arXiv:2603.17724v1 [math.LO] 18 Mar 2026

关于模态逻辑与演绎的更多探讨

Zalán Gyenis*、Zalán Molnár 和 Övge Öztürk

摘要。 我们研究了同余模态逻辑代数语义中可加性与演绎定理之间的关系。众所周知，模态算子的可加性蕴含局部演绎-分离定理。我们的核心主题是，模态逻辑的演绎性质远不止于可加情形，也依然成立。我们引入强非可加簇的概念，继而证明，布尔框架存在连续统多个强非可加的极小判别子簇；等价地，存在连续统多个具有演绎-分离定理的强非可加极大同余模态逻辑。此外，每个正规模态逻辑都可以通过单射变换为一个强非可加的模态逻辑，同时保留（局部）演绎定理。最后，我们证明，具有局部演绎定理的同余模态逻辑类及其补类都不是初等的。

关键词。布尔框架、模态代数、同余模态逻辑、同余扩张性质、（局部）演绎—分离定理。

1. 主题

布尔框架（简称 Bf）是一种结构 $\mathfrak{A} = A,\ \sqcap,\ -,\ 0,\ f$，其中 $A, \sqcap, -, 0$ 是一个布尔代数，而 $f\colon\ A \to A$ 是任意的一元函数。[1] Bf 类是由布尔等式定义的方程类（簇）。众所周知，Bf 类为所谓的同余模态逻辑或经典模态逻辑提供了等价的代数语义 [9]。由于 Bf 是一个簇，同余模态逻辑的公理扩张格与 Bf 的子簇格对偶同构（例如参见 [13]）。

假设簇 **V** 为逻辑$\mathcal{L}$提供等价的代数语义。那么，根据 Czelakowski [5, 第 381],页，**V** 具有同余扩张性质 (CEP)，当且仅当 $\mathcal{L}$具有局部演绎-分离定理 (LDDT)。此外，**V** 具有方程可定义的

*通讯作者。[1]我们还使用其他标准布尔运算，例如 $\sqcup$、$\rightarrow$、1。这些运算按通常方式定义。在部分文献中，模态代数是带有额外算子 $\Diamond$ 的布尔代数，该算子是正规的且可加的（也就是说，$\Diamond 0 = 0$ 且 $\Diamond(a \sqcup b) = \Diamond a \sqcup \Diamond b$；或者，使用对偶算子 $\Box$，可以写成 $\Box 1 = 1$且 $\Box(a \sqcap b) = \Box a \sqcap \Box b$；例如参见 [16, 定义 10.1]）。而在另一些文献中，例如 [13],，模态代数仅指带有任意额外一元函数的布尔代数。为解决这一分歧，我们遵循 [10]，使用“布尔框架”一词来指称后一种意义上的模态代数。

主同余(EDPC)，当且仅当逻辑具有*(全局)*演绎分离定理(DDT)，参见 [6]。[2]

众所周知，尽管最小的正规模态逻辑**K** 没有演绎定理 [4]，，但它有局部演绎-分离定理（Perzanowski，参见 [5, 第380]页）。此外，**K** 的每个公理扩张都有局部演绎分离定理（LDDT）；等价地，Bf 的每个正规且可加的[3]子簇都有 CEP。[4] 在一篇近期论文中，Krawczyk[13] 证明，存在连续统多个不满足局部演绎分离定理的同余模态逻辑公理扩张；等价地，存在连续统多个缺少 CEP 的 Bf 子簇（见 [13, 定理 6。11]）。这一结果在 [9], 中得到推广，文中证明还可以进一步假设逻辑具有某些结构性质。模态算子的可加性蕴含局部演绎分离定理，因此，[13, 9] 中构造的那一连续统个不满足局部演绎分离定理的同余模态逻辑必然都是非可加的。

本文探讨可加性与（局部）演绎分离定理之间有多大关联。我们仔细考察具有同余扩张性质或具有 EDPC 的非可加簇。不过，谈到非可加簇时，有一个重要的注意事项。考虑一个可能最简单的例子：某个代数（或簇），其中 $f(x) = -x$。除平凡情形外，这个 f 是非可加的，而且显然满足 CEP 或 EDPC。或者，取任意一个可加的 g，并令 $f(x) = -g(x)$ 或 $f(x) = -g(-x)$。那么 f 通常[5] 是非可加的，但 CEP 或 EDPC 会从 g 传递过来。当然，这就是项等价的情形。项等价的代数具有相同的底集和相同的项运算克隆：一个代数中的每个基本运算都可以表示为另一个代数中运算的复合，反之亦然。项等价的代数（及其构成的簇）通常被视为在所有实际用途上都相同。

如果对于簇中的每个代数，都存在一个加性运算，使得该代数与之在项意义上等价（当然，是相对于布尔运算而言），那么我们就称这个布尔框架簇等价于一个可加的布尔框架簇。注意，这比簇之间的项等价更弱，因为这里相互表示的项并不统一，而是可以因代数而异。

定义 1.1. 如果布尔框架簇**V** 不等价于任何可加的布尔框架簇，则称其为强非可加。

本文证明，存在连续统多个具有 EDPC 的极小强非可加簇。等价地说，存在连续统多个具有演绎分离定理的强非可加极大模态逻辑。此外，我们还证明，

---

[2]稍后我们会回顾相关定义。如果逻辑由一个拟类代数化，那么也存在类似的迁移定理，但本文不讨论这类情形。[3]f 当且仅当 $f(0) = 0$ 时是正规的；当且仅当 $f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y)$ 时是可加的。[4]这一说法属于广为人知的结论，例如 [12, 命题 1]。[5]要得到一个非可加的 f，我们需要确保在第一种情形下，g 不满足 $g(x \sqcup y) = g(x) \sqcap g(y)$；在第二种情形下，不满足 $g(x \sqcap y) = g(x) \sqcap g(y)$。

这类簇（逻辑）大量存在：每个正规模态逻辑都可以通过单射方式转化为强非可加逻辑，同时保留（全局/局部）演绎分离定理。

我们还证明，具有 CEP 的布尔框架类及其补集都不能用一阶逻辑公理化。[6]

2. 一个热身示例

如果对于任意子代数 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ 和任意同余 $\Theta \in \mathrm{Con}(\mathfrak{B})$，都存在 $\Upsilon \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$ 使得 $\Theta = \Upsilon \cap (B \times B)$，则代数 $\mathfrak{A}$ 具有同余扩张性质 （ CEP ）。如果一个代数类中的所有成员都具有 CEP，则称该代数类具有 CEP。

如前所述，如果 $(A,\ f)$ 是一个带有可加的 f 的布尔框架，那么 $(A,\ f)$ 具有 CEP。但并非只有可加性才能推出 CEP。在这里，我们给出一个严格较弱的恒等式的例子，该恒等式确实能推出 CEP。所谓严格较弱，不仅是指存在满足该恒等式的非可加函数，还指该恒等式可以由那些不与任何加性运算项等价的函数满足。

回想一下，例如，参见 [13, 第 5] 节或 [3, 第223] 页：若 $\Theta \in$ 是布尔框架$\mathfrak{A}$上的$\mathfrak{A}$Con，则

$$I = \{x \oplus y : (x, y) \in \Theta\} \subseteq A$$

是一个同余理想：若 $x \oplus y \in I$，则 $f(x) \oplus f(y) \in I$。（$\oplus$表示对称差）。反过来，对于任意同余理想 I，关系 $\Theta = \{(x,\ y) :\ x \oplus y \in I\}$是 $\mathfrak{A}$上的一个同余。

可加性蕴含 CEP 的证明基于以下论证：取一个可加的 $\mathfrak{A}$、一个子代数 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ 以及 $\mathfrak{B}$的一个同余 $\Theta_{\mathfrak{B}}$。于是 $\Theta_{\mathfrak{B}}$ 给出一个同余理想 $I_{\mathfrak{B}}$。可加性保证将 $I_{\mathfrak{B}}$ 扩张为 $\mathfrak{A}$ 中一个理想的理想扩张 I 是同余理想。考察这个证明可知，无需假设可加性，只需假设以下公式：

