arXiv:2603.17660v1 [math.AT] 18 Mar 2026

某些格拉斯曼流形上斯蒂费尔–惠特尼类的高度及零因子杯长

MILICA JOVANOVI´C、VUK OVASKAINEN、BRANISLAV I. PRVULOVI´C 和 ANTONIJE SUBOTI´C

Abstract. 我们计算了在定向格拉斯曼流形 $G_{n,4} \cong SO(n)/(SO(4) \times SO(n-4))$ 上典范向量丛的斯蒂费尔–惠特尼类的高度，其中 $n \in \{2^t-2, 2^t-1, 2^t, 2^t+1\}$, $t \geqslant 4$。通过对 $G_{n,4}$ 的模 2 上同调进行一些额外计算，并利用拓扑复杂度与零因子杯长之间众所周知的联系，我们得到了这些格拉斯曼流形的拓扑复杂度下界。我们还将 Rusin 的近期结果推广到 $n = 2^t+1$, $t \geqslant 3$ 的情形；Rusin 计算了当 $n \in \{2^t-2, 2^t-1, 2^t\}$ 时 $G_{n,4}$ 的模 2 杯长。

1. Introduction

拓扑空间的一个经典不变量是 Lusternik–Schnirelmann 范畴。对于一个（合理的）空间 X，它定义为满足以下条件的最小数目 d：存在一个由 d 个开子集组成的 X 的开覆盖，且每个开子集都可在 X 中收缩。一个等价的定义指出，路径连通空间 X 的 Lusternik–Schnirelmann 范畴是路径空间纤维化 $p\colon PX \to X$ 的（非约化）Schwarz 属，其中 $PX = \{\omega \in X^I \mid \omega(0) = x_0\}$ 是 X 中以基点 $x_0 \in X$ 为起点的路径空间，而 $p(\omega) = \omega(1)$。我们将用 $\mathrm{cat}(X)$ 表示 X 的 Lusternik–Schnirelmann 范畴。

若取整个路径空间 X^I 以及由 $\pi(\omega) = (\omega(0)\ \omega(1))$ 给出的纤维化 $\pi\colon X^I \to X \times X$，则该纤维化的 Schwarz 属是另一个不变量，称为 X 的拓扑复杂度，记作 $\mathrm{TC}(X)$，由 Farber 于 [6] 年引入。

研究这些不变量最常用的方法之一是上同调方法，它通过杯积给出这些不变量的下界。$\mathrm{cat}(X)$的一个下界是 R系数下 X 的杯长（对任意交换环 R），记为 $\mathrm{cl}_R(X)$；而 $\mathrm{TC}(X)$的一个下界是 R系数下 X的零因子杯长，记为 $\mathrm{zcl}_R(X)$：

$$\mathrm{cl}_R(X) < \mathrm{cat}(X), \tag{1.1}$$

$$\mathrm{zcl}_R(X) < \mathrm{TC}(X). \tag{1.2}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 55R40、55M30；次分类号 13P10。
Key words and phrases. 格拉斯曼流形、斯蒂费尔–惠特尼类、拓扑复杂度、杯长。作者部分得到塞尔维亚共和国科学、技术发展与创新部的资助，项目编号为 451-03-33/2026-03/200104。

$\widetilde{\ }$定向 k维子空间 $\mathbb{R}^n$ 的格拉斯曼流形$G_{n,k}$ （即所谓的定向格拉斯曼流形）是一个维数为 $k(n-k)$的闭流形。关于不变量 cat($G_{n,k}$) 和 TC($G_{n,k}$)， $k=1$ 这一情形已十分明确，因为$\widetilde{G}_{n,1}$ 就是球面 S^{n-1}，因此 cat($\widetilde{G}_{n,1}$) $=2$；而当 n 为偶数时，TC($\widetilde{G}_{n,1}$) $=2$$\widetilde{\ }$，当 n 为奇数时，TC($G_{n,1}$) $=3$ （根据 [6, 定理 8]）。 $k=2$$\widetilde{\ }$这一情形也没有什么值得探讨之处，因为$G_{n,2}$ 是一个闭的、单连通的辛流形$\widetilde{\ }$（辛结构源于将$G_{n,2}$ 识别为复二次曲面 $Q_{n-2}=\{[z_0,\ldots,z_{n-1}]\in\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}\mid z_0^2+\cdots+z_{n-1}^2=0\}$），因此，Lusternik–Schnirelmann 范畴和拓扑复杂度都已知：cat($G_{n,2}$) $=n-1$，TC($G_{n,2}$) $=2n-3$ （例如参见 [9, 命题 2.3]）。

对于 $k\geqslant 3$ ，这些不变量尚不为人所知。不过，近年来在利用 (1.1) 和 (1.2) 计算上同调下界方面已有一些进展，且大多采用模 2 系数（即系数取自二元域$\widetilde{\ }\mathbb{F}_2$）。在 $k=3$ 的情形下， $\mathbb{F}_2$杯长 $G_{n,\ 3}$ 已在多篇论文中针对不同的 n 值进行研究和计算（例如 [7, 8]）；在 [3] 中，则已对所有 $n\geqslant 6$ 进行了计算$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$（只需研究 $G_{n,\ k}$ 对于 $n\geqslant 2k$ 的情形，因为 $G_{n,\ n-k}\cong G_{n,\ k}$）。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }\mathbb{F}_2$零因子杯长 $G_{n,\ 3}$ 已在 [4], 中得到研究，其中 zcl$_{\mathbb{F}_2}$($G_{n,\ 3}$) 要么被精确确定，要么被界定在相差 1 的上下界之间。

在 $G_{n,\ 4}$ 的情形下，文献中给出命题 6.1 [10, 命题 6.1]，，而 Rusin 在一篇近期论文中计算了 $n\in\{2^t-2,2^t-1,2^t\}(t\geqslant 4)$ 的 cl$_{\mathbb{F}_2}$($G_{n,\ 4}$) 的精确值 [11, 定理 1.1]。

本文将 Rusin 的结果推广到 $n=2^t+1$ ($t\geqslant 3$) 的情形，方法是$\widetilde{\ }$在定理 4.1 中计算 cl$_{\mathbb{F}_2}$($G_{2^t+1,\ 4}$)；并在推论 5.7 中给出 zcl$_{\mathbb{F}_2}$($G_{n,\ 4}$) 的下界$\widetilde{\ }$，结合不等式 (1.2)，可得这些流形的拓扑复杂度下界。本文还探讨了另一个与杯长和零因子杯长密切相关的问题：典范向量丛的斯蒂费尔–惠特尼类在 $\widetilde{\ }G_{n,\ 4}$ 上的高度，并针对 $n\in\{2^t-2,2^t-1,2^t,2^t+1\}$ 完全确定了这些高度（定理 3.1 和定理 3.3 ）。

我们计算的主要工具是与 $G_{n,4}$ 的模 2 上同调密切相关的理想的 Gr¨obner 基。这些基在 $n\in\{2^t-2,2^t-1,2^t\}$ 这些情形下由 Rusin 在 [11] 中求得。 $n=2^t+1$ 对应的理想实际上与 $n=2^t$ 的理想相同，因此，对于我们所考虑的每种情形，都有一个 Gr¨obner 基。

本文组织如下。第 2 节介绍我们计算所需的背景知识。首先，我们定义并讨论本文涉及的主要概念——上同调类的高度、杯长和零因子杯长；然后简要回顾域上的 Gr¨obner 基理论；最后汇总有关定向格拉斯曼流形 $G_{n,k}$ 的模 2 上同调的一些基本事实。第 3、4 和 5 节分别证明我们的主要结果，内容依次涉及斯蒂费尔–惠特尼类的高度、 $\mathbb{F}_2$-杯长和 $\mathbb{F}_2$-零因子杯长。

2. 预备知识

2.1. **杯长、零因子杯长以及代数元素的高度**。设 R 是一个含单位元的交换环，且 $A=\bigoplus_{i=0}^{\infty}A^i$ 是一个分次

R-代数，其单位元为 $1 \in A^0$。若元素 $a \in A$ 属于子模 A^i，则称 a 为次数 i的齐次元素，并记作 $|a| = i$。

若 $a \in A$ 是正次数齐次元素，则定义 a 的高度 为集合 $\{m \mid a^m \neq 0\}$ 的上确界，记作 ht(a)。

代数 A 的杯长定义为所有满足以下条件的自然数 m 构成的集合的上确界，记作 cl(A)：存在正次数齐次元素 a_1、 a_2、.....、 $a_m \in A$，使得 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_m \neq 0$。更直观地说，cl($A$) 是 A 中正次数元素的最长非平凡乘积的长度。

显然，对于每个 $a \in A$ （它是正次数齐次元素），都有 ht(a) $\leqslant$ cl(A)。

张量积 $A \otimes A = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \left(\bigoplus_{i=0}^{r} A^i \otimes A^{r-i} \right)$ 也成为一个分次 R 代数，其乘积定义在简单张量（由齐次元素 a、 b、 c、 $d \in A$ 构成）上如下：

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (-1)^{|b| \cdot |c|} (a \cdot c) \otimes (b \cdot d).$$

此外，如果代数 A 是交换的（在分次意义下，即对于任意两个齐次元素 $b, c \in A$, 都有 $b \cdot c = (-1)^{|b| \cdot |c|} c \cdot b$），那么它的乘法映射 $A \otimes A \xrightarrow{\cdot} A$ 是一个代数同态。在这种情况下，映射 $A \otimes A \xrightarrow{\cdot} A$的核是 $A \otimes A$中的一个理想，其元素称为零因子。例如，若 $a \in A$是任意元素，那么

$$z(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$$

它就是一个零因子。注意，如果 a 是齐次的，那么 z(a)也如此，并且 $|z(a)| = |a|$。

零因子杯长 of A，记作 zcl(A)，是满足以下条件的所有自然数 m 构成集合的上确界：存在正次数的齐次零因子 $z_1, z_2, \ldots, z_m \in \ker \left(A \otimes A \xrightarrow{\cdot} A \right)$，使得 $z_1 \cdot z_2 \cdots z_m \neq 0$ in $A \otimes A$。因此，可以说 zcl(A) 是 ker $\left(A \otimes A \xrightarrow{\cdot} A \right)$ 的杯长，前提是将这个核视为一个分次代数（尽管它没有单位元）。

现在，若 X 是一个拓扑空间，那么对于任意交换环（含单位元）R，上同调类的杯积将 $H^*(X; R) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(X; R)$ 变成一个分次交换的 R-代数，并且我们按预期定义 R-杯长 和 R-零因子杯长 X：

$$\mathrm{cl}_R(X) := \mathrm{cl}\left(H^*(X; R)\right) \quad \text{and} \quad \mathrm{zcl}_R(X) := \mathrm{zcl}\left(H^*(X; R)\right).$$

2.2. Gr¨obner 基。 Gr¨obner 基的主要用途是判断给定的多项式是否属于（多项式环中的）给定理想，即判断该多项式在相应商环中的陪集是否为零。下面回顾一些关于域上 Gr¨obner 基的基础知识。关于该理论的详细介绍，可参阅 [1, 第 5] 章。为简化讨论，我们仅针对域 $\mathbb{F}_2$ 介绍这些内容，因为本文只会用到这一情形。

