arXiv:2603.17848v1 [math.AT] 18 Mar 2026

实全局等变 Segal–Becker 分裂、显式 Brauer 归纳与全局 Adams 运算

STEFAN SCHWEDE

Abstract. 我们证明了全局等变同伦论中的一个分裂结果，它同时推广了 Segal–Becker 分裂及其“实”推广和等变推广，以及 Boltje 和 Symonds 的显式 Brauer 归纳。我们证明，从 $\Sigma^\infty_+ B_{\mathrm{gl}}U(1)$ 到实全局 K 理论谱的超交换实全局环谱态射（该谱将典范实 $U(1)$-表示分类）在底层实全局无限环空间上存在截面。我们证明，这个全局 Segal–Becker 分裂在等变上同调理论上诱导经典的 Segal–Becker 分裂，并在等变同伦群上诱导 Boltje–Symonds 显式 Brauer 归纳。作为应用，我们将实等变 K 理论中的不稳定 Adams 运算刚性化为实全局空间 $\mathbf{BUP}$ 上的全局自映射。

2020 年数学主题分类：19L47, 55N91, 55P91, 55Q91

Contents

引言 1
1. C-全局稳定分裂 U 6 2. U 12 中等变稳定同伦类之间的关系 3. 全局分裂与特征空间态射的相互作用 18 4. 全局 Segal–Becker 分裂 22 5. G-等变 Segal–Becker 分裂与显式 Brauer 归纳 31 6. 全局 Adams 运算 37 附录 A. 某些 C-全局同伦论 41 附录 B. 实全局 K 理论 48 参考文献 70

Introduction

本文旨在确立等变同伦论关键对象之一——实全局 K 理论谱$\mathbf{KR}$——的一项基本性质。该谱表征等变复 K 理论及其实等变推广。更具体地说，我们证明了全局等变同伦论中的一个分裂结果，它同时细化并推广了 Segal–Becker 分裂 [6, 29],、其等变扩张 [10, 14], 、其“实”推广 [22], ，以及 Boltje[7] 和 Symonds [34] 的显式 Brauer 归纳。在实方向和等变方向并存的情况下，我们的分裂揭示了一种微妙的可加性偏离，这与 Segal–Becker 分裂的实等变版本 [14, 定理 1’] 不一致。

我们的主要研究对象是超交换实全局环谱之间的一个态射 $\eta\colon \Sigma^\infty_+\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{KR}$，它从实全局空间 $\mathbf{P}$ 的非约化悬挂谱出发；该空间是 $U(1)$ 的全局分类空间的一个乘法模型，也是 $\mathbb{C}P^\infty$ 的全局精化，并映入实全局 K 理论谱。我们构造了实全局无限环空间之间态射 $\Omega^\bullet(\eta)\colon \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}) \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathbf{KR})$ 的一个截面，它是一个实全局

σ-环路映射。我们证明，这个全局 *Segal–Becker* 分裂在等变上同调理论上诱导经典的 Segal–Becker 分裂，并且在等变同伦群上诱导 Boltje–Symonds 显式 Brauer 归纳。作为应用，我们将等变 K 理论中的不稳定 Adams 运算刚性化为表示实全局空间$\mathbf{BUP}$的实全局自映射。

为说明我们的结果所处的背景，我们简要回顾 Segal–Becker 分裂的历史。其源头是这样一个论断：从无限复射影空间的悬挂谱到复 K 理论谱的态射 $\Sigma^\infty_+\mathbb{C}P^\infty \longrightarrow KU$（它将无限复射影空间上的典范线丛 $\mathbb{C}P^\infty$ 分类），在经过无限循环空间后，存在一个由一次环路映射给出的截面。该定理尤其意味着，空间上的 0 次上同调理论之间的变换是一个分裂满同态，关于这一主题的若干论文也以这种形式表述该分裂。最初的分裂定理由 Segal 在 [29] 中针对复 K 理论证明。Becker 在 [6] 中给出了另一种证明，同时也为实 K 理论和辛 K 理论提供了分裂。Segal 的构造对每个素数 p 都产生 p-完备映射，随后通过算术方块将它们拼合起来；关于这一主题的其他所有文献都以某种形式使用转移来构造相关分裂。众所周知，$\Omega^\infty(\Sigma^\infty_+\mathbb{C}P^\infty)$ 到 $\Omega^\infty KU \simeq \mathbb{Z}\times BU$ 的截面 $\longrightarrow$ 可以安排为一个环路映射，但它不会去环路化两次；我们在注 4.13 中回顾一种论证。

有限群的 Segal–Becker 分裂的等变推广由 Iriye 和 Kono [14, 定理 1]给出。Crabb 的论文 [10]提供了一个特别出色的阐述，适用于所有紧李群；我们将在构造 5.1 中回顾这一内容，并在其中将其推广到 Real-等变背景。在[22], 中，Nagata、Nishida 和 Toda 证明了一个 Segal 分裂的版本，适用于 Atiyah 意义下的 Real K 理论[2], ，即由带有对合的空间上的复向量丛构造而成，并配备纤维逐点共轭线性对合的 K 理论。在底层的非等变空间上，这一结果还原为复 K 理论的 Segal 分裂；取 C_2-不动点可得到实 K 理论的 Becker 分裂。 [16]给出了动机同伦论中 Segal–Becker 分裂的一个版本，其中以代数 K 理论取代拓扑 K 理论。

Kono [19], 提出了实分裂的另一种证明，此后不久，Iriye˜和 Kono [14, 将定理 1’] 推广到 $G = G\rtimes_\tau C$ 有限群 G 与乘法对合 τ的半直积。然而，正如我在备注 5.13 中解释的那样，该论文 [19] 及其具体结果——定理 1’]——因忽略了存在实方向时转移构造的非可加性而有误。

现在，我们更详细地概述自己的结果。全文中，我们用 C =Gal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$) 表示 $\mathbb{C}$ 关于 $\mathbb{R}$的伽罗瓦群，它是一个含有两个元素的群。我们的结果属于不稳定和稳定C-全局同伦范畴。在本文中，增广李群 是从紧李群到伽罗瓦群的连续同态$\alpha\colon\ G \longrightarrow C$ 。增广李群对于 C-全局同伦论的作用，犹如紧李群对于全局同伦论的作用：每个增广李群都编码了一种将 G-同伦类型赋予每个 C-全局同伦类型的方式；而沿所有增广李群的限制共同构成保守族。增广李群分为两个不相交的类：平凡增广群共同保留底层的“非实”全局同伦类型；满射增广则编码“真正实”的方面。

分类 $\mathbb{C}P^\infty$ 上典范线丛的非等变态射 $\Sigma^\infty_+\mathbb{C}P^\infty \longrightarrow KU$，有一个特别优美且重要的提升，可成为 C-全局环谱之间的态射

$$\eta\ :\ \Sigma^\infty_+\mathbf{P}\ \longrightarrow\ \mathbf{KR}\ .$$

全局 K-理论谱由 Joachim 引入 [15], 另见 [24, 构造 6.4。9]或构造 B.43；对于每个紧李群 G，$\mathbf{KR}$ 的底层真 G-谱表示G-等变复 K 理论，参见 [15, 定理 4。4] 或 [24, 推论 6.4。23]。Halladay 和 Kamel 首先研究了 $\mathbf{KR}$ 上的复共轭对合 [12, 第 6], 节，他们证明由此得到的真 C-谱是 Atiyah 实 K-理论谱的模型。我们在定理 B.52 中证明，$\mathbf{KR}$ 值得被称为

「实全局 K 理论谱」：对于每个增广李群 $\alpha\colon\ G \longrightarrow C$，真$G$-谱 $\alpha^*\mathbf{(KR)}$ 表示 α-等变实 K 理论 KR_α。

C-全局空间 P 是 $\mathbb{C}P^\infty$ 的一种特定全局精化，由复向量空间的射影空间构造而成，参见构造 4.1。P 的底层 G-等变同伦类型是一个完备复 G-全集的射影空间，并带有由复共轭给出的对合。它是扩张圆群 $U(1) = U(1) \rtimes \tilde{C}$ 的 C- 全局 $\tilde{}$ 分类空间；在本文中，我们将始终用 T 表示该群。因而，非约化悬挂谱 $\Sigma^\infty_+\mathbf{P}$ 表示 π_0^T 在 C-全局稳定同伦范畴上的函子；比较 [25, 定理 A.17]。态射η 具有极其丰富的结构，并拥有许多卓越性质。它是超-$\tilde{}$交换 C-环谱的态射，将 $\pi_0^T(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 中的泛元映到 $\pi_0^{\tilde{T}}(\mathbf{KR}) \cong RR(\tilde{T})$ 中典范 Real $\tilde{T}$-表示的类。作为超交换环谱的态射，η 对等变同伦群的作用不仅与限制、膨胀和转移相容，也与乘积、乘法幂运算和范数相容。在 [27], 中，我建立了 Snaith 著名定理 [31, 32], 的一个全局精化与推广。该定理指出，KU 可通过“倒置 Bott 类”从 $\Sigma^\infty_+\mathbb{C}P^\infty$ 得到：态射 $\eta\colon\ \Sigma^\infty_+\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{KR}$ 在 ∞-范畴中是初始的；该范畴由从 $\Sigma^\infty_+\mathbf{P}$ 出发、并将 $\pi_{\nu_n}^{U(n)}(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 中一族特定表示分次等变同伦类（即预 Bott 类）倒置的超交换环谱态射组成，对所有 $n \geq 1$ 均成立。

C-全局空间$\mathbf{U}$ 是无限酉群的一种特定全局精化，由所有厄米内积空间的酉群构造而成，参见构造 B.17。$\mathbf{U}$ 底层的 G-等变同伦类型是完备复 G-全集上的酉群，其对合由复共轭给出。C-全局空间$\mathbf{U}$ 出现在 Bott 周期性的实全局精化中，其中有一个 C-全局等价 $\Omega^\sigma\mathbf{U} \sim \mathbf{BUP}$，参见定理 B.24。在构造 4.4 中，我们使用$\Sigma^\infty_+\mathbf{U}$ 的 C-全局稳定分裂（见 [25, 定理 4.10] ）来构造一个态射

$$d\ :\ \mathbf{U}\ \longrightarrow\ \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}))$$

它处于不稳定的 C-全局同伦范畴中，是我们对全局 Segal–Becker 分裂所作的 σ-去环路化。这里，“sh$^\sigma$”表示正交 C-谱沿符号表示的移位，参见 [24, 构造 3.1.21]。沿 σ 移位与沿 S^σ悬挂在实全局意义下等价，参见 [24, 命题 3.1.25 (ii)]。分裂性质是我们的第一个主要结果，将作为定理 4.7 证明：

定理 A。复合映射

$$\mathbf{U}\ \xrightarrow{d}\ \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}))\ \xrightarrow{\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\eta)}\ \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{KR})$$

是一个 C-全局等价。

正如我们还将证明的，定理 A 中的复合映射 $\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\eta)\circ d$ 不仅是任意一个 C-全局等价，而且与定理 B.49 中建立的 $\mathbf{U}$ 的“优选无限去环化”相一致。事实上，证明定理 A 的全部工作，正是为了确切地说明这一点。论证的核心是全局稳定分裂与 $\mathbf{U}$的优选去环化之间一种微妙的联系；这两者原本并无关联。正如我们在定理 3.3 中所示，优选无限去环化的伴随映射 $\Sigma^\infty\mathbf{U} \longrightarrow \mathrm{sh}^\sigma\mathbf{KR}$ 会消去全局稳定分裂 (1.1) 的高阶项。

C-全局空间$\mathbf{BUP}$是 $\mathbb{Z}\times BU$ 及其由复共轭所诱导的对合的实全局精化，参见构造 B.3。根据定理 B.12，$\mathbf{BUP}$ 表示实等变 K 理论。正如 $\mathbb{Z}\times BU$ 是拓扑 K 理论谱 KU的无限循环空间一样，全局空间 $\mathbf{BUP}$ “是”$\mathbf{KR}$的实全局无限循环空间，精确表述见定理 B.52。将态射$d\colon\ \mathbf{U} \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}))$按符号表示取环空间，并与式 (B.26) 中的波提周期性等价$\mathbf{BUP} \sim\Omega^\sigma\mathbf{U}$ 复合，便得到不稳定 C-全局同伦范畴中的另一个态射

$$c\ :\ \mathbf{BUP}\ \longrightarrow\ \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})\ ,$$

即全局 *Segal–Becker* 分裂 (4.10)。按构造，态射 c是实全局 σ-环路映射。其分裂性质（将在定理 4.12 中证明）是定理 A 的直接推论：

定理 B。复合映射

$$\mathbf{BUP} \xrightarrow{c} \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}) \xrightarrow{\Omega^\bullet(\eta)} \Omega^\bullet(\mathbf{KR})$$

是一个 C-全局等价。

与定理 A 中的情形类似，定理 B 中的复合映射 $\Omega^\bullet(\eta)\circ c$ 并非任意一个 C-全局等价，而是与定理 B.52 中确立的「优选无限去环化」 $\Theta\colon \mathbf{BUP} \sim \Omega^\bullet(\mathbf{KR}) \sim$ 相吻合。

存在截面的态射往往有许多不同的截面。我们的下一个结果说明，全局 Segal–Becker 分裂 $c\colon \mathbf{BUP} \longrightarrow \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 是 $\Omega^\bullet(\eta)$ 的「正确」分裂：它细化了经典等变 Segal–Becker 分裂，也因此解释了这一名称。后者是在等变上同调理论的层面上定义的；我们将在构造 5.1 和 (5.11) 中回顾它们，并用 $\vartheta_{\alpha,A}$ 表示。我们在定理 5.12 中证明如下结论：

定理 C。对于每个增广李群 $\alpha\colon \ G \longrightarrow C$ 以及每个有限 G-*CW* 复形 A，映射$[A,c]^\alpha\colon \ [A,\mathbf{BUP}]^\alpha \longrightarrow [A,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^\alpha$ 与以下复合映射相同

$$[A,\mathbf{BUP}]^\alpha \ \cong \ KR_\alpha(A) \xrightarrow{\vartheta_{\alpha,A}} \ [A,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^\alpha \ .$$

群 $[A,\mathbf{BUP}]^\alpha$ 与实等变 K 群 $KR_\alpha(A)$ 之间未指明的同构将在构造 B.6 中回顾。群 $[A,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^\alpha$ 同构于 G-等变稳定同伦范畴中从 Σ^∞_+A 到某个分类 G-空间的态射群，该空间分类 α-等变 Real 线丛。

为满射增广李群构造等变 Segal–Becker 分裂时，有一个可能令人惊讶的微妙之处。在先前文献中，例如 [10], ，这一构造大多是在没有任何“实”方向的情形下讨论的，也就是说，没有任何到 $C = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ 的增广；因此这一微妙之处并不显现。没有实方向时，我们考虑的是复 G-向量丛，而基于转移的分裂对向量丛的 Whitney 和具有可加性，参见例如 [10,引理 2.6]。因此，利用格罗滕迪克群的泛性质，从向量丛扩展到格罗滕迪克群是直接的。正如我在注 5.5 中所示，将 Segal–Becker 分裂直接扩展到满射增广李群时，对实等变向量丛的 Whitney 和并不具有可加性 。由于可加性失效，如何有意义地将这一构造扩展到虚向量丛（即格罗滕迪克群）就不那么显而易见了。所幸的是，Segal–Becker 分裂具有一种略弱于可加性的性质，详见推论 5.8。这种“弱可加性”仍使其能够良定义地扩展到格罗滕迪克群，见 (5.11)。我认为这种非可加性是实等变 Segal–Becker 分裂的特点，而非缺陷；它与我们的全局 Segal–Becker 分裂是一个 σ-环路映射、但不是普通环路映射这一事实密切相关，只要存在真正的实方向便是如此。

定理 B 和定理 C 中的实全局分裂，通过特化（即应用从实全局同伦论到 G等变同伦论的适当遗忘函子），蕴含或修正了上述分裂结果：定理 B 的底层非等变分裂重现了 Segal 和 Becker 的原始结果，而定理 A 甚至给出了该分裂的脱环。遗忘实方向并转入有限群 G的非稳定 G同伦范畴，即可得到 Iriye–Kono 的等变分裂 [14]。对于一般的紧李群，我们得到 Crabb 论文 [10]中的等变 Segal–Becker 分裂；同样，定理 A 也给出了该等变分裂的脱环。

保留实方向并忘却等变性，基本上就能得到 Nagata、Nishida 和 Toda 的定理 [22, 定理 1.1]。但有两点需要注意：首先，该论文 [22]讨论的是 Real K 理论和 $\Sigma^\infty_+\mathbf{P}$-上同调的约化版本。其次，我们得到的截面并非

可加的，见例 4.23。 [22] 中的构造与我们的构造大不相同，因此我不知道 Nagata、Nishida 和 Toda 的分裂与我们的分裂有何关系。对于一般的满射增广李群，我们的分裂解决了 [14, 定理 1'] 中的问题：我们得到了一个自然截面，尽管它不是可加的；更多信息见备注 5.13。我不知道在 Real-等变背景下，满射增广李群是否存在可加的 自然截面；我没有证据支持这种预期。

在等变同伦群上，全局 Segal–Becker 分裂导出了 Boltje [7] 和 Symonds [34]所称的显式 *Brauer* 归纳。我们将在备注 5.15 中回顾这一结果以及显式 Brauer 归纳的历史。以下结果将作为推论 5.20 得到证明。

定理 D。对于每个紧李群 G，复合映射

$$R(G) \;\cong\; \pi_0^G(\mathbf{BUP}) \xrightarrow{\pi_0^G(c)} \pi_0^G(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}) \;\cong\; \mathbf{A}(T,G)$$

就是 *Boltje–Symonds* 显式 *Brauer* 归纳。

作为全局 Segal–Becker 分裂的一个应用，我们构造了等变 K 理论上不稳定 Adams 运算的全局刚化。在 (6.5) 中，我们定义了 n 阶全局 *Adams* 运算

$$\Upsilon^n \;:\; \mathbf{BUP} \;\longrightarrow\; \mathbf{BUP}\;,$$

对于 $n \geq 1$。这些全局 Adams 运算是 C-全局不稳定同伦范畴中的态射，它们作为实全局 σ-环路映射出现，而其脱环是 $\mathbf{U}$ 的某些自同态。以下结果作为定理 6.9 得到证明，它说明了将其称为全局 Adams 运算的合理性：

定理 E. 对于每个增广李群 $\alpha\colon\ G \longrightarrow C$、每个有限的 G-*CW* 复形 A 以及每个$n \geq 1$，以下方块交换：

$$\begin{array}{ccc} [A,\mathbf{BUP}]^\alpha & \xrightarrow{[A,\Upsilon^n]^\alpha} & [A,\mathbf{BUP}]^\alpha \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ KR_\alpha(A) & \xrightarrow[\psi^n]{} & KR_\alpha(A) \end{array}$$

这里，ψ^n 是实等变 *K* 理论上的第 n 个 *Adams* 运算。

本文最后有两个附录。附录 A 发展了现有资料 [25, Appendix A] 和 [5]未涵盖的不稳定 C-全局同伦论的一些内容。在附录 B 中，我们将有关全局 K 理论的若干结果推广到实全局语境。

约定。 全文中，我们用 $C = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{R}$上的伽罗瓦群。我们采用 [25, 附录 A]和 [5, 附录 A]中的模型来表示不稳定和稳定的 C-全局同伦类型。因此， C-全局空间由正交 C-空间表示，参见定义 A.1 ；这里采用的是 [25, 定义 A.2] 和 [5, 定义 3.2] 中引入的 C- 全局等价概念。 C- 全局谱则由正交 C-谱表示，这里采用的是 [25, 定义 A.6]中引入的 C-全局等价概念。由于群 C 的非单位元总是以某种方式作用为复共轭，并且本文中的 C-作用总是编码共轭线性现象，因此我们也将使用“实全局”一词作为“C-全局”的同义词。因此，我们的全局 Segal–Becker 分裂及其去环路化将是处于不稳定实全局同伦范畴中的态射，也就是说，它们属于将正交 C-空间范畴对 C-全局等价类局部化所得的范畴。

我们始终将 σ 写作 C的符号表示，即 $\mathbb{R}$ 上的一维正交表示，其生成元乘以 -1。如果 $\alpha\colon\ G \longrightarrow C$ 是一个增广李群，我们也滥用记号，将 σ 写作沿 α限制得到的正交 G-表示；也就是说， α 的核中的元素按单位元作用，而其他所有元素按 -1作用。

我们将频繁使用与表示相关的预欧拉类。如果 V 是紧李群 G的一个正交表示，我们记作

$$a_V \in \pi^G_{-V}(\mathbb{S}) \tag{0.1}$$

表示由包含映射 $\{0,\infty\} = S^0 \longrightarrow S^V$ 到 V 的一点紧化所代表的、按表示分次的 G-等变同伦类。我们将不再特别说明地使用各种标准性质，例如在紧李群的连续同态下限制的相容性、乘法性质 $a_{V\oplus W} = a_V \cdot a_W$，以及当 $V^G \neq 0$ 时 $a_V = 0$ 这一事实。

致谢。近十年来，本文在很大程度上得益于与 Greg Arone 的多次讨论，其中一些关键步骤基于他的建议；事实上，我们此前曾考虑将这一项目合写成一篇论文。本文的部分工作是在作者于 2023年夏季学期休假期间访问斯德哥尔摩大学时完成的，并得到克努特与爱丽丝·瓦伦堡基金会的经费支持；我感谢 Greg Arone 和斯德哥尔摩大学在此次访问期间给予的热情接待和富有启发性的氛围。感谢 Markus Hausmann 就本文内容进行的多次富有启发性的交流。

作者感谢德国研究联合会重点计划1786“同伦论与代数几何”（项目编号 SCHW 860/1-1）以及波恩大学豪斯多夫数学中心（DFGGZ 2047/1，项目编号 390685813）提供的支持。

1. The C-global stable splitting of $\mathbf{U}$

本文的一个关键角色是由酉群构成的 C-全局超交换幺半群 $\mathbf{U}$，见[24, 例 2。37] 或构造 B.17。我们对全局 Segal–Becker 分裂的定义依赖于 $\mathbf{U}$ 的一个C-全局稳定分裂：在 [25], 中，我在C-全局稳定同伦范畴中构造了某些态射 $s_k\colon \Sigma^\infty(\mathbf{Gr}_k)^{\mathrm{ad}(k)} \longrightarrow \Sigma^\infty_+\mathbf{U}$，使得合并后的态射

$$\sum s_k \ : \ \bigvee_{k\geq 0} \Sigma^\infty(\mathbf{Gr}_k)^{\mathrm{ad}(k)} \ \xrightarrow{\ \sim\ } \ \Sigma^\infty_+\mathbf{U} \tag{1.1}$$

