：

定理 6.4。设 J 是 k上的真约化 *Freudenthal* 代数。那么， J 严格齐次，当且仅当 J 是维数至少为9的分裂代数。

证明。 J 是维数至少为 9 的分裂代数这一性质在基域扩张下保持不变，因此推论 5.8 迫使 J 严格齐次。反过来，设此条件成立。我们先假设 J 是正则的。令 C 表示 J 的坐标代数，令n_C 表示其范数。对于所有域扩张 K/k 以及所有 $\gamma \in K^\times$， Pfister 二次型$n_C \otimes K \perp \gamma(n_C \otimes K)$在所有域扩张 L/K上都是万能的（命题 5.7）。因此，由命题 6.1， n_C 在 k上必定是各向同性的，故 C 必定是维数至少为 2 的分裂代数。接下来讨论 J 不正则的情形。此时， k 的特征为 2，并且在各位意义下， $J = \mathrm{Her}_3(k)$。我们必须证明 J 并非严格齐次。由于存在 k 的非完美域扩张，由命题 5.12 即得结论。□

推论 6.5。 (a)维数为9 的 *Freudenthal* 代数在 k 上严格齐次，当且仅当它同构于 $A^{(+)}$，其中 A 是某个次数为3的中心单简单结合 k-代数。

*(b)</style}*一个定义在 k 上的 *Albert* 代数是严格齐次的，当且仅当它是第一 *Tits* 构造。

证明。“若”方向在 (a) 中显然，在 (b) 中则由定理 5.1 得出。反过来，设J 是任意一个维数为 9（分别为 27）的严格齐次 Freudenthal k代数。若 J 是约化的，则由定理 6.4 可知它是分裂的，因此 (a)（分别为 (b)）成立。另一方面，若 J 是除代数，取任意一个可分三次子域 $L \subseteq J$。则定义在 L上的扩张代数J_L 仍然严格齐次，但也是约化的，因此根据我们刚才的结论，它是分裂的。若 J的维数为 9，则可将其写为 $J = H(B,\tau)$，其中 (B,τ) 是某个带酉对合的中心简单结合k代数。由于 $H(B,\tau)$在将标量从 k 扩张到 L 后变为分裂，B的中心也分裂；因此，该中心作为 k上的二次可分 étale 代数，原本就必定是分裂的。于是，$(B,\tau) \cong (A \times A^{\mathrm{op}}, \varepsilon)$，其中 A 是 k上的次数为 3 的中心简单结合代数，ε 为交换对合。因此 $J \cong A^{(+)}$，如 (a) 所述。若 J 的维数为 27，令 $C := \mathrm{Oct}(A)$。由于 J_L 是分裂的，C_L也分裂，因而 C 也分裂，因为 L 在 k 上的次数为奇数。但这样一来，A 必定是第一 Tits 构造，如 (b) 所述。□

例 6.6. 设 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 和 $(B_0, \bar{\sigma})$ 是 F 上次数 3 的中心除代数，带有 $F/\mathbb{Q}$ 上的 σ 第二类对合；根据 [Kne69，第 5 章，命题 1]，这类代数总是存在。令 $J_0 := H(B,\sigma)$。则 J_0 是 $\mathbb{Q}$ 上维数 9 的 Freudenthal 除代数。令 $B = B_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i)$ 和 $\tau = \sigma \otimes 1$。则 (B,τ) 是K 上的中心除代数：$= \mathbb{Q}(\sqrt{2})(i)$，带有 K/k 上的 τ第二类对合，其中 $k = \mathbb{Q}(i)$。考虑 $J := J_0 \otimes_{\mathbb{Q}} k$。则 $J = H(B,\tau)$ 是 k 上 9 维的 Freudenthal 除代数。由于 k 没有实嵌入，k 上的任意八元数代数都必须是分裂的 [GPR24，推论 23.21]。因此，B 上的对合 τ 必须是特殊的，正如 B 上的任何第二类对合一样。因此，J 是 k 上的齐性 Freudenthal 除代数；然而，根据推论 6.5，它并不是严格齐性的。

7. FREUDENTHAL 除代数与赋值

在接下来的两节中，我们固定一个在离散赋值下完备的域 F。我们先汇集一些技术细节，以便在本文倒数第二节中证明主要结果。

7.1. 完备域。先约定一些记号。属于 F 的离散赋值记为 λ，因此 $\lambda\colon F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ 是满足通常性质的满射；关于离散赋值的基本事实，参见 [Efr06]。我们用 $\mathfrak{o} := \{\alpha \in F \mid \lambda(\alpha) \geq 0\}$ 表示 F 的赋值环（始终默认 λ），它是一个局部主理想整环；用 $\mathfrak{p} := \{\alpha \in F \mid \lambda(\alpha) > 0\}$ 表示赋值理想，即 $\mathfrak{o}$ 的唯一极大理想；用 $F := \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 表示 F 的剩余域。从 $\mathfrak{o}$ 到 F 的自然映射记为 $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$。

7.2. **完备域上的三次约旦除代数。** 设 J 是一个定义在 F上的三次约旦除代数，并始终假设其为有限维。注意，J 的次数为 3 或维数为 1。我们将自由运用 [Pet73] 中发展的约当除环赋值理论。特别地，根据 [Pet73，命题 5。1]，λ 可唯一延拓为离散赋值 $\lambda_J\colon J \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ 定义为

$$\lambda_J(x) := \frac{1}{3}\lambda\big(N_J(x)\big) \qquad (x \in J) \tag{7.1}$$

并满足以下条件，对所有 $x,\ y \in J$。

$$\begin{aligned}\lambda_J(x) = \infty &\iff x = 0,\\ \lambda_J(x+y) &\geq \min\{\lambda_J(x), \lambda_J(y)\},\\ \lambda_J(U_x y) &= 2\lambda_J(x) + \lambda_J(y).\end{aligned}$$

特别是,

$$\mathfrak{o}_J := \{x \in J \mid \lambda_J(x) \geq 0\}$$

是 J 的一个 $\mathfrak{o}$-子代数，称为 λ_J 的赋值代数（或 J 的赋值代数），其中包含

$$\mathfrak{p}_J := \{x \in J \mid \lambda_J(x) > 0\}$$

作为其唯一的极大理想，称为 λ_J 的赋值理想。$\mathfrak{o}_J$ 的可逆元可描述为

$$\mathfrak{o}_J^\times = \{x \in J \mid \lambda_J(x) = 0\} = \mathfrak{o}_J \setminus \mathfrak{p}_J$$

，因此，$J := \mathfrak{o}_J/\mathfrak{p}_J$ 是 F 上的 Jordan 除代数。我们称 J 为 J 的剩余代数。从 $\mathfrak{o}_J$ 到 J 的自然映射仍记作 $x \mapsto \bar{x}$。我们还注意到，λ_J 保持任意幂以及

$$\lambda_J(x^\sharp) = 2\lambda_J(x) \tag{7.2}$$

对所有 $x \in J$ 均成立，因为我们可以假设 $x \neq 0$，因此 $\lambda_J(x^\sharp) = \lambda_J(N_J(x)x^{-1}) = \lambda_J(N_J(x)) - \lambda_J(x) = 3\lambda_J(x) - \lambda_J(x) = 2\lambda_J(x)$。

7.3. 例子。 设 A 是 F上的有限维三次结合除代数。前述考量适用于 $J := A^{(+)}$，并以显然的记号得出 $\lambda_J = \lambda_A$、$\mathfrak{o}_J = \mathfrak{o}_A^{(+)}$、$\mathfrak{p}_J = \mathfrak{p}_A$ 和 $\bar{J} = \bar{A}^{(+)}$。