令 $\mathbb{F}_2[X]$ 为多项式环，其中 X 表示 （有限）变量集。用 M 表示 $\mathbb{F}_2[X]$ 中所有单项式构成的集合。固定一个 单项式序 $\preceq$，即 M 上的一个良序，并满足对于所有 m_1, m_2, $m_3 \in M$, $m_1 \preceq m_2$，都有 $m_1 m_3 \preceq m_2 m_3$。

对于多项式 $f = \sum_{i=1}^{r} m_i \in \mathbb{F}_2[X]$，其中 $m_i \in M$ 是互不相同的单项-式，定义 $M(f) = \{m_1, \ldots, m_r\}$（约定 $M(0) = \emptyset$）。首项

单项式 对于非零多项式 f 定义为 $\mathrm{LM}(f) \coloneqq \max M(f)$，其中最大值是按照序关系 $\preceq$ 取得的。

现在设 $F \subset \mathbb{F}_2[X]$ 为一个有限的非零多项式集合，并用 $\mathrm{LM}(F) = \{\mathrm{LM}(f) \mid f \in F\} \subseteq M$ 表示 F 中多项式的首项单项式集合。

定义 2.1。对于两个多项式 $p, q \in \mathbb{F}_2[X]$，我们称 p 可约化为 q模 F，并记作 $p \xrightarrow{F} q$，如果 $p = q = 0$，或者存在一个有限的多项式序列 $p = p_0, p_1, \ldots, p_s = q$，满足以下性质：对于每个 $j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$，都存在一个多项式 $f_j \in F$，使得 $\mathrm{LM}(f_j) \mid \mathrm{LM}(p_j)$，也就是说，对某个 $m \in M$，有 $\mathrm{LM}(p_j) = m \cdot \mathrm{LM}(f_j)$，并且

$$p_{j+1} = p_j - m \cdot f_j.$$

如果 I 是 $\mathbb{F}_2[X]$ 中由 F生成的理想，注意到 $p \xrightarrow{F} q$ 蕴含 $p - q \in I$。因此，如果 $p \xrightarrow{F} 0$，那么 $p \in I$。然而，反向蕴含一般并不成立。理想的格罗布纳基是这样一个生成集：对于它，反向蕴含成立。

定义 2.2。设 $F \subset \mathbb{F}_2[X]$ 是由非零多项式组成的有限集合，I 是 $\mathbb{F}_2[X]$ 中由 F生成的理想。若每个 $p \in I$ 模 F都能化简为零，则称 F 是关于 $\preceq$的 I 格¨罗布纳基 。

如果 $\overline{p} \xrightarrow{F} p$，并且 p 模 F无法进一步化简，也就是说，如果 $p = 0$，或者 $\mathrm{LM}(p)$ 不能被 $\mathrm{LM}(F)$中的任何单项式整除，那么我们称 p 是模 F的标准形。定理指出，如果 F 是格罗布纳基（即由 F生成的理想的格罗布纳基），那么每个多项式都有唯一的标准形，因此我们可以谈论多项式模 F的 标准形。由此得到下面的定理，它阐明了格罗布纳基上述的主要用途。

定理 2.3. 设 F 是理想 I 的一个 *Gr¨obner* 基（相对于给定的单项式序）。对于任意多项式 $p \in \mathbb{F}_2[X]$，用 p 表示其模 F 的标准形。则有以下等价关系：

$$p \in I \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{p} = 0.$$

该定理的一个显然推论是：若非零多项式 p 不能模 F 约化（即若 $p = p$），则 $p \notin I$。

还要注意，若 $\overline{p}$ 是 p 模 F 的标准形（因此 p 不能模 F 约化），那么标准形的唯一性意味着，$M(p)$ 中的单项式都不能被 $\mathrm{LM}(F)$ 中的任何单项式整除。由于 $p - p \in I$，这意味着，不能被 $\mathrm{LM}(F)$ 中任何元素整除的单项式所对应的陪集生成商向量空间 $\mathbb{F}_2[X]/I$。此外，标准形的唯一性意味着这些陪集线性无关。因此，以下定理成立。

定理 2.4。如果 F 是理想 $I \trianglelefteq \mathbb{F}_2[X]$ 的 *Gr¨obner* 基（相对于给定的单项式序），那么集合

$$\left\{ m + I \;\middle|\; m \in M,\ (\forall f \in F)\ \mathrm{LM}(f) \nmid m \right\}$$

是 $\mathbb{F}_2[X]/I$ 的向量空间基。

~2.3. **上同调代数的背景** $H^*(G_{n,\ k})$。我们将始终使用 $\mathbb{F}_2$ 系数，因此在本文其余部分中，我们将用 $H^*(X)$ 表示 $H^*(X;\mathbb{F}_2)$，用 $\mathrm{cl}(X)$ 表示 $\mathrm{cl}_{\mathbb{F}_2}(X)$，并用 $\mathrm{zcl}(X)$ 表示 $\mathrm{zcl}_{\mathbb{F}_2}(X)$。

设 $k \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 2k$ 为整数，$\widetilde{\gamma}_n$和 k 为定向格拉斯曼流形$G_{n,k}$上的（k维）典范~向量丛。由于该流形是单连通的，第一个斯蒂费尔–惠特尼类 $w_1(\widetilde{\gamma}_{n,k}) \in H^1(\widetilde{G}_{n,k})$是平凡的。对于 $2 \leqslant i \leqslant k$，我们将斯蒂费尔–惠特尼类 $w_i(\widetilde{\gamma}_{n,k}) \in H^i(\widetilde{G}_{n,k})$记为 $\widetilde{w}_i$。~设 $W_{n,k}$ 为由这些类 $\widetilde{w}_i$, $2 \leqslant i \leqslant k$生成的 $H^*(G_{n,k})$的子代数。众所周知（例如参见 [5, 第 197]页），$W_{n,k}$ 实际上是由万有覆盖 $p : G_{n,k} \to G_{n,k}$诱导的映射~p^* : $H^*(G_{n,k}) \to H^*(G_{n,k})$的像（其中 $G_{n,k}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中无定向 k维子空间的格拉斯曼流形，而 p“遗忘”了定向），并且存在一个分次代数同构

$$W_{n,k} \cong \frac{\mathbb{F}_2[w_2, \dots, w_k]}{I_{n,k}}, \tag{2.1}$$

其中，$I_{n,\ k}$是由多项式 $g_{n-k+1}^{(k)}$、……、$g_n^{(k)}$生成的理想，这些多项式由以下关系定义：

$$(1 + w_2 + \cdots + w_k)(g_0^{(k)} + g_1^{(k)} + g_2^{(k)} + \cdots) = 1. \tag{2.2}$$

通过同构 (2.1)，斯蒂费尔–惠特尼类 $\widetilde{w}_i \in W_{n,\ k}$ 映射到变量 w_i 的陪集，$2 \leqslant i \leqslant k$ （约定 w_i 的次数为 i）。因此，对于任意多项式 $f = f(w_2, \dots, w_k) \in \mathbb{F}_2[w_2, \dots, w_k]$，我们有以下等价关系：

$$f(w_2, \dots, w_k) \in I_{n,k} \quad \Longleftrightarrow \quad f(\widetilde{w}_2, \dots, \widetilde{w}_k) = 0 \text{ in } W_{n,k} \subset H^*(\widetilde{G}_{n,k}),$$

本文将始终使用这一结论。

由 (2.2) 可直接得到以下两个关系：

$$g_r^{(k)} = \sum_{2a_2 + \cdots + ka_k = r} \binom{a_2 + \cdots + a_k}{a_2} \cdots \binom{a_{k-1} + a_k}{a_{k-1}} w_2^{a_2} \cdots w_k^{a_k}, \quad r \geqslant 0 \tag{2.3}$$

（求和遍历所有满足 $2a_2 + \cdots + ka_k = r$ 的非负整数 $(k-1)$-元组 $(a_2, \dots, a_k)$）；

$$g_r^{(k)} = w_2 g_{r-2}^{(k)} + \cdots + w_k g_{r-k}^{(k)}, \quad r \geqslant k. \tag{2.4}$$

此外，如果我们对每个 $r \in \{-1, -2, \dots, -k+1\}$ 定义 $g_r^{(k)} = 0$，不难验证，最后一个方程对所有整数 $r \geqslant 1$ 都成立。进一步地，利用关于 s 的归纳法，我们得到关系 (2.4) 的以下推广形式（参见例如 [2, (2.8)]）：

$$g_r^{(k)} = w_2^{2^s} g_{r-2\cdot 2^s}^{(k)} + \cdots + w_k^{2^s} g_{r-k2^s}^{(k)} = \sum_{j=2}^{k} w_j^{2^s} g_{r-j2^s}^{(k)}, \ r \geqslant 1 + k(2^s - 1), \ s \geqslant 0. \tag{2.5}$$

(2.4) 的另一个推论是，不仅 $g_{n-k+1}^{(k)}, \dots, g_n^{(k)}$，所有满足 $r \geqslant n-k+1$ 的多项式 $g_r^{(k)}$ 也都属于 $I_{n,k}$：

$$g_r^{(k)} \in I_{n,k} \quad \text{for all } r \geqslant n-k+1. \tag{2.6}$$

特别是，生成 $I_{n+1,k}=(g^{(k)}_{n-k+2},\dots,g^{(k)}_{n+1})$ 的多项式属于$I_{n,k}$，因此，理想序列 $I_{n,k}$ 随 n 递减：

$$I_{n,k}\supseteq I_{n+1,k}\quad \text{for all } k\geqslant 2 \text{ and all } n\geqslant 2k. \tag{2.7}$$

关于多项式 $g^{(k)}_r$的一个有用事实在 [8, 引理 2.3(ii)]中得到了证明：对于$k\in\{3,4\}$以及所有 $t\geqslant 2$

$$g^{(k)}_{2^t-3}=0. \tag{2.8}$$

该方程连同 (2.4) 推出 $g^{(4)}_{2^t+1}=w_2g^{(4)}_{2^t-1}+w_3g^{(4)}_{2^t-2}$，因此

$$I_{2^t+1,4}=\left(g^{(4)}_{2^t-2},g^{(4)}_{2^t-1},g^{(4)}_{2^t},g^{(4)}_{2^t+1}\right)=\left(g^{(4)}_{2^t-2},g^{(4)}_{2^t-1},g^{(4)}_{2^t}\right)=I_{2^t,4}. \tag{2.9}$$

由 (2.1) 我们现在得到分次代数的同构

$$W_{2^t,4}\cong W_{2^t+1,4}, \tag{2.10}$$

通过该同构，斯蒂费尔–惠特尼类 $\widetilde{w}_i\in H^i(\widetilde{G}_{2^t,\,4})$ 与斯蒂费尔–惠特尼类 $\widetilde{w}_i\in H^i(\widetilde{G}_{2^t+1,\,4})$ 相对应，$i=2$，3，4。

类似地，利用 (2.4) 和 (2.8) 可以验证

$$I_{2^t,3}=\left(g^{(3)}_{2^t-2},g^{(3)}_{2^t-1},g^{(3)}_{2^t}\right)=\left(g^{(3)}_{2^t-2},g^{(3)}_{2^t-1}\right)=I_{2^t-1,3} \tag{2.11}$$