事实 2.1. 任何满足以下条件的布尔框架 $\mathfrak{A}$

$$x \oplus y \leq z \implies f(x) \oplus f(y) \leq f(z) \qquad (*)$$

都具有 *CEP*。这个准等式等价于一个等式。

我们举一个代数 $(\mathfrak{A},\ f)$ 的例子，它满足 $(*)$，但 f 不仅不可加，而且与任何可加的 g 都不项等价。

[6]对于大多数读者而言，这一结果或许并不令人意外（尽管让读者感到意外并非本文的目的之一），因为同余扩张性质的定义是二阶的。另一方面，我们知道某些一阶性质（例如可加性）蕴含 CEP，而某些其他性质是否会蕴含 CEP 的否定则并不那么明朗。因此，原则上，CEP 与一阶公式集合之间可能存在一些有趣的相互作用。我们将解决这个问题。

例 2.2。 考虑幂集布尔代数 $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\{1, 2, 3\})$，以及对每个 $X \subseteq \{1, 2, 3\}$ 定义的运算 f

$$f(X) = \begin{cases} \{1,2,3\} & \text{if } X = \{1,3\}, \\ X & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么 f 不是可加的，因为 $f(\{1\} \cup \{3\}) \neq f(\{1\}) \cup f(\{3\})$。对于 f，$(*)$ 显然成立。因此，$(\mathfrak{A}, f)$ 具有 CEP。

设 g 为 A上的可加函数，它在原子和底元素上的定义如下

$$g(\varnothing) = \varnothing, \quad g(\{1\}) = \{2\}, \quad g(\{2\}) = \varnothing, \quad g(\{3\}) = \{1\}. \tag{2.1}$$

计算表明

$$f(x) = x \cup (g(x) \cap g(g(x))) .$$

由此可得 $\mathrm{Con}(\mathfrak{A}, g) \subseteq \mathrm{Con}(\mathfrak{A}, f)$。

定理 2.3。 $(\mathfrak{A}, f)$ 不与任何可加的$(\mathfrak{A}, g)$项等价。

证明。设 $\mathrm{Clo}_1(A, f) \subseteq A^A$为代数 $(\mathfrak{A}, f)$ 的一元项克隆，即该代数的所有一元项运算所组成的集合。已知，$\mathrm{Clo}(A, f)$ 是A^A 的最小子集，它包含一元投影项/常数项 0、1、 x，并且对布尔运算和 f封闭。

定义四个一元项运算：

$$a(x) = -x \sqcap f(x), \quad b(x) = x \sqcap f(-x), \quad c(x) = -f(x), \quad d(x) = -f(-x) .$$

它们都属于 $\mathrm{Clo}_1(A, f)$。我们断言，这些运算两两不交，且它们的并是常值 1 运算。

唯一不显然不交的一对是 c和 d。根据定义，f是扩张的，也就是说， $x \leq f(x)$ 且 $-x \leq f(-x)$。由此可得 $c(x) \leq -x$ 且 $d(x) \leq x$。因此， $c(x) \sqcap d(x) = 0$。

至于它们的并：

$$\begin{aligned} a \sqcup c &= (-x \sqcap f(x)) \sqcup -f(x) = (-x \sqcup -f(x)) \sqcap (f(x) \sqcup -f(x)) \\ &= -x \sqcup -f(x), \\ (a \sqcup c) \sqcup b &= -f(x) \sqcup -x \sqcup (x \sqcap f(-x)) = -f(x) \sqcup (-x \sqcup f(-x)), \\ (a \sqcup b \sqcup c) \sqcup d &= -f(x) \sqcup -x \sqcup f(-x) \sqcup -f(-x) = 1. \end{aligned}$$

由此可知，在一元运算的布尔代数（A^A、 $\sqcap$、 $-$、 0）中，四个函数 a、 b、 c、 d 构成 1 的一个划分。因此，它们生成的布尔代数恰好有 $2^4 = 16$ 个元素，即各子族的所有并：

$$B = \left\{ \bigsqcup_{u \in U} u : \ U \subseteq \{a, b, c, d\} \right\} .$$

注意，

$$x = d \sqcup b, \quad -x = c \sqcup a, \quad f(x) = x \sqcup a, \quad f(-x) = -x \sqcup b,$$

因此，x、$f(x)$、$f(-x)$等全都属于 B。

接下来，我们证明 B 在 f 下封闭。回忆一下，f 不是恒等式的唯一集合是{1，3}。f 对原子的作用：

- $a(x)$，$b(x) \in \{\varnothing, \{2\}\}$，因此它们绝不会是{1，3}，从而 $f \circ a = a$、$f \circ b = b$。
- $c(x)$恰好在 $x = \{2\}$处取值{1，3}。因此，$f \circ c$ 仅在 $x = \{2\}$处添加{2}，所以

$$f(c(x)) = c(x) \sqcup b(x).$$

- $d(x)$恰好在 $x = \{1, 3\}$处取值{1，3}。因此，

$$f(d(x)) = d(x) \sqcup a(x).$$

现在任取一个$h \in B$。那么h 是 $\{a, b, c, d\}$ 的某个子集的并。要使 $h(x)$ 等于 $\{1, 3\}$，唯一的可能是

- 在 $x = \{2\}$ 处，若包含了 c 但未包含 b，或者
- 在 $x = \{1, 3\}$ 处，若包含了 d 但未包含 a。

因此，$f(h(x))$ 总是以下之一

$$h(x), \quad h(x) \sqcup a(x), \quad h(x) \sqcup b(x), \quad h(x) \sqcup a(x) \sqcup b(x).$$

于是，$B = \mathrm{Clo}_1(A, f)$。

既然我们已经描述了完整的一元项克隆，就很容易验证：在这 16 个项中，唯一可加的项是 0、1 和 x。为完成证明，还需表明 0、1 和 x 都不能定义 f。但这是显然的，因为只能用这三个表达的项是 0、1、x 和 $-x$。□

取簇$\mathbf{V}(\mathfrak{A})$，可得：

推论 2.4. 存在一个满足 *CEP* 的强非加性布尔框架簇。

事实 2.5. 每个满足 $(*)$ 的布尔框架都是单调的。

证明. 设 $(\mathfrak{A}, f)$ 是一个满足 $(*)$ 的布尔框架。首先，我们证明，对每个 $a \in A$，都有 $f(0) \leq f(a)$。由于 $a = a \oplus 0 \leq a$，由 $(*)$ 可得 $f(a) \oplus f(0) \leq f(a)$，因此

$$f(a) = [f(a) \oplus f(0)] \vee f(a) = f(a) \vee f(0).$$

现在假设 $a \leq b$。那么由 $f(0) \leq f(b)$ 和 $(*)$ 可得 $f(a) \oplus f(0) \leq f(b)$，这意味着

$$f(a) \leq f(a) \vee f(0) = [f(a) \oplus f(0)] \vee f(0) \leq f(b).$$

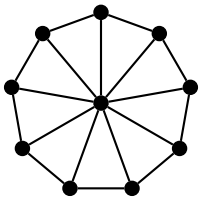
□

恒等式 $(*)$ 给出了介于可加性和单调性之间的一个有用的中间条件。尽管可加性蕴含 CEP，但存在连续统多个不具有 CEP 的单调簇（参见 [9]）。由于 $(*)$ 蕴含 CEP，但通常无法与可加函数相互定义，因此可加性要求过强，而单独的单调性又不足以使簇具有 CEP。

通过模态逻辑中的以下构造，很容易得到连续统多个具有 CEP 的强非可加但单调的簇。回忆一下 [15] 中轮框架的定义。对于 $n \geq 5$，轮框架 $\mathcal{W}_n = W_n,\ R_n$ 是满足以下条件的框架：