7.4. 分歧。回到 7.2 中的三次约尔当除 F-代数 J，由 [Pet73 引理 3.1] 的推论可得，$\lambda_J(J^\times)$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个加法子群，而后者又包含 $\mathbb{Z}$，且其为有限指数 [的子群 3] Pet73，5.3]。这个指数称为 J在 F上的分歧指数，记作 $e_{J/F}$。根据 [Pet73，命题 6.4], 的推论 1，分歧指数整除 J的次数，因此只能是 1 或 3；特别地，它是奇数，所以由 [Pet73，定理 6.3(c)] 可知，J在 F上的剩余次数，记作 $f_{J/F}$，并按 [Pet73，6.3], 中的定义，等于 J在 F上的维数。此外，根据 [Pet73，定理 6.3(d)] ，它满足基本等式

$$e_{J/F} f_{J/F} = \dim_F(J). \tag{7.3}$$

显然有 $\mathfrak{p}\mathfrak{o}_J \subseteq \mathfrak{p}_J$，并且由于 $\mathfrak{o}_J$是秩为 $\dim_F(J)$ 的自由模，其系数环为主理想整环 $\mathfrak{o}$[Pet73，命题 6.3(a)], 可以验证

$$e_{J/F} = 1 \iff \lambda_J(J^\times) = \mathbb{Z} \iff \mathfrak{p}_J = \mathfrak{p}\mathfrak{o}_J. \tag{7.4}$$

J称为非分歧（分别称为分歧），如果 $e_{J/F} = 1$（分别为 $e_{J/F} = 3$），且 J在 F上可分。

7.5. **扩张三次结构**。 本节的首要目标是弥补 [Pet75 命题 3][1] 证明中的一个缺口：利用已给定的 J 在 F 上的三次结构，在 $\bar{J}$ 在 $\bar{F}$ 上导出一个典范三次结构。我们分两步进行：第一步从 J 在 F 上过渡到 $\mathfrak{o}_J$ 在 $\mathfrak{o}$ 上；第二步从 $\mathfrak{o}_J$ 在 $\mathfrak{o}$ 过渡到 J 在 F 上。以下引理为第一步铺平道路。

引理 7.5. 设 R 是交换环，M、N、N' 是 R-模，$f\colon M \to N$ 是一个在 R 上的多项式律，且 $i\colon N \to N'$ 是一个单射 R-线性映射。若 $i \circ f = 0$ 作为在 R 上的多项式律成立，则 $f = 0$ 作为在 R 上的多项式律成立。

证明。 令 $\mathbf{T} = (\mathbf{t}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为一族不定元。相应的多项式环 $S := R[\mathbf{T}]$ 是自由的，因此作为一个 R-模是平坦的，所以 S-线性延拓 $i_S\colon N_S \to N'_S$ 仍然是单射。因此 $i_S \circ f_S = 0$ 推出 $f_S = 0$ 作为集合映射成立 $M_S \to N_S$，由 [GPR24，推论 12。11]，引理得证。 □

命题 7.6. 设 J 是 F 上的三次 *Jordan* 除代数。记 $i\colon \mathfrak{o} \hookrightarrow F$ 为包含映射，则在 $\mathfrak{o}_J$ 上存在唯一的三次 *Jordan* $\mathfrak{o}$-代数结构，使得包含映射 $i_J\colon \mathfrak{o}_J \hookrightarrow J$ 是三次 *Jordan* 代数的一个 i-半线性同态。

证明。 由 [GPR24, 34.10(b)]，，断言归结为以下事实：存在唯一的三次型 $N_{\mathfrak{o}_J}\colon \mathfrak{o}_J \to \mathfrak{o}$ 使 $\mathfrak{o}_J$ 成为三次 Jordan $\mathfrak{o}$-代数，并使其成为

(7.7)
$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{o}_J & \xrightarrow{i_J} & J \\ {\scriptstyle N_{\mathfrak{o}_J}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N_J} \\ \mathfrak{o} & \xrightarrow{i} & F \end{array}$$

一个交换的 i-半线性多项式平方，满足 ${}_{\mathfrak{o}}i \circ N_{\mathfrak{o}_J} = {}_{\mathfrak{o}}i_J \circ {}_{\mathfrak{o}}N_J$ 作为 $\mathfrak{o}$ 上的多项式律；这里左侧的指标“$\mathfrak{o}$”指的是多项式律的标量限制，见 [GPR24, 12。27]因此，唯一性由引理 7.5 得出。

为证明存在性，我们首先证明

(7.8)
$$\mathfrak{o}_J^\sharp \subseteq \mathfrak{o}_J, \quad N_J(\mathfrak{o}_J) + T_J(\mathfrak{o}_J) + T_J(\mathfrak{o}_J, \mathfrak{o}_J) + S_J(\mathfrak{o}_J) \subseteq \mathfrak{o}.$$

虽然第一个关系由 (7.2) 得出，但根据 (7.1)，有 $N_J(\mathfrak{o}_J) \subseteq \mathfrak{o}$，而 [Pet73, Satz 5.1] 的证明给出 $T_J(\mathfrak{o}_J) + S_J(\mathfrak{o}_J) \subseteq \mathfrak{o}$，因此线性化后有 $S_J(\mathfrak{o}_J, \mathfrak{o}_J) \subseteq \mathfrak{o}$。现在，[GPR24, (33a.13)] 还蕴含 $T_J(\mathfrak{o}_J, \mathfrak{o}_J) \subseteq \mathfrak{o}$，从而完成了 (7.8) 的证明。

我们此前已指出，$\mathfrak{o}_J$ 是一个秩为 n 的自由 $\mathfrak{o}$-模：$= \dim_F(J)$。设 $(e_1, \ldots, e_n)$ 是 $\mathfrak{o}_J$ 的一组 $\mathfrak{o}$-基，因此也是 J 的一组 F-基。对于 $R \in \mathfrak{o}$-**代数**，定义一个集合映射

$$(N_{\mathfrak{o}_J})_R\colon (\mathfrak{o}_J)_R \longrightarrow R$$

by

$$(N_{\mathfrak{o}_J})_R(x) := \sum_{i=1}^{n} N_J(e_i) r_i^3 + \sum_{i\neq j} T_J(e_i^\sharp, e_j) r_i^2 r_j + \sum_{i<j<l} T_J(e_i \times e_j, e_l) r_i r_j r_l$$

对所有 r_1、...、$r_n \in R$ 和 $x := \sum_{i=1}^n e_i \otimes_{\mathfrak{o}} r_i \in (\mathfrak{o}_J)_R$。根据 (7.8)，所显示等式的右侧属于 R，并且容易验证，集合映射 $(N_{\mathfrak{o}_J})_R$ 随 $R \in \mathfrak{o}$-alg 函子性地变化，因而定义了一个三次型 $N_{\mathfrak{o}_J}\colon \mathfrak{o}_J \to \mathfrak{o}$。存在一个自然同一，将 $\mathfrak{o}_J \otimes_{\mathfrak{o}} F$ 与作为 Jordan F-代数的 J 对应起来，并使 $x \otimes_{\mathfrak{o}} \alpha$（对于 $x \in \mathfrak{o}_J$ 和 $\alpha \in F$）与 $\alpha x \in J$ 相匹配。在这一同一之下可验证 $N_{\mathfrak{o}_J} \otimes_{\mathfrak{o}} F = N_J$，而 (7.7) 由 [GPR24, (12.29.2)] 得出。根据 (7.8)，将 J 的伴随限制到 $\mathfrak{o}_J$ 上得到