是一个 C-全局等价，见 [25, 定理 4。10]。分裂 (1.1) 是无限酉群的米勒稳定分裂 [21] 的全局等变精化。在本节中，我们回顾该分裂，随后将其转化为对稳定 C-全局态射群 $[\![\Sigma^\infty\mathbf{U}\ X]\!]^C$ 的一种诠释，即用 $\tilde{}$ ad(k)-分次的 $U(k)$-等变同伦群来描述 X，见定理 1.16。

扩张酉群

$$\tilde{U}(k) \ = \ U(k) \rtimes C$$

是群 C =Gal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$) 作用于酉群的半直积

$$U(k) \ = \ \{A \in M_k(\mathbb{C})\colon A\cdot \bar{A}^t = E_k\}$$

，该作用由逐坐标复共轭给出。正交 C-空间**格**$_k$ 由复 k-平面的格拉斯曼流形构成，并带有复共轭对合；参见构造 B.1。而 (**格**$_k$)$^{\mathrm{ad}(k)}$ 表示与扩张酉群 $U(k)$ 的伴随表示 ad(k) 相关联的**格**$_k$ 上的全局托姆空间；参见 [25, 例 3.12]。

C-全局稳定分裂态射 $s_k\colon (\mathbf{Gr}_k)^{\mathrm{ad}(k)} \longrightarrow \Sigma^\infty_+\mathbf{U}$ 最终源自 $U(k)^{\mathrm{ad}}$ 中“顶胞腔”的一个特定 $\tilde{U}(k)$-等变稳定分裂。现在我们依照 Crabb 在 [9, 第 39] 页的论述回顾这一分裂。在 [24] 和 [25] 中，对于正交悬挂谱中的悬挂坐标写在对象参数左侧还是右侧，我们采用了不同约定。本文采用 [24], 的约定，将悬挂坐标写在左侧；因此，需要对 [25], 中的公式作一些小改动，将部分悬挂坐标移至另一侧。

构造 1.2 （从 $U(k)^{\mathrm{ad}}$ 中分裂出顶胞腔）。记

$$\mathrm{ad}(k) \;=\; \{X \in M_k(\mathbb{C})\colon X = -\bar{X}^t\}$$

表示由反厄米复 $\mathbb{R}$向量空间构成的 $k \times k$ 矩阵。酉群 $U(k)$通过共轭作用于 $\mathsf{ad}(k)$，而群 C 通过逐坐标复共轭作用。结合欧几里得内积 $\langle X,\ Y\rangle = \text{迹}(\bar{X}^t \cdot Y) = -\text{迹}(X \cdot Y)$，这些数据使 $\mathsf{ad}(k)$ 成为一个正交的 $\tilde{U}(k)$-˜表示；此作用表明 $\mathsf{ad}(k)$ 是 $U(k)$的伴随表示，名称由此而来。

˜凯莱变换 是一个 $U(k)$-等变开嵌入

$$\mathrm{ad}(k) \;\longrightarrow\; U(k)^{\mathrm{ad}}\ ,\quad X \;\longmapsto\; (X-1)(X+1)^{-1}$$

映至 $U(k)$的子空间，其中的矩阵均不以 $+1$ 为特征值。相应的塌缩映射

$$U(k)^{\mathrm{ad}} \;\longrightarrow\; S^{\mathrm{ad}(k)}$$

˜在真正的 $U(k)$-谱的稳定同伦范畴中有一个截面，如下所示。记

$$\mathrm{sa}(k) \;=\; \{Z \in M_k(\mathbb{C})\colon Z = \bar{Z}^t\}$$

表示由厄米复 $\mathbb{R}$向量空间构成的 $k\times k$矩阵。与 $\mathsf{ad}(k)$ 类似，酉群 $U(k)$通过共轭作用于 $\mathsf{sa}(k)$，群 C 通过逐坐标复共轭作用，而一个不变内积由 $\langle Z,\ Z'\rangle = \text{迹}(\bar{Z}^t \cdot Z')$ $= \text{迹}(Z \cdot Z')$给出；这些数据使 $\mathsf{sa}(k)$ 成为另一个正交的$U(k)$-表示。一个基本的线性代数事实，有时称为“极分解”，是指这个$U(k)$-等变映射

$$\phi_k\ :\ \mathrm{sa}(k) \times U(k)^{\mathrm{ad}} \;\longrightarrow\; M_k(\mathbb{C}) = \mathrm{sa}(k) \oplus \mathrm{ad}(k)\ ,\quad (Z, A) \mapsto A \cdot \exp(-Z) \tag{1.3}$$

是到一般线性群 $GL_k(\mathbb{C})$ 上的一个开嵌入；证明例如见 [25, 命题˜B.17]。该开嵌入带有一个相关联的 $U(k)$-等变塌缩映射

$$t_k\ :\ S^{\mathrm{sa}(k)\oplus\mathrm{ad}(k)} \;\longrightarrow\; S^{\mathrm{sa}(k)} \wedge U(k)^{\mathrm{ad}}_{+} \tag{1.4}$$

它是前述塌缩映射 $U(k)^{\mathrm{ad}} \longrightarrow S^{\mathrm{ad}(k)}$ 的一个稳定截面，参见 [9,第 39], 页中定理 1.8 的证明之后的论证，或 [25, 定理 4.7] 的证明。

˜接下来我们回顾 $U(k)$-等变稳定分裂 (1.4) 如何导出 $\pi^{U(k)}{}_{\mathrm{ad}(k)}(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})$ 中的一个特定等变同伦类 τ_k；该类继而通过关系式 (1.9) 刻画 C-全局分裂态射 $s_k\colon \Sigma^\infty(\mathbf{Gr}_k)^{\mathrm{ad}(k)} \longrightarrow \Sigma^\infty_+\mathbf{U}$。

在本文中，一个增广李群是指从紧李群 G 到 $C = \mathsf{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ 的连续同态 $\alpha\colon G \longrightarrow C$。一个反复出现的例子是扩张酉群，它通过˜投影 $U(k) = U(k) \rtimes C \longrightarrow C$进行增广。对于正交 C-谱 X，当增广 α 从上下文中显然时，我们常将等变同伦群 $\pi^G_*(\alpha^*(X))$ 简记为 $\pi^G_*(X)$。

构造 1.5 （C-全局分裂态射）。我们将扩张酉群 $\tilde{U}(k)$ 的典范实表示记作 ν_k。根据定义，它是向量空间 $\mathbb{C}^k$，带有典范的 $U(k)$-作用，而 C 的作用是逐坐标复共轭。若 W 是一个厄米内积空间，我们将其底层 $\mathbb{R}$-向量空间记作 uW，并赋予欧几里得内积 $\langle v,\ w\rangle = \mathsf{Re}(v,\ w)$，即厄米内积的实部。映射

$$\zeta^k\ :\ \nu_k \;\longrightarrow\; \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} u(\nu_k) = u(\nu_k)_{\mathbb{C}}\ ,\quad w \longmapsto (1 \otimes w - i \otimes iw)/\sqrt{2} \tag{1.6}$$

是一个 $U(k)$-等变的 $\mathbb{C}$-线性等距嵌入。映射 ζ^k 与复共轭相交换；复共轭在目标上按对角方式作用，分别通过对 $\mathbb{C}$ 和 ν_k的复共轭实现。因此，由 ζ^k共轭

~并在其像的正交补上取单位映射扩张，是一个连续的 $U(k)$-等变群单态

$$\zeta_*^k \ : \ U(k)^{\mathrm{ad}} = U(\nu_k) \ \longrightarrow \ \mathbf{U}(u(\nu_k)) \ . \tag{1.7}$$

这里， $U(k)$通过对 $u(\nu_k)$的作用以及$\mathbf{U}$的函子性作用于$\mathbf{U}(u(\nu_k))$；而复共轭则以对角方式作用，分别通过其对$\mathbf{U}$和 ν_k的作用实现。

The $\tilde{U}(k)$-等变塌缩映射 t_k 已在（1.4）中定义。在 [25, 构造 4.4], 中，我们定义一个类

$$\tau_k \ \in \ \pi^{\tilde{U}(k)}_{\mathrm{ad}(k)}(\Sigma^\infty_+\mathbf{U}) \tag{1.8}$$

~（此处记作$\langle t_{k,\ 0}\rangle$），即由以下 $U(k)$-映射表示的类

$$S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)\oplus\mathrm{ad}(k)} \xrightarrow{S^{\nu_k}\wedge t_k} S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge U(k)^{\mathrm{ad}}_+ \xrightarrow{S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge(\zeta_*^k)_+} S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge\mathbf{U}(u(\nu_k))_+$$
$$\xrightarrow{S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge\mathbf{U}(i_1)_+} S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge\mathbf{U}(u(\nu_k)\oplus\mathrm{sa}(k))_+ = (\Sigma^\infty_+\mathbf{U})(u(\nu_k)\oplus\mathrm{sa}(k)) \ .$$

这里， $i_1\colon\ u(\nu_k) \ \longrightarrow \ u(\nu_k) \ \oplus \ \mathsf{sa}(k)$是第一个直和项的嵌入。在 [25], 中，我们将 τ_k 视为$\mathbf{U}$的特征空间滤过第 k阶段的等变稳定同伦类，但现在我们在整体正交空间$\mathbf{U}$中进行讨论。

典范类

$$e_{\tilde{U}(k),\mathrm{ad}(k)} \ \in \ \pi^{\tilde{U}(k)}_{\mathrm{ad}(k)}(\Sigma^\infty(\mathbf{Gr}_k)^{\mathrm{ad}(k)})$$

在 [25, (A.16)] 中定义。根据 [25, 定理 A.17 (i)], , 二元组 $(\Sigma^\infty(\mathbf{Gr}_k)^{\mathrm{ad}(k)}, e_{\tilde{U}(k),\mathrm{ad}(k)})$ 表示 ~函子 $\pi^{U(k)}{}_{\mathrm{ad}(k)}\colon\ \mathcal{GH}_C \longrightarrow \mathcal{A}b$ ，其定义在 C- 全局稳定同伦范畴上。 C- 全局分裂态射 $s_k\colon\ \Sigma^\infty(\mathbf{Gr}_k)^{\mathrm{ad}(k)} \longrightarrow \Sigma^\infty_+\mathbf{U}$ 在 [25, (4.6)] 中由如下性质定义：它将典范类映到 τ_k，即满足关系

$$(s_k)_*(e_{\tilde{U}(k),\mathrm{ad}(k)}) \ = \ \tau_k \ . \tag{1.9}$$

本文主要使用约化悬挂谱 $\Sigma^\infty\mathbf{U}$ （而非非约化悬挂谱），以及类 τ_k 的“约化”版本。我们赋予 $\mathbf{U}$ 由乘法单位元组成的内在基点。我们用 $\mathbf{U}_+$ 表示添加了一个额外基点的 $\mathbf{U}$。它配有基点映射 $\mathbf{U}_+ \longrightarrow S^0$ 和 $\mathbf{U}_+ \longrightarrow\mathbf{U}$；第一个映射将 $\mathbf{U}$ 映到 S^0 的非基点，第二个映射在 $\mathbf{U}$ 上是单位元，并将额外基点映到内在基点。我们记

$$\varrho \ : \ \Sigma^\infty_+\mathbf{U} \ \longrightarrow \ \Sigma^\infty S^0 = \mathbb{S} \qquad \text{and} \qquad q \ : \ \Sigma^\infty_+\mathbf{U} \ \longrightarrow \ \Sigma^\infty\mathbf{U}$$

对于在约化悬挂 C-谱上诱导的态射。合并后的态射

$$(\varrho, q) \ : \ \Sigma^\infty_+\mathbf{U} \ \xrightarrow{\sim} \ \mathbb{S}\times(\Sigma^\infty\mathbf{U}) \tag{1.10}$$

于是是一个 C-全局等价。

下一个命题表明，对于所有 $k\geq 1$，在 (1.8) 中定义的类 τ_k 属于增广理想，~ ~即同态 $\varrho_*\colon\ \pi^{U(k)}_\star(\Sigma^\infty_+\mathbf{U}) \ \longrightarrow \pi^{U(k)}_\star(\mathbb{S})$ 的核。

~**命题 1.11**。 对于每个 $k\geq 1$，关系 $\varrho_*(\tau_k) \ = 0$ 在 $\pi^{U(k)}{}_{\mathrm{ad}(k)}(\mathbb{S})$中成立。

证明。 $\mathsf{sa}(k)$ 中的每个矩阵都可酉对角化，并且具有实特征值。我们将 $\mathsf{sa}^{\geq 0}(k)$ 记作 $\mathsf{sa}(k)$ 的~闭 $U(k)$ 不变子空间，该子空间由所有特征值~大于或等于 0 的厄米矩阵组成。连续的 $U(k)$-等变映射

$$\mathrm{sa}^{\geq 0}(k)\times[0,\infty) \ \longrightarrow \ \mathrm{sa}^{\geq 0}(k) \ , \quad (Z,t) \ \mapsto \ Z \ + \ t\cdot E_k \tag{1.12}$$

是适当的。事实上，如果 $Z \in \mathrm{sa}^{\geq 0}(k)$ 的特征值为 x_1、.....、x_k 和 $t \geq 0$，那么 $Z + tE_k$ 仍然是厄米矩阵，具有特征值 $x_1 + t$、.....、$x_k + t$，因而也属于 $\mathrm{sa}^{\geq 0}(k)$。因此

$$\|(Z,t)\| \;=\; \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2 + t^2} \;\leq\; \sqrt{(x_1+t)^2 + \cdots + (x_k+t)^2} = \; \|Z + tE_k\| \,.$$

作为真映射，(1.12) 连续延拓到一点紧化

$$(\mathrm{sa}^{\geq 0}(k) \cup \{\infty\}) \wedge [0,\infty] \;\longrightarrow\; \mathrm{sa}^{\geq 0}(k) \cup \{\infty\} \;;$$

该映射是空间 $\mathrm{sa}^{\geq 0}(k) \cup \{\infty\}$ 的一个 $\tilde{U}(k)$-等变收缩同伦。

复矩阵的奇异值分解表明，每个 $X \in M_k(\mathbb{C})$ 都可以写成$X = A \cdot Z$，其中某个 $A \in U(k)$ 和某个 $Z \in \mathrm{sa}^{\geq 0}(k)$。该分解中的矩阵 Z 是唯一的，即 $\mathrm{sa}^{\geq 0}(k)$ 中满足 $Z^2 = \bar{X}^t \cdot X$ 的唯一矩阵。因此，复合映射

$$\mathrm{sa}^{\geq 0}(k) \;\xrightarrow{\mathrm{incl}}\; M_k(\mathbb{C}) \;\longrightarrow\; U(k)\backslash M_k(\mathbb{C}) \tag{1.13}$$

是一个连续双射，其中右侧表示 $U(k)$ 通过左乘作用得到的轨道空间。映射

$$M_k(\mathbb{C}) \;\longrightarrow\; \mathrm{sa}^{\geq 0}(k) \;, \quad X \;\longmapsto \sqrt{\bar{X}^t \cdot X}$$

是连续的，并且在酉矩阵左乘作用下保持不变。因此，它下降为 $U(k)\backslash M_k(\mathbb{C})$ 上的连续映射，这表明复合映射 (1.13) 实际上是一个同胚。

$\tilde{U}(k)$ 对 $M_k(\mathbb{C})$ 的共轭作用可下降为轨道空间 $U(k)\backslash M_k(\mathbb{C})\tilde{}$ 上定义良好的作用；对于目标上的这一诱导作用以及源上的共轭作用，映射 (1.13) 是 $U(k)$-等变的。作为一个等变同胚，映射 (1.13) 可延拓为一点紧化之间的 $U(k)$-等变同胚。上文已经证明，$\mathrm{sa}^{\geq 0}(k) \cup \{\infty\}$ 是等变可缩的；因此，一点紧化

$$(U(k)\backslash M_k(\mathbb{C})) \cup \{\infty\} \;=\; U(k)\backslash S^{M_k(\mathbb{C})}$$

$\tilde{}$也是 $U(k)$-等变可缩的。

通过考察定义，复合映射

$$S^{M_k(\mathbb{C})} \;\xrightarrow{t_k}\; S^{\mathrm{sa}(k)} \wedge U(k)_+ \;\xrightarrow{S^{\mathrm{sa}(k)} \wedge \varrho}\; S^{\mathrm{sa}(k)} \tag{1.14}$$

由下式给出

$$X \;\longmapsto\; \begin{cases} -\ln(\sqrt{\bar{X}^t \cdot X}) & \text{for } X \in GL_k(\mathbb{C}), \text{ and} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特别地，这个复合映射在 $U(k)$ 中元素的左平移下保持不变，因此它可经由轨道空间 $U(k)\backslash S^{M_k(\mathbb{C})}$ 分解。由于后者等变可缩，复合映射 (1.14) 是 $\tilde{U}(k)$-等变零伦的。由于类 $\varrho_*(\tau_k)$ 的定义代表元经由复合映射 (1.14) 的一个悬挂分解，这就证明了 $\varrho_*(\tau_k) = 0$。□

我们设

$$\omega_k \;=\; q_*(\tau_k) \;\in \pi^{\tilde{U}(k)}_{\mathrm{ad}(k)}(\Sigma^\infty \mathbf{U}) \,. \tag{1.15}$$

对于 $k \geq 1$，由命题 1.11 可知，类 τ_k 属于增广理想，因此将其投影 ω_k 到约化悬挂谱不会丢失任何信息。

下面的可表性结果是稳定分裂 (1.1) 的直接推论。我们将用它来构造以 $\Sigma^\infty \mathbf{U}$ 为源的 C-整体稳定态射，并检验初始对象为 $\Sigma^\infty \mathbf{U}$ 的图表的交换性。我们用 $[\![-,\ -]\!]^C$ 表示 C-整体稳定同伦范畴中的态射群。

定理 1.16。 对于每个 C-整体谱 X，求值映射

$$[\![\Sigma^\infty\mathbf{U},X]\!]^C \xrightarrow{\cong} \prod_{k\geq 1}\pi^{\tilde U(k)}_{\mathrm{ad}(k)}(X)\ ,\quad f\longmapsto (f_*(\omega_k))_{k\geq 1}$$

是一个同构。

证明。 定理 4.10] 中证明的分裂 (1.1) 与 $(\Sigma^\infty(\mathbf{Gr}_k)^{\mathrm{ad}(k)},e_{\tilde U(k),\mathrm{ad}(k)})$ 的可表性共同给出了自然同构

$$[\![\Sigma^\infty_+\mathbf{U},X]\!]^C \xrightarrow{\cong} \prod_{k\geq 0}\pi^{\tilde U(k)}_{\mathrm{ad}(k)}(X)\ ,\quad f\longmapsto (f_*(\tau_k))_{k\geq 0}\ . \tag{1.17}$$

C-全局等价 (1.10) 诱导出另一个同构

$$[\![\mathbb{S},X]\!]^C\times[\![\Sigma^\infty\mathbf{U},X]\!]^C \xrightarrow{\cong} [\![\Sigma^\infty_+\mathbf{U},X]\!]^C\ ,\quad (a,b)\longmapsto a\circ\varrho+b\circ q\ .$$

态射 $\varrho\colon \Sigma^\infty_+\mathbf{U}\longrightarrow\mathbb{S}$ 将类 τ_0 映到 $1\in\pi_0(\mathbb{S})$，因此复合映射

$$[\![\mathbb{S},X]\!]^C \xrightarrow{\varrho^*} [\![\Sigma^\infty_+\mathbf{U},X]\!]^C \xrightarrow{f\mapsto f_*(\tau_0)} \pi_0^C(X)$$

是一个同构。此外，对于 $k\geq 1$，$q_*(\tau_0)=0$ 且 $q_*(\tau_k)=\omega_k$，因此同构 (1.17) 限制为定理陈述中的同构，此时省略由 $k=0$ 索引的因子。□

我们还需要一个关于类 τ_k 与 τ_1 的 k 重外积之间的关系，参见定理 1.21。$\mathbf{U}$ 上的超交换乘法诱导出非约化悬挂谱 $\Sigma^\infty_+\mathbf{U}$上的一个 C-全局环谱结构。进而，这诱导出 $\Sigma^\infty_+\mathbf{U}$的等变同伦群上的乘积。我们定义

$$\tau_1\times\cdots\times\tau_1 \ =\ p_1^*(\tau_1)\cdot\ldots\cdot p_k^*(\tau_1)\ \in\ \pi^{\tilde T^k}_{k\sigma}(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})\ ,$$

其中 $p_i\colon \tilde T^k\longrightarrow\tilde T$ 是到第 i 个因子的投影。我们还通过将 $x\in\sigma$ 送到 $i\cdot x\in\mathsf{ad}(1)=i\cdot\mathbb{R}$，将符号表示与 $\mathsf{ad}(1)$ 认同。

构造 1.18. 我们定义对角嵌入

$$\Delta\ :\ \mathbb{C}^k\ \longrightarrow\ M_k(\mathbb{C})\qquad\text{by}\qquad \Delta(z_1,\dots,z_k)\ =\ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & z_2 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & z_{k-1} & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0 & z_k\end{pmatrix}\ .$$

在方便时，我们用 Δ 将 T^k 与其在 $U(k)$（即对角极大环面）中的像认同。对角嵌入可扩张为由复共轭作用得到的半直积之间的嵌入，

$$\tilde T^k\ =\ T^k\rtimes C\ \longrightarrow\ U(k)\rtimes C\ =\ \tilde U(k)\ .$$

我们令 $D\subset M_k(\mathbb{C})$ 表示下次对角矩阵构成的 $\tilde T^k$-不变 $\mathbb{C}$ 子空间，即具有如下形式的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ z_{2,1} & 0 & 0 & \dots & 0\\ z_{3,1} & z_{3,2} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ z_{k,1} & z_{k,2} & \dots & z_{k,k-1} & 0\end{pmatrix} \tag{1.19}$$

这些映射

$$\begin{aligned} k\sigma\oplus D\ &\longrightarrow\ \mathrm{ad}(k)\ ,\quad (x_1,\dots,x_k;A)\ \longmapsto \Delta(ix_1,\dots,ix_k)\ +\ A-\bar A^t\\ \mathbb{R}^k\oplus D\ &\longrightarrow\ \mathrm{sa}(k)\ ,\quad (y_1,\dots,y_k;A)\ \longmapsto\ \Delta(y_1,\dots,y_k)\ +\ A+\bar A^t\end{aligned} \tag{1.20}$$