W_n 定义= $\{0, \ldots\ldots, n-1\} \cup \{h\}$

R_n 定义= $\{x,\ y\colon\ x,\ y < n,\ |x-y| \leq 1$ (模 $n)\} \cup \{h,\ h,\ h,\ x,\ x,\ h\colon\ x < n\}$。



框架 $\mathcal{W}_9$

定理 2.6。存在连续统多个具有 *CEP* 的强非可加、单调簇。

证明。令 $Prim = \{n \in \omega\colon\ n$ 是素数 $n \geq 5\}$，并令 $\mathfrak{W}_n = \mathcal{W}_n^+$为复代数。对于 $X \subseteq Prim$，我们记作

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}\big(\{\mathfrak{W}_p : p \in X\} \cup \{\mathfrak{A}\}\big),$$

其中 $\mathfrak{A}$ 来自例 2.2。我们证明，对所有 $X \neq Y \subseteq Prim$，只要 X, Y 非空，就有

$$\mathbf{V}(X) \neq \mathbf{V}(Y).$$

单调性和 CEP 源于生成元满足恒等式 $(*)$ 这一事实，而强非可加性则源于定理 2.3。现在让我们证明这些簇彼此不同。由于每个 $\mathcal{W}_n$ 都是点生成的，$\mathfrak{W}_n$ 是次直不可约的。因此，根据 Jónnson 引理，只需证明对于 $p \in X \setminus Y$，我们有 $\mathfrak{W}_p \notin \mathbf{HSP}_U(\{\mathfrak{W}_q\colon\ q \in Y\} \cup \{\mathfrak{A}\})$。否则，如果对于某个 $p \in X$ 有 $\mathfrak{W}_p \in \mathbf{V}(\mathfrak{Y}_{SI}$，那么将存在某个 $\mathfrak{D} \in \mathbf{P}_U(\{\mathfrak{W}_q\colon\ q \in \mathfrak{Y} \cup \{\mathfrak{A}\})$，使得 $\mathfrak{W}_p \in \mathbf{HS}(\mathfrak{D})$。此外，$\mathfrak{D} \cong \mathfrak{A}$ 或 $\mathfrak{D}$ 将是来自 $\mathbf{V}(\mathfrak{Y}$的某些 $\mathfrak{W}_q$'s 的超积。后一种情况不可能发生，因为根据 [15, 定理 21]，对任意 $p \in Prim$，存在一个公式 A_p，使得 $\mathcal{W}_p \nVdash A_p$，而对于所有 $p \neq q \in Prim$，都有 $\mathcal{W}_q \Vdash A_p$。前一种情况同样不可能，因为根据构造，$|\mathfrak{W}_p| > |\mathfrak{A}|$。 □

3. 强非可加模态逻辑与演绎

让我们先回顾一下本节所使用的泛代数中的一些重要定义和定理（例如，参见 [2]）。

一个簇 $\mathbf{V}$ 具有方程可定义的主同余（EDPC），当且仅当存在有限多个四元项对

$$p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$$

使得对于每个代数 $\mathfrak{A} \in \mathbf{V}$ 以及所有 $a, b, c, d \in A$,

$$(c, d) \in \mathrm{Cg}^{\mathfrak{A}}(a, b) \iff \mathfrak{A} \vDash \bigwedge_{i=1}^{n} p_i(a, b, c, d) = q_i(a, b, c, d).$$

等价地，由一对 (a, b) 生成的主同余，可在整个$\mathbf{V}$ 中用一个方程合取统一定义。

三元项 $t(x, y, z)$ 是 $\mathfrak{A}$ 上的判别项，如果

$$t^{\mathfrak{A}}(a, b, c) = \begin{cases} a & \text{if } a \neq b, \\ c & \text{if } a = b, \end{cases} \qquad (a, b, c \in A).$$

如果存在一个三元项 $t(x,\ y,\ z)$，使得对于每个次直不可约代数 $\mathfrak{A} \in \mathbf{V}$，其解释 $t^{\mathfrak{A}}$ 都是 $\mathfrak{A}$上的判别子运算，那么簇 $\mathbf{V}$ 就是一个判别子簇。在具有布尔代数约化的代数类中，判别项可以替换为所谓的切换项

$$d^{\mathfrak{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

这意味着，任何切换项 $d^{\mathfrak{A}}$ 都对应一个判别项 $t^{\mathfrak{A}}$，反之亦然（见 [1]）。每个判别子簇都具有 EDPC 和 CEP [2]。

定理 3.1。 强非加性极小判别簇有连续统多个。

证明。 设 B 为 N 的有限余有限子集布尔代数

$$B = \{X \subseteq \mathbb{N} :\ X \text{ is finite or cofinite}\},$$

其原子为 $a_n = \{n\}$，余原子为 $b_n = \mathrm{N} - a_n$，而 $u_n = \{0、\ldots\ldots、n\}$ 对应于 $n \in \mathrm{N}$。对于$S \subseteq \mathrm{N} \setminus \{0\}$，定义一元运算 f_S：$B \to B$ 如下：

$$f_S(x) = \begin{cases} b_0 & \text{if } x = \mathbb{N}, \\ b_{n+1} & \text{if } x = b_n, \\ b_n & \text{if } x = a_n, \\ -u_n & \text{if } x = u_n \text{ and } n \in S \ (n \geq 1), \\ \mathbb{N} & \text{if } x = u_n \text{ and } n \notin S \ (n \geq 1), \\ \varnothing & \text{if } x = \varnothing, \\ \mathbb{N} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $\mathfrak{A}_S = (B, f_S)$ 为相应的布尔框架，令 $\mathbf{V}_S = \mathbf{V}(\mathfrak{A}_S)$ 为由 $\mathfrak{A}_S$ 生成的簇。

断言： 每个 $\mathbf{V}_S$ 都是判别子簇。这是因为每个 $\mathfrak{A}_S$ 都有一个切换项

$$d(x) = x \sqcup f(x).$$

事实上，$d(\varnothing) = \varnothing$，并且对任意 $x \neq \varnothing$，$d(x) = \mathrm{N}$。由于 $\mathfrak{A}_S$ 有布尔约化，d 可导出一个判别项（见[1, 2.7]）。由此可知，每个 $\mathbf{V}_S$ 都是判别子簇。

断言： 每个 $\mathbf{V}_S$ 都是极小的。首先注意，整个代数 $\mathfrak{A}_S$ 是由 $\varnothing$ 生成的：

$$b_n = f_S^{(n+1)}(\mathbb{N}), \qquad a_n = -b_n \text{ for } n \in \mathbb{N},$$

因此，布尔运算生成 N 的每个有限子集或余有限子集。接下来，由于 $\mathfrak{A}_S$ 有一个判别项，$\mathfrak{A}_S$ 是单的。考虑簇 $\mathbf{V}_S$ 中由空集生成的自由代数 $\mathfrak{F}_S(\varnothing)$（它存在，因为相似类型包含零元符号）。根据自由代数的泛性质，存在一个典范同态

$$h : \mathfrak{F}_S(\varnothing) \to \mathfrak{A}_S.$$

像是由零元符号生成的 $\mathfrak{A}_S$ 的子代数，而这恰好就是整个 $\mathfrak{A}_S$，因此 h 是满射。由于 $\mathfrak{A}_S$ 生成该簇，若对于两个项 $t^{\mathfrak{A}} = s^{\mathfrak{A}}$ 成立，那么这在自由代数中也成立：$t^{\mathfrak{F}_S(\varnothing)} = s^{\mathfrak{F}_S(\varnothing)}$，这意味着 h 必须是单射。因此，h 是一个同构 $\mathfrak{F}_S(\varnothing) \cong \mathfrak{A}_S$。现在设 $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}_S$ 是一个子簇。那么存在一个典范满射

$$\mathfrak{F}_S(\varnothing) \twoheadrightarrow \mathfrak{F}_{\mathbf{W}}(\varnothing).$$

但由于 $\mathfrak{F}_S(\varnothing) \cong \mathfrak{A}_S$, $\mathfrak{F}_S(\varnothing)$ 是单的，其同态像要么是平凡的，要么就是其自身。如果 $\mathbf{W}$ 是非平凡的，那么 $\mathfrak{F}_{\mathbf{W}}(\varnothing)$ 就是非平凡的，因此