[1] 这一差异在三次型的草率定义中显露出来。

一个二次映射 $\mathfrak{o}_J \to \mathfrak{o}_J,\ x \mapsto x^\sharp$称为 $\mathfrak{o}_J$ 的伴随，并且只需证明 $\mathfrak{o}_J$ 连同基点 $1_{\mathfrak{o}_J}$、其伴随和范数 $N_{\mathfrak{o}_J}$ 构成 $\mathfrak{o}$上的三次范数结构。根据 [GPR24, 33.1]，它显然是一个三次数组，因为 $\mathfrak{o}_J$ 是自由的 $\mathfrak{o}$-模。此外，[GPR24, Exc.33.14], 中的恒等式在所有 J中均成立，因而特别在 $\mathfrak{o}_J$中成立，断言得证。□

推论 7.9。我们有 $(\mathfrak{o}_J)_F = J$作为三次 *Jordan* F-代数，而三次 *Jordan* $\mathfrak{o}$-代数 $\mathfrak{o}_J$ 的伴随、（双）线性迹和二次迹，是将 J 中相应对象限制到 $\mathfrak{o}_J$上得到的。

证明。这既可通过查阅前面的证明得出，也可结合 [GPR24中的第 12.29 和 34 条结果得出。10]。□

作为第二步，我们需要一个显然广为人知、但似乎缺乏便于查阅出处的引理。

引理 7.10。设 E/F 是有限可分域扩张。则 $T_{E/F}(\mathfrak{p}_E) \subseteq \mathfrak{p}$。

证明。记 $\sigma_i\colon E \to E',\ 1 \le i \le n := [E\colon F]$，为 E 到其伽罗瓦闭包 E'/F的 n 个不同的 F-嵌入。对每个 i，嵌入 F可延拓为 $\sigma_i' \in \mathrm{Gal}(E'/F)$中的某个元素，并且有 $\lambda_{E'} \circ \sigma_i' = \lambda_{E'}$。因此，对于 $u \in \mathfrak{p}_E$，我们得出 $\lambda_{E'}(\sigma_i(u)) = \lambda_{E'}(\sigma_i'(u)) = \lambda_{E'}(u) = \lambda_E(u) > 0$，从而 $\sigma_i(u) \in \mathfrak{p}_{E'}$。于是$T_{E/F}(u) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(u) \in \mathfrak{p}_{E'} \cap F = \mathfrak{p}$。□

命题 *7.11.* 设 J 是 F 上的三次 *Jordan* 除代数。那么，按 [*GPR24*，习题 *34.*21] 的意义，$(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_J)$ 是 $\mathfrak{o}_J$ 的一个三次理想。特别地，记 $\varrho\colon \mathfrak{o} \twoheadrightarrow \bar{F}$、$\varrho_J\colon \mathfrak{o}_J \to J$ 为典范投影，则在 J 上存在唯一的三次 *Jordan* 代数结构，使得 ϱ_J 成为三次约旦代数的一个 ϱ-半线性同态（参见 [*GPR24*，*34.10(b)*]）。

证明。根据 [GPR24，习题 34。21],只需证明以下内容：

(i) $\mathfrak{p}\mathfrak{o}_J \subseteq \mathfrak{o}_J$。(ii) 对所有 $x \in \mathfrak{p}_J, y \in \mathfrak{o}_J$，$T_J(x,\ y)\ T_J(x^\sharp,\ y)\ N_J(x) \in \mathfrak{p}$。(iii) 存在一个 $\mathfrak{o}$-线性映射 $\vartheta\colon \mathfrak{o}_J \to F$，满足 $\vartheta(1_J) = 1_{\bar{F}}$ 且 $\vartheta(\mathfrak{p}_J) = \{0\}$。

(i) 显然成立。对于 (ii) 中的第一个关系，应用推论 7.9，我们可以假设 $y \in \mathfrak{o}_J^\times$。取 $\mathfrak{o}_J$ 的 y-同位体，并运用 [GPR24, (33.11.5)], ，我们甚至可以假设 $y = 1_{\mathfrak{o}_J}$、$x \notin F1_J$ 和 $T_J(x) \neq 0$。于是 $E := F[x] \subseteq J$ 是一个可分三次子域[GPR24, Prop. 46.6],，而引理 7.10 蕴含 $T_J(x,\ 1_{\mathfrak{o}_J}) = T_{E/F}(x) \in \mathfrak{p}$，从而得到 (ii) 中的第一个关系。第二和第三个关系现在可直接由 7.2 的关系推出。在 (iii) 中，由于 $1_{\bar{J}} \in J$ 显然是幺模的，存在一个线性形式 $\vartheta'\colon J \to F$ 满足 $\vartheta'(1_{\bar{J}}) = 1_{\bar{F}}$，而 $\vartheta := \vartheta' \circ \varrho_J$ 即可满足要求。□

下面给出前述结果的第一个应用。

命题 7.12. 设 J 是定义在 F 上的三次约旦除代数。在自然同一 $(\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}} = \mathfrak{o}_J/\mathfrak{p}\mathfrak{o}_J$ 下，我们有

$$\mathrm{Nil}\left((\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}}\right) = \mathfrak{p}_J/\mathfrak{p}\mathfrak{o}_J = \{x \in (\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}} \mid x^3 = 0\} = \{x \in (\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}} \mid x \textit{ is nilpotent}\}.$$

证明。我们依次证明前述链中的每一项都包含于下一项。首先，由于 $\mathfrak{p}_J \subseteq \mathfrak{o}_J$是唯一的极大理想，因此 $\mathfrak{p}_J/\mathfrak{p}\mathfrak{o}_J \subseteq (\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}}$也是如此。故 $\mathrm{Nil}((\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}}) \subseteq \mathfrak{p}_J/\mathfrak{p}\mathfrak{o}_J$。接下来，令 $\varrho\colon \mathfrak{o}_J \to (\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}}$为自然映射，并令 $0 \neq u \in \mathfrak{p}_J$。于是 $u^3 = N_J(u)(N_J(u)^{-1}u^3)$，其中第一个因子属于 $\mathfrak{p}$，第二个因子属于

$\mathfrak{o}_J^\times$。故 $u^3 \in \mathfrak{p}\mathfrak{o}_J$。于是 $\varrho(u)^3 = 0$。最后，假设 $u \in \mathfrak{o}_J$具有幂零的 $\varrho(u) \in (\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}}$。若 $u \notin \mathfrak{p}_J$，则 $u \in \mathfrak{o}_J^\times$，这将推出 $\varrho(u) \in (\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}}^\times$，矛盾。因此 $u \in \mathfrak{p}_J$，由此可知，$(\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}}$中的幂零元集合与 $\mathfrak{p}_J/\mathfrak{p}\mathfrak{o}_J$相同，是 $(\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}}$中的一个理想，因而属于 Nil$((\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}})$。□