是 $\mathbb{R}$-线性的且是 $\tilde{T}^k$-等变同构。第一个将 D 与 $\mathsf{ad}(k)$ 中由非对角矩阵 $\mathsf{ad}(k) - \mathsf{ad}(k)^{T^k}$ 构成的子空间等同起来，作为正交 $\tilde{T}^k$-表示。第二个将 D 与 $\mathsf{sa}(k)$ 中由非对角矩阵 $\mathsf{sa}(k) - \mathsf{sa}(k)^{T^k}$ 构成的子空间等同起来。

-类 τ_k 在 $\pi^{U(k)}{}_{\mathrm{ad}(k)}(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})$ 中定义于 (1.8)。并且 $a_D \in \pi^{\tilde{T}^k}_{-D}(\mathbb{S})$ 表示 $\tilde{T}^k$-表示 D 的预欧拉类 (0.1)。

定理 1.21. 关系

$$a_D^2 \cdot \mathrm{res}^{\tilde{U}(k)}_{\tilde{T}^k}(\tau_k) \;=\; a_D \cdot (\tau_1 \times \cdots \times \tau_1)$$

在群 $\pi^{\tilde{T}^k}_{k\sigma-D}(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})$ 中成立。

证明。对角映射 Δ 将 $\mathsf{ad}(1)^k$ 识别为 $\mathsf{ad}(k)^{T^k}$，并将 $\mathsf{sa}(1)^k$ 识别为 $\mathsf{sa}(k)^{T^k}$。我们也用 Δ 表示所有这些限制。下图可交换：

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{sa}(1)\times U(1))^k & \xrightarrow{(\phi_1)^k} & (\mathrm{sa}(1)\oplus \mathrm{ad}(1))^k \\
{\scriptstyle\mathrm{shuffle}}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{shuffle}} \\
\mathrm{sa}(1)^k \times U(1)^k & & \mathrm{sa}(1)^k \oplus \mathrm{ad}(1)^k \\
{\scriptstyle\Delta\times\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta\times\Delta} \\
\mathrm{sa}(k)\times U(k)^{\mathrm{ad}} & \xrightarrow[\phi_k]{} & \mathrm{sa}(k)\oplus\mathrm{ad}(k)
\end{array}$$

因此，与水平开嵌入相关联的塌缩映射图表也可交换。因此，以下基于连续 $\tilde{T}^k$-映射图表的左侧部分也可交换：

$$\begin{array}{ccccc}
S^{\nu_k}\wedge(S^{\mathrm{sa}(1)\oplus\mathrm{ad}(1)})^{\wedge k} & \xrightarrow{S^{\nu_k}\wedge t_1^{\wedge k}} & S^{\nu_k}\wedge(S^{\mathrm{sa}(1)}\wedge U(1)_+)^{\wedge k} & \xrightarrow{S^{\nu_k}\wedge(S^{\mathrm{sa}(1)}\wedge(\zeta^1_*)_+)^{\wedge k}} & S^{\nu_k}\wedge(S^{\mathrm{sa}(1)}\wedge\mathbf{U}(u(\nu_1))_+)^{\wedge k} \\
{\scriptstyle\mathrm{shuffle}}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\cong}\downarrow{\scriptstyle\mathrm{shuffle}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{shuffle}} \\
S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(1)^k\oplus\mathrm{ad}(1)^k} & & S^{\nu_k}\wedge S^{\mathrm{sa}(1)^k}\wedge U(1)^k_+ & \xrightarrow{S^{\nu_k}\wedge S^{\mathrm{sa}(1)^k}\wedge(\zeta^k_*)^k_+} & S^{\nu_k}\wedge S^{\mathrm{sa}(1)^k}\wedge\mathbf{U}(u(\nu_1))^k_+ \\
{\scriptstyle S^{\nu_k}\wedge\Delta\wedge\Delta}\downarrow & & {\scriptstyle S^{\nu_k}\wedge\Delta\wedge\Delta_+}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S^{\nu_k}\wedge\Delta\wedge\mu^{(k)}_+} \\
S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)\oplus\mathrm{ad}(k)} & \xrightarrow{S^{\nu_k}\wedge t_k} & S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge U(k)^{\mathrm{ad}}_+ & \xrightarrow[S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge(\zeta^k_*)_+]{} & S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge\mathbf{U}(u(\nu_k))_+ \\
 & & {\scriptstyle S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge(\mathbf{U}(i_1)\circ\zeta^k_*)_+}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge\mathbf{U}(i_1)_+} \\
 & & (\Sigma^\infty_+\mathbf{U})(u(\nu_k)\oplus\mathrm{sa}(k)) & = & S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge\mathbf{U}(u(\nu_k)\oplus\mathrm{sa}(k))_+
\end{array}$$

迭代乘法态射

$$\mu^{(k)} \;:\; \mathbf{U}(u(\nu_1))\times\cdots\times\mathbf{U}(u(\nu_1)) \;\longrightarrow\; \mathbf{U}(u(\nu_1)\oplus\cdots\oplus u(\nu_1)) = \mathbf{U}(u(\nu_k))$$

$\mathbf{U}$ 由正交直和给出。因此，它参与一个交换图：

$$\begin{array}{ccc}
U(1)\times\cdots\times U(1) & \xrightarrow{\zeta^1_*\times\cdots\times\zeta^1_*} & \mathbf{U}(u(\nu_1))\times\cdots\times\mathbf{U}(u(\nu_1)) \\
{\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu^{(k)}} \\
U(k)^{\mathrm{ad}} & \xrightarrow[\zeta^k_*]{} & \mathbf{U}(u(\nu_k))
\end{array}$$

这意味着上述图表中间右侧部分具有交换性。

现在我们可以完成证明了。在同构 (1.20) 下，映射 $\Delta\colon S^{\mathrm{sa}(1)^k} \longrightarrow S^{\mathrm{sa}(k)}$ 和 $\Delta\colon S^{\mathrm{ad}(1)^k} \longrightarrow S^{\mathrm{ad}(k)}$ 都表示预欧拉类 a_D。因此，上述交换图中的顺时针复合映射表示类 $a_D\cdot(\tau_1\times\cdots\times\tau_1)$。而逆时针复合映射表示类 $a_D^2\cdot \mathrm{res}^{U(k)}_{\tilde T^k}(\tau_k)$，所以该图表明了所需的关系。□

2. Relations among equivariant stable homotopy classes in $\mathbf{U}$

本节旨在确立若干关键关系，这些关系涉及整体谱 $\Sigma^\infty_+\mathbf{U}$ 的某些族 $U(k)$-等变同伦类，即在 (1.8) 中定义的类 τ_k、在 (1.15) 中定义的约化对应类 ω_k，以及我们将在下文 (2.2) 和 (2.11) 中引入的某些类 v_k 和 u_k。本节的主要结果是公式定理 2.16，它最终将用于确定整体 Segal–Becker 分裂对等变同伦群和等变上同调理论的影响。

构造 2.1. 对于 $k\geq 0$，对角矩阵 $-E_k=\Delta(-1,\dots,-1)$ 是 $\tilde U(k)$-不动点，属于 $U(k)^{\mathrm{ad}}$。因此

$$\zeta_*^k(-E_k)\ \in\ \mathbf{U}(u(\nu_k))$$

再次是一个 $\tilde U(k)$-不动点，其中 $\zeta_*^k\colon U(k)^{\mathrm{ad}}\longrightarrow\mathbf{U}(u(\nu_k))$ 在 (1.7) 中定义。我们记

$$v_k\ \in\pi_0^{\tilde U(k)}(\Sigma^\infty_+\mathbf{U}) \tag{2.2}$$

表示其稳定化，即由 $U(k)$-等变映射表示的类

$$S^{\nu_k}\ \xrightarrow{-\wedge\zeta_*^k(-E_k)}\ S^{\nu_k}\wedge\mathbf{U}(u(\nu_k))_+\ =\ (\Sigma^\infty_+\mathbf{U})(u(\nu_k))\ .$$

对于 $0\leq j\leq k$，我们用 $U(k-j,j)$ 表示 $U(k)$ 的分块子群，它由形如 $\left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&B\end{smallmatrix}\right)$ 的矩阵组成，其中 $(A,B)\in U(k-j)\times U(j)$。我们用 $\tilde U(k-j,j)=U(k-j,j)\rtimes C$ 表示半直积，其中 C 通过逐坐标复共轭作用。类 τ_j 在 (1.8) 中定义，而 $a_{\mathrm{ad}(j)}\in\pi_-^{U(j)}{}_{\mathrm{ad}(j)}(\mathbb{S})$ 是伴随表示的预欧拉类 (0.1)。

定理 2.3。 对于每个 $k\geq 1$，关系

$$v_k\ =\ \sum_{0\leq j\leq k}\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-j,j)}(1\times(a_{\mathrm{ad}(j)}\cdot\tau_j))$$

在 $\pi_0^{U(k)}\ (\Sigma^\infty_+\mathbf{U})$ 中成立。

证明。 在 (1.3) 中定义的映射 ϕ_k 是一个开嵌入，其像为 $GL_k(\mathbb{C})$。每个 $Y\in\mathsf{sa}(k)\cap GL_k(\mathbb{C})$ 的矩阵都可酉对角化，且具有非零实特征值。因此，若 i 是 Y 的正特征值个数（按重数计），则它具有如下形式

$$Y\ =\ B\cdot\begin{pmatrix}\exp(-Z)&0\\0&-\exp(-Z')\end{pmatrix}\cdot B^{-1} \tag{2.4}$$

对于某个 $B\in U(k)$ 以及 $(Z,\ Z')\in\mathsf{sa}(i)\times\mathsf{sa}(k-i)$。此外，该表示在将 $(B,\ Z,\ Z')$ 变为 $(B\cdot(A\oplus A')^{-1},\ {}^AZ,\ {}^{A'}Z')$ 时是唯一的，其中某个 $(A,\ A')\in U(i)\times U(k-i)$。这表明映射

$$g_i\ :\ \tilde U(k)\times_{\tilde U(i,k-i)}(\mathrm{sa}(i)\times\mathrm{sa}(k-i))\ \longrightarrow\ \mathrm{sa}(k)\cap GL_k(\mathbb{C})$$

将等价类 $[B;Z,Z']$ 映射到 (2.4)，得到一个同胚，其像为恰有 i 个正特征值的矩阵所构成的开闭子空间。总之，这表明下面的交换方块

˜的 $U(k)$-等变映射是一个拉回：

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{0\le i\le k} \tilde{U}(k)\times_{\tilde{U}(i,k-i)} \mathrm{sa}(i)\times\mathrm{sa}(k-i) & \xrightarrow{\coprod g_i} & \mathrm{sa}(k) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (-,0)} \\ \mathrm{sa}(k)\times U(k)^{\mathrm{ad}} & \xrightarrow[\phi_k]{\cong} & GL_k(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{sa}(k)\oplus\mathrm{ad}(k) \end{array}$$

˜左垂直映射在第 i 个直和项上由映射的 $U(k)$-等变扩张给出

$$\mathrm{sa}(i)\times\mathrm{sa}(k-i) \;\longrightarrow\; \mathrm{sa}(k)\times U(k)^{\mathrm{ad}}\ , \quad (Z,Z')\longmapsto \left(\begin{pmatrix} Z & 0\\ 0 & Z'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_i & 0\\ 0 & -E_{k-i}\end{pmatrix}\right)\ .$$

拉回得到一个交换图，其中包含与水平开嵌入相关的塌缩映射；与 S^{ν_k} 作 Smash 积后，这就成为下图中交换的左侧部分：

$$\begin{array}{ccccc} S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)} & \xrightarrow{S^{\nu_k}\wedge\bigvee g_i^\natural} & S^{\nu_k}\wedge\left(\bigvee_{0\le i\le k}\tilde{U}(k)\ltimes_{\tilde{U}(i,k-i)} S^{\mathrm{sa}(i)\oplus\mathrm{sa}(k-i)}\right) & & \\ \downarrow{\scriptstyle -\wedge 0} & & \downarrow & \searrow & \\ S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)\oplus\mathrm{ad}(k)} & \xrightarrow[S^{\nu_k}\wedge t_k]{} & S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge U(k)^{\mathrm{ad}}_+ & \xrightarrow[S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge(\mathbf{U}(i_1)\circ\zeta_*^k)_+]{} & S^{\nu_k\oplus\mathrm{sa}(k)}\wedge\mathbf{U}(u(\nu_k)\oplus\mathrm{sa}(k))_+ \end{array}$$

逆时针复合映射表示类 $a_{\mathrm{ad}(k)}\cdot\tau_k$。因此，该图体现了如下关系：

$$a_{\mathrm{ad}(k)}\cdot\tau_k \;=\; \sum_{0\le i\le k} f_i\ ,$$

其中，f_i 由复合映射悬挂 S^{ν_k} 次表示

$$S^{\mathrm{sa}(k)} \xrightarrow{g_i^\natural} \tilde{U}(k)\ltimes_{\tilde{U}(i,k-i)} S^{\mathrm{sa}(i)\oplus\mathrm{sa}(k-i)} \xrightarrow{\xi_i^\flat} S^{\mathrm{sa}(k)}\wedge\mathbf{U}(u(\nu_k)\oplus\mathrm{sa}(k))_+\ .$$

第二个映射 $\xi_i^\flat$ 是映射的 $\tilde{U}(k)$-等变扩张

$$\begin{aligned} \xi_i\ :\ S^{\mathrm{sa}(i)\oplus\mathrm{sa}(k-i)} &\longrightarrow\quad S^{\mathrm{sa}(k)}\wedge\mathbf{U}(u(\nu_k)\oplus\mathrm{sa}(k))_+ \\ (Z,Z') &\longmapsto \begin{pmatrix} Z & 0\\ 0 & Z'\end{pmatrix}\wedge(\mathbf{U}(i_1)\circ\zeta_*^k)\begin{pmatrix} E_i & 0\\ 0 & -E_{k-i}\end{pmatrix}\ . \end{aligned}$$

与 g_i 相关联的塌缩映射 $g_i^\natural$ 与传递 $\mathbf{tr}_{\tilde{U}\ i}^{U(k)}{}_{(,k-i)}$ 的定义中出现的塌缩映射密切相关，但并不相同。后一个塌缩映射（例如在 [24,˜(3.2.10)], 中讨论）基于另一种开嵌入，即映射的 $U(k)$-等变扩张

$$\mathrm{sa}(i)\times\mathrm{sa}(k-i) \;\longrightarrow\; \mathrm{sa}(k)\ , \quad (Z,Z') \;\longmapsto\; \begin{pmatrix} E_i+Z & 0\\ 0 & -E_{k-i}+Z'\end{pmatrix}$$

限制在 (0,0) 附近的一个小开圆盘上。第二个嵌入在 $(0,0)$ 处的微分是分块嵌入 $\mathrm{sa}(i)\times\mathrm{sa}(k-i)\longrightarrow\mathrm{sa}(k)$，而嵌入 g_i 在 (0,0) 处的微分是映射

$$\mathrm{sa}(i)\times\mathrm{sa}(k-i) \;\longrightarrow\; \mathrm{sa}(k)\ , \quad (Z,Z) \;\longmapsto \begin{pmatrix} -Z & 0\\ 0 & Z'\end{pmatrix}\ .$$

这两个嵌入的微分仅在第一个块中的符号上有所不同。我们将 $\epsilon_i\in\pi_0^{U(i)}(\mathbb{S})$ 写作由映射 $S^{\mathrm{sa}(i)}\longrightarrow S^{\mathrm{sa}(i)}$, $Z\mapsto -Z$ 表示的单位元。于是，复合映射 f_i 与 $1\times v_{k-i}$ 的传递相差在于乘以 $\pi_0^{U(i,k-i)}(\mathbb{S})$ 中的等变同伦类 $\epsilon_i\times 1$。换言之：

$$f_i \;=\; \mathrm{tr}_{\tilde{U}(i,k-i)}^{\tilde{U}(k)}(\epsilon_i\times v_{k-i})\ .$$

综上，我们已经证明了以下关系

$$a_{\mathrm{ad}(k)}\cdot\tau_k \;=\; \sum_{0\le i\le k}\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(i,k-i)}(\epsilon_i\times v_{k-i}) \tag{2.5}$$

在 $\pi_0^{U(k)}(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})$ 中。

现在，经过几次代数运算，我们就能得到所需的公式。我们考虑正交 C-谱的态射 $\varrho\colon\Sigma^\infty_+\mathbf{U}\longrightarrow\mathbb{S}$，它由基点映射 $\mathbf{U}_+\longrightarrow S^0$ 诱导，该映射将 $\mathbf{U}$ 压缩到非-基点。它满足 $\varrho_*(v_{k-i})=1$ 在 $\pi_0^{U(i,k-i)}(\mathbb{S})$中。因此

$$\varrho_*\left(\epsilon_i\times v_{k-i}\right) \;=\; \epsilon_i\times\varrho_*(v_{k-i}) \;=\; \epsilon_i\times 1\ .$$

由于根据命题 1.11，$\varrho_*(\tau_k)=0$，将 ϱ_* 应用于 (2.5) 得到

$$\sum_{0\le i\le k}\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(i,k-i)}(\epsilon_i\times 1) \;=\; \sum_{0\le i\le k}\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(i,k-i)}\left(\varrho_*\left(\epsilon_i\times v_{k-i}\right)\right) \;=\; \varrho_*(a_{\mathrm{ad}(k)}\cdot\tau_k) \;=\; 0 \tag{2.6}$$

当 $k\ge 1$时。现在我们推导出

$$\begin{aligned}\sum_{0\le j\le k}\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-j,j)}(1\times(a_{\mathrm{ad}(j)}\cdot\tau_j)) \;&=_{(2.5)}\; \sum_{0\le i\le j\le k}\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-j,j)}(1\times\mathrm{tr}^{\tilde U(j)}_{\tilde U(i,j-i)}(\epsilon_i\times v_{j-i}))\\ &=\sum_{0\le i\le j\le k}\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(i,k-j,j-i)}(\epsilon_i\times 1\times v_{j-i})\\ &=\sum_{0\le d\le k}\ \sum_{0\le i\le k-d}\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-d,d)}(\mathrm{tr}^{\tilde U(k-d)}_{\tilde U(i,k-d-i)}(\epsilon_i\times 1)\times v_d) \;=_{(2.6)}\; v_k\ .\end{aligned}$$

第三个等式是变量代换 $d=j-i$。 □

我们记

$$\mathfrak{c}\ :\ S^\sigma\ \xrightarrow{\cong}\ U(1)\ ,\quad \mathfrak{c}(x)=(x+i)(x-i)^{-1} \tag{2.7}$$

为凯莱变换；它对于源上的符号作用以及目标上的复共轭是 C-等变的。我们通过将 $x\in\sigma$ 送至 $i\cdot x\in\mathsf{ad}(1)=i\cdot\mathbb{R}$，把符号表示与 $\mathsf{ad}(1)$ 认同。$\mathsf{sa}(1)=\mathbb{R}$带有平凡的 $\tilde T$-作用。于是塌缩映射 t_1：$S^{\mathrm{sa}(1)\oplus\mathrm{ad}(1)}\longrightarrow S^{\mathrm{sa}(1)}\wedge U(1)_+$变为一个映射 $t_1\colon S^{1\oplus\sigma}\longrightarrow S^1\wedge U(1)_+$。

命题 2.8。 复合映射 $(S^1\wedge q)\circ t_1\colon S^{1\oplus\sigma}\longrightarrow S^1\wedge U(1)$ 与凯莱变换 (2.7) 的悬挂 C-等变同伦。

*Pr*证明。 凯莱变换是一个同胚，因此我们可以证明该复合映射

$$S^{1\oplus\sigma}\ \xrightarrow{t_1}\ S^1\wedge U(1)_+\ \xrightarrow{S^1\wedge q}\ S^1\wedge U(1)\ \xrightarrow[\cong]{S^1\wedge\mathfrak{c}^{-1}}\ S^{1\oplus\sigma} \tag{2.9}$$

与单位元等变同伦。这当且仅当其底层的非等变态射以及到 C-不动点的限制分别与相应的单位元映射同伦。

(2.9) 到 C-不动点的限制是复合映射

$$S^1\ \xrightarrow{(t_1)^C}\ S^1\wedge\{\pm1\}_+\ \xrightarrow{S^1\wedge q}\ S^1\wedge\{\pm1\}\ \xrightarrow[\cong]{S^1\wedge(\mathfrak{c}^{-1})^C}\ S^1\ . \tag{2.10}$$

展开所有公式可知，该复合映射将 S^1 的可缩子集 $[0,\infty]$ 压缩到基点，并在 $\mathbb{R}_{<0}$ 上由公式给出

$$f\ :\ \mathbb{R}_{<0}\ \longrightarrow\ \mathbb{R}\ ,\quad f(y)\ =\ -\ln(-y)\ .$$

因此，复合映射 (2.10) 确实同伦于单位元。

映射 (2.9) 本身将 S^2 的可缩子集 $[0,\infty]\times\{0\}$ 压缩到基点，并通过一个同胚进行分解

$$S^2/([0,\infty]\times\{0\}) \;\cong\; S^2\ .$$

因此，复合映射 (2.9) 是一个非等变同伦等价。展开所有公式可知，复合映射 (2.9) 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}$ 上由下式给出

$$F\ :\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}\ \longrightarrow\ \mathbb{R}^2\ ,\quad F(x,y)\ =\ \Big(-\ln(\sqrt{x^2+y^2}),\ x/y+\sqrt{(x/y)^2+1}\Big)\ .$$

因此，(2.9) 固定点 (0,1)，并且在 (0,1) 附近光滑，其微分为 $D_{(0,1)}F=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$。由于这个微分的行列式为 1，复合映射 (2.9) 确实非等变同伦于单位映射。这就证明了断言：$(S^1\wedge q)\circ t_1$ 与 $S^1\wedge\mathfrak{c}$ 是 C-等变同伦的。□

对于 $k\geq 1$，我们定义一个类

$$u_k\ \in\ \pi_\sigma^{\tilde{U}(k)}(\Sigma^\infty\mathbf{U}) \tag{2.11}$$

，通过稳定化由复合映射表示的 $\pi_\sigma^{U(k)}$(**U**,1) 中的类

$$\delta_k\ :\ S^\sigma\ \xrightarrow[\cong]{\mathfrak{c}}\ U(1)\ \xrightarrow{\ \partial\ }\ U(k)^{\mathrm{ad}}\ \xrightarrow{\ \zeta_*^k\ }\ \mathbf{U}(u(\nu_k))\ . \tag{2.12}$$

映射 $\partial\colon U(1)\longrightarrow U(k)$ 是对角映射，它将 $U(1)$ 中的元素映为 $U(k)$ 中的常对角矩阵，而 ζ_*^k 在 (1.7) 中定义。这里的“稳定化”是指 u_k 由复合映射表示

$$S^{\nu_k\oplus\sigma}\ \xrightarrow{\ S^{\nu_k}\wedge\delta_k\ }\ S^{\nu_k}\wedge\mathbf{U}(u(\nu_k))\ =\ (\Sigma^\infty_+\mathbf{U})(u(\nu_k))\ .$$

δ_k u_k 的非稳定代表满足 $\delta(0)=\zeta_*^k(-E_k)$，这是式（2.2）中定义的类 v_k 的非稳定代表。因此，对比定义可得关系

$$a_\sigma\cdot u_k\ =\ q_*(v_k) \tag{2.13}$$

属于群 $\pi_0^{U(k)}(\Sigma^\infty\mathbf{U})$，其中 a_σ 是符号表示的预欧拉类（0.1）。

我们用 $\mathrm{ad}(\overline{k})$ 表示的约化伴随表示 $\tilde{U}(k)$，即 由 $\mathrm{ad}(k)$ 中迹为 0 的矩阵组成的 $U(k)$-子表示。同样，

$$\overline{\mathrm{sa}}(k)\ =\ \{Z\in\mathrm{sa}(k)\colon\ \mathrm{trace}(Z)=0\}\ .$$

类 $a_{\mathrm{sa}(k)}$ a — nd $a_{\overline{\mathrm{ad}}(k)}$ 是相应的预欧拉类（0.1）。类 ω_k 在（1.15）中定义 .