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{W}}(\varnothing) \cong \mathfrak{F}_S(\varnothing) \cong \mathfrak{A}_S.$$

在这种情况下， $\mathfrak{A} \in \mathbf{W}$，因此 $\mathbf{W} = \mathbf{V}_S$，这意味着$\mathbf{V}_S$ 没有真非平凡子簇。

断言： $\mathfrak{A}_S$ 的运算 f_S 不可能与任何加性运算 g相互定义。事实上，若 g 是可加的，并且对于某个项 $\tau \in \mathrm{Term}(\mathrm{Boolean}, g)$，有 $\tau(x) = f_S(x)$，那么根据 Makinson 的 [14, 定理 2]，我们将有 $\mathbf{2} \in \mathbf{V}(\mathfrak{A}_S)$。由$\mathbf{V}_S$的极小性，这将意味着$\mathbf{V}(\mathbf{2}) = \mathbf{V}_S$，这与存在一个无限 $\varnothing$-生成代数 $\mathfrak{A}_S \in \mathbf{V}_S$相矛盾。

断言： 存在连续统多个彼此不同的$\mathbf{V}_S$。对于每个 $n \geq 1$，我们有

$$u_n = \bigsqcup_{i=0}^{n} -f^{(n+1)}(\mathbb{N}),$$

因为 $f^{(n+1)}(\mathbf{N}) = b_i$ 且 $-b_i = a_i$。现在，该等式

$$f(u_n) \sqcap u_n = 0$$

在 $\mathfrak{A}_S$ 中成立，当且仅当 $f_S(u_n) = -u_n$，当且仅当 $n \in S$。因此， $S \mapsto \mathbf{V}_S$ 是单射，从而得到 $2^{\aleph_0}$ 个两两不同的极小判别子簇。 □

实际上，我们证明了更多：Makinson 的结果不仅适用于可加运算，也适用于单调运算。因此，存在连续统多个强非单调的极小判别子簇。这里的强非单调是指，该簇不与任何其中该运算为单调的簇项等价。

定理 3.1 在逻辑中的表述如下。

推论3.2. 存在连续统多个强非可加的（事实上是非单调的）极大模态逻辑，它们具有（全局）演绎分离定理。

接下来我们证明，具有（全局）演绎分离定理的强非可加模态逻辑大量存在。设 $\mathbf{L}^{f(0)=0}$为布尔框架的正规子簇之格，$\mathbf{L}^{f(1)=1}$为满足 $f(\mathbf{1}) = 1$的布尔框架子簇之格，$\mathbf{L}_{sna}$为布尔框架的强非可加子簇之格。

定理 3.3. 存在一个格嵌入函子 $\mathbf{T}: \mathbf{L}^{f(0)=0} \to \mathbf{L}_{sna}$，使得对于布尔框架的每个正规簇 $\mathbf{W}$，$\mathbf{T}(\mathbf{W})$ 都是一个强非可加簇，且

- $\mathbf{T}$ 是单射的，且
- $\mathbf{T}$ 保持 *CEP*、*EDPC* 以及作为判别子簇的性质。

证明。采用约定 $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$，令 $\mathfrak{A}$ 为某个有限 $n \geq 2$ 的代数 $(\mathfrak{P}(n), f)$，其中 f 定义为

$$\varnothing \mapsto n \mapsto \{n-1\} \mapsto \{n-2\} \mapsto \cdots \mapsto \{0\} \mapsto \varnothing$$

并且对于所有其他元素，$f(x) = x$。

断言： $\mathbf{HS}(\mathfrak{A}) = \{\mathbf{1}, \mathfrak{A}\}$。这是显而易见的，因为 $\mathfrak{A}$ 没有真子代数，并且是单的。

断言： $\mathbf{V}(\mathfrak{A})$ 是一个判别子簇，它具有 EDPC 和 CEP。由于 $\mathfrak{A}$ 是单的且没有真子代数，因此它是遗传单的（$\mathfrak{A}$ 的每个子代数都是单的）。每个布尔框架的簇都是算术的，因此根据 Pixley，[2] $\mathfrak{A}$ 是准原始的，进而具有判别项。因此，$\mathbf{V}(\mathfrak{A})$ 是一个判别子簇。每个判别子簇都具有 EDPC 和 CEP，见 [2]。

断言： $\mathfrak{A}$ 是强非可加的。事实上，如果 g 是可加的，并且对于某个项 $\tau \in \mathrm{Term}(\mathrm{Boolean}, g)$，我们有 $\tau(x) = f(x)$，那么根据 Makinson [14, 定理 2]，我们将有 $\mathbf{2} \in \mathbf{HS}(\mathfrak{A})$，这与 $\mathbf{HS}(\mathfrak{A}) = \{\mathbf{1}, \mathfrak{A}\}$ 矛盾。

现在取一个满足 $f(0) = 0$ 的簇 $\mathbf{W}$，并考虑下列簇的并

$$\mathbf{T}(\mathbf{W}) = \mathbf{W} \vee \mathbf{V}(\mathfrak{A}),$$

以及二元项

$$s(x, y) = (x \sqcap -f(0)) \sqcup (y \sqcap f(0)).$$

Then

$$\mathbf{W} \vDash s(x, y) = (x \sqcap -0) \sqcup (y \sqcap 0) = x,$$
$$\mathbf{V}(\mathfrak{A}) \vDash s(x, y) = (x \sqcap -1) \sqcup (y \sqcap 1) = y.$$

这意味着这两个簇是独立的（见 [8]），并且

$$\mathbf{W} \vee \mathbf{V}(\mathfrak{A}) = \mathbf{W} \times \mathbf{V}(\mathfrak{A}).$$

此外，

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}(\mathbf{W}) \wedge \{f(0) = 0\}, \qquad \mathbf{V}(\mathfrak{A}) = \mathbf{T}(\mathbf{W}) \wedge \{f(0) = 1\}.$$

因此运算 $\mathbf{T}$是单射的。这

$$\mathbf{T}(\mathbf{W_1} \vee \mathbf{W_2}) = \mathbf{T}(\mathbf{W_1}) \vee \mathbf{T}(\mathbf{W_2}), \qquad \mathbf{T}(\mathbf{W_1} \wedge \mathbf{W_2}) = \mathbf{T}(\mathbf{W_1}) \wedge \mathbf{T}(\mathbf{W_2})$$

可直接由定义以及$\mathbf{V}(\mathfrak{A})$与任何正规子簇的独立性得出。

剩下要证明的是，$\mathbf{T}$ 保持 EDPC、CEP 以及成为判别子簇的性质。对于 CEP，这是定理 3.2(b) [11]。如果 t_1 和 t_2 分别是$\mathbf{W}$ 和 $\mathbf{V}(\mathfrak{A})$ 中的判别项，那么 $s(t_1, t_2)$ 是$\mathbf{T}(\mathbf{W})$ 中的判别项。对于 EDPC 的保持性，也可以作类似论证，只需注意到同余分配簇（尤其是布尔框架簇）具有 Fraser–Horn 性质：积的同余是矩形的，也就是说，有限个代数的积的同余就是这些代数的同余之积 [7]。

最后，如果将正规性假设 $f(0) = 0$ 替换为 $f(1) = 1$，那么我们只需修改 $\mathfrak{A}$的定义，并通过“反转箭头”来定义 f：

$$\varnothing \mapsto \{0\} \mapsto \{1\} \mapsto \cdots \mapsto \{n-1\} \mapsto n \mapsto \varnothing$$

以及 $f(x) = x$ 对于所有其他元素。 □

推论 3.4。 每个正规模态逻辑都存在一种强非可加的公理化约简；该约简保留局部演绎分离定理，并且当原逻辑具有全局演绎-分离定理时，也保留该定理。对于两两不同的正规模态逻辑，其约简也两两不同。