命题7.13. 对于维数为 > 1的 *Freudenthal* 除代数 J，以下条件等价。

(i) J 是非分歧的。(ii) $\mathfrak{o}_J$ 是 $\mathfrak{o}$上的正则 *Freudenthal* 代数。(iii) $\mathfrak{o}_J$ 是 $\mathfrak{o}$ 上的 *Freudenthal* 代数。(iv) $\mathfrak{o}_J$ 是 $\mathfrak{o}$上的正则三次*Jordan*代数。(v) 存在一个正则三次 *Jordan* $\mathfrak{o}$-代数 $\mathfrak{o}'_J \subseteq J$，使得包含映射$\mathfrak{o}'_J \hookrightarrow J$ 是一个$(\mathfrak{o} \hookrightarrow F)$-半线性嵌入，并且典范地导出同一化 $\mathfrak{o}'_J \otimes_{\mathfrak{o}} F = J$，将其视为三次 *Jordan* F-代数。

在此情形下，$\mathfrak{o}'_J = \mathfrak{o}_J$，对于任何满足（v）假设的三次 *Jordan* $\mathfrak{o}$-代数 $\mathfrak{o}'_J$。

证明。 我们将证明以下蕴含链：

$$(\mathrm{i}) \Rightarrow (\mathrm{ii}) \Rightarrow (\mathrm{iii}) \Rightarrow (\mathrm{ii}) \Rightarrow (\mathrm{iv}) \Rightarrow (\mathrm{v}) \Rightarrow (\mathrm{iv}) \Rightarrow (\mathrm{i}).$$

¯(i)⇒(ii)。若 J是非分歧的，则由 (7.4) 可知 $\mathfrak{p}_J = \mathfrak{p}\mathfrak{o}_J$，且 $(\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}} = J$是一个正则 Freudenthal 除代数 [GPR24，定理 46.8]。令 (e_i) 为 $\mathfrak{o}_J$ 作为 $\mathfrak{o}$-¯模的一个基，则 $(T_{\mathfrak{o}_J}(e_i, e_j))$ 的行列式在模 $\mathfrak{p}$ 约化后非零（在 F 中），因而是 $\mathfrak{o}$ 中的单位，从而 $\mathfrak{o}_J$ 是一个正则三次 Jordan $\mathfrak{o}$-代数。给定任意域$K \in \mathfrak{o}$-代数，单位同态 $\mathfrak{o} \to K$ 通过 F（分别为 F）分解，因此推论 7.9¯（分别为命题 7.11）推出 $(\mathfrak{o}_J)_K = J_K$（分别为 $(\mathfrak{o}_J)_K = J_K$）；由于 J（分别为 J）是 Freudenthal 代数，所以它是三次 ´étale¯代数，或是三次 Jordan K-代数中的单代数。根据定义[GPR24，39.8], ，因此 $\mathfrak{o}_J$ 是 $\mathfrak{o}$上的正则 Freudenthal 代数。

(ii) ⇒(iii)。显然。

(iii) ⇒ **(ii)**。由于 J 在 6 上秩不为 F [GPR24，定理 46。8], 在 $\mathfrak{o}_J$ 上的秩也不为 $\mathfrak{o}$。因此，结论由 [GPR24，推论 39 得出。15]。

(ii) ⇒(iv) ⇒(v)。显然。

(v) ⇒ **(iv)**。集合映射 $N_J\colon J \to F$限制为集合映射 $N_{\mathfrak{o}'_J}\colon \mathfrak{o}'_J \to \mathfrak{o}$。因此$\mathfrak{o}'_J \subseteq \mathfrak{o}$ 是一个三次约旦 $\mathfrak{o}$-子代数。因此，由正则性，$\mathfrak{o}_J = \mathfrak{o}'_J \oplus \mathfrak{o}'^{\perp}_J$ [GPR24，引理 11。10]。然而，$\mathfrak{o}_J$ 和 $\mathfrak{o}'_J$ 都是秩为 $\mathfrak{o}$的自由$\dim_F(J)$-模，且 (iv) 成立。

(iv) ⇒ **(i)**。若 $\mathfrak{o}_J$是正则三次 Jordan $\mathfrak{o}$-代数，则 $(\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}}$是正则三次¯Jordan F-代数，因此其幂零根（由命题 7.12 可知与 $\mathfrak{p}_J/\mathfrak{p}\mathfrak{o}_J$相同）必为零_[GPR24，习题 34.23]。因此，由 (7.4) 得 $e_{J/F} = 1$，且 $J = (\mathfrak{o}_J)_{\bar{F}}$是正则三次 Jordan 除代数。故 J 是非分歧的。此外，由于 (v)⇒(iv) 蕴含关系的证明，本命题的最后一项陈述也成立。□

注 7.14。 证明命题 (i) 的论证⇒(ii) 部分 7.13以说明 $\mathfrak{o}_J$ 是正则三次 $\mathfrak{o}$-代数，可以原样重复，用以说明二次域扩张 K/F 是非分歧的，当且仅当 $\mathfrak{o}_K$ 是二次 *´étale* $\mathfrak{o}$-代数。

例 7.15。 设 A 是一个非分歧的三次结合除法 F-代数。

(a) 根据命题 7.13（应用于 $A^{(+)}$），我们推得 $\mathfrak{o}_A$ 是一个正则三次结合 $\mathfrak{o}$–代数。因此，对于 $\mu \in \mathfrak{o}^\times \setminus N_A(A^\times)$，第一 Tits 构造 $J := J(A, \mu)$ 是一个定义在 F [上的正则 Freudenthal 除代数（GPR24，推论 42.14 和 46.12] ）。由于第一 Tits 构造在基变换下保持稳定，它以满足命题 7.13 (v) 假设的方式包含 $\mathfrak{o}'_J := J(\mathfrak{o}_A, \mu)$。因此，$J$ 是非分歧的，$\mathfrak{o}'_J = \mathfrak{o}_J$，并且

(7.4) 蕴含 $J = \mathfrak{o}_J/\mathfrak{po}_J = \mathfrak{o}_J \otimes_{\mathfrak{o}} F = J(A, \bar{\mu})$ 在 F上。

（b）另一方面，若 π 是 $\mathfrak{o}$的素元，则我们断言，第一 Tits 构造 $J := J(A, \pi)$ $= A \oplus Aj_1 \oplus Aj_2$ 是一个分歧 Freudenthal 除 F-代数。事实上，由于 A 是非分歧的，对于所有 $x \in A^\times$，我们有 $\lambda(N_A(x)) \equiv 0$ 模 3，而 $\lambda(\pi) = 1$。因此 $\pi \notin N_A(A^\times)$，所以 J 是一个 Freudenthal 除 F- 代数；由于 $\lambda_J(j_1) = \frac{1}{3}$，它必定是分歧的。由基本等式 (7.3)，$\bar{J}$ 和 $\bar{A}^{(+)} \subseteq \bar{J}$ 具有相同的 $\bar{F}$-维数，因此我们得到 $\bar{J} = \bar{A}^{(+)}$。我们将在下文的推论 8.4 中看到，反过来，每个定义在 F 上的分歧 Freudenthal 除代数都具有上述形式。

引理 7.16. 设 K/F 是一个二次域扩张，且 J 是一个具有 $e_{J/F} = 1$的三次约旦除代数。则 J_K 是 K 上的三次约旦除代数，并且 $e_{J_K/K} = 1$。更确切地说，存在一个自然同一 $J_K = J_{\bar{K}}$，使其成为三次约旦 K代数。