定理 2.14。对于每个 $k\geq 1$，关系

$$a_{\overline{\mathrm{sa}}(k)}\cdot a_{\overline{\mathrm{ad}}(k)}\cdot\omega_k\ =\ a_{\overline{\mathrm{sa}}(k)}\cdot u_k$$

在群 $\pi_{\sigma-}^{U(k)}{}_{\mathrm{sa}(k)}(\Sigma^\infty\mathbf{U})$ 中成立。

证明。映射 $\partial\colon\mathbb{C}\longrightarrow M_k(\mathbb{C})$，$\partial(x)=\Delta(x,\dots,x)$ 将 $U(1)$ 同构地映到 $U(k)$ 的中心，将 ad(1) 与 $\mathrm{ad}(k)^{U(k)}$ 相对应，并将 sa(1) 与 $\mathrm{sa}(k)^{U(k)}$ 相对应。我们也用 ∂ 表示所有这些限制。下图可交换：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{sa}(1)\times U(1) & \xrightarrow{\ \phi_1\ } & \mathrm{sa}(1)\oplus\mathrm{ad}(1)\\
\downarrow{\scriptstyle\partial\times\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial\times\partial}\\
\mathrm{sa}(k)\times U(k)^{\mathrm{ad}} & \xrightarrow[\ \phi_k\ ]{} & \mathrm{sa}(k)\oplus\mathrm{ad}(k)
\end{array}$$

因此，与水平开嵌入相关联的塌缩映射图表也可交换。于是，以下基点连续 $U(k)$-映射图表的左侧可交换：

$$\begin{array}{ccccc}
S^{\nu_k\oplus \mathrm{sa}(1)\oplus \mathrm{ad}(1)} & \xrightarrow{S^{\nu_k}\wedge t_1} & S^{\nu_k\oplus \mathrm{sa}(1)}\wedge U(1)_+ & \xrightarrow{S^{\nu_k\oplus \mathrm{sa}(1)}\wedge(\zeta_*^k\circ\partial\circ q)} & S^{\nu_k\oplus \mathrm{sa}(1)}\wedge \mathbf{U}(u(\nu_k)) \\
\downarrow{\scriptstyle S^{\nu_k}\wedge\partial\wedge\partial} & & \downarrow{\scriptstyle S^{\nu_k}\wedge\partial\wedge\partial_+} & & \downarrow{\scriptstyle S^{\nu_k}\wedge\partial\wedge\mathbf{U}(u(\nu_k))} \\
S^{\nu_k\oplus \mathrm{sa}(k)\oplus \mathrm{ad}(k)} & \xrightarrow{S^{\nu_k}\wedge t_k} & S^{\nu_k\oplus \mathrm{sa}(k)}\wedge U(k)_+^{\mathrm{ad}} & \xrightarrow[S^{\nu_k\oplus \mathrm{sa}(k)}\wedge(\zeta_*^k\circ q)]{} & S^{\nu_k\oplus \mathrm{sa}(k)}\wedge \mathbf{U}(u(\nu_k)) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle S^{\nu_k\oplus \mathrm{sa}(k)}\wedge(\mathbf{U}(i_1)\circ\zeta_*^k\circ q)} & & \downarrow{\scriptstyle S^{\nu_k\oplus \mathrm{sa}(k)}\wedge\mathbf{U}(i_1)} \\
 & & (\Sigma^\infty\mathbf{U})(u(\nu_k)\oplus \mathrm{sa}(k)) & = & S^{\nu_k\oplus \mathrm{sa}(k)}\wedge \mathbf{U}(u(\nu_k)\oplus \mathrm{sa}(k))
\end{array}$$

映射 $\partial\colon S^{\mathrm{sa}(1)}\longrightarrow S^{\mathrm{sa}(k)}$ 表示预欧拉类 $a_{\mathrm{sa}(k)}$。命题 2.8 表明，复合映射 $(S^1\wedge q)\circ t_1\colon S^{1\oplus\sigma}\longrightarrow S^1\wedge U$ (1) 与凯莱变换 (2.7) 的悬挂是 C-等变同伦的。因此，上述交换图中顺时针方向的复合映射表示类 $a_{\mathrm{sa}(k)}\cdot u_k$。而逆时针方向的复合映射表示类 $a_{\mathrm{sa}(k)}\cdot a_{\mathrm{ad}(k)}\cdot\omega_k$，所以该图证明了所需的关系。□

在下一个命题中，我们讨论普通的、非扩张酉群 $U(k,\ l)$，而非扩张酉群 $U(k,\ l)$。这一点很重要，因为这些类

$$\mathrm{res}^{\tilde U(k+l)}_{\tilde U(k,l)}(u_{k+l})\qquad\text{and}\qquad p_1^*(u_k)\ +\ p_2^*(u_l)$$

在群 $U(k,l)$ 中不同，$(\Sigma^\infty\mathbf{U})$。这一特征是满射增广李群中某些结构部分的非可加性的另一种表现，例如例 4.23 或注 5.5 中的非可加性。

命题 2.15。对于所有 k、$l\geq 1$，关系

$$\mathrm{res}^{\tilde U(k+l)}_{U(k,l)}(u_{k+l})\ =\ p_1^*(\mathrm{res}^{\tilde U(k)}_{U(k)}(u_k))\ +\ p_2^*(\mathrm{res}^{\tilde U(l)}_{U(l)}(u_l))$$

在群 $\pi_1^{U(k,l)}(\Sigma^\infty\mathbf{U})$ 中成立，其中 $p_1\colon\ U(k,\ l)\longrightarrow U(k)$ 和 $p_2\colon\ U(k,\ l)\longrightarrow U(l)$ 是到各块的投影。

证明。在（2.12）中定义的映射 δ_{k+l} 是映射 δ_k 和 δ_l 的乘积，即它可分解为复合映射

$$S^\sigma\ \xrightarrow{(\delta_k,\delta_l)}\ \mathbf{U}(u(\nu_k))\times\mathbf{U}(u(\nu_l))\ \xrightarrow{\mu_{\nu_k,\nu_l}}\ \mathbf{U}(u(\nu_{k+l}))\ .$$

因此，关系 $[\delta_{k+l}]=p_1^*[\delta_k]\cdot p_2^*[\delta_l]$ 在群 $\pi_\sigma^{U(k,l)}(\mathbf{U},\ 1)$ 中成立，其中乘法是在源自$\mathbf{U}$的超交换乘法的群结构下构成的。子群 $U(k,\ l)$ of $U(k,\ l)$ 在符号表示上平凡作用，因此限制得到关系

$$\mathrm{res}^{\tilde U(k,l)}_{U(k,l)}[\delta_{k+l}]\ =\ p_1^*(\mathrm{res}^{\tilde U(k)}_{U(k)}[\delta_k])\cdot p_2^*(\mathrm{res}^{\tilde U(l)}_{U(l)}[\delta_l])$$

在 $\pi_1^{U(k,l)}(\mathbf{U},\ 1)$ 中。Eckmann–Hilton 论证表明，由$\mathbf{U}$ 的乘法给出的 $\pi_1^{U(k,l)}(\mathbf{U},\ 1)$ 上的群结构，与其作为基本群所具有的群结构一致，即通过环路的拼接得到的群结构。稳定化映射

$$\sigma^{U(k,l)}\ :\ \pi_1^{U(k,l)}(\mathbf{U},1)\ \longrightarrow\ \pi_1^{U(k,l)}(\Sigma^\infty\mathbf{U})$$

对于源和目标上的环路拼接，它是一个群同态；其中的群结构来自稳定性，即等变稳定同伦群上的通常加法。这就证明了所述结论。□

以下定理是本节的主要结果。类 ω_j 在（1.15）中定义，而$a_{\mathrm{ad}(j)}$~是 $U(j)$的约化伴随表示的预欧拉类（0.1）。

定理 2.16. 对于每个 $k \geq 1$，关系

$$u_k \;=\; \sum_{1\leq j\leq k} \mathrm{tr}^{\tilde{U}(k)}_{\tilde{U}(k-j,j)}(p_2^*(a_{\overline{\mathrm{ad}(j)}}\cdot\omega_j))$$

在 $\pi_\sigma^{U(k)}(\Sigma^\infty\mathbf{U})$ 中成立，其中 $p_2\colon \tilde{U}(k)\longrightarrow \tilde{U}(k-j,j)$ 是到第二个块的投影。

证明. 我们对 k 使用归纳法。对于 $k=1$，有 $\mathrm{ad(1)}=0$，因此结论归结为 $u_1=\omega_1$，这由命题 2.8 得出。在证明的其余部分，我们假设 $k\geq 2$。

下一步，我们证明对每个 $1\leq i\leq k-1$，所需关系在限制到子群 $U(i,k-i)$ 后仍成立。这部分论证中涉及的所有群都平凡地增广到 C，因此它们在符号表示 σ 上平凡作用。我们将

$$\bar{u}_k \;=\; \mathrm{res}^{\tilde{U}(k)}_{U(k)}(u_k) \qquad \text{and} \qquad w_k \;=\; \mathrm{res}^{\tilde{U}(k)}_{U(k)}(a_{\overline{\mathrm{ad}(k)}}\cdot\omega_k)\ ,$$

两个类都简记为属于 $\pi_1^{U(k)}(\Sigma^\infty\mathbf{U})$。对于 $1\leq j\leq k$，[26,命题 1.3] 中确立的 $\mathrm{res}^{U(k)}_{U\ i\ (,k-i)}\circ\mathrm{tr}^{U(k)}_{U\ (k-j,j)}$ 的双陪集公式给出

$$\begin{aligned}&\mathrm{res}^{U(k)}_{U(i,k-i)}(\mathrm{tr}^{U(k)}_{U(k-j,j)}(p_2^*(w_j)))\\ &\qquad=\sum_{0,i-j\leq d\leq i,k-j}\mathrm{tr}^{U(i,k-i)}_{U(d,i-d,k-j-d,j-i+d)}(\gamma_d^*(\mathrm{res}^{U(k-j,j)}_{U(d,k-j-d,i-d,j-i+d)}(p_2^*(w_j))))\end{aligned}$$

在群 $\pi_1^{U(i,k-i)}(\Sigma^\infty\mathbf{U})$ 中，其中 γ_d 是 $U(k)$ 中的某个置换矩阵。对于 $i-j<d<i$，我们有$\mathrm{ad}(j)_{U(i-d,j-i+d)}\neq 0$，因此 $\mathrm{res}^{U(j)}_{U\ (i-d,j-i+d)}(\ a_{\mathrm{ad}(j)})=0$，于是

$$\mathrm{res}^{\tilde{U}(j)}_{U(i-d,j-i+d)}(w_j) \;=\; \mathrm{res}^{\tilde{U}(j)}_{U(i-d,j-i+d)}(a_{\overline{\mathrm{ad}(j)}})\cdot\mathrm{res}^{\tilde{U}(j)}_{U(i-d,j-i+d)}(\omega_j) \;=\; 0\ .$$

因此，我们可以省略所有含有 $i-j<d<i$ 的直和项。对于 $d=i-j$，求和范围迫使 $j\leq i$ 成立，而 γ_{i-j} 是与置换相关联的矩阵，该置换将集合 $\{i-j+1,\dots,k-j\}$ 和 $\{k-j+1,\dots,k\}$ 重新排列；因此

$$\mathrm{tr}^{U(i,k-i)}_{U(i-j,j,k-i)}(\gamma_{i-j}^*(\mathrm{res}^{U(k-j,j)}_{U(i-j,k-i,j)}(p_2^*(w_j)))) \;=\; p_1^*(\mathrm{tr}^{U(i)}_{U(i-j,j)}(p_2^*(w_j)))\ .$$

对于 $d=i$，求和范围迫使 $j\leq k-i$ 成立，而 γ_i 是单位矩阵；因此

$$\mathrm{tr}^{U(i,k-i)}_{U(i,k-j-i,j)}(\gamma_i^*(\mathrm{res}^{U(k-j,j)}_{U(i,k-j-i,j)}(p_2^*(w_j)))) \;=\; p_2^*(\mathrm{tr}^{U(k-i)}_{U(k-j-i,j)}(p_2^*(w_j)))\ .$$

我们对所有 $j\in\{1,\dots,k\}$ 的这些关系求和，得到

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leq j\leq k}\mathrm{res}^{U(k)}_{U(i,k-i)}(\mathrm{tr}^{U(k)}_{U(k-j,j)}(p_2^*(w_j)))\\ &\qquad=\sum_{1\leq j\leq i}p_1^*(\mathrm{tr}^{U(i)}_{U(i-j,j)}(p_2^*(w_j)))\;+\sum_{1\leq j\leq k-i}p_2^*(\mathrm{tr}^{U(k-i)}_{U(k-i-j,j)}(p_2^*(w_j)))\\ &\qquad=\;p_1^*(\bar{u}_i)\;+\;p_2^*(\bar{u}_{k-i})\;=\;\mathrm{res}^{\tilde{U}(k)}_{U(i,k-i)}(u_k)\ .\end{aligned}$$

The 第二个等式是归纳假设，最后一个等式是命题 2.15 .

接下来，我们证明所需关系在限制到群 $U(k)$ 后仍成立。空间$U(k)^{\mathrm{ad}}$是 $U(k)$-等变连通的，也就是说，对于 $U(k)$ 的每个子群 G，不动点空间 $U(k)^G$（即 $U(k)$ 中 G 的中心化子）都是路径连通的。因此，根据 [24,定理 3.3.15 (i)],, $\pi_1^{U(k)}(\Sigma^\infty\mathbf{U})$ 中的元素可由 $U(k)$ 的所有闭子群对应的几何不动点检测。换言之：

对于所有 $G \leq U(k)$，我们可以在施加 Φ^G 后证明所需关系。若子群 G 对某个 $1 \leq i \leq k-1$ 是 $U(i,k-i)$ 的共轭子群的子群，则根据第一步，该关系在限制到 G 后成立，因此在取 G-几何不动点后也成立。若对任意 $1 \leq i \leq k-1$，子群 G 都不是 $U(i,k-i)$ 的共轭子群的子群，则 ν_k 上的 G-作用不可约，因此 $U(k)$ 中 G 的中心化子等于 $U(k)$ 的中心。于是 $\mathsf{sa}(k)^G = \mathsf{ad}(k)^G = 0$，从而 $\Phi^G(a_{\mathrm{sa}(k)}) = \Phi^G(a_{\mathrm{ad}(k)}) = 1$。由于对 $1 \leq j \leq k-1$，G 不是 $U(k-j,j)$ 的共轭子群的子群，因此 $\Phi^G \circ \mathrm{tr}_U^{U(k)}(k-j,j) = 0$，参见 [24, 定理 3.4.2 (ii)]。因此

$$\begin{aligned}\Phi^G(u_k) \;&=\; \Phi^G(a_{\overline{\mathrm{ad}}(k)} \cdot u_k) \;=\; \Phi^G(a_{\overline{\mathrm{sa}}(k)} \cdot a_{\overline{\mathrm{ad}}(k)} \cdot \omega_k)\\ &= \sum_{1\leq j\leq k} \Phi^G(\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-j,j)}(p_2^*(a_{\overline{\mathrm{ad}}(j)} \cdot \omega_j)))\ .\end{aligned}$$

第二个等式是定理 2.14。由此证明了该关系在限制到$U(k)$后仍然成立。

现在我们完成论证。将 $\mathsf{ad}(k) \cong \mathsf{ad}(k) \oplus \sigma$ 视为正交的 $U(k)$-表示，其分解诱导出一个基点正交 C-空间的同构

$$(\mathbf{Gr}_m)^{\mathrm{ad}(m)} \;\cong\; (\mathbf{Gr}_m)^{\overline{\mathrm{ad}}(m)\oplus\sigma} \;\cong\; (\mathbf{Gr}_m)^{\overline{\mathrm{ad}}(m)} \wedge S^\sigma\ .$$

因此，全局稳定分裂 (1.1) 给出一个同构

$$\pi^{\tilde U(k)}_\sigma(\Sigma^\infty \mathbf{U}) \;\cong\; \bigoplus_{m\geq 1} \pi^{\tilde U(k)}_\sigma(\Sigma^\infty(\mathbf{Gr}_m)^{\mathrm{ad}(m)}) \;\cong\; \bigoplus_{m\geq 1} \pi^{\tilde U(k)}_0(\Sigma^\infty(\mathbf{Gr}_m)^{\overline{\mathrm{ad}}(m)})\ .$$

π中的类 σ $(\Sigma^\infty \mathbf{U})$ 因而可由 $\tilde U(k)$ 的所有闭子群对应的几何不动点检测。需要注意的是，如果 $G \leq U(k)$，那么 $\sigma^G = \mathbb{R}$，且几何不动点属于 $\Phi^G_1(\Sigma^\infty \mathbf{U})$；如果 G 映满到 C，那么 $\sigma^G = 0$，且几何不动点属于 $\Phi^G_0(\Sigma^\infty \mathbf{U})$。

若子群 G 包含于 $U(k)$，则根据上一步，经过限制到 G 后这些关系仍然成立，因此取 G-几何不动点后也成立。若 G 不包含于 $U(k)$，则 $\sigma^G = 0$，从而 $\Phi^G(a_\sigma) = 1$。因此

$$\begin{aligned}\Phi^G(u_k) \;&=\; \Phi^G(a_\sigma \cdot u_k)\\ &\overset{(2.13)}{=} \Phi^G(q_*(v_k)) \;=\; \sum_{1\leq j\leq k} \Phi^G(a_\sigma \cdot \mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-j,j)}(p_2^*(a_{\overline{\mathrm{ad}}(j)} \cdot \omega_j)))\\ &= \sum_{1\leq j\leq k} \Phi^G(\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-j,j)}(p_2^*(a_{\overline{\mathrm{ad}}(j)} \cdot \omega_j)))\ .\end{aligned}$$

第三个等式由定理 2.3，以及 $q_*(\tau_0) = 0$这一事实和如下关系得出

$$q_*(1 \times (a_{\mathrm{ad}(j)} \cdot \tau_j)) \;=\; q_*(p_2^*(a_{\mathrm{ad}(j)} \cdot \tau_j)) \;=\; p_2^*(a_{\mathrm{ad}(j)} \cdot q_*(\tau_j)) \;=\; a_\sigma \cdot p_2^*(a_{\overline{\mathrm{ad}}(j)} \cdot \omega_j)$$

对所有 $j \geq 1$均成立。 □

3. The interplay of the global splitting and the eigenspace morphism

本节将阐明超交换幺半群 $\mathbf{U}$ 的两个乍看之下毫不相关的性质之间微妙的联系，即其 C-全局稳定分裂与优选无限去环化。如定理 3.3 所示，定理 B.49 中优选无限去环化 $\mathbf{U} \sim \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR})$ 的伴随 $\Sigma^\infty \mathbf{U} \longrightarrow \mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR}$ 会消去全局稳定分裂 (1.1) 的所有高阶项。这一事实是本文其他所有结果的基础。

对于增广李群 $\alpha\colon\ G \longrightarrow C$ 和紧致的 G-空间 A，我们用 $KR_\alpha(A)$ 表示 A 的 Realα-等变 K-群，即 Real α-等变向量丛的格罗滕迪克群，参见构造 B.6。若 A 带有一个 G-不动基点，我们用 $KR_\alpha(A)$ 表示约化 K-群，即限制

到基点的映射 $KR_\alpha(A) \longrightarrow KR_\alpha(*)$ 的核。Real-$\widetilde{\ }$等变向量丛的张量积所赋予的乘法结构，使群 $KR_\alpha(A)$ 和 $KR_\alpha(A)$ 成为 $KR_\alpha(*) = RR(\alpha)$ 上的模；后者是 α 的实表示环： $G \longrightarrow C$。

如前所述，我们令 $\tilde{T}^k = T^k \rtimes C$ 表示 k-环面与复共轭作用形成的半直积，并通过投影增广至 C。如果某个 $RR(\tilde{T}^k)$-模上的每个具有平凡不动点的不可约实 $\tilde{T}^k$-表示的欧拉类都在该模上单射作用，则称该模为 欧拉挠无的。

命题 3.1。 对于每个 $k \geq 1$ 和 $l \geq 0$， $RR(\tilde{T}^k)$-模 $\widetilde{KR}_{\tilde{T}^k}(S^{l\sigma})$ 都是欧拉挠无的。

证明。 我们首先证明，对于每个阿贝尔群 M， $RR(\tilde{T}^k)$-模 $RR(\tilde{T}^k) \otimes M$都是欧拉挠无的。环 $RR(\tilde{T}^k)$ 是 Laurent 多项式环

$$RR(\tilde{T}^k) \;=\; \mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_k^{\pm}] \;,$$

其中 $x_i = p_i^*(\nu_1)$ 对于 $p_i\colon\ \tilde{T}^k \longrightarrow \tilde{T}$到第 i 个因子的投影。事实上，遗忘环同态

$$\mathrm{res}^{\tilde{T}^k}_{T^k} \;:\; RR(\tilde{T}^k) \;\longrightarrow\; RU(T^k) \;=\; \mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_k^{\pm}]$$