（参见 [3, 注 3.16]）。

另一个有用的事实已在 [2, 引理 4.6] 中证明：变量 w_4 不会出现在 $g^{(4)}_{2^t-3+2^i}$ 中，对任意 $i\in\{0,1,\dots,t-1\}$均如此。另一方面，由 (2.3) 可显然看出，多项式 $g^{(3)}_r$是 $g^{(4)}_r$模 w_4 的约化。由此可得

$$g^{(4)}_{2^t-3+2^i}=g^{(3)}_{2^t-3+2^i}\quad \text{for all } i\in\{0,1,\dots,t-1\}. \tag{2.12}$$

一般而言，理想 $I_{n,k}\trianglelefteq\mathbb{F}_2[w_2,\dots,w_k]\subset\mathbb{F}_2[w_2,\dots,w_k,w_{k+1}]$ 不一定是 $I_{n,k+1}\trianglelefteq\mathbb{F}_2[w_2,\dots,w_k,w_{k+1}]$的子集。不过，当 $k=3$和n 为 2 的幂时，确实如此。更准确地说，有以下引理。

引理 2.5。对于所有 $t\geqslant 3$，都有 $I_{2^t,\,3}=I_{2^t,\,4}\cap\mathbb{F}_2[w_2,w_3]$。

证明。我们已经知道（见（2.9）和（2.11））：

$$I_{2^t,3}=\left(g^{(3)}_{2^t-2},g^{(3)}_{2^t-1}\right)\trianglelefteq\mathbb{F}_2[w_2,w_3] \text{ and } I_{2^t,4}=\left(g^{(4)}_{2^t-2},g^{(4)}_{2^t-1},g^{(4)}_{2^t}\right)\trianglelefteq\mathbb{F}_2[w_2,w_3,w_4].$$

显然有 $I_{2^t,\,3}\subseteq\mathbb{F}_2[w_2,w_3]$，因此，为了证明包含关系 $I_{2^t,\,3}\subseteq I_{2^t,\,4}\cap\mathbb{F}_2[w_2,w_3]$，只需验证 $g^{(3)}_{2^t-2}$，$g^{(3)}_{2^t-1}\in I_{2^t,\,4}$（因为 $I_{2^t,\,4}$是 $\mathbb{F}_2[w_2,w_3,w_4]$ 中的一个理想）。根据（2.12），有 $g^{(3)}_{2^t-2}=g^{(4)}_{2^t-2}\in I_{2^t,\,4}$以及 $g^{(3)}_{2^t-1}=g^{(4)}_{2^t-1}\in I_{2^t,\,4}$。

对于反向包含，设 $f\in I_{2^t,4}$ 是一个不含变量 w_4（即 $f\in\mathbb{F}_2[w_2,w_3]$）的多项式。将 f 写成以下形式

$$f=p_2g^{(4)}_{2^t-2}+p_1g^{(4)}_{2^t-1}+p_0g^{(4)}_{2^t},$$

其中 $p_0,p_1,p_2\in\mathbb{F}_2[w_2,w_3,w_4]$。若将此方程模 w_4 约化（此约化 $\mathbb{F}_2[w_2,w_3,w_4]\to\mathbb{F}_2[w_2,w_3,w_4]/(w_4)=\mathbb{F}_2[w_2,w_3]$ 是一个环满同态），利用事实 $f\in\mathbb{F}_2[w_2,w_3]$ 和 (2.11)，可得

$$f=\overline{p}_2g^{(3)}_{2^t-2}+\overline{p}_1g^{(3)}_{2^t-1}+\overline{p}_0g^{(3)}_{2^t}\in I_{2^t,3}$$

（$\overline{p_0}$、$\overline{p}_1$、$p_2\in\mathbb{F}_2[w_2,w_3]$ 分别是 p_0、p_1、p_2的约化）。 □

从现在起，我们主要讨论 $k=4$ 的情形，因此将 $g_r^{(4)}$简写为 g_r。

关于字典序（其中 $w_2>w_3$）的理想 $I_{2^t,3}=I_{2^t-1,3}$ 的格罗布纳基，于 [7] 中被求得。它是集合

$$F=\left\{g_{2^t-3+2^i}\mid 0\leqslant i\leqslant t-1\right\}=\left\{g^{(3)}_{2^t-3+2^i}\mid 0\leqslant i\leqslant t-1\right\}$$

（见（2.12）），首项单项式的集合为

$$\mathrm{LM}(F)=\left\{w_2^{2^{t-1}-2^i}w_3^{2^i-1}\mid 0\leqslant i\leqslant t-1\right\} \tag{2.13}$$

（见命题 3.4]）。关于字典序（其中$w_4>w_2>w_3$）的各情形下的理想 $I_{n,4}$ 的格罗布纳基 F_n，已在引理 3.4], 中给出，分别为 $n\in\{2^t-2,2^t-1,2^t,2^t+1\}\,(t\geqslant 4)$:

$$F_{2^t}=F_{2^t+1}=F\cup\{g_{2^t}\},\quad F_{2^t-1}=F\cup\{g_{2^t-4}\},\quad F_{2^t-2}=F\cup\{g_{2^t-4},g_{2^t-5}\}.$$

事实上，很容易验证 F_{2^t} 是 $I_{2^t,4}=I_{2^t+1,4}$ 的格罗布纳基这一断言对 $t=3$ 也成立。首项单项式的集合为:

$$\begin{aligned}\mathrm{LM}(F_{2^t})&=\mathrm{LM}(F)\cup\left\{w_4^{2^{t-2}}\right\},\\ \mathrm{LM}(F_{2^t-1})&=\mathrm{LM}(F)\cup\left\{w_4^{2^{t-2}-1}\right\},\\ \mathrm{LM}(F_{2^t-2})&=\mathrm{LM}(F)\cup\left\{w_4^{2^{t-2}-1},w_3w_4^{2^{t-2}-2}\right\}.\end{aligned}$$

现在我们给出两个引理。它们与引理 2.5 一起，建立了 $I_{2^t,3}$ 中 $\mathbb{F}_2[w_2,w_3]$ 的理想与 $\mathbb{F}_2[w_2,w_3,w_4]$ 中 $I_{2^t,4}$和 $I_{2^t-1,4}$ 的理想之间的一些关键联系。

引理 2.6。如果 $p_j\in\mathbb{F}_2[w_2,w_3]$, $0\leqslant j\leqslant 2^{t-2}-1$, $t\geqslant 3$，那么

$$\sum_{j=0}^{2^{t-2}-1}p_jw_4^j\in I_{2^t,4}\quad\Longleftrightarrow\quad p_j\in I_{2^t,3}\ \textit{for all}\ j\in\{0,1,\dots,2^{t-2}-1\}.$$

证明。假设 $\sum_{j=0}^{2^{t-2}-1}p_jw_4^j\in I_{2^t,4}$。对于 $j\in\{0,1,\dots,2^{t-2}-1\}$，令 $p_j\in\mathbb{F}_2[w_2,w_3]$为 p_j 模 F 的标准形（这是 $I_{2^t,3}$的一个 Gr¨obner 基）。于是，当且仅当 $p_j\in I_{2^t,3}$ 时，$p_j=0$ （定理 2.3）；又由于 $F\subset I_{2^t,4}$，我们有 $\sum_{j=0}^{2^{t-2}-1}p_jw_4^j\in I_{2^t,4}$。但这个和是一个多项式,−其中没有任何单项式能被 Gr¨obner 基 F_{2^t} 中的首项单项式 LM(F_{2^t}) = LM(F) $\cup\{w_4^{2^{t-2}}\}$ 整除，该基属于 $I_{2^t,4}$。只有当 $\sum_{j=0}^{2^{t-2}-1}p_jw_4^j=0$时，这才可能成立，即对于所有 j，都有 $p_j=0$。 − −

反过来，若对所有 $j\in\{0,1,\dots,2^{t-2}-1\}$ 都有 $p_j\in I_{2^t,3}$，则由引理 2.5, 对所有 $j\in\{0,1,\dots,2^{t-2}-1\}$ 都有 $p_j\in I_{2^t,4}$，因此 $\sum_{j=0}^{2^{t-2}-1}p_jw_4^j\in I_{2^t,4}$。 □

对于理想 $I_{2^t-1,4}$，利用其 Gr¨obner 基 F_{2^t-1} （其首项单项式的集合为 LM(F) $\cup\{w_4^{2^{t-2}-1}\}$）以及事实 $I_{2^t,4}\subseteq I_{2^t-1,4}$，可以很容易地调整引理 2.6 的证明，从而得到下面引理的证明。

引理 2.7。若 $p_j\in\mathbb{F}_2[w_2,w_3]$, $0\leqslant j\leqslant 2^{t-2}-2$, $t\geqslant 4$，则

$$\sum_{j=0}^{2^{t-2}-2}p_jw_4^j\in I_{2^t-1,4}\quad\Longleftrightarrow\quad p_j\in I_{2^t,3}\ \textit{for all}\ j\in\{0,1,\dots,2^{t-2}-2\}.$$

3. Heights of the Stiefel–Whitney classes

本节中，我们确定 $\widetilde{w}_2$，$\widetilde{w}_3$ 和$\sim\widetilde{w}_4$ 在 $H^*(G_{n,\ 4})$ 中的斯蒂费尔–惠特尼类的高度，其中 $n \in \{2^t-2, 2^t-1, 2^t, 2^t+1\}$。

定理 3.1. 设 $n \in \{2^t-2, 2^t-1, 2^t, 2^t+1\}$, $t \geqslant 4$。在 $H^*(G_{n,4})$ 中，我们有

(1) $\mathrm{ht}(\widetilde{w}_2) = 2^t - 4$,
(2) $\mathrm{ht}(\widetilde{w}_3) = 2^{t-1} - 2$.