证明。 J_K 是 K [GPR24，推论 46。3]包含 J 作为三次约旦除 F子代数，满足 $\lambda_{J_K}|_J = \lambda_J$。因此存在一个自然的 F同态 $J \to J_K$，进而确定一个规范的 K同态

$$\bar{J}_{\bar{K}} \longrightarrow \overline{J_K}$$

三次约旦 K代数 [GPR24，习题 34.22 (a)]。但是 $J_{\bar{K}}$ 是一个三次约旦除代数，因此这个同态是单射。另一方面，由于 $e_{J/F} = 1$，且根据[Pet73，5。3], 我们有

$$\dim_F(J) = \dim_{\bar{F}}(\bar{J}) = \dim_{\bar{K}}(\bar{J}_{\bar{K}}) \leq \dim_{\bar{K}}(\overline{J_K}) \leq \dim_K(J_K) = \dim_F(J),$$

h因此处处取等，引理得证 s. □

8. 分类定理

利用上一节汇集的准备工作，我们现在可以着手解决 Freudenthal 除代数的分类问题，具体而言，就是将分类问题约化为剩余域 F上的相应问题 F。在阿尔伯特除代数这一重要特例中，这种约化已在 [Pet75]中完成。这里采用的方法将使我们能够统一处理 F上的所有 Freudenthal 除代数。我们将特别关注哪些 Freudenthal 除 F代数是齐次的这一问题。

我们结果所需的约化过程，其主要组成部分可概述如下。

注 8.1. 设 $\mathscr{B} := (K, B, \tau)$ 是 F 上如 2.5 所述的结合含对合系统，且 K 是一个域。除非 K/F 是不可分二次域扩张，否则 $\mathscr{B} := (K, B, \bar{\tau})$（其中 $\bar{\tau}$ 表示由 τ 在 B 上典范诱导的 K/F- 对合）是 F 上的一个结合含对合系统。此外，若 (p, μ) 是 $\mathscr{B}$ 的一个可容许标量，则不改变 $\mathscr{B}$ 的情况下，不妨假设 $N_B(p) = n_K(\mu) = 1$ ([KMRT98, (39.2)(2)]), [GPR24, Exc. 44.33(c)]），此时 $(\bar{p}, \bar{\mu})$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个可容许标量。

在后续讨论中，为避免与剩余同态混淆，我们不沿用 [GPR24] 的记号，而是将圆锥代数的共轭记作而非用 $x \mapsto \bar{x}$ 而用 $x \mapsto x^*$。

定理 8.2。 设 $\mathscr{B} =$（K、B、τ）是 F上的结合含对合系统，且 （p、μ）是 $\mathscr{B}$ 的可容许标量。假设第二 *Tits* 构造 $J :=$ J（$\mathscr{B}$、p、μ）是除代数， F-子代数 $J_0 :=$ H（$\mathscr{B}$） $\subseteq J$ 是非分歧的，且 K 是一个域。则

(a) B 是 K上的非分歧三次结合除代数。*(b)* K/F 是非分歧二次域扩张。*(c)* $\mathfrak{o}_{\mathscr{B}}:=(\mathfrak{o}_K、\ \mathfrak{o}_B、\ \tau|_{\mathfrak{o}_B})$ 是 $\mathfrak{o}$上的结合含对合系统；如果我们如注 *8.1* 中所述假设 $N_B(p)=n_K(\mu)=1$，那么 *(c1)* $(p、\ \mu)$ 是 $\mathfrak{o}_{\mathscr{B}}$ 的可容许标量，使得相应的第二 *Tits* 构造满足

$$\mathfrak{o}_J = J(\mathfrak{o}_{\mathscr{B}}, p, \mu) = \mathfrak{o}_{J_0} \oplus \mathfrak{o}_B j \tag{8.3}$$

作为正则的 *Freudenthal* $\mathfrak{o}$-代数。

(c2) $\mathscr{B}:=(K、\ B、\ \bar{\tau})$ 是 F 上的结合含对合系统，允许 $(\bar{p}、\ \bar{\mu})$ 作为可容许标量；J 是非分歧的，并且存在一个自然同构 $J\cong J(\mathscr{B}、\ \bar{p}、\ \bar{\mu})$ 作为三次 *Jordan* F-代数。

证明。(a) K/F 根据 [GPR24，推论 46，11]是可分二次域扩张。从[GPR24，习题 44.29(a)]，我们因此推得存在一个自然同一 $J_{0K}=B^{(+)}$ 作为三次 Jordan K-代数，因此引理 7.16 蕴含 $e_{B/K}=1$ 以及 $\bar{B}^{(+)}\cong \bar{J}_{0\bar{K}}$。由于根据假设，$J_0$ 在 F 上可分，因此 B 在 K上也可分，我们已证明 (a)。

(b) 反设 K 在 F上不是非分歧的。则 $K=F$或 K/F是不可分二次域扩张。无论如何，K 作为圆锥形 F-代数的共轭是恒等映射。我们可以假设 $N_B(p)=1=n_K(\mu)$，如 (c) 中所示，并得出$1=\mu\mu^*$，因此 $\bar{1}=\bar{\mu}\bar{\mu}^*=\bar{\mu}^2$，即 $\bar{\mu}=\pm 1$。于是 $\mu\equiv\pm1$ 模 $\mathfrak{p}_K$，而 [Pet75 引理 8] 的推论表明，对于某个 $w\in B^\times$，有 $\mu=N_B(w)$，这与 [GPR24 定理 46.10]以及 J 是除代数矛盾。至此，(b) 的证明完成。

(c1) 由于根据 (b) 和备注 7.14，$\mathfrak{o}_K$ 是 $\mathfrak{o}$ 上的二次 ´étale 扩张，因此 $\mathfrak{o}_{\mathscr{B}}:=(\mathfrak{o}_K,\mathfrak{o}_B,\tau|_{\mathfrak{o}_B})$ 是一个定义在 $\mathfrak{o}$上的结合含对合系统，并以 (p,μ) 为可容许标量。因此，$\mathfrak{o}'_J:=J(\mathfrak{o}_{\mathscr{B}},p,\mu)$ 可构成一个三次 Jordan $\mathfrak{o}$-代数；根据 [GPR24，推论 44.22]，它是正则的。B 上的结合赋值 λ_B 限制为 J_0 上的 Jordan 赋值，该赋值扩张 λ，因而与 λ_{J_0} [Pet73，定理 5.1]一致。因此，$H(\mathfrak{o}_{\mathscr{B}})=\mathfrak{o}_{J_0}$，且 (8.3) 的第二个等式成立。此外，由于 (8.3) 中展示的第二 Tits 构造在基变换下保持稳定，我们有 $(\mathfrak{o}'_J)_F=J$，因此满足命题 7.13 (v) 的假设，由此得出 $\mathfrak{o}'_J=\mathfrak{o}_J$。至此完成 (c1) 的证明。

(c2) 关于首个断言成立，结合 (c1) 与命题 7.13 可得 J 是非分歧的。显然有 $J_0\subseteq H(B,\ \bar{\tau})$，结合 [GPR24，习题 44。29] 与引理 7.16，我们得到

$$H(\bar{B},\bar{\tau})_{\bar{K}}\cong \bar{B}^{(+)}\cong \overline{(J_0)_K}\cong (\bar{J}_0)_{\bar{K}}.$$

比较 F-维数可知 $J_0=H(\mathscr{B})$。现在由 (8.3) 得到 $\mathfrak{po}_J=\mathfrak{po}_{J_0}\oplus\mathfrak{po}_B j$，从而得出 $J\cong J_0\oplus Bj=H(\mathscr{B})\oplus Bj=J(B,\ \bar{p},\ \bar{\mu})$，如所述。□