由 [4, 第 13], 页可知是单射，而环 $RU(T^k)$ 由 x_i 中 Laurent 单项式的底层酉表示生成。因此，这个限制映射是一个同构。

不可约实 λ 对应于单项式单位元 $x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k}$，其中 i_1，……， $i_k \in \mathbb{Z}$；当且仅当并非所有 i_j 都等于 0 时， λ 才有平凡不动点。此外， λ的欧拉类是元素

$$e_\lambda \;=\; 1 - x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k} \;.$$

因此，对于 $\lambda^{\tilde{T}^k} = 0$， $RR(\tilde{T}^k)/(e_\lambda)$ 的底层阿贝尔群是自由的，故 $\mathrm{Tor}(RR(\tilde{T}^k)/(e_\lambda)\ M) = 0$。这意味着，乘以 e_λ 在 $RR(\tilde{T}^k) \otimes M$ 上是单射，因此 $RR(\tilde{T}^k) \otimes M$ 是欧拉挠无的。

现在我们转向命题的证明。所有不可约的 Real $\tilde{T}^k$-表示都是 1 维的，因此都是实型，也就是说，它们的自同构只有来自 $\mathbb{R}$ 的标量。所以对于每个带有平凡 $\tilde{T}^k$ 作用的紧空间 A， [4, 命题 8.1] 给出了一个同构

$$RR(\tilde{T}^k) \otimes KO(A) \;\xrightarrow{\cong}\; KR_{\tilde{T}^k}(A) \;.$$

将其应用于 $A = S^n$，并限制到它的基点，可得一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} RR(\tilde{T}^k) \otimes KO(S^n) & \xrightarrow{\cong} & KR_{\tilde{T}^k}(S^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ RR(\tilde{T}^k) \otimes KO(*) & \xrightarrow[\cong]{} & KR_{\tilde{T}^k}(*) \end{array}$$

其中两个水平映射都是同构。因此，上方的映射限制为垂直核 $RR(\tilde{T}^k) \otimes \widetilde{KO}(S^n)$ 与 $\widetilde{KR}_{\tilde{T}^k}(S^n)$ 之间的一个同构。

现在我们选取一个满足 $l \leq 8m$ 的 $m \geq 0$。正交 $\tilde{T}^k$-表示 $1 \oplus \sigma$ 是一个 Real $\tilde{T}^k$-表示（带有平凡的 T^k 作用）的底层表示。因此，Real $\tilde{T}^k$-表示 $l\cdot(1 \oplus \sigma)$ 的 Bott 周期性 [3, 定理 (5.1)]，以及 Real 等变 K 理论的 8 重 Bott 周期性，给出了 $RR(\tilde{T}^k)$-模的同构

$$RR(\tilde{T}^k) \otimes \widetilde{KO}(S^{8m-l}) \;\cong\; \widetilde{KR}_{\tilde{T}^k}(S^{8m-l}) \;\cong\; \widetilde{KR}_{\tilde{T}^k}(S^{8m+l\sigma}) \;\cong\; \widetilde{KR}_{\tilde{T}^k}(S^{l\sigma}) \;.$$

We s上文已表明，该 $RR(\tilde{T}^k)$-模是欧拉挠无的，因此这就完成了证明 f. □

连通全局 K 理论谱 **ku**在 [24, 构造 3.6.9], 中定义，它将 Segal [30] 的构型空间模型推广到了全局等变语境。它带有一个乘法对合

ψ 由复共轭给出，它将该谱提升为连通实全局 K 理论谱 $\mathbf{kr} = \mathbf{(ku}\ \psi\mathbf{)}$。我们回顾构造 B.34 中的定义。基于正交 C- 空间的特征空间态射

$$\mathrm{eig}\ :\ \mathbf{U}\ \longrightarrow\ \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{kr})$$

在 [24, (6.3.26)] 中定义；我们在 (B.36) 中回顾这一构造。这里的「sh^σ」表示将正交 C-谱沿符号表示移位，见 [24, 构造 3.1.21]。沿 σ 移位与沿 S^σ 悬挂实全局等价，见 [24, 命题 3.1.25 (ii)]。而 $\Omega^\bullet$ 是从正交 C-谱到基点正交 C-空间的函子，它是约化悬挂谱函子的右伴随，见 [24, 构造 4.1.6]；正交 C-空间 $\Omega^\bullet X$ 刻画了实全局谱 X 的底层「实全局无限环空间」。顾名思义，特征空间态射将一个酉自同构对应到其特征值与特征子空间的构型；$\mathrm{sh}^\sigma\mathbf{kr}$ 中的移位坐标就是储存特征值的位置。我们记作

$$\mathrm{eig}^\flat\ :\ \Sigma^\infty\mathbf{U}\ \longrightarrow\ \mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{kr} \tag{3.2}$$

特征空间态射的伴随。

全局 K 理论谱 **复 K 理论谱 KU** 由 Joachim [15, 在定义 4.3]中引入，作为一个交换正交环谱。Joachim 在 [15, 定理 4.4] 中证明，其底层的真 G-谱 **复 K 理论谱 KU** 表示 G-等变复 K 理论；另一种证明见 [24,推论 6.4.23]。Joachim 的正交环谱可以通过适当纳入复共轭，增强为正交 C-环谱$\mathbf{KR}$，见 [12, 第 6]节；这就是周期实全局 K 理论谱。我们在构造 B.43 中回顾其定义，并在定理 B.52 中证明$\mathbf{KR}$表示增广李群的实等变 K 理论，从而证明这一名称名副其实。交换正交 C-环谱的一个态射

$$j\ :\ \mathbf{kr}\ \longrightarrow\ \mathbf{KR}$$

从连通实全局 K 理论到周期实全局 K-理论的态射定义于 [24, 推论 6.4.13]；我们在构造 B.48 中回顾其定义。

定理 3.3。对于每个 $k \geq 2$，正交 C-谱之间的态射 $(\mathrm{sh}^\sigma\, j)\ \circ \mathrm{eig}^\flat\colon\ \Sigma^\infty\mathbf{U}\ \longrightarrow \mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{KR}$_会湮灭在(1.15)中定义的类 $\omega_k \in \pi^{U(k)}_{\ \mathrm{ad}(k)}(\Sigma^\infty\mathbf{U})$。

证明。我们回顾一下

$$\varrho\ :\ \Sigma^\infty_+\mathbf{U}\ \longrightarrow\ \Sigma^\infty_+ * = \mathbb{S}\quad\text{and}\quad q\ :\ \Sigma^\infty_+\mathbf{U}\ \longrightarrow\ \Sigma^\infty\mathbf{U}$$

表示由基点映射 $\mathbf{U}_+ \longrightarrow S^0$ 和 $\mathbf{U}_+ \longrightarrow$**U**在约化悬挂 C-谱上诱导的态射；这两个映射分别将**U**映至 S^0的非基点，并在**U**上为单位映射。由命题 1.11，˜类 τ_1在 $\pi^T_{\mathrm{ad}(1)}(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})$ 中属于增广理想，即 $\varrho_*(\tau_1) = 0$。因此，类 $\tau_1 \times \cdots \times \tau_1$属于增广理想的 k 次幂，其中 k 是因子个数。命题 B.40 (ii) 表明，映射 $(\mathrm{eig}^\flat \circ q)_*$ 会湮灭 $\pi^{\tilde T^k}_\star(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})$ 的增广理想的平方。特别地，

$$(\mathrm{eig}^\flat \circ q)_*(\tau_1 \times \cdots \times \tau_1)\ =\ 0$$

对于 $k \geq 2$。

我们用 $D \subset M_k(\mathbb{C})$ 表示下次对角矩阵的 Real $\tilde T^k$-表示（1.19），而 $a_D \in \pi^{\tilde T^k}_{-D}(\mathbb{S})$ 是其预欧拉类（0.1）。我们利用同构（1.20）将 $\mathsf{ad}(k)$ 和 $k\sigma\oplus D$ 识别为正交 $\tilde T^k$-表示。利用定理 1.21，我们得到关系

$$\begin{aligned} a_D^2 \cdot \mathrm{eig}^\flat_*(\mathrm{res}^{\tilde U(k)}_{\tilde T^k}(\omega_k))\ \overset{(1.15)}{=}\ & (\mathrm{eig}^\flat \circ q)_*(a_D^2 \cdot \mathrm{res}^{\tilde U(k)}_{\tilde T^k}(\tau_k)) \\ =\ & (\mathrm{eig}^\flat \circ q)_*(a_D \cdot (\tau_1 \times \cdots \times \tau_1)) \\ =\ & a_D \cdot ((\mathrm{eig}^\flat \circ q)_*(\tau_1 \times \cdots \times \tau_1))\ =\ 0 \end{aligned}$$

在 $\pi^{\tilde{T}^k}_{k\sigma-D}(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{kr})$ 中，对所有 $k \geq 2$ 均成立。

表示 D 从 $M_k(\mathbb{C})$继承了实 $\tilde{T}^k$-表示的结构。实等变波提周期性 [3, 定理 (5.1)] 给出了相应的 Bott 类 $\beta_D \in \pi_D^{\tilde{T}^k}(\mathbf{KR})$，以及对应的欧拉类 $e_D = \beta_D \cdot a_D$，它们属于 $\pi_0^{\tilde{T}^k}(\mathbf{KR})$。然后

$$e_D^2 \cdot \mathrm{res}^{\tilde{U}(k)}_{\tilde{T}^k}(((\mathrm{sh}^\sigma j) \circ \mathrm{eig}^\flat)_*(\omega_k)) \;=\; \beta_D^2 \cdot (\mathrm{sh}^\sigma j)_*(a_D^2 \cdot \mathrm{eig}^\flat_*(\mathrm{res}^{\tilde{U}(k)}_{\tilde{T}^k}(\omega_k))) \;=\; 0$$

在 $\pi^{\tilde{T}^k}_{k\sigma+D}(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR})$ 中。实等变波提周期性还针对 D 给出了一个同构：

$$\pi^{\tilde{T}^k}_{k\sigma+D}(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR}) \;\cong\; \pi^{\tilde{T}^k}_{k\sigma}(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR}) \;\cong\; \pi^{\tilde{T}^k}_{(k-1)\sigma}(\mathbf{KR})\ .$$

由定理 B.52 (ii)，环 $\pi_0^{\tilde{T}^k}(\mathbf{KR})$ 同构于实表示环 $RR(\tilde{T}^k)$，并且该同构将 $\pi_0^{\tilde{T}^k}(\mathbf{KR})$-模 $\pi^{\tilde{T}^k}{}_{(k-1)\sigma}(\mathbf{KR})$ 与 $RR(\tilde{T}^k)$- 模 $\widetilde{KR}_{\tilde{T}^k}(S^{(k-1)\sigma})$ 对应起来。根据命题 3.1，这个 $RR(\tilde{T}^k)$- 模是欧拉挠无的。$\tilde{T}^k$- 表示 D 的不动点平凡，因此欧拉类 e_D 的乘法在 $\pi^{\tilde{T}^k}{}_{(k-1)\sigma}(\mathbf{KR})$ 上是单射。因此我们得出

$$\mathrm{res}^{\tilde{U}(k)}_{\tilde{T}^k}(((\mathrm{sh}^\sigma j) \circ \mathrm{eig}^\flat)_*(\omega_k)) \;=\; 0$$

在 $\pi^{\tilde{T}^k}_{k\sigma+D}(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR}) \cong \pi^{\tilde{T}^k}{}_{(k-1)\sigma+D}(\mathbf{KR})$ 中。我们用 $\mathsf{ad}(k)$ 表示 $\tilde{U}(k)$ 的约化伴随表示，即 $\mathsf{ad}(k)$ 中由迹为零的矩阵构成的子表示。任何同构 $\mathsf{ad}(k) \cong \sigma \oplus \mathsf{ad}(k)$ 都给出一个识别

$$\pi^{\tilde{U}(k)}_{\mathrm{ad}(k)}(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR}) \;\cong\; \pi^{\tilde{U}(k)}_{\sigma\oplus\overline{\mathrm{ad}}(k)}(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR}) \;\cong\; \pi^{\tilde{U}(k)}_{\overline{\mathrm{ad}}(k)}(\mathbf{KR})\ .$$

限制同态

$$\mathrm{res}^{\tilde{U}(k)}_{\tilde{T}^k} \;:\; \widetilde{KR}_{\tilde{U}(k)}(S^{\overline{\mathrm{ad}}(k)}) \;\longrightarrow\; \widetilde{KR}_{\tilde{T}^k}(S^{\overline{\mathrm{ad}}(k)})$$

是分裂单射，例如见 [3, 命题 (5.2)]。因此，限制同态也

$$\mathrm{res}^{\tilde{U}(k)}_{\tilde{T}^k} \;:\; \pi^{\tilde{U}(k)}_{\overline{\mathrm{ad}}(k)}(\mathbf{KR}) \;\longrightarrow\; \pi^{\tilde{T}^k}_{\overline{\mathrm{ad}}(k)}(\mathbf{KR}) = \pi^{\tilde{T}^k}_{(k-1)\sigma+D}(\mathbf{KR})$$

是单射。因此，$((\mathrm{sh}^\sigma j) \circ \mathrm{eig}^\flat)_*(\omega_k) = 0$ 在 $\pi^{U(k)}{}_{\mathrm{ad}(k)}(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR}) \cong \pi^{U(k)}{}_{\mathrm{ad}(k)}(\mathbf{KR})$ 中。 □

注 3.4。 态射 $(\mathrm{sh}^\sigma j) \circ \mathrm{eig}^\flat\colon \Sigma^\infty \mathbf{U} \longrightarrow \mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR}$ 对所有 $k \geq 2$ 都消去类 ω_k 这一事实，对于本文后续的所有结果都至关重要。我们提醒读者，特征空间态射 $\mathrm{eig}^\flat\colon \Sigma^\infty \mathbf{U} \longrightarrow \mathrm{sh}^\sigma \mathbf{kr}$ 本身并不对任何 $k \geq 2$ 消去类 ω_k。此时或许应当回顾，“连通全局 K 理论”这一名称需要谨慎理解：根据 [24], 的定理 6.3.27 和 6.4.21，态射$j\colon \mathbf{kr} \longrightarrow \mathbf{KR}$ 对于有限群是一个等变连通覆盖，但对于正维数的紧李群通常并非如此。

事实上，复合映射

$$\Sigma^\infty \mathbf{U} \xrightarrow{\mathrm{eig}^\flat} \mathrm{sh}^\sigma \mathbf{kr} \xrightarrow{\mathrm{sh}^\sigma \dim} \mathrm{sh}^\sigma(Sp^\infty)$$

对 $k \geq 2$，它不会湮灭 ω_k。这里，Sp^∞ 表示由球面的无限对称积构造而成、带平凡 C-作用的正交谱，参见 [24, 例 5.3.10]。而 $\dim\colon \mathbf{kr} \longrightarrow Sp^\infty$是到无限对称积谱的维数同态，定义见 [24, 例 6.3.36]。谱 Sp^∞ 与常值全局函子 $\mathbb{Z}$ 的 Eilenberg–MacLane 谱 $\mathcal{F}in$- 全局等价，参见 [24] 的命题 5.3.9 和 5.3.12。然而，对于正维数的紧李群 G，群 $\pi_*^G(Sp^\infty)$ 通常并非集中于维数 0，而环 $\pi_0^G(Sp^\infty)$ 不一定同构于 $\mathbb{Z}$。例如，$\pi_1^T(Sp^\infty) \cong \mathbb{Q}$，参见 [24, 定理 5.3.16], ；阿贝尔群$\pi_0^{SU(2)}(Sp^\infty)$ 的秩为 2，参见 [23,例 4.16]。

我们证明 $k=2$ 的非零性；其他情形类似，但稍微复杂一些。来自 (2.11) 的类u_k 由对复合映射 S^{ν_k} 作悬挂所表示

$$\delta_k = \zeta_*^k \circ \partial \circ \mathfrak{c} \ : \ S^\sigma \ \longrightarrow \ \mathbf{U}(u(\nu_k)) \ .$$

此映射将 $x \in S^\sigma$ 送到 $u(\nu_k)_{\mathbb{C}}$ 的酉自同构：它在 $\mathbb{C}$-线性单射 ζ^k: $\nu_k \longrightarrow u(\nu_k)_{\mathbb{C}}$的像上是乘以 $\mathfrak{c}(x)$的乘法，并在其正交补上是单位元。态射 $\mathrm{eig}^\flat$: $\Sigma^\infty\mathbf{U} \longrightarrow \mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{kr}$ 提取特征值和特征空间，并通过 $\mathfrak{c}^{-1}$将特征值转化为悬挂坐标；顾名思义，态射 $\dim\colon \mathbf{kr} \longrightarrow Sp^\infty$ 将向量空间配置映射为维数构型。因此，类 $((\mathrm{sh}^\sigma \dim) \circ \mathrm{eig}^\flat)_*(u_k)$ 由映射

$$S^{\nu_k\oplus\sigma} \ \longrightarrow \ Sp^\infty(S^{\nu_k\oplus\sigma}) \ = \ \mathrm{sh}^\sigma(Sp^\infty)(u(\nu_k)) \ , \quad x \ \longmapsto \ k\cdot x \ ,$$

点 $x \in S^{\nu_k\oplus\sigma}$ 及其重数 k。此映射表示 $\mathrm{sh}^\sigma(k\cdot 1)$，即移位_乘法单位元在 $\pi_\sigma^{U(k)}(\mathrm{sh}^\sigma(Sp^\infty))$中的 k重倍，因此

$$((\mathrm{sh}^\sigma \dim) \circ \mathrm{eig}^\flat)_*(u_k) \ = \ \mathrm{sh}^\sigma(k\cdot 1) \ .$$

关于 $k=2$ 的定理 2.16 以及 $\omega_1 = u_1$ 提供了如下关系

$$a_{\overline{\mathrm{ad}(2)}} \cdot \omega_2 \ = \ u_2 - \mathrm{tr}^{\tilde U(2)}_{\tilde U(1,1)}(p_2^*(u_1)) \ .$$

Thus

$$\begin{aligned} a_{\overline{\mathrm{ad}(2)}} \cdot ((\mathrm{sh}^\sigma \dim) \circ \mathrm{eig}^\flat)_*(\omega_2) \ &= \ ((\mathrm{sh}^\sigma \dim) \circ \mathrm{eig}^\flat)_*(u_2) \ - \ \mathrm{tr}^{\tilde U(2)}_{\tilde U(1,1)}(p_2^*(((\mathrm{sh}^\sigma \dim) \circ \mathrm{eig}^\flat)_*(u_1))) \\ &= \ \mathrm{sh}^\sigma\left(2 - \mathrm{tr}^{\tilde U(2)}_{\tilde U(1,1)}(1)\right) \ . \end{aligned}$$

根据紧接在 [23, 例 4.16]，之前的注记，类 1 和 $\mathrm{tr}^{U(2)}_{U\ (1,1)}(1)$ 在线性群 $\pi_0^{U(2)}\,(Sp^\infty)$ 中线性无关。因此，类 1 和 $\mathrm{tr}^{U(2)}_{\tilde U\ (1,1)}(1)$ 在群$\pi_0^{U(2)}\,(Sp^\infty)$ 中线性无关。于是，类 $((\mathrm{sh}^\sigma \dim) \circ \mathrm{eig}^\flat)_*(\omega_2)$ 非零。

4. The global Segal–Becker splitting

本节中，我们在不稳定实全局同伦范畴中构造全局 Segal–Becker 分裂 $c\colon \mathrm{BUP} \longrightarrow \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathrm{P})$，见 (4.10)。这一态射作为一个 C-全局 σ-环路映射而存在，其脱环为式 (4.6) 中定义的态射 $d\colon \mathrm{U} \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathrm{P}))$。定理 4.7 和 4.12 证明了态射 d 和 c 确实分别是 $\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\eta) : \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathrm{P})) \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\mathrm{KR})$ 和 $\Omega^\bullet(\eta) : \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathrm{P}) \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{KR})$ 的截面。在推论 4.16 中，我们证明，全局 Segal–Becker 分裂与表示线丛到虚向量丛的包含映射的态射 $h\colon \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{BUP}$ 复合后所得的复合映射 $c\circ h\colon \mathrm{P} \longrightarrow \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathrm{P})$，就是伴随 $(\Sigma^\infty_+, \Omega^\bullet)$ 的单位。

构造 4.1（实全局超交换幺半群 $\mathbf{P}$）。我们回顾由复射影空间构成的正交 C-空间 $\mathbf{P}$，参见 [24, (2.3.20)], ，它是扩张圆群 $T = U(1) = U(1)\rtimes C$的实全局分类空间的一个特定超交换模型。在 [24],中，我们使用记号$\mathbf{P}^{\mathbb{C}}$ ，以区别于由复射影空间构成的这一版本和实版本。本文中，实版本不起作用，因此我们简化记号，省略上标“$\mathbb{C}$”。$\mathbf{P}$ 在内积空间 V处的取值为

$$\mathbf{P}(V) \ = \ P(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}})) \ ,$$

复化的对称代数的复射影空间。由线性等距嵌入 φ: $V \longrightarrow W$诱导的结构映射 $\mathbf{P}(\varphi)\colon \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(W)$，将复直线映射到其在 $\mathrm{Sym}(\varphi_{\mathbb{C}}) : \mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathrm{Sym}(W_{\mathbb{C}})$ 下的像。对合 $\psi(V) : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V)$ 由 $\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}})$ 上的复共轭诱导；这是利用了共轭线性映射也会将 $\mathbb{C}$-子空间映射到 $\mathbb{C}$-子空间这一性质。

作为 $\tilde{T}$ 的实全局分类空间，正交 C-空间 $\mathbf{P}$ 在不稳定实全局同伦范畴上表示函子 $\pi_0^{\tilde{T}}$。我们稍后需要引用泛元，即典范的˜类，因此在此回顾它。我们考虑如下 T-不变复直线

$$\mathbb{L} \;=\; \mathbb{C}\cdot(1\otimes 1 - i\otimes i) \;=\; \mathrm{im}(\zeta^1\colon \nu_1 \longrightarrow u(\nu_1)_{\mathbb{C}}) \;\subset\; u(\nu_1)_{\mathbb{C}}\ ,$$

其中 ζ^1 在 (1.6) 中定义。我们也通过嵌入˜$u(\nu_1)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Sym}(u(\nu_1)_{\mathbb{C}})$ 将 $\mathbb{L}$ 视为对称代数中的一条复直线，将其作为线性直和项。于是 $\mathbb{L}$ 是 T-不动点 $P(\mathrm{Sym}(u(\nu_1)_{\mathbb{C}})) = \mathbf{P}(u(\nu_1))$；不稳定和稳定典范类

$$u_{\tilde{T}} \;\in\; \pi_0^{\tilde{T}}(\mathbf{P}) \qquad \text{and} \qquad e_{\tilde{T}} \;\in\; \pi_0^{\tilde{T}}(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}) \tag{4.2}$$