4. SHhsSH

如果代数 $\mathfrak{A}$ 具有 CEP，那么一个众所周知的推论是 $\mathbf{HS}(\mathfrak{A}) = \mathbf{SH}(\mathfrak{A})$。如果代数类 $\mathbf{K}$ 中的每个**代数** $= \mathbf{SH}$都具有 $\mathbf{K}$，我们就说该类具有**HS** 和**SH**。本节将简要探讨：缺乏 CEP 的布尔框架或簇在多大程度上会**破坏** $= \mathbf{SH}$。我们先给出一个关于同余分配簇中有限积的一般传递结果。

引理 4.1。 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是同余分配簇中的代数。如果

$$\mathbf{HS}(\mathfrak{A}) = \mathbf{SH}(\mathfrak{A}) \qquad \textit{and} \qquad \mathbf{HS}(\mathfrak{B}) = \mathbf{SH}(\mathfrak{B}),$$

then

$$\mathbf{HS}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = \mathbf{SH}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}).$$

特别地，这对布尔框架也成立。

证明。对于每个代数 $\mathfrak{X}$，总有 $\mathbf{SH}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathbf{HS}(\mathfrak{X})$，因此只需证明 $\mathbf{HS}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \subseteq \mathbf{SH}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$。设 $\mathfrak{D} \in \mathbf{HS}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$。则存在一个子代数 $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ 以及一个同余 $\theta \in \mathrm{Con}(\mathfrak{C})$，使得 $\mathfrak{D} \cong \mathfrak{C}/\theta$。设 $\pi_A\colon A \times B \to A$和 $\pi_B\colon A \times B \to B$ 为坐标投影，并定义

$$\alpha = \ker(\pi_A \restriction C), \qquad \beta = \ker(\pi_B \restriction C).$$

由于 $C \subseteq A \times B$，我们有 $\alpha \wedge \beta = \Delta_{\mathfrak{C}}$。考虑同态

$$i : \mathfrak{C}/\theta \longrightarrow \mathfrak{C}/(\theta \vee \alpha) \times \mathfrak{C}/(\theta \vee \beta), \qquad c/\theta \longmapsto \big(c/(\theta \vee \alpha),\, c/(\theta \vee \beta)\big).$$

根据第二同构定理，其核为

$$\ker(i) = {}^{(\theta \vee \alpha) \wedge (\theta \vee \beta)}\!/_{\theta}.$$

由同余分配性，

$$(\theta \vee \alpha) \wedge (\theta \vee \beta) = \theta \vee (\alpha \wedge \beta) = \theta \vee \Delta_{\mathfrak{C}} = \theta.$$

因此 $\ker(i) = \Delta_{\mathfrak{C}/\theta}$，所以 i 是单射。由此可得

$$\mathfrak{C}/\theta \in \mathbf{S}\big(\mathfrak{C}/(\theta \vee \alpha) \times \mathfrak{C}/(\theta \vee \beta)\big).$$

由于 $\theta \le \theta \vee \alpha$，商 $\mathrm{C}/(\theta \vee \alpha)$ 是 C/α 的同态像，因此 $\mathrm{C}/(\theta \vee \alpha) \in \mathbf{H}(C/\alpha)$。但是 $\mathrm{C}/\alpha \cong \pi_A(C)$，且 $\pi_A(\mathrm{C}) \subseteq \mathfrak{A}$。因此

$$\mathfrak{C}/(\theta \vee \alpha) \in \mathbf{HS}(\mathfrak{A}) = \mathbf{SH}(\mathfrak{A}).$$

因此，存在 $\varphi_{\mathfrak{A}} \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$ 和一个子代数 $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}/\varphi_{\mathfrak{A}}$，使得 $\mathrm{C}/(\theta \vee \alpha) \cong \mathfrak{A}_0$。类似地，

$$\mathfrak{C}/(\theta \vee \beta) \in \mathbf{HS}(\mathfrak{B}) = \mathbf{SH}(\mathfrak{B}),$$

因此，存在 $\varphi_{\mathfrak{B}} \in \mathrm{Con}(\mathfrak{B})$ 和一个子代数 $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}/\varphi_{\mathfrak{B}}$，使得 $\mathrm{C}/(\theta \vee \beta) \cong \mathfrak{B}_0$。我们得到 $\mathrm{C}/\theta \in \mathbf{S}(\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{B}_0)$。由于 $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}/\varphi_{\mathfrak{A}}$ 和 $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}/\varphi_{\mathfrak{B}}$，可得

$$\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{B}_0 \subseteq (\mathfrak{A}/\varphi_{\mathfrak{A}}) \times (\mathfrak{B}/\varphi_{\mathfrak{B}}).$$

因此

$$\mathfrak{C}/\theta \in \mathbf{S}\big((\mathfrak{A}/\varphi_{\mathfrak{A}}) \times (\mathfrak{B}/\varphi_{\mathfrak{B}})\big).$$

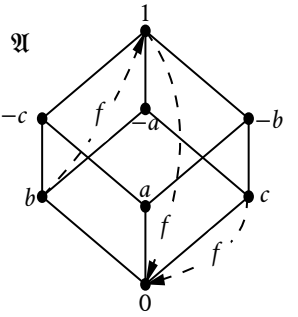
根据同余分配簇的 Fraser-Horn 性质，我们有

$$(\mathfrak{A}/\varphi_{\mathfrak{A}}) \times (\mathfrak{B}/\varphi_{\mathfrak{B}}) \cong (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})/(\varphi_{\mathfrak{A}} \times \varphi_{\mathfrak{B}}),$$

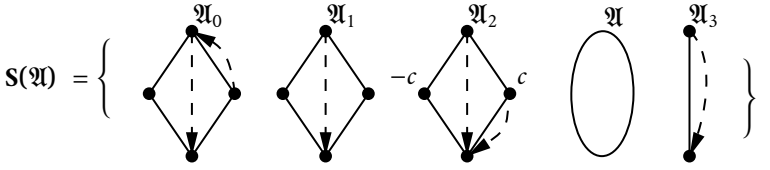
这表明 $(\mathfrak{A}/\varphi_{\mathfrak{A}}) \times (\mathfrak{B}/\varphi_{\mathfrak{B}}) \in \mathbf{H}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$，因此 $\mathrm{C}/\theta \in \mathbf{SH}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$。□

我们将用到下面这个例子。

例 4.2. 令 A为含 8 个元素的布尔代数，并考虑下图所示的布尔框架$\mathfrak{A} = (A, f)$（省略了 f的不动点）：



容易看出，$\mathfrak{A}$ 的子代数包括



此外，$\mathfrak{A}$ 是单的。在$\mathbf{S}(\mathfrak{A})$中，唯一非单的代数是 $\mathfrak{A}_2$，其唯一非平凡同态像为 $\mathfrak{A}_3$。因此$\mathbf{HS}(\mathfrak{A}) = \mathbf{SH}(\mathfrak{A})$。然而，$\mathfrak{A}$ 不具有 CEP：对于 $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}$，产生非平凡同态像的同余 $\{\{-c, 0\}, \{c, 1\}\}$ 无法扩展到 $\mathfrak{A}$中。

利用这个例子，与定理 3.3 类似，我们得到如下结论。

定理 4.3。 存在一个格嵌入函子 $\mathbf{F} : \mathrm{L}^{f(1)=1} \to \mathrm{L}^{sna}$ 使得

- **F**是单射，且
- **F** 保持 **HS** =**SH**，但不满足 *CEP*。

证明。 对于 $\mathbf{W} \in \mathrm{L}^{f(1)=1}$，我们令

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{W} \vee \mathbf{V}(\mathfrak{U}),$$