推论 8.4。对于任意三次约旦除代数 J 在 F上，以下条件恰有一个成立。

(a) $\bar{J}\cong E'^{(+)}$，其中 $E'/\bar{F}$ 为某个特征为 3且指数至多为 1的纯不可分域扩张。(b) J 是非分歧的。(c) J 是一个分歧第一 *Tits* 构造。

此外，在情形 *(c)* 中，存在定义在F 上的一个非分歧三次结合除代数 A 以及一个素元 $\pi\in\mathfrak{o}$，使得 $J\cong J(A,\pi)$。

证明。我们不妨设 J 是一个分歧的 Freudenthal 除 F代数，维数为 3^n, $1\le n\le 3$, 并须证明该推论的最后一个结论成立。由

定义， $\bar{J}$ 是 $\bar{F}$上的 Freudenthal 除代数，维数为 3^{n-1}。注意，作为三次 Jordan 代数， $\bar{J}$有 $n-1$ 个生成元；对于 $n=1$，这显然成立；对于 $n=3$，则由 Pet75 引理 9] 的推论可得。将这些生成元从 J 提升到 $\mathfrak{o}_J$，由 GPR24 习题 33.15] 以及基本等式 (7.3)，所得的量生成一个非分歧的 Freudenthal 除 F代数 $J_0 \subseteq J$，其维数为 3^{n-1}，剩余代数为 J。因此，(J, J_0) 是 GPR24 第 45.1], 节意义下的 F上的 Freudenthal 对；于是由 GPR24 定理 45.10], ，它含有 ′的 étale 元素。结合 GPR24 推论 44.17] 与 GPR25 引理 A4.3], ，可得 F上的结合含对合系统 $\mathscr{B} = (K, B, \tau)$，以及 $\mathscr{B}$的可容许标量 (p, μ)，使得在一个将 J_0 与 $H(\mathscr{B})$ 对应的同构下， $J \cong J(\mathscr{B}, p, \mu)$。这里， K 是 F [上二次 étale 的（GPR24 推论 46.11]），并且由于定理 8.2 (c2)，它不可能是一个域；否则， J将是非分歧的。综上， $K = F \times F$是 F上的分裂二次 étale ′， $B = A \times A^{\mathrm{op}}$是某个三次结合 F代数 A，而对于某个 $\kappa \in F^\times$， $J = J(A, \kappa)$ 是第一 Tits 构造（GPR24 推论 44.21]）。由于 $J_0 = H(\mathscr{B}) \cong A^{(+)}$，我们得出 A 是非分歧的。我们可以将 κ 乘以 GPR24 习题 42.22 (a)]中适当的可逆范数，假设 $0 \le \lambda(\kappa) \le 2$; 此时可以排除 $\lambda(\kappa) = 0$，即 $\kappa \in \mathfrak{o}^\times$，因为这将由例 7.15 (a) 推出 J是非分歧的。因此 $\lambda(\kappa) \in \{1, 2\}$。如有必要，将 A 替换为 A^{op}后，我们不妨设 $\lambda(\kappa) = 1$ [（GPR24 习题 42.22 (c)、(d)）], ，即 $\pi := \kappa$ 是 $\mathfrak{o}$的一个素元。□

推论 8.5. 若 J 是分歧的 *Freudenthal* 除 F-代数，则 J 的每个同位体也都是如此。

证明。 对于任意 $p \in J^\times$，由 [Pet73，命题 6.3 (b)]可知 $J^{(p)}$ 的分歧指数为 3，因此只需证明其剩余代数可分。为此，我们应用推论 8.4并将其表示为

$$J = J(A, \pi) = A \oplus Aj_1 \oplus Aj_2$$

第一 Tits 构造，其中 A 是非分歧三次结合除代数，$\pi \in \mathfrak{o}$ 是素元。显然可假设 $\lambda_J(p) \in \{0, 1, 2\}$，其中 $\lambda_J(p) = 0$ 蕴含 $p \in \mathfrak{o}_J^\times$，且 $J^{(p)} \cong \bar{J}^{(\bar{p})} \cong \bar{A}^{(+)(\bar{p})} \cong \bar{A}^{(+)}$ 可分。因此，必要时转到 A^{op} 后，可假设 $\lambda_J(p) = 1$ [GPR24，习题 42.22 (c)、(d)]。由 (2.1)、(2.7) 和 (2.12) 可推出 $U_{j_2} 1_J = \pi j_1$。根据 [GPR24，推论 31.23], ，因此 $J^{(j_1)} \cong J$。另一方面，令 $q := U_{j_1^{-1}} p$， [GPR24，定理 31.10] 蕴含我们有 $J^{(p)} \cong (J^{(j_1)})^q$ 且 $q \in \mathfrak{o}^\times_{J^{(j_1)}}$。由此归结为情形 $\lambda_J(p) = 0$，该情形此前已解决。□

推论 8.6. F 上的分歧 *Freudenthal* 除代数是齐次的。

证明。设 J 是 F 上的一个分歧 Freudenthal 除代数，其维数为 $3^n, 0 \le n \le$3。对于 $n = 0$, 1，无需证明。若 $n = 3$, J 是一个 Albert 代数，则由于根据推论 8.4， J 是第一 Tits 构造，故该结论在远为一般的情形下（定理 5.1）成立。于是我们只剩下 J 具有 9 维的情形。将 $J = H$ 写为 B, τ，其中某个中心单 F-代数 (B, τ) 的次数为 3，且带有酉对合，并令 $K :=$ Cent(B)，根据命题 3.6，我们必须证明 B 的所有 K/F-对合都是特殊的。设 τ' 是 B 的任意一个 K/F-对合。由 3.4，存在某个 $p \in J^\times$ 使得 $\tau' = \tau^p$，从而 $H(B, \tau') \cong J^{(p)}$。但根据推论 8.5， $J^{(p)}$ 是分歧的，因而根据推论 8.4，它是第一 Tits 构造。因此，由定理 3.7， τ' 是特殊的。□

接下来需要研究 9 维的非分歧 Freudenthal 除 F代数；维数为 1 的情形（即基域）是平凡的，维数为 3 的情形（即可分三次域扩张）属于普通赋值理论，而维数为 27 的情形（即 Albert

除代数）已在 [Pet75]中解决。与前文一样，齐性问题在我们的研究中至关重要。我们首先明确术语。

术语 8.7. 设 k 为任意域。仿照 [Pet75, §4], ，我们将带酉对合的次数 3 中心结合除代数 over k 定义为一对 (B,τ)，其中 B 是一个结合 k-代数，其在中心 K:=Cent(B) 上的次数为 3； k是 τ 的可分二次扩张域，而 K/k是 B上的第一类对合。将 k特化为我们的完备域 F后，若 B在 F上非分歧，则称 (B,τ) 非分歧。在这种情况下， $\mathbb{Z} = \lambda(F^\times) \subseteq \lambda_K(K^\times) \subseteq \lambda_B(B^\times)$，而 B在 F 上非分歧意味着扩张 K/F 的分歧指数为 1。此外，根据 [Pet73, Satz 5.2]， B 是 K上的次数 3 中心结合除代数。假设 $\bar{\tau}$ 在 K 上诱导恒等映射，将意味着 $\bar{\tau}$ 本身是 B上的第一类对合，这与 [Sch85, Chap. 8, Thm. 8.4], [GS06, Prop. 4.5.13]矛盾。因此 K/F 是非分歧的，并且 $(B,\bar{\tau})$ 是 F上的带酉对合的次数 3 中心结合除代数。由此可得 J:= $H(B,\tau)$ 是一个非分歧的 9 维 Freudnthal 除 F-代数，满足 $J = H(B,\bar{\tau})$ [Pet75, Prop. 2]。