证明。我们知道，$\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c = 0$ 属于 $H^*(\widetilde{G}_{n,4})$ 当且仅当 $w_2^b w_3^c \in I_{n,4}$。由于$I_{2^t+1,\ 4} = I_{2^t,4}$ （见（2.9）），由引理 2.6 和 2.7（应用于 $p_0 = w_2^b w_3^c$ 和$p_j = 0$，其中 $j > 0$），我们得出，对于 $n \in \{2^t-1, 2^t, 2^t+1\}$, $w_2^b w_3^c \in I_{n,4}$ 等价于 $w_2^b w_3^c \in I_{2^t,3}$。因此，在这些情况下，$\widetilde{w}_2$ 和 $\widetilde{w}_3$ 的高度~等于 $H^*(G_{2^t,3})$ 中 $\widetilde{w}_2$ 和 $\widetilde{w}_3$ 的高度。这些高度在 [3,定理 1.2 和 1.3],中计算，结果正如所述。

对于剩下的情形 $n = 2^t-2$ 我们有 $w_2^{2^t-3}$，$w_3^{2^{t-1}-1} \in I_{2^t-1,\ 4} \subseteq I_{2^t-2,\ 4}$ （见（2.7））， 接下来只需验证 $w_2^{2^t-4}$，$w_3^{2^{t-1}-2} \notin I_{2^t-2,\ 4}$。我们利用 $I_{2^t-2,\ 4}$ 的 Gr¨obner 基 F_{2^t-2} 来证明这一点。LM(F_{2^t-2}) = LM(F) ∪中没有单项式能整除 $w_3^{2^{t-1}-2}$，也就是说， $w_3^{2^{t-1}-2}$ 不能模 F_{2^t-2} 约化，因此 $w_3^{2^{t-1}-2} \notin I_{2^t-2,\ 4}$。

由 [3, (4.3)] 可得 $w_2^{2^t-4} + w_2^{2^{t-2}-1}w_3^{2^{t-1}-2} \in I_{2^t-1,\ 3} = I_{2^t,\ 3}$，并且我们知道 $I_{2^t,\ 3} \subseteq I_{2^t,\ 4} \subseteq I_{2^t-2,\ 4}$ （引理 2.5 和（2.7））。因此 $w_2^{2^t-4} + w_2^{2^{t-2}-1}w_3^{2^{t-1}-2} \in I_{2^t-2,\ 4}$，这意味着只需证明 $w_2^{2^{t-2}-1}w_3^{2^{t-1}-2} \notin I_{2^t-2,\ 4}$。文中第 [3, p. 277] 处指出，LM($F$) 中没有单项式能整除 $w_2^{2^{t-2}-1}w_3^{2^{t-1}-2}$，显然， $w_4^{2^{t-2}-1}$和 $w_3w_4^{2^{t-2}-2}$ 也都不能整除它。由于 F_{2^t-2} 是一个 Gr¨obner 基，这意味着 $w_2^{2^{t-2}-1}w_3^{2^{t-1}-2} \notin I_{2^t-2,\ 4}$，进而 $w_2^{2^t-4} \notin I_{2^t-2,\ 4}$。□

注3.2。这个定理（及其证明）对于 $t = 3$ 和 $n \in \{2^t, 2^t+1\}$，也就是说，对于 $n \in \{8, 9\}$，同样成立。

我们还需要确定如前一个定理所述， n时 $\widetilde{w}_4$ 的高度。先来陈述这一结论。

定理 3.3。对于 $t \geqslant 4$和 $j \in \{0, 1, 2\}$，在 $H^*(G_{2^t-j,4})$ 中，有

$$\mathrm{ht}(\widetilde{w}_4) = 2^{t-1} - 1 - j.$$

此外，对于 $t \geqslant 3$，在 $H^*(\widetilde{G}_{2^t+1,4})$ 中，有 $\mathrm{ht}(\widetilde{w}_4) = 2^{t-1} - 1$。

本节其余部分将用于证明定理 3.3。我们将证明分为三部分： $j = 0$、$j = 1$ 和 $j = 2$。这几部分分别由命题3.5、3.6和3.8证明。由（2.10）可知， $\widetilde{w}_4$ 在$\sim$ $\sim H^*(G_{2^t+1,4})$中的高度与在 $H^*(G_{2^t,4})$中的高度相同，因此部分 $j = 0$ （命题 3.5）也包含这一情形。

我们先回顾一下引理 3.2] 中的一个方程：对于 $t \geqslant 3$

$$g_{2^t-4} = \sum_{i=0}^{t-2} w_4^{2^i-1}\left(g^{(3)}_{2^{t-i}-4}\right)^{2^i}. \tag{3.1}$$

不过请注意，这个方程对 $t = 2$ 也成立（在这种情况下，(3.1) 化简为 $1 = 1$）。

另一个将在接下来的计算中用到的事实已在 [2,(4.7)] 中得到证明：

$$w_3 g_r^2 = g_{2r+3} \quad \text{for all } r \geqslant -3. \tag{3.2}$$

下一个引理用多项式 g_r表示 $w_4^{2^{t-1}-1}$，我们将在证明定理 3.3 时对 $j=0$ 和 $j=1$ 都使用它。

引理 3.4。对于所有整数 $t \geqslant 3$，都有

$$w_4^{2^{t-1}-1} = g_{2^{t+1}-4} + w_2^{2^{t-1}} g_{2^t-4} + w_3^{2^{t-1}} g_{2^{t-1}-4}.$$

证明。我们利用方程 (3.1) 进行计算：

$$\begin{aligned}
&g_{2^{t+1}-4} + w_2^{2^{t-1}} g_{2^t-4} + w_3^{2^{t-1}} g_{2^{t-1}-4} \\
&\quad = \sum_{i=0}^{t-1} w_4^{2^i-1} \big(g^{(3)}_{2^{t+1-i}-4}\big)^{2^i} + w_2^{2^{t-1}} \sum_{i=0}^{t-2} w_4^{2^i-1} \big(g^{(3)}_{2^{t-i}-4}\big)^{2^i} \\
&\qquad + w_3^{2^{t-1}} \sum_{i=0}^{t-3} w_4^{2^i-1} \big(g^{(3)}_{2^{t-1-i}-4}\big)^{2^i} \\
&\quad = w_4^{2^{t-1}-1} + \sum_{i=0}^{t-2} w_4^{2^i-1} \big(g^{(3)}_{2^{t+1-i}-4}\big)^{2^i} + \sum_{i=0}^{t-2} w_4^{2^i-1} \big(w_2^{2^{t-1-i}} g^{(3)}_{2^{t-i}-4}\big)^{2^i} \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{t-2} w_4^{2^i-1} \big(w_3^{2^{t-1-i}} g^{(3)}_{2^{t-1-i}-4}\big)^{2^i} \\
&\quad = w_4^{2^{t-1}-1} + \sum_{i=0}^{t-2} w_4^{2^i-1} \left(g^{(3)}_{2^{t+1-i}-4} + w_2^{2^{t-1-i}} g^{(3)}_{2^{t-i}-4} + w_3^{2^{t-1-i}} g^{(3)}_{2^{t-1-i}-4} \right)^{2^i}
\end{aligned}$$

第三行和第五行的和相等，因为 $i=t-2$对应的被加数为零（因为 $g^{(3)}_{-2}=0$）。最后，根据（2.5）（应用于 $k=3$、 $r=2^{t+1-i}-4$ 和$s=t-1-i$），最后一对括号中的表达式为零，证毕。□

命题 3.5. 设 $t \geqslant 3$ 和 $n \in \{2^t, 2^t+1\}$。那么在 $H^*(G_{n,4})$ 中，我们有

$$\mathrm{ht}(\widetilde{w}_4) = 2^{t-1} - 1.$$

证明。我们知道 $I_{2^t,4} = I_{2^t+1,4}$ （见 (2.9)），因此只需证明$w_4^{2^{t-1}} \in I_{2^t,4}$ 和 $w_4^{2^{t-1}-1} \notin I_{2^t,4}$。

关于 $k=4$、 $r=2^{t+1}$ 和 $s=t-1$ 的方程 (2.5) 为

$$g_{2^{t+1}} = w_2^{2^{t-1}} g_{2^t} + w_3^{2^{t-1}} g_{2^{t-1}} + w_4^{2^{t-1}}. \tag{3.3}$$

回顾一下，对所有 $r \geqslant n-3$，都有 $g_r \in I_{n,4}$ （见 (2.6)），因此 $g_{2^{t+1}}, g_{2^t} \in I_{2^t,4}$; 而 $w_3^{2^{t-1}} \in I_{2^t,4}$，因为 $\mathrm{ht}(\widetilde{w}_3) = 2^{t-1}-2$ （定理 3.1）。由此，方程 (3.3) 推出 $w_4^{2^{t-1}} \in I_{2^t,4}$。

再次利用事实$w_3^{2^{t-1}} \in I_{2^t,\,4}$，以及引理 3.4 中的$g_{2^{t+1}-4} \in I_{2^t,\,4}$，我们得出 $w_4^{2^{t-1}-1} \notin I_{2^t,\,4}$ 当且仅当$w_2^{2^{t-1}} g_{2^t-4} \notin I_{2^t,\,4}$。由于 $\mathrm{LM}(g_{2^t-4}) = w_4^{2^{t-2}-1}$，根据引理 2.6，只需证明$w_2^{2^{t-1}} \notin I_{2^t,\,3}$，这显然成立，因为 $\mathrm{ht}(\widetilde{w}_2) = 2^t - 4 \geqslant 2^{t-1}$ 在 $H^*(G_{2^t,\,3})$ 中（见 [3, 定理 1.2]）。□

因此，我们已经验证了 $j=0$ 的定理 3.3（包括 $n=2^t+1$ 的情形）。现在我们转到 $j=1$ 的情形。

命题 3.6。设 $t \geqslant 4$。对于 $\widetilde{w}_4 \in H^*(G_{2^t-1,\ 4})$ 我们有

$$\mathrm{ht}(\widetilde{w}_4) = 2^{t-1} - 2.$$

证明。我们需要验证 $w_4^{2^{t-1}-1} \in I_{2^t-1,\ 4}$ 和 $w_4^{2^{t-1}-2} \notin I_{2^t-1,\ 4}$。第一个断言由引理 3.4 得出，因为 $g_{2^{t+1}-4}$，g_{2^t-4}，$w_3^{2^{t-1}} \in I_{2^t-1,\ 4}$（根据（2.6）和定理 3.1）。

对于第二个，我们使用（3.1）：

$$\left(g_{2^t-4}\right)^2 = \sum_{i=0}^{t-2} w_4^{2^{i+1}-2}\left(g_{2^{t-i}-4}^{(3)}\right)^{2^{i+1}} = w_4^{2^{t-1}-2} + \sum_{i=0}^{t-3} w_4^{2^{i+1}-2}\left(g_{2^{t-i}-4}^{(3)}\right)^{2^{i+1}}.$$

再次利用这一事实$g_{2^t-4} \in I_{2^t-1,4}$，我们得出该主张 $w_4^{2^{t-1}-2} \notin I_{2^t-1,4}$ 等价于断言最后一个和不属于$I_{2^t-1,4}$。根据引理 2.7，只需找到满足性质 $\left(g_{2^{t-i}-4}^{(3)}\right)^{2^{i+1}} \notin I_{2^t,3}$ 的 $i \in \{0,1,\ldots,t-3\}$。对于 $i = t-3$，该多项式为 $\left(g_4^{(3)}\right)^{2^{t-2}} = w_2^{2^{t-1}}$（因为 $g_4^{(3)} = w_2^2$），而这一事实$w_2^{2^{t-1}} \notin I_{2^t,3}$ 已在前一个命题的证明中得到证明。□

为了完成定理 3.3 的证明，我们还需证明 $j = 2$ 的情形。在这种情况下，定理 3.3 可归结为 $w_4^{2^{t-1}-2} \in I_{2^t-2,\ 4}$ 和 $w_4^{2^{t-1}-3} \notin I_{2^t-2,\ 4}$。在前面的证明中，为了证明 $w_4^{2^{t-1}-1} \in I_{2^t-1,\ 4}$，我们使用了 $w_4^{2^{t-1}-1}$的一种方便表示，该表示见引理 3.4。若能为 $w_4^{2^{t-1}-2}$得到类似的表示，将会很有帮助。

引理 3.7。设 $t \geqslant 4$。在 $\mathbb{F}_2[w_2, w_3, w_4]$ 中，我们有以下单位元：

$$w_4^{2^{t-1}-2} = \alpha_t g_{2^t-2} + (g_{2^t-4})^2 + \beta_t g_{2^t-5} + w_3^{2^{t-1}-1} g_{2^{t-1}-5},$$