˜分别是它的同伦类，以及由 T-等变映射表示的类

$$S^{\nu_1} \;\xrightarrow{-\wedge\mathbb{L}}\; S^{\nu_1}\wedge \mathbf{P}(u(\nu_1))_+ \;=\; (\Sigma^\infty_+\mathbf{P})(u(\nu_1))\ .$$

˜于是，数对 $(\mathbf{P}\, u_{\tilde{T}})$ 表示不稳定实全局同伦范畴上的函子 π_0^T；而数对 ˜$(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}\, e_{\tilde{T}})$ 表示实全局稳定同伦范畴上的函子 π_0^T。

构造 4.3（态射 $\eta\colon \Sigma^\infty_+\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{KR}$）。从$\Sigma^\infty_+\mathbb{C}P^\infty$到 KU的非等变谱态射将 $\mathbb{C}P^\infty$上的典范复直线丛分类，它有一个特别优美且重要的实全局精化 $\eta\colon \Sigma^\infty_+\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{KR}$，定义为两个超交换 C-环谱态射的复合

$$\Sigma^\infty_+\mathbf{P} \;\xrightarrow{\mu}\; \mathbf{kr} \;\xrightarrow{j}\; \mathbf{KR}\ .$$

第一个态射 μ 是秩过滤中“秩 1”部分的包含映射，参见 [24, 构造 6.3.40]；它在内积空间 V 上的取值是一个 C-等变映射

$$\mu(V)\ :\ (\Sigma^\infty_+\mathbf{P})(V) = S^V\wedge P(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}))_+ \;\longrightarrow\; \mathscr{C}(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}), S^V) = \mathbf{kr}(V)\ ,\quad v\wedge L \longmapsto [L; v]\ .$$

我们回顾构造 B.48 中态射 $j\colon \mathbf{kr} \longrightarrow \mathbf{KR}$ 的定义。

˜作为实全局谱的底层态射，它分类典范的 T-表示：根据定理 B.52˜(ii) 给出的 $\pi_0^{\tilde{T}}(\mathbf{KR})$ 与实表示环 $RR(\tilde{T})$ 之间的优选识别，稳定典范类 (4.2) 映至典范 T-表示的类，即

$$\eta_*(e_{\tilde{T}}) \;=\; [\nu_1] \quad \text{in } \pi_0^{\tilde{T}}(\mathbf{KR}) \cong RR(\tilde{T}).$$

由于 η 是超交换 C-环谱的态射，它在等变同伦群上的作用不仅与限制、膨胀和转移相容，也与乘法幂运算和范数相容。在 [27], 中，我将建立 Snaith 著名定理的一个全局等变推广 [31, 32],：该定理指出，可以通过“对 Bott 类取逆”从 $\Sigma^\infty_+\mathbb{C}P^\infty$ 得到 KU。

构造 4.4（全局 Segal–Becker 分裂的 σ-去环路化）。正交 C-谱之间的自然态射 $\lambda^\sigma_X\colon X\wedge S^\sigma \longrightarrow \mathrm{sh}^\sigma X$ 在 [24, (3.1.23)] 中定义。根据 [24, 定理 3.1.25 (ii)], 此态射是一个 C-全局等价。定理 1.16 允许我们通过指定 $\Sigma^\infty\mathbf{U}$ 在 $\pi^{U(k)}\ \mathrm{ad}(k)(\Sigma^\infty\mathbf{U})$ 中由 (1.15) 定义的类 ω_k 上的取值，来定义 C-全局态射。因此，我们令

$$d^\flat\ :\ \Sigma^\infty\mathbf{U} \;\longrightarrow\; \mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}) \tag{4.5}$$

它是 C-全局稳定同伦范畴中的唯一态射，使得

$$d^\flat_*(\omega_k) \;=\; \begin{cases} (\lambda^\sigma_{\Sigma^\infty_+\mathbf{P}})_*(e_{\tilde{T}}\wedge S^\sigma) & \text{for } k=1, \text{ and} \\ 0 & \text{for } k\geq 2. \end{cases}$$

对于 $k=1$，我们已隐式地通过将 $x\in\sigma$ 送至 $i\cdot x\in$ ad(1)，把符号表示与 ad(1) 视为相同。通俗地说，态射 $d^\flat$ 是稳定分裂 (1.1) 中投影到直和项 $k=1$ 上的投影。

作为针对 C-全局模型结构的一对 Quillen伴随函子对，这一对 $(\Sigma^\infty, \Omega^\bullet)$ 在 C-全局同伦范畴层面导出一对伴随函子。因此，来自 (4.5) 的稳定态射 $d^\flat$ 伴随于基点化 C-全局空间的同伦范畴中的一个不稳定态射

$$d \,:\, \mathbf{U} \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}))\,. \tag{4.6}$$

这是我们的 σ全局 Segal–Becker 分裂的去环路化。

现在我们可以证明引言中的定理 A。

定理 4.7。复合映射

$$\mathbf{U} \xrightarrow{d} \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})) \xrightarrow{\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\eta)} \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{KR})$$

等于 态射 $\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\, j)\circ \mathrm{eig}\colon \mathbf{U}\longrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{KR})$，因此是一个 C-全局等价 e.

证明。我们 断言下图在 C-全局稳定同伦范畴中交换 :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^\infty\mathbf{U} & \xrightarrow[(4.5)]{d^\flat} & \mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}) \\ {\scriptstyle \mathrm{eig}^\flat}\downarrow{\scriptstyle (3.2)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{sh}^\sigma\,\eta} \\ \mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{kr} & \xrightarrow[\mathrm{sh}^\sigma\, j]{} & \mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{KR} \end{array} \tag{4.8}$$

根据定理 1.16，只需证明两个复合映射在所有 $k\geq 1$ 的类 ω_k 上相等。对于 $k\geq 2$，根据定义，我们有 $d^\flat_*(\omega_k) = 0$，而根据定理 3.3，$((\mathrm{sh}^\sigma\, j)\circ \mathrm{eig}^\flat)_*(\omega_k) = 0$。因此，图表 (4.8) 中的两个复合映射都消去类 ω_k。

For $k=1$ 下面这个基点 $\tilde{T}$-映射的图表，根据定义显然交换:

$$\begin{array}{ccccccc} S^{\nu_1\oplus\sigma} & \xrightarrow[(2.7)]{S^{\nu_1}\wedge\mathfrak{c}} & S^{\nu_1}\wedge U(1) & \xrightarrow[(1.7)]{S^{\nu_1}\wedge\zeta^1_*} & S^{\nu_1}\wedge\mathbf{U}(u(\nu_1)) & = & (\Sigma^\infty\mathbf{U})(u(\nu_1)) \\ {\scriptstyle -\wedge\mathbb{L}\wedge -}\downarrow & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{eig}^\flat(u(\nu_1))} \\ S^{\nu_1}\wedge\mathbf{P}(u(\nu_1))_+\wedge S^\sigma & \xrightarrow[(\lambda^\sigma_{\Sigma^\infty_+\mathbf{P}})(\nu_1)]{} & S^{\nu_1\oplus\sigma}\wedge\mathbf{P}(u(\nu_1)\oplus\sigma)_+ & \xrightarrow[(\mathrm{sh}^\sigma\,\mu)(\nu_1)]{} & \mathbf{kr}(u(\nu_1)\oplus\sigma) & = & (\mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{kr})(u(\nu_1)) \end{array}$$

事实上，两个复合映射都将 $x\in S^{\nu_1\oplus\sigma}$ 映到单元素构形

$$[\mathbb{L}, x] \;\in\; \mathscr{C}(\mathrm{Sym}((u(\nu_1)\oplus\sigma)_{\mathbb{C}}), S^{\nu_1\oplus\sigma}) \;=\; (\mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{kr})(u(\nu_1))\,,$$

由 $u(\nu_1)_{\mathbb{C}}\longrightarrow (u(\nu_1)\oplus\sigma)_{\mathbb{C}}\longrightarrow \mathrm{Sym}((u(\nu_1)\oplus\sigma)_{\mathbb{C}})$ 嵌入的点 x，由复直线 $\mathbb{L} = \mathbb{C}\cdot(1\otimes 1 - i\otimes i) \subset u(\nu_1)_{\mathbb{C}}$ 标记。此图表见证了关系

$$((\mathrm{sh}^\sigma\,\mu)\circ\lambda^\sigma_{\Sigma^\infty_+\mathbf{P}})_*(e_{\tilde{T}}\wedge S^\sigma) \;=\; \mathrm{eig}^\flat_*(u_1)$$

在群 $\pi^T_\sigma(\mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{kr})$ 中。根据定义 $\eta = j\circ\mu$，我们得到

$$((\mathrm{sh}^\sigma\,\eta)\circ d^\flat)_*(\omega_1) \;=\; ((\mathrm{sh}^\sigma\, j)\circ(\mathrm{sh}^\sigma\,\mu)\circ\lambda^\sigma_{\Sigma^\infty_+\mathbf{P}})_*(e_{\tilde{T}}\wedge S^\sigma) \;=\; ((\mathrm{sh}^\sigma\, j)\circ\mathrm{eig}^\flat)_*(u_1)\,.$$

由命题 2.8 可知 $u_1 = \omega_1$，这就完成了证明，即图表 (4.8) 交换。将伴随 $(\Sigma^\infty,\Omega^\bullet)$ 的映射转为伴随映射后，交换图 (4.8) 变为所需关系 $\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\, j)\circ\mathrm{eig} = \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\eta)\circ d\colon \mathbf{U}\longrightarrow\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{KR})$。复合映射 $\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\, j)\circ\mathrm{eig}$ 根据定理 B.49 是一个 C-全局等价，因此 $\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\eta)\circ d$ 也是如此。□

现在，我们通过对态射 $d\colon \mathbf{U}\longrightarrow\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}))$ 取环路，并利用实全局 Bott 周期等价 $\mathbf{BUP}\sim\Omega^\sigma\mathbf{U}$，构造实际的全局 Segal–Becker 分裂 $c\colon \mathbf{BUP}\longrightarrow\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$，其中该态射通过符号表示取环路。

构造 4.9（全局 Segal–Becker 分裂）。超交换 C-幺半群 $\mathbf{BUP}$ 在 [24, 例 2.4.33], 中定义，我们在 B.3 中回顾其构造。在定理 B.24 中，我们建立了 Bott 周期性的实全局形式，其概述为超交换 C-幺半群之间的实全局等价

$$\gamma \;:\; \mathbf{BUP} \xrightarrow{\sim} \Omega^{\sigma}\mathbf{U}$$

在 (B.26) 中定义。接下来，我们将全局 *Segal–Becker* 分裂定义为

$$c \;:\; \mathbf{BUP} \longrightarrow \Omega^{\bullet}(\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P}) \tag{4.10}$$

在不稳定的基点 C-全局同伦范畴中，使下图交换的唯一态射：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{BUP} & & \xrightarrow{\quad c \quad} & & \Omega^{\bullet}(\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P}) \\
{\scriptstyle\gamma}\downarrow{\scriptstyle\sim} & & & & {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle\Omega^{\bullet}(\tilde{\lambda}^{\sigma}_{\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P}})} \\
\Omega^{\sigma}\mathbf{U} & \xrightarrow[\Omega^{\sigma}d]{} & \Omega^{\sigma}(\Omega^{\bullet}(\mathrm{sh}^{\sigma}(\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P}))) & \xrightarrow[\cong]{} & \Omega^{\bullet}(\Omega^{\sigma}(\mathrm{sh}^{\sigma}(\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P})))
\end{array} \tag{4.11}$$

˜未命名的同构交换了环路所取的顺序，而 $\lambda^{\sigma}_{X}\colon X \longrightarrow \Omega^{\sigma}(\mathrm{sh}^{\sigma} X)$ 是 $\lambda^{\sigma}_{X}\colon X \wedge S^{\sigma} \longrightarrow \mathrm{sh}^{\sigma} X$ 的伴随。

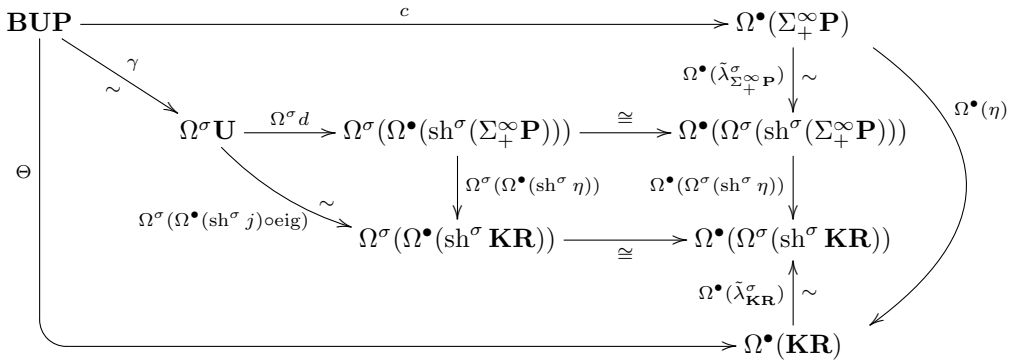
下一个定理验证，全局 Segal–Becker 分裂确实是态射 $\Omega^{\bullet}(\eta)\colon \Omega^{\bullet}(\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P}) \longrightarrow \Omega^{\bullet}(\mathbf{KR})$ 的一个分裂。在定理 5.12 中，我们将证明，我们的全局 Segal–Becker 分裂在上同调理论层面实现了经典等变 Segal–Becker 分裂，从而证明了其名称的合理性。

定理 4.12。复合映射

$$\mathbf{BUP} \xrightarrow{\;c\;} \Omega^{\bullet}(\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P}) \xrightarrow{\;\Omega^{\bullet}(\eta)\;} \Omega^{\bullet}(\mathbf{KR})$$

等于 态射 $\Theta\colon \mathbf{BUP} \longrightarrow \Omega^{\bullet}(\mathbf{KR})$ 在(B.51)中定义，因此是一个 C-全局等价 .

证明。 若干定义和先前的一个结果共同构成如下交换图 :



图表中涉及态射 Θ和 c 的部分分别由定义 (B.51) 和 (4.11) 可交换。从 $\Omega^{\sigma}\mathbf{U}$出发的内三角形由定理 4.7 可交换。图表˜的右侧部分由 λ^{σ}_{X}-态射的自然性可交换。由定理 B.52 (i)，态射 Θ 是一个 C-全局等价，因此复合映射 $\Omega^{\bullet}(\eta)\circ c$也是如此。□

备注 4.13（截面不能两次解环）。 由于 $\Omega^{\bullet}(\eta)\colon \Omega^{\bullet}(\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P}) \longrightarrow \Omega^{\bullet}(\mathbf{KR})$ 是一个带有不稳定截面的实全局无限环映射，人们不禁会问，不稳定截面究竟能进行多少次去环路化。我们构造的截面 $c\colon \mathbf{BUP} \longrightarrow \Omega^{\bullet}(\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P})$ 将其表示为一个 C-全局 σ-环路映射，其去环路化是态射 $d\colon \mathbf{U} \longrightarrow \Omega^{\bullet}(\mathrm{sh}^{\sigma}(\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P}))$。如果我们遗忘 C-作用并转到下层全局态射，

这些数据证明了全局 Segal–Becker 分裂是全局环路映射。然而，即使在非等变情形下，也无法做得更好，正如我们现在要回顾的那样。

由 Bott 周期性赋予无限酉群 U 的 H-空间结构与群结构所赋予的 H-空间结构相同。在 Pontryagin 乘积下，模 2 同调 $H_*(U;\mathbb{F}_2)$ 是由类 $a_i \in H_{2i+1}(U;\mathbb{F}_2)$ 生成的外$\mathbb{F}_2$代数，其中 $i \geq 0$。相比之下，$H_*(\Omega^\infty(\Sigma^\infty_+\mathbb{C}P^\infty \wedge S^1);\mathbb{F}_2)$ 是由 $\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty_+ \wedge S^1;\mathbb{F}_2)$ 的一组基上的迭代 Kudo–Araki 运算生成的多项式$\mathbb{F}_2$代数，参见例如 [11,定理 5.1]。因此，交换分次 $\mathbb{F}_2$代数的满同态

$$(\Omega^\infty(\eta\wedge S^1))_* \;:\; H_*(\Omega^\infty(\Sigma^\infty_+\mathbb{C}P^\infty\wedge S^1);\mathbb{F}_2) \;\longrightarrow\; H_*(\Omega^\infty(KU\wedge S^1);\mathbb{F}_2) \;\cong\; H_*(U;\mathbb{F}_2)$$

不容许乘法截面。因此，映射 $\Omega^\infty(\eta\wedge S^1)\colon \Omega^\infty(\Sigma^\infty_+\mathbb{C}P^\infty\wedge S^1) \longrightarrow \Omega^\infty(KU\wedge S^1)$ 不存在作为 H-映射的截面，更不用说环路映射了。

$\tilde{U}(k)$-等变线性嵌入 $\zeta^k\colon \nu_k \longrightarrow u(\nu_k)_{\mathbb{C}}$定义于 (1.6) 中。其像是一个维数为 k 的 $\tilde{U}(k)$-不变线性子空间，因而是 $Gr^{\mathbb{C}}_k(u(\nu_k)_{\mathbb{C}}) = \mathbf{Gr}_k(u(\nu_k))$ 的一个 $\tilde{U}(k)$-不动点。我们记

$$\{\nu_k\} \;=\; [\mathrm{im}(\zeta^k)] \;\in\; \pi_0^{\tilde{U}(k)}(\mathbf{Gr}_k) \subset \pi_0^{\tilde{U}(k)}(\mathbf{Gr})$$

其同伦类。下一个命题确定该类在如下复合映射下的像

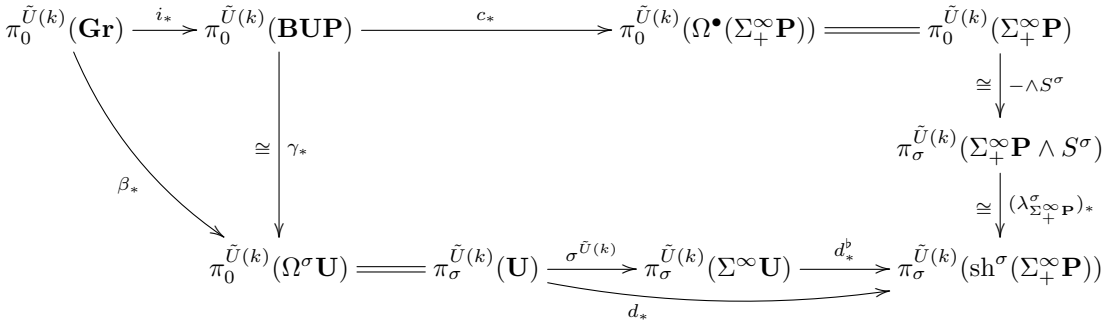
$$\mathbf{Gr} \;\xrightarrow{\;i\;}\; \mathbf{BUP} \;\xrightarrow{\;c\;}\; \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})\;.$$

定理 4.14. 对于每个 $k \geq 1$，关系

$$(c\circ i)_*\{\nu_k\} \;=\; \mathrm{tr}^{\tilde{U}(k)}_{\tilde{U}(k-1,1)}(1\times e_{\tilde{T}})$$

在群 $\pi_0^{U(k)}(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 中成立。

证明。 由态射 $c\colon \mathbf{BUP} \longrightarrow \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 的定义 (4.11)，下图可交换；该态射来自态射 $d\colon \mathbf{U} \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}))$，而后者又被定义为 $d^\flat\colon \Sigma^\infty\mathbf{U} \longrightarrow \mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 的伴随：



映射 $\sigma^{\tilde{U}(k)}\colon \pi_\sigma^{U(k)}(\mathbf{U}) \longrightarrow \pi_\sigma^{U(k)}(\Sigma^\infty\mathbf{U})$ 是稳定化映射 [24, (3.3.12)]。

根据定义可直接看出，映射 $\beta_*\colon \pi_0^{U(k)}(\Omega^\sigma\mathbf{U}) \to \pi_\sigma^{U(k)}(\mathbf{U})$ 在 (2.27) 中定义，它将 $\{\nu_k\}$ 映射到映射 $\tilde{\alpha}_k = \zeta^k_*\circ\mathfrak{c}\circ\partial\colon S^\sigma \longrightarrow \mathbf{U}(u(\nu_k))$ 的同伦类。式 (2.11) 中定义的类 u_k 由 δ_k经 S^{ν_k} 悬挂表示，因此

$$\sigma^{\tilde{U}(k)}(\beta_*\{\nu_k\}) \;=\; u_k\;.$$

因此，交换图表明了关系 $(\lambda^{\sigma}_{\Sigma^\infty_+\mathbf{P}})_*((c\circ i)_*\{\nu_k\}\wedge S^\sigma) = d^\flat_*(u_k)$，其中 $\pi_\sigma^{U(k)}(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}))$。态射 $d^\flat$ 的定义性质和定理 2.16 随即推出

$$\begin{aligned}(\lambda^{\sigma}_{\Sigma^\infty_+\mathbf{P}})_*((c\circ i)_*\{\nu_k\}\wedge S^\sigma) \;=\; d^\flat_*(u_k) \;&=\; \sum_{1\le j\le k} d^\flat_*(\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-j,j)}(p_2^*(a_{\overline{\mathrm{ad}}(j)}\cdot\omega_j))\\ &=\; \sum_{1\le j\le k}\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-j,j)}(p_2^*(a_{\overline{\mathrm{ad}}(j)}\cdot d^\flat_*(\omega_j))\\ &=\; \mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-1,1)}(p_2^*((\lambda^{\sigma}_{\Sigma^\infty_+\mathbf{P}})_*(e_{\tilde T}\wedge S^\sigma)))\\ &=\; (\lambda^{\sigma}_{\Sigma^\infty_+\mathbf{P}})_*(\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-1,1)}(1\times e_{\tilde T})\wedge S^\sigma)\;.\end{aligned}$$

按 S^σ 悬挂以及映射 $(\lambda^{\sigma}_{\Sigma^\infty_+\mathbf{P}})_*$ 均为双射的，因此这就证明了所需的关系。 □

这一对 $(\mathbf{P}\,u_{\tilde T})$ 表示不稳定 C-全局同伦范畴上的函子 π_0^T。因此我们可以定义

$$h\;:\;\mathbf{P}\;\longrightarrow\;\mathbf{BUP} \tag{4.15}$$

为满足 $h_*(u_{\tilde T}) = i_*\{\nu_1\}$ in $\pi_0^T(\mathbf{BUP})$ 的唯一态射。态射 h 表示线丛到虚向量丛的包含映射。