定理 8.8。 如果 J 是域 F上的 *9* 维9 非分歧 *Freudenthal* 除代数，那么 J 是域 F上的 *9* 维 *Freudenthal* 除代数9 。反之，设 J' 是域 F上的一个*Freudenthal* 除代数。则存在一个域 F上的 *9* 维9 非分歧 *Freudenthal* 除代数 J，在同构意义下唯一，使得 $J \cong J'$。

证明。第一部分直接由定义得出。对于第二部分，记作$J' = H(B',\tau')$，其中 (B',τ') 是一个次数 3 的中心单结合代数，并且在域 F上带有酉对合。我们可以假设 K' := Cent(B') 是一个域，从而迫使 (B',τ') 成为域 F上的一个带有酉对合的次数 3 中心结合除代数。应用 [Pet75，定理 1], ，我们得到一个域 F上的带有酉对合的次数 3 非分歧中心结合除代数 (B,τ)，在同构意义下唯一，使得 $(B,\bar{\tau}) \cong (B',\tau')$。因此，由 8.7， J:= $H(B,\tau)$ 是一个满足 $J \cong J'$ 的域 F 上的 9 维非分歧 Freudenthal 除代数。 J 的唯一性源于 (B,τ) 的唯一性。□

推论 8.9. 若 (B,τ) 是 F 上带酉对合的非分歧结合除代数，次数为3，则 τ 是特殊的，当且仅当 $\bar{\tau}$ 是特殊的。

证明. J:= $H(B,\tau)$ 是一个维数为 9 的非分歧 Freudenthal 除代数，其中 8.7 蕴含 $J = H(B,\bar{\tau})$。先假设 $\bar{\tau}$ 是特殊的。于是 J 是一个第一 Tits 构造（定理 3.7），所以 $J = J(E',\mu')$，其中 E'/F 是某个可分三次域扩张， $\mu' \in F^\times \setminus N_{E'}(E'^\times)$ 是某个 $\mu' \in F^\times \setminus N_{E'}$。将 E' 提升为一个非分歧三次扩张 E/F [（Ser68, III, 定理 2] ），并将 μ' 提升为一个标量 $\mu \in \mathfrak{o}^\times$，显然有 $\mu \notin N_E(E^\times)$；根据例 7.15，第一 Tits 构造 J':= $J(E,\mu)$ 是一个维数为 9、具有 $J' = J$ 的非分歧 Freudenthal除代数。因此定理 3.7 蕴含 $J \cong J'$ 是一个第一 Tits 构造，从而对合 τ 是特殊的（定理 3.7）。反过来，假设 τ 是特殊的。结合 3.4 与 [Pet04, 定理 2.10], ，我们可找到一个元素 $p \in \mathfrak{o}_J^\times$，使得 $\tau^p = \bar{\tau}^{\bar{p}}$ 是 $\bar{B}$ 的一个特殊对合。因此，根据刚才证明的结论，τ^p 是 B 的一个特殊对合。但特殊对合在本质上唯一，故可得 $(B,\tau) \cong (B,\tau^p)$，从而 $(\bar{B},\bar{\tau}) \cong (\bar{B},\bar{\tau}^{\bar{p}})$。因此 $\bar{\tau}$ 是特殊的。□

结合推论8.9 与命题3.6，最终得到

推论 8.10. 维数为9 的非分歧 *Freudenthal* 除 F-代数 J 是齐次的，当且仅当 J 是齐次的。□

关于 Albert 除代数的这一结果的类似结论可见于 [Pet75，定理 6]。

9. 结语：Clifford 型 Jordan代数

在最后一节中，我们描述具有齐性的 Clifford 型约旦代数。我们首先回顾基本定义。

9.1. **尖点二次模的 Jordan 代数**。设 (V, q, e) 是定义在 k 上的尖点二次模，其中 V 是有限维 k-向量空间，$q\colon V \to k$ 是一个二次型，而 $e \in V$ 是一个特殊的元素，即基点，满足 $q(e) = 1$。V 上的共轭定义为 $x \mapsto \bar{x} := q(e, x)e - x$。于是，带有单位元 e 且其 U-算子定义为下式的 V

$$U_x(y) := q(x, \bar{y})x - q(x)\bar{y},$$

是 k 上的 Jordan代数，记为 $J := J(V, q, e)$，称为与 (V, q, e) 相关的 Jordan代数。若 $\dim_k(V) > 1$，则 J 的一般范数等于 q；由 [GPR24, Exc. 31.34 (c)] 可知，J 的结构群是群 $GO(q) = \mathrm{Sim}(q)$，即 q 的相似变换群。与尖点二次模相关的 Jordan代数称为克利福德型约旦代数。

9.2. **圆二次型**。回顾 [EKM08，第 52] 页，二次型 q 称为 圆的，如果 $D(q) = G(q)$。这里 $D(q)$ 是 q 的非零值集合，而 $G(q)$ 表示 $k^\times$ 中 q的相似子群。例如，Pfister 型和双曲型都是圆的。

现在我们证明

定理 9.1。设(V, q, e) 是 k 上的尖点二次模，且 $J := J(V, q, e)$ 是相应的 *Jordan*代数。如果 J 是齐次的，那么 q 是圆的。反之，如果 q 是圆的且正则，那么 J 是齐次的。

证明。假设 J 是齐次的。由于 $1 = q(e) \in D(q)$，我们有 $G(q) \subseteq D(q)$[EKM08，引理 9.1]。反之，设 $\alpha \in D(q)$。那么，对于某个 $v \in V$，有 $\alpha = q(v)$。由于 $\mathrm{Str}(J)$ 在 J的可逆元上具有传递作用，存在 $\psi \in \mathrm{Str}(J)$，使得$\psi(v) = e$。设 $\nu(\psi) \in k^\times$ 是 ψ的相似因子。那么，取范数可得

$$\nu(\psi)\alpha = \nu(\psi)q(v) = q(\psi(v)) = q(e) = 1,$$

因此 $\alpha = \nu(\psi)^{-1} = \nu(\psi^{-1}) \in G(q)$。由此可得 $G(q) = D(q)$，且 q 是圆的。

反过来，假设 q 是圆的且正则，因此 $D(q) = G(q)$，并令 $v \in V$ 满足 $\alpha := q(v) \neq 0$。于是我们有 $\psi \in G(q)$，且 $\nu(\psi) = \alpha$。因此 $q(\psi(e)) = \alpha$。根据Witt延拓定理 [EKM08，定理 8.3]，，存在一个等距变换 $\phi\colon (V, q) \to (V, q)$，满足$\phi(v) = \psi(e)$。因此 $\theta := \psi^{-1}\phi \in \mathrm{Str}(J)$ 满足 $\theta(v) = e$。由此，$\mathrm{Str}(J)$ 在 J 的可逆元集合上传递，且 J 是齐次的。□

由于Pfister二次型不仅是圆的，而且在基域扩张下保持不变，以下结论显而易见。

推论9.2。设 $q\colon V \to k$ 是一个 *Pfister* 二次型，并假设 $e \in V$ 满足$q(e) = 1$。那么 *Jordan* 代数 $J(V, q, e)$ 是严格齐次的。□