其中 α_t、$\beta_t \in \mathbb{F}_2[w_2, w_3, w_4]$ 是某些多项式。

证明。将引理 3.4 中的方程乘以 w_3，并应用 (2.4)（其中 $k = 4$和 $r = 2^{t+1}-1$，2^t-1，$2^{t-1}-1$），可得

$$\begin{aligned} w_3 w_4^{2^{t-1}-1} &= w_3 g_{2^{t+1}-4} + w_2^{2^{t-1}} w_3 g_{2^t-4} + w_3^{2^{t-1}} w_3 g_{2^{t-1}-4} \\ &= w_4 g_{2^{t+1}-5} + g_{2^{t+1}-1} + w_2^{2^{t-1}}(w_4 g_{2^t-5} + g_{2^t-1}) \\ &\quad + w_3^{2^{t-1}}(w_4 g_{2^{t-1}-5} + g_{2^{t-1}-1}) \\ &= w_4\left(g_{2^{t+1}-5} + w_2^{2^{t-1}} g_{2^t-5} + w_3^{2^{t-1}} g_{2^{t-1}-5}\right) \\ &\quad + g_{2^{t+1}-1} + w_2^{2^{t-1}} g_{2^t-1} + w_3^{2^{t-1}} g_{2^{t-1}-1}. \end{aligned}$$

根据 (2.12),

$$g_{2^{t+1}-1} + w_2^{2^{t-1}} g_{2^t-1} + w_3^{2^{t-1}} g_{2^{t-1}-1} = g_{2^{t+1}-1}^{(3)} + w_2^{2^{t-1}} g_{2^t-1}^{(3)} + w_3^{2^{t-1}} g_{2^{t-1}-1}^{(3)},$$

根据 (2.5)（应用于 $k = 3$、$r = 2^{t+1}-1$ 和 $s = t-1$），该式为零。因此

$$w_3 w_4^{2^{t-1}-1} = w_4\left(g_{2^{t+1}-5} + w_2^{2^{t-1}} g_{2^t-5} + w_3^{2^{t-1}} g_{2^{t-1}-5}\right),$$

并消去 w_4，我们得到

$$w_3 w_4^{2^{t-1}-2} = g_{2^{t+1}-5} + w_2^{2^{t-1}} g_{2^t-5} + w_3^{2^{t-1}} g_{2^{t-1}-5}. \tag{3.4}$$

现在，为了得到所需方程，我们希望消去 w_3。为此，我们将右边的每个加项写成 w_3的适当倍数。

由 (3.2)，$g_{2^{t+1}-5} = w_3(g_{2^t-4})^2$ 且 $g_{2^t-5} = w_3(g_{2^{t-1}-4})^2$。单项式$w_2^{2^{t-1}}$ 是 $g_{2^t}^{(3)}$ 的首项单项式，而 $g_{2^t}^{(3)}$ 的所有其他单项式都能被 w_3 整除（由 (2.3) 可直接看出）。因此，对某个多项式$\beta_t \in \mathbb{F}_2[w_2, w_3] \subset \mathbb{F}_2[w_2, w_3, w_4]$，有 $w_2^{2^{t-1}} + g_{2^t}^{(3)} = w_3\beta_t$。另一方面，$g_{2^t}^{(3)} = w_2 g_{2^t-2}^{(3)} = w_2 g_{2^t-2}$（(2.4)、(2.8) 和 (2.12)）。因此

$$w_2^{2^{t-1}} g_{2^t-5} = \big(w_2^{2^{t-1}} + g_{2^t}^{(3)} + w_2 g_{2^t-2}\big) g_{2^t-5} = w_3\beta_t g_{2^t-5} + w_2 g_{2^t-2} g_{2^t-5}.$$

综合以上所有事实，由 (3.4) 可得：

$$w_3 w_4^{2^{t-1}-2} = w_3(g_{2^t-4})^2 + w_3\beta_t g_{2^t-5} + w_2 g_{2^t-2} w_3 (g_{2^{t-1}-4})^2 + w_3^{2^{t-1}} g_{2^{t-1}-5}.$$

最后，消去 w_3 并定义 $\alpha_t := w_2(g_{2^{t-1}-4})^2$，证明即告完成。 □

~**命题 3.8**。设 $t \geqslant 4$。对于 $\widetilde{w}_4 \in H^*(G_{2^t-2,\ 4})$ 有

$$\mathrm{ht}(\widetilde{w}_4) = 2^{t-1} - 3.$$

证明。由于 $g_r \in I_{2^t-2,\ 4}$ 对所有 $r \geqslant 2^t - 5$ 均成立（由 (2.6)），且 $w_3^{2^{t-1}-1} \in I_{2^t-2,\ 4}$（因为 ht($\widetilde{w}_3$) $= 2^{t-1} - 2$，由定理 3.1），引理 3.7 证明了 $w_4^{2^{t-1}-2} \in I_{2^t-2,\ 4}$。我们还需验证 $w_4^{2^{t-1}-3} \notin I_{2^t-2,\ 4}$。

由（3.1）可得

$$\begin{aligned}
g_{2^t-4}(g_{2^{t-1}-4})^2 &= \sum_{i=0}^{t-2} w_4^{2^i-1}\big(g_{2^{t-i}-4}^{(3)}\big)^{2^i} \cdot \sum_{i=0}^{t-3} w_4^{2^{i+1}-2}\big(g_{2^{t-1-i}-4}^{(3)}\big)^{2^{i+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{t-2} w_4^{2^i-1}\big(g_{2^{t-i}-4}^{(3)}\big)^{2^i} \cdot \sum_{i=1}^{t-2} w_4^{2^i-2}\big(g_{2^{t-i}-4}^{(3)}\big)^{2^i} \\
&= \left(w_4^{2^{t-2}-1} + g_{2^t-4}^{(3)} + \sum_{i=1}^{t-3} w_4^{2^i-1}\big(g_{2^{t-i}-4}^{(3)}\big)^{2^i}\right) \\
&\quad \cdot \left(w_4^{2^{t-2}-2} + \sum_{i=1}^{t-3} w_4^{2^i-2}\big(g_{2^{t-i}-4}^{(3)}\big)^{2^i}\right)
\end{aligned}$$

若 S 表示和 $\sum_{i=1}^{t-3} w_4^{2^i-2}\big(g_{2^{t-i}-4}^{(3)}\big)^{2^i}$，则

$$\begin{aligned}
g_{2^t-4}(g_{2^{t-1}-4})^2 &= \big(w_4^{2^{t-2}-1} + g_{2^t-4}^{(3)} + w_4 S\big)\big(w_4^{2^{t-2}-2} + S\big) \\
&= w_4^{2^{t-1}-3} + w_4^{2^{t-2}-2} g_{2^t-4}^{(3)} + g_{2^t-4}^{(3)} S + w_4 S^2.
\end{aligned}$$

设 $p = w_4^{2^{t-2}-2} g_{2^t-4}^{(3)} + g_{2^t-4}^{(3)} S + w_4 S^2$，使得 $g_{2^t-4}(g_{2^{t-1}-4})^2 = w_4^{2^{t-1}-3} + p$。由于 $g_{2^t-4} \in I_{2^t-2,\ 4}$，当且仅当 $p \notin I_{2^t-2,\ 4}$时，有 $w_4^{2^{t-1}-3} \notin I_{2^t-2,\ 4}$。

$g_{2^t-4}^{(3)} S + w_4 S^2$ 中的单项式里，w_4 的指数至多为 $2^{t-2} - 3$，因此

$$\mathrm{LM}(p) = w_4^{2^{t-2}-2} \cdot \mathrm{LM}\left(g_{2^t-4}^{(3)}\right) = w_4^{2^{t-2}-2} w_2^{2^{t-1}-2}.$$

然而，对于$I_{2^t-2,\ 4}$ 的Gr¨obner基 F_{2^t-2}，我们知道

$$\mathrm{LM}(F_{2^t-2}) = \left\{w_2^{2^{t-1}-2^i} w_3^{2^i-1} \mid 0 \leqslant i \leqslant t-1\right\} \cup \left\{w_4^{2^{t-2}-1}, w_3 w_4^{2^{t-2}-2}\right\}$$

（见（2.13）及后续内容），因此 LM(p) 不被 F_{2^t-2} 中的任何首项单项式整除，也就是说，p 无法模 F_{2^t-2} 化简。由此得出 $p \notin I_{2^t-2,\ 4}$，证明完毕。□

4. Cup-length of $\widetilde{G}_{2^t+1,4}$

[11] 的主要结果指出，对于所有整数 $t \geqslant 4$ 和 $j \in \{0,1,2\}$，有

$$\mathrm{cl}(\widetilde{G}_{2^t-j,4}) = 2^t + 2^{t-2} - 4 - j.$$

（不难看出，关于 $j = 0$ 的结果的证明实际上对 $t = 3$ 也同样成立，因此 $\mathrm{cl}(G_{8,4}) = 6$。）

我们将推广这一结果，并证明对所有 $t \geqslant 3$ 均成立。事实上，证明的一部分已包含在 [11] 中。具体而言，根据定义，$W_{2^t,4}$ 的所有元素都是关于 $\widetilde{w}_2$、$\widetilde{w}_3$ 和 $\widetilde{w}_4$ 的多项式，因此 $\mathrm{cl}(W_{2^t,4})$ 可由某个单项式 $\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c\widetilde{w}_4^d$ 达到。因此，[11] 中的引理 4.1 和 4.4 推出 $\mathrm{cl}(W_{2^t,4}) = 2^t + 2^{t-2} - 5$，并且由于 $W_{2^t+1,4} \cong W_{2^t,4}$（见 (2.10)），我们有

$$\mathrm{cl}(W_{2^t+1,4}) = 2^t + 2^{t-2} - 5. \tag{4.1}$$

从子代数 $W_{2^t+1,4}$ 过渡到代数 $H^*(G_{2^t+1,4})$ 时，[10, 定理 6.6] 给出了一个有用的结果。对于我们所讨论的情形（按照 [10], 中采用的记号，即情形 $n + 4 = 2^t + 1$），该结果指出，向量丛 $\widetilde{\gamma}_{2^t+1,4}$ 的所谓特征秩等于 $2^t - 1$。$\widetilde{\gamma}_{2^t+1,4}$ 的特征秩定义为满足以下条件的最大整数 q： $H^j(G_{2^t+1,4}) \subseteq W_{2^t+1,4}$ 对所有 $j \in \{0,1,\ldots,q\}$ 均成立。我们得出结论，对于齐次类 $y \in H^*(G_{2^t+1,4})$，以下蕴含关系成立

$$y \notin W_{2^t+1,4} \quad \Longrightarrow \quad |y| \geqslant 2^t. \tag{4.2}$$