其中 $\mathfrak{U}$ 来自例 4.2。类似于定理 3.3，利用项可以证明

$$s(x, y) = (x \sqcap f(1)) \sqcup (y \sqcap -f(1)),$$

由此可知 **W** 和 **V**($\mathfrak{U}$) 是独立的，而且 **F** 是一个嵌入。显然，**F**(**W**) 不具有 CEP，因为 $\mathbf{1} \times \mathfrak{U} \in$ **F**(**W**)。事实上，根据 Fraser-Horn 性质，任何形如 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{A}$ 的代数，其中 $\mathfrak{B} \in \mathbf{W}$，都不具有 CEP。由引理 4.1 及这些簇的独立性可知，**F**(**W**) 具有 **HS** = **SH**。 □

推论 4.4。 具有**HS** = **SH**但不具有 *CEP* 的布尔框架的簇有连续统多个。

5. CEP 不是初等的

虽然某些恒等式（例如可加性）可以迫使一个布尔框架具有 CEP，但没有任何恒等式能够迫使一个代数不具有 CEP。原因在于，平凡代数满足每个恒等式并且具有 CEP。当然，存在能够迫使一个代数不具有 CEP 的一阶公式。一个直接的例子是任何描述某个不具有 CEP 的有限代数之同构类型的一阶公式。本节我们将证明，CEP 与非 CEP 之间的分界线（就布尔框架而言）不能由一阶方式定义。形式上：存在初等等价的布尔框架 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$，使得 $\mathfrak{A} \in$ CEP，但 $\mathfrak{B} \notin$ CEP。我们通过构造一个 $\mathfrak{A} \in$ CEP 的代数来达到这一目标，使得其超幂 $\mathfrak{A}^{\omega}/U \notin$ CEP。特别地，这表明 CEP 类不在超幂下封闭。我们构造的例子满足**HS**($\mathfrak{A}$) = **SH**($\mathfrak{A}$)，而 **HS**($\mathfrak{A}^{\omega}/U$) ≠ **SH**($\mathfrak{A}^{\omega}/U$)，这表明比 CEP 更弱的性质 **SH** = **HS**也不在超幂下保持。

取幂集布尔代数 $(\wp(\mathrm{N}), \sqcap, -, \varnothing)$，并通过可加地扩展 $f(\varnothing) = \varnothing$、$f(\{0\}) = \mathrm{N}$ 和 $f(\{n\}) = \{n-1\}$ 来定义算子 $f{:}\wp(\mathrm{N}) \to \wp(\mathrm{N})$，其中 $n \neq 0$。对于 $X \subseteq \mathrm{N}$，当且仅当 $0 \in X$ 时，我们有 $f(X) = \mathrm{N}$。令 $\mathfrak{B} = (\wp(\mathrm{N}), \sqcap, -, \varnothing, f)$ 为对应的布尔框架。

引理 5.1。 $\mathfrak{B}$ 的每个子代数都是单的。

证明。 从任意非空的 $a \in B$ 出发，反复应用 f，即可到达最大元 N。若 $\equiv$ 是子代数的一个同余，且对于该子代数中的某个非空元素 a， $a \equiv \varnothing$

则对某个适当的有限 n，有 $\varnothing \equiv f^n(a) = \mathrm{N}$，由此可知 $\equiv$ 是最大的同余。

□

引理 5.2. 超幂 $\mathfrak{B}^\omega/U$ 不是单的。（U 是一个非主超滤子).

证明。 记作 $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^\omega/U$，并通过对角嵌入将 $\mathfrak{B}$ 视为其在 $\mathfrak{A}$ 中的像。 B 中的元素称为标准元素，而 $A \setminus B$ 中的元素称为非标准元素。称元素 $a = a_i : i < \omega/U$ 有限，若 $\{i : a_i$ 有限$\} \in U$。注意， f 是可加的。令

$$I = \left\{a \in A : \ a \text{ is finite, and if } b \text{ is standard and } b \leq a, \text{ then } b = \varnothing\right\}, \qquad (5.1)$$

也就是说， I 由那些不包含任何标准元素（布尔代数的底元除外）的非标准有限元素组成。这些元素具有这样的性质：对 f 进行任何有限次迭代，都不会得到该代数的最大元。 I 非空，因为 $\{i\} : i < \omega/U \in I$。我们声称 I 是一个同余理想。

I 的向下封闭性是显然的。若 $x \sqcup y$ 包含一个非零标准元素，则它也包含一个标准原子 b。但对于一个原子 b，当且仅当 $b \leq x$ 或 $b \leq y$时，才有 $b \leq x \sqcup y$。因此，若 $x, \ y \in I$，则 $x \sqcup y \in I$。接下来，取$x = x_i : i < \omega/U \in I$，其中 $x_i \subseteq \mathrm{N}$有限。显然， $f(x) \in I$，因此 I 对 f封闭。

最后，只需证明：若 f 是可加的，则一个对 f封闭的理想 I 是同余的。假设 $a \oplus b \in I$。我们需要 $f(a) \oplus f(b) \in I$。由于

$$a \oplus b = (a \sqcap -b) \sqcup (-a \sqcap b)$$

且 I是向下封闭的， $a \sqcap -b, \ -a \sqcap b \in I$。由于 I对 f封闭， $f(a \sqcap -b), \ f(-a \sqcap b) \in I$，然后利用 f 的可加性以及 I 对 $\sqcup$的封闭性，我们得到

$$f(a \oplus b) = f((a \sqcap -b) \sqcup (-a \sqcap b)) = f(a \sqcap -b) \sqcup f(-a \sqcap b) \in I \, .$$

为完成证明，利用 I 的向下封闭性，只需证明$f(a) \oplus f(b) \leq f(a \oplus b)$。特别是，只需证明

$$f(a) \sqcap -f(b) \leq f(a \sqcap -b), \text{ and } -f(a) \sqcap f(b) \leq f(-a \sqcap b).$$

回想一下，每个可加函数都是单调的，因此 $f(x \sqcap y) \leq f(x) \sqcap f(y)$。现在，

$$\begin{aligned} f(a) \sqcap -f(b) &= \big(f(a \sqcap b) \sqcup f(a \sqcap -b)\big) \sqcap -f(b) \\ &= \big(f(a \sqcap b) \sqcap -f(b)\big) \sqcup \big(f(a \sqcap -b) \sqcap -f(b)\big) \\ &= 0 \sqcup \big(f(a \sqcap -b) \sqcap -f(b)\big) \\ &\leq f(a \sqcap -b). \end{aligned}$$

根据对称性，可以得到等式 $-f(a) \sqcap f(b) \leq f(-a \sqcap b)$。 □

到目前为止，我们有一个原子布尔框架 $\mathfrak{B}$，其子代数都是单的，但它的超幂不是单的。接下来，我们定义布尔框架 $\mathfrak{A}$，其布尔代数约化与 $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ 的布尔代数约化相同，而运算 $f\colon (B\times B)\to(B\times B)$ 定义如下：

$$f(a,b)=\begin{cases}(f(a),f(b)) & \text{if } a=b,\\ (1,1) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

也就是说，$\mathfrak{B}$ 作为布尔框架对角嵌入到 $\mathfrak{A}$ 中，并且 f 将不属于 $\mathfrak{B}$ 对角像的每个元素映射到最大元。

引理 5.3。 $\mathfrak{A}$ 具有 *CEP*，因此 $\mathbf{HS}(\mathfrak{A})=\mathbf{SH}(\mathfrak{A})$。

证明。 $\mathfrak{A}$ 具有同余扩张性质，因为 $\mathfrak{A}$ 的每个子代数都是单的：对于任意的 $(a,b)\in A$，都存在一个有限的 n，使得 $f^n(a,b)=(1,1)$。对于 $a\neq b$，这是$n=1$，而对于 $a=b$，这是由 $\mathfrak{B}$的构造得出的。□

引理 5.4。 $\mathbf{HS}(\mathfrak{A}^\omega/U)\neq\mathbf{SH}(\mathfrak{A}^\omega/U)$，因此 $\mathfrak{A}^\omega/U$ 不具有 *CEP*。（U 是一个非主超滤子）。