参考文献

[ACP21] S. Alsaody、V. Chernousov 和 A. Pianzola，《关于 $E_{7,1}^{78}$ 和 $E_{8,2}^{78}$ 的蒂茨-魏斯猜想与 Kneser-Tits 猜想》（附 R. M. Weiss 的附录），Forum Math. Sigma 9（2021年），论文编号 e 75, 25, 4345011 2 附有 R. M. Weiss 的附录。MR Alb [38] A.A. Albert，《任意域上的对称矩阵与交错矩阵。I》，《美国数学会汇刊》43（1938年），第3期，386–436。MR 1501952 5[Alb65] ，《关于例外约旦除代数》，Pacific J. Math. 15（1965年），377–404。MR 182647 2[Efr06] I. Efrat，《赋值、序与 Milnor K理论》，数学调查与专著，第 124, 2006 2215492 19 卷，美国数学学会，普罗 [08] 维登斯，罗德岛州，。MR EKM R. Elman、N. Karpenko 和 A. Merkurjev，《二次型的代数与几何理论》，Coll. Publ.，第56卷，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2008年。MR 2427530 3, 12, 15, 28[Gar09] S. Garibaldi，《上同调不变量：例外群与自旋群》，美国数学会回忆录，第937号，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2009年，附有 Detlev W. Hoffmann 的附录。10[GMS03] S. Garibaldi、A. Merkurjev 和 J-P. Serre，《伽罗瓦上同调中的上同调不变量》，大学讲座丛书，第 28, 2003 10 卷，美国数学会，。GPR S. Garibaldi、 [24] H.P. Petersson 和 M.L. Racine，《交换环上的 Albert 代数——约旦系统的最后疆域》，新数学专著丛书，第48卷，剑桥大学出版社，剑桥，2024年。MR 4806163 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28[GPR25] S. Garibaldi、H.P. Petersson 和 M.L. Racine，《交换环上的 Albert 代数》一书习题解答，2025年。6, 7, 8, 26[GS06] P. Gille 和 T. Szamuely，《中心单代数与伽罗瓦上同调》，剑桥高等数学研究丛书，第 101, 2006 27 卷，剑桥，。Hoo N. [18] Hooda，《代数群中秩为-的环面嵌入》，J. Pure Appl. Algebra 222 10，3043 2018 3057 3795634 13（），第 – 期。MR [Jac68] N. Jacobson，《Jordan 代数的结构与表示》，美国数学会专题讨论会出版物，第XXXIX卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1968年。MR 0251099 6, 7[Jac76] ，《带对合的结合代数之对称元素的 Jordan 代数的结构群与李代数》，Advances in Math. **20** 1976 2, 106 150 407103 5, 9 （），第 – 期。 [98] MR KMRT M.-A. Knus、A. Merkurjev、M. Rost 和 J.-P. Tignol，《对合之书》，美国数学会专题讨论会出版物，第44卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998, 1632779 3, 9, 10, 12, 24 附有 J. Tits 撰写的法文序言。 [69] MR Kne M. Kneser，《经典群的伽罗瓦上同调讲义》，塔塔基础研究院数学讲座丛书，第47号，塔塔基础研究院，孟买，1969年，附有 T. A. Springer 的附录，笔记由 P. Jothilingam 整理。MR [70] McC K. McCrimmon，《弗罗伊登塔尔-施普林格-蒂茨构造再探》，《美国数学会汇刊》148（1970年），293–314。MR MR0271181（42 #6064）6, 7[Pet73] H.P. Petersson，《Jordan 除代数与赋值》，Math. Ann. 202（1973年），215–243。MR 0347922 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27[Pet74] ，《离散赋值域上的合成代数》，《代数学杂志》29（1974年），414–426。MR 364380 17[Pet75] ，《离散赋值域上的例外约旦除代数》，J. Reine Angew. Math. 274/275（1975年），1–20。MR 379620 3, 21, 24, 25, 26, 27, 28[Pet99] ，《一般矩阵的 Albert 代数》，Comm. Algebra 27（1999年），第8期，3703–3717。MR 1699633 11[Pet04] ，《任意特征域上三次 Jordan 代数的结构定理》，Comm. Algebra **32** 2004 3, 1019 1049 2063796 9, 10, 12, 13, 15, 27 （），第 – 期。 [19] MR Pet《Albert 代数综述》，Transform. Groups（），第 – 期。MR 3916096 10[PR84a] H.P. Petersson 和 M.L. Racine，《例外单约旦代数的三次子域》，Proc. Amer. Math. Soc. 91（1984年），31–36。MR 735558 13[PR84b] ，《例外约旦除代数的施普林格型与第一 Tits 构造》，Manuscripta Math. 45（1984年），第3期，249–272。MR 734841 2, 9, 11, 12, 13, 17

[PR86] ———, 由蒂茨过程产生的代数分类，《代数学杂志》98（1986），第 1 期，244–279。MR 87h:17038b 11[PR95] ———, 关于阿尔伯特代数的模 2 不变量，《代数学杂志》174（1995），第 3 期，1049–1072。MR 1337184 9[PR96a] ———, 阿尔伯特代数的塞尔-罗斯特不变量的初等方法，《数学探索》（新辑） **7** 1996 3, 343 365 99 17045 10 ( )，第 – 期。MR j: [96]
PR b 阿尔伯特代数的约化模型，《数学杂志》223（1996），第 3 期，367–385。MR 734841 7[PR 97] ———, 特征三下阿尔伯特代数的塞尔-罗斯特不变量，《数学探索》（新辑）8（1997），第 4 期，543–548。10[Rog90] J.D. Rogawski，三元酉群的自守表示，《数学年刊研究》，第 123, 1990 1081540 11 卷，普 [85]
林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，。MR Sch W. Scharlau，二次型与厄米型，《数学科学基础丛书》[《数学科学基础》]，第 270 卷，施普林格出版社，柏林，1985。MR 770063 9, 27[Ser68] J-P. Serre，《局部域》，南锡大学出版物´，第 VIII 号，埃尔曼出版社，巴黎，1968年，第二`版´。MR 354618 27[Ser95] J-P. Serre，《伽罗瓦上同调：进展与问题》，《Astérisque》227（1995），229–257，《布尔巴基研讨会》，第`卷/第`讲。Spr T.A. Springer，离散赋值域上的二次型。I. 定型的等价类，《数学探索》´( )，– 荷兰皇家艺术与科学学院《学报》A 辑。MR Tha M. Thakur，阿尔伯特代数的自同构与蒂茨-魏斯猜想 II，《美国数学会汇刊》372（2019年），第 7 期，4701–4728。MR 4009439 11 ´ 1993 94, 783 10 Tha [55]
17 1955 352 362, **58** 70664 17 [19]
阿尔伯特代数的循环性问题，《以色列数学杂志》241（2021年），第 1 期，139–145。MR 4242148 2, 10[Tha21] ———, 阿尔伯特代数与蒂茨-魏斯猜想，《美国数学会汇刊》375（2022），第 9 期，6075–6091。MR 4474885 2[Tit22] ———, J. Tits，代数半单群的分类，《代数群与不连续子群》（《纯粹数学专题讨论会》、博尔德、科罗拉多州、1965年），美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1966年，第 33–62 页。MR 224710 13

PETERSSON：数学与信息学学院，哈根远程大学，D-58084 哈根，德国
电子邮箱地址：holger.petersson@fernuni-hagen.de

THAKUR：印度统计学院，统计与数学部，迈索尔路第 8 英里处，班加罗尔 560059，印度电子邮件地址：maneesh.thakur@gmail.com