现在我们可以证明前面提出的结果了。

定理 4.1. 设 $t \geqslant 3$。那么

$$\mathrm{cl}(\widetilde{G}_{2^t+1,4}) = 2^t + 2^{t-2} - 4.$$

证明。我们知道 $\mathrm{ht}(\widetilde{w}_2) = 2^t - 4$ in $H^*(G_{2^t,3})$（见 [3, 定理 1.2]），这意味着 $w_2^{2^t-4} \notin I_{2^t,3}$。由引理 2.6，$w_2^{2^t-4}w_4^{2^{t-2}-1} \notin I_{2^t,4} = I_{2^t+1,4}$，即 $\widetilde{w}_2^{2^t-4}\widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1} \neq 0$ in $H^*(\widetilde{G}_{2^t+1,4})$。该类的次数为 $2^{t+1} - 8 + 2^t - 4 = 3 \cdot 2^t - 12$，而流形 $G_{2^t+1,4}$ 的维数为 $4 \cdot 2^t - 12$。根据庞加莱对偶性，存在一个类 $y \in H^{2^t}(\widetilde{G}_{2^t+1,4})$，使得 $\widetilde{w}_2^{2^t-4}\widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1}y \neq 0$。因此我们得出结论，$\mathrm{cl}(G_{2^t+1,4}) \geqslant 2^t + 2^{t-2} - 4$。

剩下要证明的是 $\mathrm{cl}(\widetilde{G}_{2^t+1,4}) \leqslant 2^t + 2^{t-2} - 4$。反设存在一个由正次数上同调类构成的非零乘积 $x_1 \cdots x_s y_1 \cdots y_m$，使得 $s + m \geqslant 2^t + 2^{t-2} - 3$，其中 $x_1, \ldots, x_s \in W_{2^t+1,4}$ 且 $y_1, \ldots, y_m \in H^*(G_{2^t+1,4}) \setminus W_{2^t+1,4}$。由于 $G_{2^t+1,4}$ 是单连通的，对所有 $i \in \{1,\ldots,s\}$，都有 $|x_i| \geqslant 2$；根据 (4.2)，对所有 $i \in \{1,\ldots,m\}$，都有 $|y_i| \geqslant 2^t$。因此，对于上同调类 $x_1 \cdots x_s y_1 \cdots y_m$ 的总次数 d，我们有

$$d \geqslant 2s + 2^t m \geqslant 2(2^t + 2^{t-2} - 3 - m) + 2^t m = (2^t - 2)m + 2 \cdot 2^t + 2^{t-1} - 6.$$

由 (4.1)，$s \leqslant 2^t + 2^{t-2} - 5$，因此 $s + m \geqslant 2^t + 2^{t-2} - 3$ 蕴含 $m \geqslant 2$。我们得出

$$d \geqslant 2 \cdot (2^t - 2) + 2 \cdot 2^t + 2^{t-1} - 6 = 4 \cdot 2^t + 2^{t-1} - 10 > 4 \cdot 2^t - 12 = \dim(\widetilde{G}_{2^t+1,4}),$$

因此 $x_1 \cdots x_s y_1 \cdots y_m = 0$。这一矛盾完成了证明。□

由 (1.1) 我们现在得到 Lusternik–Schnirelmann 范畴$\widetilde{\ }$的下界$G_{2^t+1,\ 4}$。

推论 4.2. 对于所有整数 $t \geqslant 3$，有

$$\mathrm{cat}(\widetilde{G}_{2^t+1,4}) \geqslant 2^t + 2^{t-2} - 3.$$

$\widetilde{\ }$5. Zero-divisor cup-length of $G_{n,k}$

本节旨在通过研究 $H^*(G_{n,\ 4})$ 的零因子杯长及其子代数 $W_{n,\ 4}$，为 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$格拉斯曼流形 $G_{n,\ 4}$ 的拓扑复杂度寻找下界。

首先注意，对于任意 $k \geqslant 2$，序列 zcl($W_{n,\ k}$) 随着 n 增大：

$$\mathrm{zcl}(W_{n,k}) \leqslant \mathrm{zcl}(W_{n+1,k}). \tag{5.1}$$

这对 $k = 3$ 已在引理 3.3] 中证明，但几乎相同的证明也适用于任意 k（证明的关键在于 $I_{n,\ k} \supseteq I_{n+1,\ k}$）。

我们现在建立联系 $W_{n,k}$ 首先注意到$\widetilde{\ }$，由于我们是在一个域上工作，$W_{n,k} \subset H^*(G_{n,k})$ 蕴含 $W_{n,k} \otimes W_{n,k} \subset \widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }H^*(G_{n,k}) \otimes H^*(G_{n,k})$。这意味着，$W_{n,k} \otimes W_{n,k}$ 中的每个零因子同时也是 $H^*(G_{n,k}) \otimes H^*(G_{n,k})$ 中的零因子（见下图）。

$$\begin{tikzcd}
H^*(\widetilde{G}_{n,k}) \otimes H^*(\widetilde{G}_{n,k}) \arrow[r, "\cdot"] & H^*(\widetilde{G}_{n,k}) \\
W_{n,k} \otimes W_{n,k} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\cdot"] & W_{n,k} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{\ }$这一观察的一个推论是，不等式 zcl($G_{n,k}$) $\geqslant$ zcl($W_{n,k}$) 成立。不过，我们还能证明更强的结论。

命题 5.1。令 $n \geqslant 2k \geqslant 4$。那么

$$\mathrm{zcl}(\widetilde{G}_{n,k}) \geqslant 1 + \mathrm{zcl}(W_{n,k}).$$

证明。设 z_1、z_2、……、$z_s \in W_{n、k} \otimes W_{n、k}$ 是正次数的齐次零因子，使得 $z_1 z_2 \cdots z_s \neq 0$ 且 $s =$ zcl($W_{n、k}$)，也就是说，zcl($W_{n、k}$)由乘积 $z_1 z_2 \cdots z_s$达到，我们将其记为 z。设 m 是 z 的次数（即 z_1的次数之和，其中包括$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$）。因此，z 是 $H^*(G_{n、k}) \otimes H^*(G_{n、k})$中次数为 m 的元素，这意味着

$$z \in \bigoplus_{i=0}^{m} H^i(\widetilde{G}_{n,k}) \otimes H^{m-i}(\widetilde{G}_{n,k}).$$

将 z 写成 $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i$的形式，其中 $\alpha_i \in H^i(\widetilde{G}_{n,k}) \otimes H^{m-i}(\widetilde{G}_{n,k})$。流形 $\widetilde{G}_{n,k}$ 的维数为 $k(n-k)$，因此对于 $i > k(n-k)$，有 $H^i(\widetilde{G}_{n,k}) = 0$。此外，注意到 α_i 实际上属于 $\left(H^i(\widetilde{G}_{n,k}) \cap W_{n,k}\right) \otimes \left(H^{m-i}(\widetilde{G}_{n,k}) \cap W_{n,k}\right)$（因为 $z \in W_{n,k} \otimes W_{n,k}$），并且文献 [8, 第 1171] 页证明了 $H^{k(n-k)}(\widetilde{G}_{n,k}) \cap W_{n,k} = 0$。因此，以下蕴含关系成立：

$$i \geqslant k(n-k) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_i = 0. \tag{5.2}$$

由于 $z \neq 0$，存在 $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$，使得 $\alpha_j \neq 0$（由（5.2）可推出$j < k$（$n-k$））。

接下来，令 $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ 为 $H^j(\widetilde{G}_{n,k})$ 的一组向量空间基。现在我们可以将 α_j 写成 $\sum_{l=1}^{r} b_l \otimes v_l$ 的形式，其中某个 $v_l \in H^{m-j}(G_{n,k})$。由于 $\alpha_j \neq 0$，存在 $l_0 \in \{1, \ldots, r\}$ 具有性质 $b_{l_0} \otimes v_{l_0} \neq 0$。如果我们在基元素上定义映射$\varphi$： $H^j(\widetilde{G}_{n,k}) \to H^{k(n-k)}(\widetilde{G}_{n,k})$，定义方式如下：

$$\varphi(b_l) = \begin{cases} c, & l = l_0 \\ 0, & l \neq l_0 \end{cases},$$

其中，$c \in H^{k(n-k)}(\widetilde{G}_{n,k})$ 是生成元，由庞加莱对偶性可得一个类 $a \in H^{k(n-k)-j}(\widetilde{G}_{n,k})$，使得 φ 是与 a 的乘法。因此，对于 $1 \leqslant l \leqslant r$，当且仅当 $l = l_0$ 时，我们有 $ab_l \neq 0$。

现在我们断言，在 $H^*(G_{n,k}) \otimes H^*(G_{n,k})$ 中，$z(a) \cdot z_1 z_2 \cdots z_s = (1 \otimes a + a \otimes 1) \cdot z \neq 0$，这将证明该命题。该元素的次数为 $k(n-k) - j + m$，并且我们有

$$(1 \otimes a + a \otimes 1) \cdot z = (1 \otimes a + a \otimes 1) \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = \sum_{i=0}^{m} (1 \otimes a)\alpha_i + \sum_{i=0}^{m} (a \otimes 1)\alpha_i.$$

为验证该式非零，只需证明$H^{k(n-k)}(\widetilde{G}_{n,k}) \otimes H^{m-j}(\widetilde{G}_{n,k})$中的那一项非零。然而，所述项等于（$a \otimes 1$）$\alpha_j$（若 $m \geqslant k(n-k)$，则该项还包含（$1 \otimes a$）$\alpha_{k(n-k)}$，但 $\alpha_{k(n-k)} = 0$ 这是由（5.2）得出的），并且我们有

$$(a \otimes 1)\alpha_j = (a \otimes 1) \sum_{l=1}^{r} b_l \otimes v_l = \sum_{l=1}^{r} ab_l \otimes v_l = ab_{l_0} \otimes v_{l_0} \neq 0$$

（由于我们是在域上运算，$ab_{l_0} \otimes v_{l_0} \neq 0$ 这一事实可由$ab_{l_0} \neq 0$ 和$v_{l_0} \neq 0$推出）。□

现在我们的目标是求 $\mathrm{zcl}(W_{2^t-2,4})$ 的下界，这也将是所有 $n \geqslant 2^t - 2$ 的 $\mathrm{zcl}(W_{n,4})$ 的下界（由（5.1）可知）。结合命题 5.1和（1.2），即可得到 $\mathrm{TC}(G_{n,4})$ 的下界。为此，我们先作一些准备性说明。

我们需要一个代数同态 $\psi : W_{2^t-1,3} \to W_{2^t-2,4}$（关于 $t \geqslant 4$），它将斯蒂费尔–惠特尼类映射为相应的斯蒂费尔–惠特尼类，即满足$\psi(\widetilde{w}_2) = \widetilde{w}_2$ 且 $\psi(\widetilde{w}_3) = \widetilde{w}_3$。注意，若这样的同态存在，则它是唯一的，因为 $W_{2^t-1,3}$ 由 $\widetilde{w}_2$ 和 $\widetilde{w}_3$生成。下面介绍它的构造方法。包含 $\mathbb{F}_2[w_2, w_3] \subset \mathbb{F}_2[w_2, w_3, w_4]$ 与自然投影 $\mathbb{F}_2[w_2, w_3, w_4] \to \mathbb{F}_2[w_2, w_3, w_4]/I_{2^t-2,4}$ 复合后的核为 $I_{2^t-2,4} \cap \mathbb{F}[w_2, w_3]$。由 (2.11)、引理 2.5 和 (2.7)，$I_{2^t-1,3} = I_{2^t,3} = I_{2^t,4} \cap \mathbb{F}[w_2, w_3] \subseteq I_{2^t-2,4} \cap \mathbb{F}[w_2, w_3]$，因此该复合诱导出如下图所示的代数同态 Ψ。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2[w_2, w_3] & \hookrightarrow & \mathbb{F}_2[w_2, w_3, w_4] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}_2[w_2, w_3]/I_{2^t-1,3} & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{F}_2[w_2, w_3, w_4]/I_{2^t-2,4} \end{array}$$