推论 4.16。复合映射

$$\mathbf{P}\;\xrightarrow{\;h\;}\;\mathbf{BUP}\;\xrightarrow{\;c\;}\;\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$$

是伴随 $(\Sigma^\infty_+,\Omega^\bullet)$ 的单位。

证明。 *</style>*对于，定理 *4.14* 特化为 *()*在 *(P)* 中。因此

$$(c\circ h)_*(u_{\tilde T})\;=\;(c\circ i)_*\{\nu_1\}\;=\;e_{\tilde T}\;.$$

伴随单位也将非稳定典范类 $u_{\tilde T}$映射为稳定典范类 $e_{\tilde T}$。由于$(\mathbf{P}\,u_{\tilde T})$ 表示非稳定 C-全局同伦范畴上的函子 π_0^T，这就证明了该断言。 □

我们以讨论全局 Segal–Becker 分裂的可加性——或者说其可加性的缺失——来结束本节。若忘掉实方向并转到底层的“非实”全局空间，那么 S^σ 上的符号作用便消失，σ-环路也就变成普通环路。由 Eckmann–Hilton 论证，环路加法于是与任意超交换乘法所给出的交换幺半群结构重合，而环路映射自动具有可加性。特别地，实全局 Segal–Becker 分裂底层的全局空间态射是一个全局环映射，因此诱导映射 $[A,c]^G\colon\;[A,\mathbf{BUP}]^G\longrightarrow[A,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^G$ 在 G 是具有到 C的平凡增广的紧李群时可加。

然而，由实全局 Segal–Becker 分裂诱导的映射 $[A,c]^\alpha$ 并非对满射增广 $\alpha\colon\;G\longrightarrow C$ 一般可加。事实上，即使对于带单位元增广的 $G=C$，可加性也会失效；对于 $A=*$ 也是如此，参见例 4.23。本节余下部分旨在更仔细地解释这一点，并在定理 4.20 (ii) 中对可加性失效的程度作出一些量化。

我们用来量化偏离可加性的工具，是 σ-环路对象上的某种自然结构。与非等变语境中的基本群 $\pi_1(X,x)=[S^1,X]_*$ 不同，集合 $[S^\sigma,X]^C_*$没有一种对于 X 中基点 C-等变映射而言自然的群结构。等价地说，σ-球面不存在等变的“捏映射” $S^\sigma\longrightarrow S^\sigma\vee S^\sigma$，也就是说，不存在这样的映射，使其与两个投影分别复合后都与单位元等变同伦。我们即将定义的 C-映射 $m\colon\;S^\sigma\longrightarrow S^\sigma\vee S^\sigma$，是对这一缺陷的部分补救。若忘却 C-作用，则 m 的底层非等变同伦类在自由群 $\pi_1(S^1\vee S^1,\;*)$ 中表示元素 $xy^{-1}x$，其中 x 和 y 分别表示左、右楔和直和项包含映射的类。

构造 4.17 （$\Omega^\sigma X$上的二元运算）。令 X 为一个基点正交 C-空间。我们在 σ-环空间 $\Omega^\sigma X$上定义一个特定的二元运算（4.18）。考虑以下 C-等变基点映射

$$m' \,:\, U(1) \;\longrightarrow\; U(1)\vee U(1)\;,\quad m'(z) \;=\; \begin{cases} (\;\; z^4, 1) & \text{if } \mathrm{Re}(z)\geq 0, \text{ and} \\ (-z^2, 2) & \text{if } \mathrm{Re}(z)\leq 0. \end{cases}$$

公式中 $m'(z)$ 的第二个坐标说明相应的点位于 $U(1)\vee U(1)$ 的两个楔和项中的哪一个。对于 $U(1)$ 的所有实例上的复共轭作用，映射 m' 显然是 C-等变的。我们通过用 Cayley 变换 (2.7) 共轭 m'，定义一个 C-等变映射 $m\colon S^\sigma \longrightarrow S^\sigma\vee S^\sigma$，也就是说，将其定义为以下复合映射

$$S^\sigma \;\xrightarrow[\cong]{\mathfrak{c}}\; U(1) \;\xrightarrow{m'}\; U(1)\vee U(1) \;\xrightarrow[\cong]{\mathfrak{c}^{-1}\vee c^{-1}}\; S^\sigma\vee S^\sigma\;.$$

与 $m\colon S^\sigma \longrightarrow S^\sigma\vee S^\sigma$ 前复合，便得到一个态射

$$m^* \,:\, (\Omega^\sigma X)\times(\Omega^\sigma X) \;\cong\; \mathrm{map}_*(S^\sigma\vee S^\sigma, X) \xrightarrow{\mathrm{map}_*(m,X)} \mathrm{map}_*(S^\sigma, X) = \Omega^\sigma X\;. \tag{4.18}$$

我们用 $\epsilon\colon S^\sigma \longrightarrow S^\sigma$ 表示符号对合，即 $\epsilon(x) = -x$。对于每个基点正交 C-空间 X，它通过前复合诱导一个对合 $\epsilon^*\colon \Omega^\sigma X \longrightarrow \Omega^\sigma X$。

命题 4.19. 设 X 是一个基点正交 C-空间。那么复合映射

$$\Omega^\sigma X \;\xrightarrow{(\mathrm{Id},\mathrm{Id})}\; (\Omega^\sigma X)\times(\Omega^\sigma X) \;\xrightarrow{m^*}\; \Omega^\sigma X$$

等变同伦于单位元，而复合映射

$$\Omega^\sigma X \;\xrightarrow{(*,\mathrm{Id})}\; (\Omega^\sigma X)\times(\Omega^\sigma X) \;\xrightarrow{m^*}\; \Omega^\sigma X$$

等变同伦于 $\epsilon^*\colon \Omega^\sigma X \longrightarrow \Omega^\sigma X$。

证明。 我们利用这样一个事实：对于由复共轭作用给出的 C-等变自映射，其在 $U(1)$上的等变基点同伦类由它在不动点 -1 处的取值以及底层非等变映射的度决定。复合映射

$$U(1) \;\xrightarrow{m'}\; U(1)\vee U(1) \;\xrightarrow{\nabla}\; U(1)$$

固定 -1 ，且底层映射的度为 $+1$，因此它等变基点同伦于单位映射，其中 ∇表示折叠映射。复合映射

$$U(1) \;\xrightarrow{m'}\; U(1)\vee U(1) \;\xrightarrow{p_2}\; U(1)$$

固定 -1 ，且底层映射的度为 -1，因此它等变基点同伦于复共轭，其中p_2 表示到第二个楔和项的投影。经凯莱变换共轭后，这些性质转化为如下事实：两个复合映射

$$S^\sigma \;\xrightarrow{m}\; S^\sigma\vee S^\sigma \;\xrightarrow{\nabla}\; S^\sigma \qquad\text{and}\qquad S^\sigma \;\xrightarrow{m}\; S^\sigma\vee S^\sigma \;\xrightarrow{p_2}\; S^\sigma$$

分别等变基点同伦于单位映射和符号对合 $\epsilon\colon S^\sigma \longrightarrow S^\sigma$。将映射$_*(-,X)$作用于这些映射和同伦，即得所述结论。□

我们滥用记号，也用 $\epsilon\in\pi_0^C(\mathbb{S})$ 表示符号对合 $\epsilon\colon S^\sigma \longrightarrow S^\sigma$ 的 C-等变稳定同伦类。此元素满足 $\epsilon^2 = 1$，并且与传递的关系为 $\mathrm{tr}^C_{\{1\}}(1) = 1-\epsilon$。等变同伦集 $[A,E]^\alpha$ 定义于 (A.3) 中。下一定理的 (ii) 部分涉及该群的模结构

$$[A,\Omega^\bullet Y]^\alpha \;\cong\; \pi_0^G(\mathrm{map}(A,\alpha^*(Y)))$$

在环 $\pi_0^G(\mathbb{S})$ 上。

以下定理对于平凡增广李群而言显而易见。事实上，在这种情况下，作为 c 底层映射的 G- 映射：$\mathrm{BUP} \longrightarrow \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathrm{P})$ 是一个环路映射，因而诱导出一个加法映射 $c_*\colon [A,\mathrm{BUP}]^G \longrightarrow [A,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathrm{P})]^G$。此外，$\mathrm{res}^C_{\{1\}}(\epsilon) = -1$，所以若 $\alpha\colon G \longrightarrow C$ 是平凡同态，则 $\alpha^*(\epsilon) = -1$。因此，以下定理第 (ii) 部分的公式变为 $c_*(2x+y) = 2c_*(x) + c_*(y)$。相反，若$\alpha\colon G \longrightarrow C$ 是满射，则 $\alpha^*(\epsilon) \neq -1$ 在 $\pi_0^G(\mathbb{S})$ 中，而 $c_*\colon [A,\mathrm{BUP}]^\alpha \longrightarrow [A,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathrm{P})]^\alpha$ 未必是加法的，见例 4.23。

定理 4.20。设 $\alpha\colon G \longrightarrow C$ 是一个增广李群，且 A 是一个有限的 G-CW 复形。(i) 设 $\psi\colon \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}$ 是基点 C 中的一个态射 -全局同伦范畴。则映射

$$(\Omega^\sigma\psi)_* \;:\; [A,\Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha \;\longrightarrow\; [A,\Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha$$

满足关系

$$(\Omega^\sigma\psi)_*(2x-y) \;=\; 2\cdot(\Omega^\sigma\psi)_*(x) - (\Omega^\sigma\psi)_*(y)$$

对所有 $x, y \in [A,\Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha$。

(ii) 映射

$$c_* \;:\; [A,\mathbf{BUP}]^\alpha \;\longrightarrow\; [A,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^\alpha$$

满足关系

$$c_*(2x+y) \;=\; (1-\alpha^*(\epsilon))\cdot c_*(x) \;+\; c_*(y)$$

对所有 $x, y \in [A,\mathbf{BUP}]^\alpha$。

证明。我们先作一个初步观察。设 M 是一个阿贝尔群，并赋予群同态 $\mu\colon M\times M \longrightarrow M$，使得 $\mu(x,x) = x$ 对所有 $x \in M$ 都成立。那么

$$\mu(x,y) \;=\; \mu((x,x)-(0,x)+(0,y)) \;=\; x - \mu(0,x) + \mu(0,y) \tag{4.21}$$

根据同态性质，对所有 $x, y \in M$。

(i) 在 (4.18) 中定义的 $\Omega^\sigma X$ 上的二元运算 m^* 对 X 中实全局空间的态射是自然的。特别地，它对乘法态射 $\mathbf{U}\boxtimes\mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}$ 是自然的。因此，映射

$$m^* \;=\; [A,m^*]^\alpha \;:\; [A,\Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha \times [A,\Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha \;\longrightarrow\; [A,\Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha$$

是阿贝尔群同态。命题 4.19 表明，$m^*(x,x) = x$ 和 $m^*(0,x) = [A,\epsilon^*]^\alpha(x)$。因此，由关系式 (4.21) 和命题 B.32 可得

$$m^*(x,y) \;=\; x - m^*(0,x) + m^*(0,y) \;=\; x - [A,\epsilon^*]^\alpha(x) + [A,\epsilon^*]^\alpha(y) \;=\; 2x-y$$

对所有 $x, y \in [A,\Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha$ 均成立。映射 $(\Omega^\sigma\psi)_*$ 与对 C-全局σ-环空间自然的所有运算相容。特别地，这包括二元运算 m^*。因此，

$$\begin{aligned}(\Omega^\sigma\psi)_*(2x-y) \;&=\; (\Omega^\sigma\psi)_*(m^*(x,y))\\ &=\; m^*((\Omega^\sigma\psi)_*(x),(\Omega^\sigma\psi)_*(y)) \;=\; 2\cdot(\Omega^\sigma\psi)_*(x) - (\Omega^\sigma\psi)_*(y)\end{aligned}$$

对所有 $x, y \in [A,\Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha$ 均成立。

(ii) 我们断言，对每个正交 C-谱，映射 $[A,\epsilon^*]^\alpha\colon [A,\Omega^\sigma(\Omega^\bullet Y)]^\alpha \longrightarrow [A,\Omega^\sigma(\Omega^\bullet Y)]^\alpha$ 等于乘以类$\alpha^*(\epsilon) \in \pi_0^G(\mathbb{S})$。这几乎是不言自明的，也是一个更一般事实的特殊情形：对紧李群 G 的每个正交表示 V，以及每个连续的基点保持 G-映射 $f\colon S^V \longrightarrow S^V$，对每个正交 G-谱 X，在 $\pi_V^G(X)$ 上，前复合 f 与乘以 $[f] \in \pi_0^G(\mathbb{S})$ 相同。

此外，对于每个正交 C-谱 Y，映射

$$m^* \;=\; [A,m^*]^\alpha \;:\; [A,\Omega^\sigma(\Omega^\bullet Y)]^\alpha \times [A,\Omega^\sigma(\Omega^\bullet Y)]^\alpha \;\longrightarrow\; [A,\Omega^\sigma(\Omega^\bullet Y)]^\alpha$$

对于由稳定性产生的阿贝尔群结构都是可加的。因此，关系式 (4.21) 和上述断言推出了关系式

$$m^*(x,y) \;=\; x - m^*(0,x) + m^*(0,y) \;=\; x - [A,\epsilon^*]^\alpha(x) + [A,\epsilon^*]^\alpha(y) \;=(1-\alpha^*(\epsilon))\cdot x + \alpha^*(\epsilon)\cdot y$$

对所有 $x,\ y \in [A,\Omega^\sigma(\Omega^\bullet Y)]^\alpha$。映射

$$(\Omega^\sigma d)_* = [A,\Omega^\sigma d]^\alpha \;:\; [A,\Omega^\sigma \mathbf{U}]^\alpha \;\longrightarrow\; [A,\Omega^\sigma(\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})))]^\alpha$$

与所有对 C-全局 σ-环空间自然的运算相容。特别包括二元运算 m^*。因此

$$\begin{aligned}(\Omega^\sigma d)_*(2x-y) \;&=\; (\Omega^\sigma d)_*(m^*(x,y))\\ &=\; m^*((\Omega^\sigma d)_*(x),(\Omega^\sigma d)_*(y))\\ &=\; (1-\alpha^*(\epsilon))\cdot(\Omega^\sigma d)_*(x) \;+\; \alpha^*(\epsilon)\cdot(\Omega^\sigma d)_*(y)\end{aligned} \tag{4.22}$$

对所有 $x,\ y \in [A,\Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha$。

全局 Segal–Becker 分裂 c 由交换方块 (4.11) 定义。它导出一个交换图表

$$\begin{array}{ccc}[A,\mathbf{BUP}]^\alpha & \xrightarrow{\quad[A,c]^\alpha\quad} & [A,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^\alpha\\ {\scriptstyle[A,\gamma]^\alpha}\downarrow\cong & & \cong\downarrow{\scriptstyle[A,\Omega^\bullet(\tilde\lambda^\sigma_{\Sigma^\infty_+\mathbf{P}})]^\alpha}\\ [A,\Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha & \xrightarrow[\quad[A,\Omega^\sigma d]^\alpha\quad]{} & [A,\Omega^\bullet(\Omega^\sigma(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})))]^\alpha\end{array}$$

其中所有对象都是阿贝尔群，但水平映射通常并非加法映射。态射γ 是超交换 C-幺半群的实全局等价，因此诱导的双射是加法的。C-全局等价 $\Omega^\bullet(\lambda^\sigma_{\Sigma^\infty_+\mathbf{P}})$源自一个 C-全局稳定映射，因此诱导的双射是加法的，并且与类 $\alpha^*(\epsilon)$的乘法相容。因此，下方水平映射的关系 (4.22) 蕴含上方水平映射 $c_* = [A,c]^\alpha$的类似关系，即

$$c_*(2x-y) \;=\; (1-\alpha^*(\epsilon))\cdot c_*(x) \;+\; \alpha^*(\epsilon)\cdot c_*(y)$$

对所有 $x,y \in [A,\mathbf{BUP}]^\alpha$。令 $x=0$，得到 $c_*(-y) = \alpha^*(\epsilon)\cdot c_*(y)$，因此

$$\begin{aligned}c_*(2x+y) \;&=\; c_*(2x-(-y))\\ &=\; (1-\alpha^*(\epsilon))\cdot c_*(x) + \alpha^*(\epsilon)\cdot c_*(-y) \;=\; (1-\alpha^*(\epsilon))\cdot c_*(x) + c_*(y)\ .\end{aligned}$$ □

例 4.23 （c_* 不是加法映射）。 在群 C 加上单位元这一特殊情形下，并且对于$A=*$，全局 Segal–Becker 分裂成为一个映射

$$c_* \;:\; \pi_0^C(\mathbf{BUP}) \;\longrightarrow\; \pi_0^C(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})\ .$$

在这种情况下，群 $\pi_0^C(\mathbf{BUP}) \cong RR(C)$ 是无限循环群，由类 $1 = h_*(\mathrm{res}^T_C(u_{\tilde T}))$ 生成，其中$u_{\tilde T} \in \pi_0^T(\mathbf{P})$ 是非稳定典范类 (4.2)，而 $h\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{BUP}$ 是 (4.15) 中定义的“线丛的包含映射”。此外，$\pi_0^C(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 是环 $\pi_0^C(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}[\epsilon]/(\epsilon^2-1)$ 上的秩 1 自由模；该环也称为群 C 的伯恩赛德环。我们有 $c_*(0) = 0$ 并且

$$c_*(1) \;=\; c_*(h_*(\mathrm{res}^{\tilde T}_C(u_{\tilde T}))) \;=\; \mathrm{res}^{\tilde T}_C(c_*(h_*(u_{\tilde T}))) \;=\; \mathrm{res}^{\tilde T}_C(e_{\tilde T}) \;=\; 1\ .$$

第三个等式用到了 $c\circ h\colon \mathbf{P} \longrightarrow \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 是伴随单位，参见推论 4.16。定理 4.20 (ii) 给出了以下关系

$$c_*(2) \;=\; (1-\epsilon)\cdot c_*(1) \;=\; 1-\epsilon \;\neq\; 2 \;=\; 2\cdot c_*(1)\ .$$

特别地，映射 c_* 不是可加的。

5. The G-equivariant Segal–Becker splitting and explicit Brauer induction

在本节中，我们将证明，我们的全局 Segal–Becker 分裂 $c\colon \mathbf{BUP} \longrightarrow \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 在等变上同调理论层面刚性化并实现了经典 Segal–Becker 分裂的全局化，并且它在等变同伦群上诱导出 Boltje–Symonds 的“显式 Brauer 归纳”。第一个事实是引言中的定理 C以及下文的定理 5.12；第二个事实是引言中的定理 D以及下文的推论 5.20。

构造 5.1（等变 Segal–Becker 分裂）。令 $\alpha\colon G \longrightarrow C$ 为增广李群。我们按照 Crabb 的表述 [10]，回顾 Iriye–Kono[14, §3]，借助等变转移给出的 α-等变 Segal–Becker 分裂。Crabb 仅讨论复向量丛的构造，这对应于增广 α 平凡这一特殊情形，因此无需特别提及。该构造可推广至一般增广李群；然而，从向量丛过渡到虚向量丛时会出现一个微妙之处：对于满射增广李群，Segal–Becker 分裂不具有可加性。

令 $\xi\colon E \longrightarrow A$ 为有限 G-CW 复形上的实 α-向量丛。我们记

$$P\xi \;:\; PE \longrightarrow A \tag{5.2}$$

为射影化丛；其在 $a \in A$ 上的纤维是复向量空间 $E_a = \xi^{-1}(\{a\})$ 的射影空间。全空间 PE 继承连续的 G-作用，且到 A 的投影是 G-等变的。因此，投影 (5.2) 有一个相应的转移，即真实G-谱的同伦范畴中从 $\Sigma^\infty_+ A$ 到 $\Sigma^\infty_+ PE$ 的态射。由于 A 是有限 G-CW 复形，此转移由一个连续的基点 G-映射表示

$$\tau(P\xi) \;:\; S^V \wedge A_+ \longrightarrow S^V \wedge (PE)_+ \,,$$

对于某个正交 G-表示 V。PE 上的典范复直线丛是一个实 α-线丛，因此由连续的 G-映射分类

$$\kappa \;:\; PE \longrightarrow \alpha^\flat(\mathbf{P}(W))$$

对于 $\mathcal{U}_G$ 的某个足够大的正交 G-子表示 W。如有必要，通过扩张，我们可以假设 $V = W$。记

$$\vartheta(\xi) \;\in\; [A, \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^\alpha$$

表示复合映射的伴随映射所对应的类

$$S^V \wedge A_+ \xrightarrow{\tau(P\xi)} S^V \wedge (PE)_+ \xrightarrow{S^V \wedge \kappa_+} S^V \wedge \alpha^\flat(\mathbf{P}(V))_+ \,.$$

类 $\vartheta(\xi)$ 仅取决于 α-向量丛 ξ 的同构类。因此，该构造给出一个良定义的映射

$$\vartheta_{\alpha,A} \;:\; \mathrm{Vect}^R_\alpha(A) \longrightarrow [A, \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^\alpha \tag{5.3}$$

该映射关于 A 中的连续 G-映射具有自然性，并且关于沿增广李群的态射所作的限制也具有自然性。

此时，满射增广李群会出现一个可能令人意外的特征。如果增广是平凡的，那么实 α-向量丛就是复 G-向量丛，我们所处的正是 Crabb [10]讨论的情形。在这种情况下，映射 (5.3) 对向量丛的 Whitney 和具有可加性，见 [10, 引理 2.6]。因此，它唯一地延拓为群完备化 $KU_G(A)$上的可加映射，即 A的复 G-等变 K 群。

正如我们将在下文的注 5.5 中所示，只要增广 $\alpha\colon G \longrightarrow C$ 是满射，等变 Segal–Becker 分裂 (5.3) 就不具有可加性。因此，不能利用群完备化性质，将 (5.3) 从 $\mathrm{Vect}^R_\alpha(A)$ 延拓到 $KR_\alpha(A)$。我们将在推论 5.8 中证明，映射 (5.3) 具有一种弱化形式的可加性，仍足以使其有意义地延拓到格罗滕迪克群，见 (5.11)。

实等变向量丛维数为 k 的泛型情形，是典范的 $U(k)$-表示 ν_k，将其视为点上的实 $U(k)$-等变向量丛。现在我们将在此情形下确定等变 Segal–Becker 分裂。