证明。 $\mathfrak{A}$是原子的，并且$\mathfrak{A}$的每个原子都被f映射到最大元。这是一阶性质，因此在$\mathfrak{A}^\omega/U$中也成立。此外，$f^{\mathfrak{A}}(0)=0$，所以$\mathfrak{A}^\omega/U$是单的，并且$\mathbf{SH}(\mathfrak{A}^\omega/U)=\mathbf{S}(\mathfrak{A}^\omega/U,\ \mathbf{1})$。另一方面，$\mathfrak{A}$ 有一个同构于 $\mathfrak{B}$ 的子代数，因此 $\mathfrak{A}^\omega/U$ 有一个同构于 $\mathfrak{B}^\omega/U$的子代数。根据引理 5.2，这个子代数不是单的，因此它存在一个同余，该同余不能扩张为$\mathfrak{A}^\omega/U$的同余。这直接表明 CEP 不成立，但要证明更强的结论，还需要多做一些工作。令 Θ 为与（5.1）中的理想 I 对应的同余，即

$$\langle a,b\rangle\in\Theta\Leftrightarrow a\oplus b\in I.$$

写作 $\mathsf{C}=\mathfrak{B}^\omega/U$，然后写作 $\mathsf{C}/\Theta\in\mathbf{HS}(\mathfrak{A}^\omega/U)$。现在考虑$\mathfrak{B}^\omega$中的以下元素：

$$e=\big\langle\{2n+i:n\in\omega\}:i\in 2\mathbb{N}\setminus\{0\}\big\rangle,\quad o=\big\langle\{2n+1+i:n\in\omega\}:i\in 2\mathbb{N}\big\rangle.$$

那么，对于

$$e/U=\big\langle\{2,4,6,\dots\},\{4,6,8,\dots\},\{6,8,10,\dots\},\dots\big\rangle/U,\text{ and}$$
$$o/U=\big\langle\{1,3,5,\dots\},\{3,5,7,\dots\},\{5,7,9,\dots\},\dots\big\rangle/U$$

我们有 $(e/U)/\Theta\neq(o/U)/\Theta$，因为 $\{n\in\omega:\ |e_n\oplus o_n|\text{ 是无限的}\}\in U$。容易看出，$f\,\mathsf{c}(e/U)=o/U$，因此 $f\mathsf{c}/^{\Theta}((e/U)/\Theta)=(o/U)/\Theta$。我们还证明了$f\mathsf{c}/^{\Theta}((o/U)/\Theta)=(e/U)/\Theta$。为此，首先注意到

$$f^{\mathfrak{C}}(o/U)=\big\langle\{0,2,4,\dots\},\{2,4,6,\dots\},\{4,6,8,\dots\},\dots\big\rangle/U,$$

并且对于每个 $n\in\omega$，我们都有 $f^{\mathfrak{B}}(o_n)\oplus e_n=\{2n\}$。因此，$\{n\in\omega:\ |f^{\mathfrak{B}}(o_n)\oplus e_n|\text{是有限的}\}\in U$。由此可知，$f\mathsf{c}/^{\Theta}((o/U)/\Theta)=(f\mathsf{c}(o/U))/\Theta=(e/U)/\Theta$。因此，在 C/Θ 中，我们找到了不同的元素 a,b，对于这些元素，$f(a)=b$ 且 $f(b)=a$，而

在 $\mathfrak{A}^{\omega}/U$ 中不存在这样的元素。这意味着 $C/\Theta \notin \mathbf{S}(\mathfrak{A}^{\omega}/U,\mathbf{1})$，因此$\mathbf{HS}(\mathfrak{A}^{\omega}/U) \neq \mathbf{SH}(\mathfrak{A}^{\omega}/U)$。 □

令 CEP 表示具有同余扩张性质的布尔框架类。

定理 5.5。 *CEP* 及其补类都不是初等的。

证明。 $\mathfrak{A} \in \mathrm{CEP}$ 与 $\mathfrak{A}^{\omega}/U \notin \mathrm{CEP}$ 初等等价。 □

CEP 的补类在超幂下封闭，这一点可以如下看出。任取一个代数 $\mathfrak{A} \notin \mathrm{CEP}$，并令 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ 为其子代数，满足 $\Theta \in \mathrm{Con}(\mathfrak{B})$，且 Θ 不能扩张为 $\mathfrak{A}$ 的一个同余。由于 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 可以对角嵌入到任意超幂 $\mathfrak{A}^{I}/U$ 中，若 $\mathfrak{A}^{I}/U$ 具有同余扩张性质，那么 Θ 就能扩张为 $\Psi \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A}^{I}/U)$ 的一个同余。但这样一来，$\Psi \cap (A \times A)$ 就会是 $\mathfrak{A}$ 的一个同余，并且扩张 Θ，这与假设矛盾。我们不知道 CEP 的补类是否在超积下封闭。

在具有无限多个一元运算的布尔代数类中，很容易构造出不具有 CEP 的代数 $\mathfrak{A}_i$，使得它们的超积 $\Pi_{i\in I}\mathfrak{A}_i/U$ 具有 CEP。具体来说，设 $\mathfrak{A}_i = (A、f_0^i、\ldots\ldots、f_n^i\ldots\ldots)$，其中除 f_i^i 外，所有 f_n^i 都是可加的，而 f_i^i 会导致 $\mathfrak{A}_i$ 不具有 CEP。于是，在 $\Pi_{i\in I}\mathfrak{A}_i/U$ 中，每个运算都是可加的，从而确保该超积具有 CEP。

问题 5.6。 是否存在这样的布尔框架 $\mathfrak{A}_i$（或带有有限多个额外一元函数的布尔代数），使得每个 $\mathfrak{A}_i$ 都不具有 *CEP*，而超积 $\Pi_{i\in I}\mathfrak{A}_i/U$ 却具有 *CEP*?

为了处理超积的同余扩张性质，如果能对同余的生成给出某种一致上界，将会很有帮助。我们所能得到的最接近这一目标的结果如下，它本身或许也颇有意义：对于布尔框架的 CEP，只需检验二生成子代数的主同余是否能够扩张到整个代数。

定理 5.7。 布尔框架 $\mathfrak{A}$ 具有 *CEP*，当且仅当每个 2 生成子代数的每个主同余都能扩张为 $\mathfrak{A}$的一个同余。

证明。 我们将证明分成几个引理。

引理 5.8。 对于布尔框架 $\mathfrak{A}$ 及主同余 $\Theta, \Psi \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$，其并$\Theta \vee \Psi \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$是一个主同余。

证明。 由于对于主同余 $\Theta(a,b)$，我们有 $\Theta(a,b) = \Theta(a \oplus b,0)$，因此只需证明

$$\Theta(x,0) \vee \Theta(y,0) = \Theta(x \vee y,0).$$

这由布尔结构推出：$(x \vee y, 0) \in \Theta(x \vee y, 0)$，然后利用$x, y \leq x \vee y$我们还有 $(x, 0)$、$(y, 0) \in \Theta(x \vee y, 0)$，因此 $\Theta(x, 0) \vee \Theta(y, 0) \subseteq \Theta(x \vee y, 0)$。另一方面，$(x, 0)$、$(y, 0) \in \Theta(x, 0) \vee \Theta(y, 0)$，因此 $(x \vee y, 0) \in \Theta(x, 0) \vee \Theta(y, 0)$，这表明 $\Theta(x \vee y, 0) \subseteq \Theta(x, 0) \vee \Theta(y, 0)$。□

引理5.9。 对于一个布尔框架 $\mathfrak{A}$ 以及主同余 $\Theta_i \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$ $(i \in I)$，其并集 $\bigcup_{i\in I} \Theta_i$ 是 $\mathfrak{A}$的同余。

证明。 根据引理 5.8，系统 $\{\Theta_i : i \in I\}$ 是一个向上有向系统的同余。对于任意代数闭包运算（特别是取生成同余的闭包运算），向上有向的闭集集合的并仍然是闭集（见 [2]）。因此

$$\bigcup_{i\in I} \Theta_i = \bigvee_{i\in I} \Theta_i \ \mathrm{Con}(\mathfrak{A}).$$