考虑到同构 (2.1)，我们得到具有所需性质的态射 $\psi : W_{2^t-1,3} \to W_{2^t-2,4}$。

现在，令 B 为由 Gr¨obner 基F 通过定理 2.4 和同构 (2.1) 得到的 $W_{2^t-1,3}$ 的向量空间基。因此， B 由上同调类 $\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c \in W_{2^t-1,3}$ 组成，其中相应的单项式 $w_2^b w_3^c$ 不能被 LM(F) 中的任何单项式整除。令 B_{2^t-2} 为以同样方式由 F_{2^t-2} 关于 $I_{2^t-2,4}$的 Gr¨obner 基得到的 $W_{2^t-2,4}$ 的向量空间基。由于 LM(F_{2^t-2}) $=$LM(F) $\cup\{w_4^{2^{t-2}-1}, w_3w_4^{2^{t-2}-2}\}$ 且 $\psi(\widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c) = \widetilde{w}_2^b\widetilde{w}_3^c$，我们看到，对于任意 $\sigma \in B$和任意 $d \in \{0,1,\dots,2^{t-2}-3\}$，都有

$$\psi(\sigma)\widetilde{w}_4^d \in B_{2^t-2}. \tag{5.3}$$

此外，对于 $\sigma_1,\sigma_2 \in B$和 $d_1,d_2 \in \{0,1,\dots,2^{t-2}-3\}$,

$$(\sigma_1,d_1) \neq (\sigma_2,d_2) \quad\Longrightarrow\quad \psi(\sigma_1)\widetilde{w}_4^{d_1} \neq \psi(\sigma_2)\widetilde{w}_4^{d_2}. \tag{5.4}$$

在下一个引理中，我们证明一个关键事实，以获得所述的 zcl($W_{2^t-2,4}$) 下界。

引理 5.2. 设 $t \geqslant 5$ 为一个整数，$z \in W_{2^t-1,3}\otimes W_{2^t-1,3}$ 为任意元素。若 $z \neq 0$ 属于 $W_{2^t-1,3}\otimes W_{2^t-1,3}$，则

$$(\psi\otimes\psi)(z)\cdot\sum_{d=2}^{2^{t-2}-3}\widetilde{w}_4^d\otimes\widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d} \neq 0 \quad in\ W_{2^t-2,4}\otimes W_{2^t-2,4}.$$

证明。 由于 B 是 $W_{2^t-1,3}$的一组基，因此集合 $\{\sigma\otimes\tau \mid \sigma,\tau \in B\}$ 是$W_{2^t-1,3}\otimes W_{2^t-1,3}$的一组基。同理，来自 B_{2^t-2} 的简单张量构成 $W_{2^t-2,4}\otimes W_{2^t-2,4}$的一组基。将 z 写成$\sum_{i=1}^r \sigma_i\otimes\tau_i$ 个不同基元素的非空和。于是

$$\begin{aligned}(\psi\otimes\psi)(z)\cdot\sum_{d=2}^{2^{t-2}-3}\widetilde{w}_4^d\otimes\widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d} &= \sum_{i=1}^r \psi(\sigma_i)\otimes\psi(\tau_i)\cdot\sum_{d=2}^{2^{t-2}-3}\widetilde{w}_4^d\otimes\widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d}\\ &= \sum_{i=1}^r\sum_{d=2}^{2^{t-2}-3}\psi(\sigma_i)\widetilde{w}_4^d\otimes\psi(\tau_i)\widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d},\end{aligned}$$

并且根据 (5.3) 和 (5.4)，这是 $W_{2^t-2,4}\otimes W_{2^t-2,4}$ 中由不同基元素组成的非空和。□

现在说明如何构造 $W_{2^t-2,4}\otimes W_{2^t-2,4}$ 中一个“较长”的非平凡零因子乘积的思路（即，得到 zcl($W_{2^t-2,4}$) 的一个下界）。取 $z \in W_{2^t-1,3}\otimes W_{2^t-1,3}$ 为一个实现 zcl($W_{2^t-1,3}$) 的零因子乘积（已由 [4] 得知），接着注意到 $(\psi\otimes\psi)(z)$ 是 $W_{2^t-2,4}\otimes W_{2^t-2,4}$ 中相应零因子的乘积，再将其与 $z(\widetilde{w}_4)^{2^{t-2}-1}$ 相乘，并证明所得乘积非零。零因子 $z(\widetilde{w}_4)^{2^{t-2}-1}$ 等于和 $\sum_{d=0}^{2^{t-2}-1}\widetilde{w}_4^d\otimes\widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d}$；应用引理 5.2 后，要证明这一结论，只需验证对 $d \in \{0,1,2^{t-2}-2,2^{t-2}-1\}$，有 $(\psi\otimes\psi)(z)\cdot(\widetilde{w}_4^d\otimes\widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d}) = 0$。下述引理中的恒等式将在验证中发挥关键作用。

引理 5.3. 对于所有整数 $t \geqslant 4$，以下等式在 $W_{2^t-2,4}$中成立：

(a) $\widetilde{w}_2^{2^{t-2}}\widetilde{w}_3^{2^{t-2}-1} = 0$,
(b) $\widetilde{w}_3^{2^{t-2}-1}\widetilde{w}_4^{2^{t-2}-2} = 0$,
(c) $\widetilde{w}_2^{2^{t-1}+2^{t-2}}\widetilde{w}_4^{2^{t-2}-2} = 0$.

证明。(a) 我们要证明 $w_2^{2^{t-2}}w_3^{2^{t-2}-1} \in I_{2^t-2,4}$。由 [3, 命题 2.2(c)] 和 (2.6), $w_2^{2^{t-2}}w_3^{2^{t-2}-1} = g^{(3)}_{2^t+2^{t-2}-3} \in I_{2^t,3}$，以及引理 2.5，结合 (2.7)，可得 $w_2^{2^{t-2}}w_3^{2^{t-2}-1} \in I_{2^t,4} \subseteq I_{2^t-2,4}$。

（b）由于对所有 $r \geqslant 2^t-5$ 都有 $g_r \in I_{2^t-2,\ 4}$，单位元 $\widetilde{w}_3^{2^{t-2}-1}\widetilde{w}_4^{2^{t-2}-2} = 0$（即 $w_3^{2^{t-2}-1}w_4^{2^{t-2}-2} \in I_{2^t-2,\ 4}$）是 $\mathbb{F}_2[w_2,w_3,w_4]$ 中下列关系的推论:

$$w_3^{2^{t-2}-1}w_4^{2^{t-2}-2} = w_3^{2^{t-2}-2}g_{2^t-5} + \sum_{i=2}^{t-2} w_3^{2^{t-2}-2^i}w_4^{2^{i-1}-2}g_{2^t-3+2^i}. \tag{5.5}$$

这个关系对 $t=3$ 也成立（与通常情况一样，空和视为零），我们将对 $t \geqslant 3$ 使用归纳法来证明它。

对于 $t=3$，(5.5) 化简为 $w_3 = g_3$，这显然成立（见 (2.3)）。

现在令 $t \geqslant 4$，并假设该结论对 $t-1$ 成立，即

$$w_3^{2^{t-3}-1}w_4^{2^{t-3}-2} = w_3^{2^{t-3}-2}g_{2^{t-1}-5} + \sum_{i=2}^{t-3} w_3^{2^{t-3}-2^i}w_4^{2^{i-1}-2}g_{2^{t-1}-3+2^i}.$$

将等式两边平方并乘以 $w_3w_4^2$，得到

$$w_3^{2^{t-2}-1}w_4^{2^{t-2}-2} = w_3^{2^{t-2}-3}w_4^2\big(g_{2^{t-1}-5}\big)^2 + \sum_{i=2}^{t-3} w_3^{2^{t-2}-2^{i+1}+1}w_4^{2^i-2}\big(g_{2^{t-1}-3+2^i}\big)^2.$$

由 (3.2)，$w_3(g_{2^{t-1}-5})^2 = g_{2^t-7}$ 且 $w_3(g_{2^{t-1}-3+2^i})^2 = g_{2^t-3+2^{i+1}}$，因此应用此式并平移求和指标后，得到

$$w_3^{2^{t-2}-1}w_4^{2^{t-2}-2} = w_3^{2^{t-2}-4}w_4^2g_{2^t-7} + \sum_{i=3}^{t-2} w_3^{2^{t-2}-2^i}w_4^{2^{i-1}-2}g_{2^t-3+2^i}. \tag{5.6}$$

最后，由关于 $k=4$、$r=2^t+1$ 和 $s=1$ 的方程 (2.5)，可得

$$g_{2^t+1} = w_2^2g_{2^t-3} + w_3^2g_{2^t-5} + w_4^2g_{2^t-7} = w_3^2g_{2^t-5} + w_4^2g_{2^t-7}.$$

因此，我们可以在 (5.6) 中用 $w_3^2g_{2^t-5} + g_{2^t+1}$ 替换 $w_4^2g_{2^t-7}$，替换后得到 (5.5)。归纳步骤至此完成。

(c) 在 [4, 推论 3.8] 中已证明

$$w_2^{2^{t-1}+2^{t-2}} + \sum_{i=1}^{t-3} w_2^{2^i+2^{i-1}}w_3^{2^{t-1}-2^i} \in I_{2^t+2^{t-2}+2,3}.$$

另一方面，我们知道 $I_{2^t+2^{t-2}+2,3} \subseteq I_{2^t,3} \subseteq I_{2^t,4} \subseteq I_{2^t-2,4}$（由 (2.7) 和引理 2.5 得出）。因此，在 $W_{2^t-2,4}$ 中，我们有 $\widetilde{w}_2^{2^{t-1}+2^{t-2}} = \sum_{i=1}^{t-3}\widetilde{w}_2^{2^i+2^{i-1}}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2^i}$，这意味着

$$\widetilde{w}_2^{2^{t-1}+2^{t-2}}\widetilde{w}_4^{2^{t-2}-2} = \sum_{i=1}^{t-3}\widetilde{w}_2^{2^i+2^{i-1}}\widetilde{w}_3^{2^{t-1}-2^i}\widetilde{w}_4^{2^{t-2}-2} = 0,$$

根据 (b) 部分，因为对所有 $i \in \{1,\dots,t-3\}$，$2^{t-1}-2^i \geqslant 2^{t-1}-2^{t-3} > 2^{t-2}-1$。 □

我们终于可以为 zcl($W_{n,4}$) 建立下界了。

命题 5.4。对于所有整数 $t \geqslant 5$ 和 $n \geqslant 2^t-2$，都有

$$\operatorname{zcl}(W_{n,4}) \geqslant 2^t + 2^{t-1} + 2^{t-2} - 5.$$

证明。我们在引理 5.3 之前已经概述了证明思路。首先，根据（5.1），只需证明 $\operatorname{zcl}(W_{2^t-2,\ 4}) \geqslant 2^t + 2^{t-1} + 2^{t-2} - 5$。该不等式将由以下事实推出：$z(\widetilde{w}_2)^{2^t-1} z(\widetilde{w}_3)^{2^{t-1}-3} z(\widetilde{w}_4)^{2^{t-2}-1} \neq 0$ 在 $W_{2^t-2,\ 4} \otimes W_{2^t-2,\ 4}$ 中成立；我们现在对其进行证明。

设 $z := z(\widetilde{w}_2)^{2^t-1} z(\widetilde{w}_3)^{2^{t-1}-3} \in W_{2^t-1,\ 3} \otimes W_{2^t-1,\ 3}$。[4, 命题 3.9 和引理 3.4] 中已证明 $z \neq 0$。我们构造了代数同态 $\psi : W_{2^t-1,\ 3} \to W_{2^t-2,\ 4}$，它具有如下性质：$\psi(\widetilde{w}_2) = \widetilde{w}_2$ 以及 $\psi(\widetilde{w}_3) = \widetilde{w}_3$。因此，

$$(\psi \otimes \psi)\big(z(\widetilde{w}_2)\big) = (\psi \otimes \psi)\big(1 \otimes \widetilde{w}_2 + \widetilde{w}_2 \otimes 1\big) = 1 \otimes \widetilde{w}_2 + \widetilde{w}_2 \otimes 1 = z(\widetilde{w}_2),$$

类似地，$(\psi \otimes \psi)\big(z(\widetilde{w}_3)\big) = z(\widetilde{w}_3)$。张量积 $\psi \otimes \psi : W_{2^t-1,\ 3} \otimes W_{2^t-1,\ 3} \to W_{2^t-2,\ 4} \otimes W_{2^t-2,\ 4}$ 也是代数同态，因此

$$(\psi \otimes \psi)(z) = z(\widetilde{w}_2)^{2^t-1} z(\widetilde{w}_3)^{2^{t-1}-3}. \tag{5.7}$$

另一方面，根据二项式公式，零因子 $z(\widetilde{w}_4)^{2^{t-2}-1}$ 等于

$$(1 \otimes \widetilde{w}_4 + \widetilde{w}_4 \otimes 1)^{2^{t-2}-1} = \sum_{d=0}^{2^{t-2}-1} \binom{2^{t-2}-1}{d} \widetilde{w}_4^d \otimes \widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d} = \sum_{d=0}^{2^{t-2}-1} \widetilde{w}_4^d \otimes \widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d}$$

（因为 $\binom{2^{t-2}-1}{d} \equiv 1 \pmod 2$ 当 $0 \leqslant d \leqslant 2^{t-2}-1$ 时），因此，

$$z(\widetilde{w}_2)^{2^t-1} z(\widetilde{w}_3)^{2^{t-1}-3} z(\widetilde{w}_4)^{2^{t-2}-1} = (\psi \otimes \psi)(z) \cdot \sum_{d=0}^{2^{t-2}-1} \widetilde{w}_4^d \otimes \widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d}.$$

由于 $z \neq 0$，根据引理 5.2，我们知道

$$(\psi \otimes \psi)(z) \cdot \sum_{d=2}^{2^{t-2}-3} \widetilde{w}_4^d \otimes \widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d} \neq 0,$$

因此，现在只需验证对于 $d \in \{0, 1, 2^{t-2}-2, 2^{t-2}-1\}$，元素 $x_d := (\psi \otimes \psi)(z) \cdot (\widetilde{w}_4^d \otimes \widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d}) \in W_{2^t-2,\ 4} \otimes W_{2^t-2,\ 4}$ 为零。

利用 (5.7)，我们计算：

$$\begin{aligned} x_d &= z(\widetilde{w}_2)^{2^t-1} z(\widetilde{w}_3)^{2^{t-1}-3} \big(\widetilde{w}_4^d \otimes \widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d}\big) \\ &= \sum_{b=0}^{2^t-1} \widetilde{w}_2^b \otimes \widetilde{w}_2^{2^t-1-b} \cdot \sum_{c=0}^{2^{t-1}-3} \binom{2^{t-1}-3}{c} \widetilde{w}_3^c \otimes \widetilde{w}_3^{2^{t-1}-3-c} \cdot \big(\widetilde{w}_4^d \otimes \widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d}\big) \\ &= \sum_{b=0}^{2^t-1} \sum_{c=0}^{2^{t-1}-3} \binom{2^{t-1}-3}{c} \widetilde{w}_2^b \widetilde{w}_3^c \widetilde{w}_4^d \otimes \widetilde{w}_2^{2^t-1-b} \widetilde{w}_3^{2^{t-1}-3-c} \widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d}. \end{aligned}$$

对于 $0 \leqslant d \leqslant 1$，我们来证明事实上 x_d 的每一项都等于零。任取一项 $s_d(b,\ c) = \widetilde{w}_2^b \widetilde{w}_3^c \widetilde{w}_4^d \otimes \widetilde{w}_2^{2^t-1-b} \widetilde{w}_3^{2^{t-1}-3-c} \widetilde{w}_4^{2^{t-2}-1-d}$。如果 $b \geqslant 2^{t-2}$ 且 $c \geqslant 2^{t-2}-1$，那么根据引理 5.3(a)，$s_d(b,\ c)$ 的第一个坐标为零。否则，如果 $b \leqslant 2^{t-2}-1$ 或 $c \leqslant 2^{t-2}-2$，那么根据同一引理的 (b) 和 (c) 部分，第二个坐标为零。由此我们得到 $x_d = 0$。

不难验证，$x_{2^{t-2}-1-d} = T(x_d)$，其中 $T : W_{2^t-2,\ 4} \otimes W_{2^t-2,\ 4} \to W_{2^t-2,\ 4} \otimes W_{2^t-2,\ 4}$ 会交换坐标（它在简单张量上的定义为 $T(\sigma \otimes \tau) = \tau \otimes \sigma$）。因此，$x_d = 0$ 对 $2^{t-2}-2 \leqslant d \leqslant 2^{t-2}-1$ 也成立。证明至此结束。□

注记 5.5。 我们认为，前一个命题中的不等式对于 $n \in \{2^t-2, 2^t-1, 2^t, 2^t+1\}$ 是等式。计算机计算证实了我们对 $5 \leqslant t \leqslant 20$的猜测。

注 5.6。 该命题对 $t=4$ 不成立。从其证明可直接看出，零因子 $z(\widetilde{w}_2)^{2^t-1}z(\widetilde{w}_3)^{2^{t-1}-3}z(\widetilde{w}_4)^{2^{t-2}-1} = z(\widetilde{w}_2)^{15}z(\widetilde{w}_3)^5z(\widetilde{w}_4)^3$ 在 $W_{14,4}\otimes W_{14,4}$ 中 van-ishes。此外，还可证明 zcl($W_{14,4}$) $= 21$。

然而， $z(\widetilde{w}_2)^{15}z(\widetilde{w}_3)^5z(\widetilde{w}_4)^3 \neq 0$ 在 $W_{15,4}\otimes W_{15,4}$ 中，因此命题 5.4 对 $t=4$ 和 $n \geqslant 15$ 成立。此外，zcl($W_{15,4}$) =zcl($W_{16,4}$) = zcl($W_{17,4}$) $= 23$。

我们还指出，可以证明 zcl($W_{8,4}$) =zcl($W_{9,4}$) $= 8$。

我们使用计算机软件 SageMath[12]验证了所有这些列出的结果。

利用命题 5.1，我们立即得到以下推论。

推论 5.7。 对于所有整数 $t \geqslant 5$ 和 $n \geqslant 2^t-2$，有

$$\mathrm{zcl}(\widetilde{G}_{n,4}) \geqslant 2^t + 2^{t-1} + 2^{t-2} - 4.$$

最后，(1.2) 给出了定向˜Grassmann 流形 $G_{n,4}$的拓扑复杂度下界。

定理 5.8。 对于所有整数 $t \geqslant 5$ 和 $n \geqslant 2^t-2$，有

$$\mathrm{TC}(\widetilde{G}_{n,4}) \geqslant 2^t + 2^{t-1} + 2^{t-2} - 3.$$

注记5.9。该定理涵盖了 $n \geqslant 30$ 这些情形。对于 $n \leqslant 29$，同样地，˜可以根据注记 5.6 中列出的结果得到 TC($G_{n,4}$) 的下界。

References

1. T. Becker 和 V. Weispfenning, *Gröbner Bases: A Computational Approach to Commutative Algebra* 1993，数学研究生教材，施普林格出版社，纽约（）。2. U. A. Colovi´c、M. Jovanovi´c 和 B. I. Prvulovi´c, *Cohomology rings of oriented Grassmann manifold* $\widetilde{G}_{2^t,4}$，Topology Appl. **367**（2025），第 109318 页。3. U. A. Colovi´c 和 B. I. Prvulovic，, J. Algebra **642** 2024 256 285（）–。4. U. A. Colovi´c、B. I. Prvulovi´c 和 M. Radovanovi´c, *Cup-length of oriented Grassmann manifolds via Gröbner bases* *Topological complexity of oriented Grass-mann manifolds*，Topol. Methods Nonlinear Anal. **66**（2025）21–49。5. U. A. Colovi´c 和 B. I. Prvulovi´c, *Gröbner bases in the mod* 2 *cohomology of oriented Grassmann manifolds* $\widetilde{G}_{2^t,3}$，Math. Slovaca **74(1)**（2024）195–208。6. M. Farber, *Topological complexity of motion planning*，Discrete Comput. Geom. **29**（2003）211–221。7. T. Fukaya, *Gröbner bases of oriented Grassmann manifolds*，Homol. Homotopy Appl. **10:2**（2008）195–209。8. J. Korba˘s, *The characteristic rank and cup-length in oriented Grassmann manifolds*，Osaka J. Math.**52**（2015），1163–1172。9. P. Pave˘si´c, *Topological complexity of real Grassmannians*，Proc. Roy. Soc. Edinb. A **151**（2021）2013–2029。10. B. I. Prvulovi´c、M. Radovanovic, *On the characteristic rank of vector bundles over oriented Grassmannians* **244** 2019 167 190，, Fund. Math.（），–。11. T. Rusin, *On the cup-length of the oriented Grassmann manifolds* $\widetilde{G}_{n,4}$，Acta Math. Hungar. **175**（2025），127–141。12. Sage 开发者。 *The Sage Mathematics Software System (Version 10.6)*，（2025 https:），。//www.sagemath.org

University of Belgrade, Faculty of mathematics, Studentski trg 16, Belgrade, Ser-bia*Email address*: milica.jovanovic@matf.bg.ac.rsUniversity of Belgrade, Faculty of mathematics, Studentski trg 16, Belgrade, Ser-bia*Email address*: vuk.simon.ovaskainen@matf.bg.ac.rsUniversity of Belgrade, Faculty of mathematics, Studentski trg 16, Belgrade, Ser-bia*Email address*: branislav.prvulovic@matf.bg.ac.rs University of Belgrade, Faculty of mathematics, Studentski trg 16, Belgrade, Ser-bia *Email address*: antonije.subotic@matf.bg.ac.rs