□

设 $\mathfrak{B}$ 是布尔框架 $\mathfrak{A}$ 的子代数，并设 $\Theta^{\mathfrak{B}}(x, y) \in \mathrm{Con}(\mathfrak{B})$ 是一个主同余。如果 $\Theta^{\mathfrak{B}}(x, y)$ 可扩展为 $\mathfrak{A}$ 的一个同余，那么 $\Theta^{\mathfrak{A}}(x, y)$ 就是这样的扩展，即 $\Theta^{\mathfrak{B}}(x, y) = \Theta^{\mathfrak{A}}(x, y) \cap (B \times B)$。

引理 5.10。 布尔框架 $\mathfrak{A}$ 具有 *CEP*，当且仅当它具有 *PCEP*。

证明。 CEP 蕴含 PCEP 是显然的。反过来，假设 $\mathfrak{A}$ 具有 PCEP。取一个子代数 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ 和一个同余 $\Theta^{\mathfrak{B}}$。那么

$$\begin{aligned}\Theta^{\mathfrak{B}} &= \bigcup_{(x,y)\in\Theta} \Theta^{\mathfrak{B}}(x, y) \overset{\mathrm{PCEP}}{=} \bigcup_{(x,y)\in\Theta} \left(\Theta^{\mathfrak{A}}(x, y) \cap (B \times B)\right) \\ &= \left(\bigcup_{(x,y)\in\Theta} \Theta^{\mathfrak{A}}(x, y)\right) \cap (B \times B).\end{aligned}$$

根据引理 5.9，后一个并集是一个同余。 □

回到定理 5.7 的证明，设 $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$，并设 $a, b \in B$。我们必须证明，主同余 $\mathrm{Cg}^{\mathfrak{B}}(a, b)$ 可以扩展为 $\mathfrak{A}$ 的一个同余。反设 $\mathrm{Cg}^{\mathfrak{B}}(a, b)$ 不能扩展为 $\mathfrak{A}$ 的同余。那么

$$\mathrm{Cg}^{\mathfrak{A}}(a, b) \cap (B \times B) \neq \mathrm{Cg}^{\mathfrak{B}}(a, b),$$

因此存在 $c, d \in B$ 使得

$$(c, d) \in \mathrm{Cg}^{\mathfrak{A}}(a, b) \qquad \text{but} \qquad (c, d) \notin \mathrm{Cg}^{\mathfrak{B}}(a, b),$$

等价地，

$$(c \oplus d, 0) \in \mathrm{Cg}^{\mathfrak{A}}(a \oplus b, 0) \qquad \text{but} \qquad (c \oplus d, 0) \notin \mathrm{Cg}^{\mathfrak{B}}(a \oplus b, 0). \tag{5.2}$$

现在考虑子代数 $\mathfrak{C} = \mathrm{Sg}^{\mathfrak{B}}(\{a \oplus b, c \oplus d\})$。它是二生成的，因此根据假设，主同余 $\mathrm{Cg}^{\mathfrak{C}}(a \oplus b, 0)$ 可扩张为某个同余 $\Phi \in \mathrm{Con}(\mathfrak{A})$。由于 $(a \oplus b, 0) \in \Phi$，根据在 $\mathfrak{A}$ 中由 $(a \oplus b, 0)$ 生成的主同余的极小性，$\mathrm{Cg}^{\mathfrak{A}}(a \oplus b, 0) \subseteq \Phi$。由于 $(c \oplus d, 0) \in \mathrm{Cg}^{\mathfrak{A}}(a \oplus b, 0)$，我们得到 $(c \oplus d, 0) \in \Phi$。现在 $c \oplus d \in C$，而 Φ 扩张了 $\mathrm{Cg}^{\mathfrak{C}}(a \oplus b, 0)$，因此

$$(c \oplus d, 0) \in \Phi \cap (C \times C) = \mathrm{Cg}^{\mathfrak{C}}(a \oplus b, 0).$$

另一方面，$\mathrm{Cg}^{\mathfrak{C}}(a \oplus b,\ 0) \subseteq \mathrm{Cg}^{\mathfrak{B}}(a \oplus b,\ 0)$，因为 $\mathrm{Cg}^{\mathfrak{B}}(a \oplus b,\ 0)$ 在 C 上的限制是 C 的一个包含 $(a \oplus b,\ 0)$ 的同余。因此 $(c \oplus d,\ 0) \in \mathrm{Cg}^{\mathfrak{B}}(a \oplus b,\ 0)$，这与 (5.2) 矛盾。□

致谢

研究部分由匈牙利国家研究、发展与创新办公室资助，合同编号：K-134275 和 K-152165；另由波兰国家科学中心项目 2022/47/B/HS1/01581 资助。

参考文献

[1] Andréka, H., Gyenis, Z., Németi, I., Sain, I.：《普遍代数逻辑》，第1版。普遍逻辑研究。Birkhauser Cham（2022）。DOI 10.1007/978-3-031-14887-3[2] Burris, S., Sankappanavar, H.P.：《普遍代数教程》，数学研究生教材，第78卷。施普林格，柏林（1981）。DOI 10.1007/978-1-4613-8130-3[3] Chagrov, A., Zakharyaschev, M.：《模态逻辑》。牛津逻辑指南。克拉伦登出版社（1997）[4] Czelakowski, J.：演绎定理的代数方面。《逻辑学研究》**44(4)**，369–387（1985）。DOI 10.1007/bf00370428[5] Czelakowski, J.：局部演绎定理。《逻辑学研究》**45(4)**，377–391（1986）。DOI 10.1007/bf00370271[6] Font, J.：《抽象代数逻辑：入门教材》，逻辑、数理逻辑与基础研究，第60卷。College Publications，伦敦（2016）。DOI 0.1093/logcom/exu015[7] Fraser, G., Horn, A.：直积中的同余关系。《美国数学会会刊》**26**，390–394（1970）[8] Grätzer, G., Lakser, H., Płonka, J.：等式类的并与直积。《加拿大数学通报》**12**，741–744（1969）[9] Gyenis, Z., Molnár, Z.：不具备同余扩张性质的模态代数簇。《圣母大学形式逻辑杂志》**即将出版**（2026）。URL https://arxi*v*. org/pdf/2402.07293[10] Hansson, B., Gärdenfors, P.：内涵语义学指南。载于：S. Halldén（编）《模态、道德及意义与无意义的其他问题》，第151–167页。隆德，Gleerup（1973）[11] Kiss, E., Márki, L., Pröhle, P., Tholen, W.：范畴代数性质。关于合并、同余扩张、满态射、剩余小性和内射性的概要。《匈牙利数学科学研究》**18**，79–141（1983）[12] Kowalski, T.：关于模态代数拟簇的一点说明。《逻辑学分部通报》**29(1)**（2000）[13] Krawczyk, K.A.：同余模态逻辑中的演绎定理。《圣母大学形式逻辑杂志》**64(2)**，185–196（2023）。DOI 10.1215/00294527-10670082[14] Makinson, D.：模态逻辑的一些嵌入定理。《圣母大学形式逻辑杂志》**12(2)**，252–254（1971）

[15] Miyazaki, Y.：包含 ktb 且满足某些有限性条件的正规模态逻辑。载于：R. Schmidt, I. Pratt-Hartmann,M. Reynolds,H.Wansing（编）《模态逻辑进展》，第5卷，第171–190页。CSLI Publications（2005）
[16] Ono, H.：《逻辑中的证明论与代数》。Springer Singapore，新加坡（2019）

Zalán Gyenis*雅盖隆大学，格罗兹卡街52号，31-007 克拉科夫，波兰 电子邮箱：zalan.gyenis@uj.edu.pl

Zalán Molnár 厄特沃什·罗兰大学，博物馆大道4/a号，1088 布达佩斯，匈牙利 电子邮箱：mozaag@gmail.com

Övge Öztürk 约兹加特博佐克大学，恰帕诺奥卢街区杰米尔·奇切克街217/1号，66100 约兹加特，土耳其 电子邮箱：ovgeovge@gmail.com