命题 5.4。令 $[\nu_k] \in \mathrm{Vect}^R_{\tilde U(k)}(*)$ 表示典范实 $\tilde U(k)$-表示在$\mathbb{C}^k$上的类，将其视为点上的实 $\tilde U(k)$-等变向量丛。那么

$$\vartheta_{\tilde U(k),*}[\nu_k] \;=\; \mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-1,1)}(1 \times e_{\tilde T})$$

属于 $\pi_0^{U(k)}(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$，其中 $e_{\tilde T} \in \pi_0^{\tilde T}(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 是稳定典范类 (4.2)。

证明。 $U(k)$ 群在射影空间 $P(\nu_k)$ 上传递作用，而复直线

$$l \;=\; \mathbb{C}\cdot(0,\dots,0,1)$$

的稳定子群为 $U(k-1,1)$。在 l 上的作用因此将 $P(\nu_k)$ 识别为陪集空间 $U(k)/U(k-1,\ 1)$。因此，等变转移

$$\tau(P(\nu_k))\ :\ \mathbb{S} \;\longrightarrow\; \Sigma^\infty_+ P(\nu_k)$$

与唯一的 $\tilde U(k)$-映射 $P(\nu_k) \longrightarrow *$ 相关联，它将 $1 \in \pi_0^{U(k)}(\mathbb{S})$映到类

$$\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-1,1)}(\sigma^{\tilde U(k-1,1)}[l]) \;\in \pi_0^{\tilde U(k)}(\Sigma^\infty_+ P(\nu_k))\ ,$$

其中，$[l] \in \pi_0(P(\nu_k)^{\tilde U(k-1,\ 1)})$ 是 $\tilde U(k-1,\ 1)$-不动点 l 的类，并且

$$\sigma^{\tilde U(k-1,1)}\ :\ \pi_0(P(\nu_k)^{\tilde U(k-1,1)}) \;\longrightarrow\; \pi_0^{\tilde U(k-1,1)}(\Sigma^\infty_+ P(\nu_k))$$

是稳定化映射 [24, (3.3.12)]。

稳定子群 $U(k-1,\ 1)$ 通过同态 $p_2\colon U(k-1,\ 1) \longrightarrow T$（其投影到第二个块）作用于不变直线 l；因此，分类 $U(k)$-映射

$$\kappa\ :\ P(\nu_k) \;\longrightarrow\; \mathbf{P}(\mathcal{U}_{U(k)})$$

典范线丛满足 $\kappa_*[l] = p_2^*(u_{\tilde T})$ 属于 $\pi_0^{U(k-1,1)}\mathbf{(P)}$，其中 $u_{\tilde T} \in \pi_0^{\tilde T}\mathbf{(P)}$ 是非稳定典范类 (4.2)。因此

$$(\Sigma^\infty_+\kappa)_*(\sigma^{\tilde U(k-1,1)}[l]) \;=\; \sigma^{\tilde U(k-1,1)}(\kappa_*[l]) \;=\; \sigma^{\tilde U(k-1,1)}(p_2^*(u_{\tilde T})) \;=\; p_2^*(\sigma^{\tilde T}(u_{\tilde T})) \;=\; 1 \times e_{\tilde T}\ .$$

综合这些观察可得

$$\begin{aligned}\vartheta_{\tilde U(k),*}[\nu_k] \;&=\; ((\Sigma^\infty_+\kappa)\circ\tau(P(\nu_k)))_*(1) \;=\; (\Sigma^\infty_+\kappa)_*(\mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-1,1)}(\sigma^{\tilde U(k-1,1)}[l]))\\ &=\; \mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-1,1)}((\Sigma^\infty_+\kappa)_*(\sigma^{\tilde U(k-1,1)}[l])) \;=\; \mathrm{tr}^{\tilde U(k)}_{\tilde U(k-1,1)}(1 \times e_{\tilde T})\ .\end{aligned}$$

□

注 5.5（注意非可加性）。我们证明，对于具有非平凡增广的增广李群，来自 (5.3) 的映射$\vartheta_{\alpha,\ A}$ 不是可加的。这与平凡增广李群形成对照，在这种情况下，根据 [10, 引理 2.6]，映射是可加的。我们使用 $\mathrm{res}^{U(2)}_C \circ \mathrm{tr}^{U(2)}_{\tilde U(1,\ 1)}$的双陪集公式，其中 C 在 (2) 中对应于复共轭。$\mathrm{res}^G_K \circ \mathrm{tr}^G_H$的一般双陪集公式可见 [20, 第 IV 节 6] 或 [24, 定理 3.4。9], 我们需要对其作特化。陪集空间 $U(2)/U(1,\ 1)$ 同胚于

射影空间 $P(\mathbb{C}^2)$，而 $\tilde{U}(2)/\tilde{U}(1,\ 1)$ 上的 C-作用（左平移）对应于$P(\mathbb{C}^2)$ 上的复共轭作用。因此，双陪集空间 $C\backslash\tilde{U}(2)/\tilde{U}(1,\ 1)$ 同胚于一个二维圆盘，其按边界（来自 C-不动点）和内部（对应于$\tilde{U}(2)/\tilde{U}(1,\ 1)$ 上 C自由作用的点）分层。 C-不动点 $(\tilde{U}(2)/\tilde{U}(1,\ 1))^C \cong P(\mathbb{C}^2)^C$同胚于$S^1$，因此其欧拉示性数为 0，不对双陪集公式作出贡献。非奇异部分是一个开二维圆盘，其内部欧拉示性数

$$\chi^\sharp(C\backslash P(\mathbb{C}^2)_{\mathrm{free}}) \;=\; \chi(D^2)-\chi(\partial D^2) \;=\; 1\ .$$

因此，双陪集公式变为

$$\mathrm{res}^{\tilde{U}(2)}_C\circ\mathrm{tr}^{\tilde{U}(2)}_{\tilde{U}(1,1)} \;=\; \mathrm{tr}^C_{\{1\}}\circ\mathrm{res}^{\tilde{U}(1,1)}_{\{1\}}\ .$$

现在考虑群 C，并将其上的单位元视为增广。我们证明映射$\vartheta_{C,\ *}$: $\mathbf{Vect}^R_C(*)\longrightarrow\pi^C_0(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 不是加法的。环 $\pi^C_0(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 同构于 $\mathbb{Z}[\epsilon]/(\epsilon^2-1)$，其中 ϵ 是 S^σ的符号对合的类。实 C-表示的同构类幺半群 $\mathbf{Vect}^R_C(*)$ 同构于 $\mathbb{N}$，其生成元为带有 C-作用（即复共轭）的 $\mathbb{C}$ 的类；这个生成元也称为 $\mathbf{res}^{\tilde{T}}_C[\nu_1]$，其中 C 作为复共轭嵌入 $\tilde{T}$。因此，命题 5.4 给出

$$\vartheta_{C,*}[\mathbb{C}] \;=\; \vartheta_{C,*}(\mathrm{res}^{\tilde{T}}_C[\nu_1]) \;=\; \mathrm{res}^{\tilde{T}}_C(\vartheta_{\tilde{T},*}[\nu_1]) \;=\; \mathrm{res}^{\tilde{T}}_C(e_{\tilde{T}}) \;=\; 1\ .$$

我们将 $[\mathbb{C}]\oplus[\mathbb{C}]\cong\mathbf{res}^{U(2)}_C(\nu_2)$ 视为实 C-表示。因此，由命题 5.4 和双陪集公式，

$$\begin{aligned}\vartheta_{C,*}(2\cdot[\mathbb{C}]) \;&=\; \vartheta_{C,*}(\mathrm{res}^{\tilde{U}(2)}_C[\nu_2]) \;=\; \mathrm{res}^{\tilde{U}(2)}_C(\vartheta_{\tilde{U}(2),*}[\nu_2]) \;=\; \mathrm{res}^{\tilde{U}(2)}_C(\mathrm{tr}^{\tilde{U}(2)}_{\tilde{U}(1,1)}(1\times e_{\tilde{T}}))\\ &=\; \mathrm{tr}^C_{\{1\}}(\mathrm{res}^{\tilde{U}(1,1)}_{\{1\}}(1\times e_{\tilde{T}})) \;=\; \mathrm{tr}^C_{\{1\}}(1) \;=\; 1-\epsilon \;\neq\; 2 \;=\; 2\cdot\vartheta_{C,*}[\mathbb{C}]\ .\end{aligned}$$

在推论 5.8 中，我们更一般地证明（但论证不那么直接）$\vartheta_{\alpha,\ A}(2\cdot[\xi]) = (1-\alpha^*(\epsilon))\cdot\vartheta_{\alpha,\ A}[\xi]$。

在定理 B.12 中，我们给出了交换幺半群的一个自然同构

$$\langle-\rangle\ :\ [A,\mathbf{Gr}]^\alpha\ \xrightarrow{\ \cong\ }\ \mathrm{Vect}^R_\alpha(A)$$

对于每个增广李群 $\alpha\colon\ G\longrightarrow C$ 以及每个有限的 G-CW 复形 A。超交换 C-幺半群的态射 $i\colon\ \mathbf{Gr}\longrightarrow\mathbf{BUP}$ 在 (B.4) 中定义。

定理 5.6。 对于每个增广李群 $\alpha\colon\ G\longrightarrow C$ 以及每个有限的 G-CW 复形 A，下图交换：

$$\begin{array}{ccc}[A,\mathbf{Gr}]^\alpha & \xrightarrow[\cong\ (\mathrm{B}.9)]{\langle-\rangle} & \mathrm{Vect}^R_\alpha(A)\\ \downarrow{\scriptstyle [A,i]^\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta_{\alpha,A}}\\ [A,\mathbf{BUP}]^\alpha & \xrightarrow[[A,c]^\alpha]{} & [A,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^\alpha\end{array}$$

证明。 定理 4.14 和命题 5.4 表明

$$(c\circ i)_*\{\nu_k\} \;=\; \mathrm{tr}^{\tilde{U}(k)}_{\tilde{U}(k-1,1)}(1\times e_{\tilde{T}}) \;=\; \vartheta_{\tilde{U}(k),*}[\nu_k]\ . \tag{5.7}$$

来自 (B.9) 的映射 $\langle-\rangle$ 将 $\{\nu_k\}$ 映到 ν_k的同构类，将其视为一点上的 Real $U(k)$-向量丛。因此，等式 (5.7) 表明，对于 $\alpha=U(k)$ 以及类 $\{\nu_k\}$上的 $A=*$，该方块交换。

现在，我们将图表中的两个复合映射都与由包含映射 $\mathbf{Gr}_k\longrightarrow\mathbf{Gr}$ 诱导的映射 $[A,\mathbf{Gr}_k]^\alpha\longrightarrow[A,\mathbf{Gr}]^\alpha$ 复合。令 α 和 A 变化，便在定义 A.9 的意义下得到从 $\mathbf{Gr}_k$ 到 $\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 的两个 C-全局变换。正交 C-空间 $\mathbf{Gr}_k$ 是增广李群 $U(k)$ 的一个实全局分类空间，而类 $\{\nu_k\}$ 是 (A.11) 意义下的典范类 $u_{\tilde{U}(k)\ *}$。由于 C-全局

˜变换在 $\alpha = U(k)$ 和 $A = *$ 上、关于 ν_k的类相一致，根据定理 A.12 的唯一性部分，这两个 C-全局变换完全一致。换言之：对于某个 $k \geq 0$，图表在 $[A,\mathbf{Gr}_k]^\alpha$ 像中的所有类上都可交换。

现在我们假设，按照这样的意义， A 是“G-连通”的：群 $\pi_0(G)$在 $\pi_0(A)$上具有传递作用。这保证了 A 上的每个实 α-向量丛都具有常秩，而且 $[A,\mathbf{Gr}]^\alpha$ 中的每个类都属于某个 $k \geq 0$对应的 $[A,\mathbf{Gr}_k]^\alpha$ 的像。因此，对这样的 A，该图表是交换的。

一般的有限 G-CW 复形可分解为不交并 $A = A_1 \amalg \ldots \amalg A_m$，其各项是由 $\pi_0(G)$在 $\pi_0(A)$上的轨道标记的 G-连通有限G-CW 复形。我们将 $\iota_j\colon\ A_j \longrightarrow A$ 记作第j个直和项的包含映射。于是映射

$$(\iota_1^*,\ldots,\iota_m^*)\ :\ [A,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^\alpha\ \longrightarrow\ [A_1,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^\alpha\times\cdots\times[A_m,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^\alpha$$

是双射的。因此，只需证明，对每个$1 \leq j \leq m$，将该图表与 ι_j^* 复合后仍然交换。根据自然性，对于 $\iota_j\colon\ A_j \longrightarrow A$，这一点成立；又因为根据前面的情形，该图表对于 A_j是交换的。□

定理 4　　.20 (ii) 以及映射 i_* 的可加性：$[A,\mathbf{Gr}]^\alpha \longrightarrow [A,\mathbf{BUP}]^\alpha$ 给出如下关系

$$(c\circ i)_*(2x+y)\ =\ (1-\alpha^*(\epsilon))\cdot(c\circ i)_*(x)\ +\ (c\circ i)_*(y)$$

在群 $[A,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^\alpha$ 中，对所有类 $x,y\in[A,\mathbf{Gr}]^\alpha$ 均成立。这里 $\epsilon\in\pi_0^C(\mathbb{S})$ 是符号对合 $\epsilon\colon\ S^\sigma\longrightarrow S^\sigma$ 的类，因此

$$(1-\alpha^*(\epsilon))\ =\ \begin{cases} 2 & \text{if } \alpha \text{ is trivial, and}\\ \mathrm{tr}^G_{\ker(\alpha)}(1) & \text{if } \alpha \text{ is surjective.}\end{cases}$$

根据定理 B.12 (ii)，映射 $\langle -\rangle\colon\ [A,\mathbf{Gr}]^\alpha\longrightarrow \mathsf{Vect}^R_\alpha(A)$ 是阿贝尔幺半群的同构。因此，定理 5.6 中刚刚建立的交换图意味着：

推论 5.8. 对于每个增广李群 $\alpha\colon\ G\longrightarrow C$，以及有限 G-CW 复形 A 上的任意两个 *Real* α-等变向量丛 ξ 和 ζ，α-等变 *Segal–Becker* 分裂 (5.3) 满足关系

$$\vartheta_{\alpha,A}(2\cdot[\xi]+[\zeta])\ =\ (1-\alpha^*(\epsilon))\cdot\vartheta_{\alpha,A}[\xi]\ +\ \vartheta_{\alpha,A}[\zeta]\ .$$

尽管 Segal–Becker 分裂 (5.3) 通常并非可加的，但现在我们可以将它有意义且自然地从幺半群 $\mathsf{Vect}^R_\alpha(A)$ 扩展到其群完备化 $KR_\alpha(A)$。

构造 5.9。 设 $\alpha\colon\ G\longrightarrow C$ 是一个增广李群，并设 A 是一个有限 G-CW 复形。推论 5.8 特别表明，以下关系

$$\vartheta_{\alpha,A}(2x+y)\ =\ \vartheta_{\alpha,A}(2x)\ +\ \vartheta_{\alpha,A}(y) \tag{5.10}$$

对所有类 $x,\ y\in\mathsf{Vect}^R_\alpha(A)$ 都成立。我们定义一个映射

$$\vartheta_{\alpha,A}\ :\ KR_\alpha(A)\ \longrightarrow\ [A,\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^\alpha \tag{5.11}$$

by

$$\vartheta_{\alpha,A}(x-y)\ =\ \vartheta_{\alpha,A}(x+y)-\vartheta_{\alpha,A}(2y)\ ,$$

对于 $x,\ y\in\mathsf{Vect}^R_\alpha(A)$。对于平凡增广，Segal–Becker 分裂 (5.3) 是可加的，而这个公式则以稍显繁复的方式定义了到群完备化的唯一可加扩展。

我们省略了利用关系 (5.10) 对该指派作直接验证的过程，即验证它是良定义的，也就是说，不依赖于将 $KR_\alpha(A)$ 中的类表示为两个实向量丛的形式差。既然良定义性成立，映射 (5.11) 显然是先前几何构造 (5.3) 的扩张，因此沿用同一名称是合理的。与映射 (5.3) 一样，当增广平凡时，扩张 (5.11) 具有可加性；但当增广是满射时，它不 具有可加性。无论如何，扩张 (5.11) 再次满足关系 (5.10)，但现在对所有 K-理论类 $x,\ y\in KR_\alpha(A)$ 都成立。

有人可能会想要通过将形式差 $x-y$ 映至 $\vartheta_{\alpha,\,A}(x)\ -\vartheta_{\alpha,\,A}(y)$ 来定义扩张 (5.11)。然而，当增广是满射时，这种指派并非良定义。

现在我们着手证明引言中的定理 C。该定理指出，我们的全局 Segal–Becker 分裂在等变上同调理论层面诱导出经典等变 Segal–Becker 分裂。在定理 B.12 中，我们给出了阿贝尔群的一个自然同构

$$\langle -\rangle\ :\ [A,\mathbf{BUP}]^{\alpha}\ \xrightarrow{\ \cong\ }\ KR_{\alpha}(A)$$

它适用于每个增广李群和每个有限等变 CW 复形。

定理 5.12。 对于每个增广李群 $\alpha\colon\ \ G\longrightarrow C$ 以及每个有限 G-CW 复形 A，映射$[A,c]^{\alpha}\colon\ \ [A,\mathbf{BUP}]^{\alpha}\longrightarrow[A,\Omega^{\bullet}(\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P})]^{\alpha}$ 与以下复合映射一致

$$[A,\mathbf{BUP}]^{\alpha}\ \xrightarrow[\cong]{\langle-\rangle}\ KR_{\alpha}(A)\ \xrightarrow{\vartheta_{\alpha,A}}\ \ [A,\Omega^{\bullet}(\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P})]^{\alpha}\ .$$

证明。 根据命题 B.5，映射 $i_{*}\colon\ [A,\mathbf{Gr}]^{\alpha}\longrightarrow[A,\mathbf{BUP}]^{\alpha}$ 是阿贝尔幺半群的群完备化。因此，$[A,\mathbf{BUP}]^{\alpha}$ 中的每个类都具有形式 $i_{*}(x)-i_{*}(y)$，其中某个 $x,y\in[A,\mathbf{Gr}]^{\alpha}$。定理 5.6 中建立的交换图以及交换图 (B.11) 表明，$c_{*}=[A,c]^{\alpha}$ 和 $\vartheta_{\alpha,A}\circ\langle-\rangle$在 i_{*} 的像中的所有类上都一致，特别是在类 $i_{*}(x+y)$ 和 $i_{*}(2y)$ 上。因此

$$\begin{aligned} c_{*}(i_{*}(x)-i_{*}(y))+c_{*}(i_{*}(2y))\ &=\ c_{*}(i_{*}(x+y))\ =\ \vartheta_{\alpha,A}\langle i_{*}(x+y)\rangle\\ &\overset{(5.11)}{=}\ \vartheta_{\alpha,A}\langle i_{*}(x)-i_{*}(y)\rangle+\vartheta_{\alpha,A}(2\langle i_{*}(y)\rangle)\\ &=\ \vartheta_{\alpha,A}\langle i_{*}(x)-i_{*}(y)\rangle+c_{*}(i_{*}(2y))\ . \end{aligned}$$

第一个等式是定理 4.20 (ii)。减去 $c_{*}(i_{*}(2y))$ 可得，所讨论的两个映射在 $[A,\mathbf{BUP}]^{\alpha}$ 的一般元素 $i_{*}(x)\ -i_{*}(y)$ 上相同。□

备注 5.13. 我们在群 $C=\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ 中添入单位元，从而使 $KR_{C}(X)$ 成为 C-空间 X 的 Atiyah 实 K-理论。Kono 在 [19, 定理 1.1] 中断言（采用不同记号），映射

$$\eta_{*}\ :\ [\Sigma^{\infty}_{+}X,(\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P})]^{C}\ \longrightarrow\ [\Sigma^{\infty}_{+}X,\mathbf{KR}]^{C}\ \cong\ KR_{C}(X)$$

只要 X 是紧 C-空间，它就是一个分裂满同态。不久之后，Iriye 和 Kono 考虑了˜更一般的情形：有限群 G 与乘法对合 τ 的半直积 $G=G\rtimes_{\tau}C$，通过投影将其扩充为 C；他们在 [14, 定理 1'] 中断言（同样换成我们的ˆ记号），对于紧 G-空间 X，“存在一个分裂满同态”

$$\eta_{*}\ :\ [\Sigma^{\infty}_{+}X,(\Sigma^{\infty}_{+}\mathbf{P})]^{\tilde{G}}\ \longrightarrow\ [\Sigma^{\infty}_{+}X,\mathbf{KR}]^{\tilde{G}}\ \cong\ KR_{\tilde{G}}(X)\ . \tag{5.14}$$

通常对“分裂满同态”的理解是：存在一个加法的截面的同态。按这种理解，[19, 定理 1.1] 和 [14, 定理 1'] 的证明存在缺陷。

事实上，Kono 在 [19] 中以及 Iriye 和 Kono 在其论文第 2 节中采用的转移技巧，只是对转移构造 (5.3) 的特殊情形所作的不同阐述；但我们在注 5.5 中证明，只要存在实方向，该构造就不是加法的，也就是说，对于满射增广李群而言确是如此。这个问题在最简单的实情形中就已出现，即 C 由单位元增广。

[19, 定理 1.1] 和 [14, 定理 1] 的证明都以一个不合法的化约步骤开始：我们分别看到“我们可以假设 ξ 是 n维实向量丛，定义在 X上”和“因此，我们可以假设 $x\in K_{G}(X)$ 是一个 n维的 G-向量丛，定义在 X上”。若要从固定秩的向量丛推广到格罗滕迪克群中的一般元素，就需要一些论证。在处理可加构造时，格罗滕迪克构造的泛性质往往会派上用场，即便没有明确提及也是如此。但对于像这里的构造（5.3）这样的非可加构造，则需要其他论证，例如推论 5.8 中的弱可加性；而且显然，若扩展一个非可加映射，该扩展也不会是可加的。

我们的定理 4.12 中的实全局分裂特别表明，映射 (5.14) 是满射的。我无法排除这样的可能性：这个映射或许还存在不同于我们所给出的截面，而且这些截面实际上是可加的，甚至可能在 $(G,\ X)$ 中具有某些自然性，因此 [14, 定理 1']的陈述或许是正确的。不过，我没有证据支持这种预期。

我们以引言中定理 D 的证明结束本节，该定理说明，全局 Segal–Becker 分裂 $c\colon \mathbf{BUP} \longrightarrow \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_* \mathbf{P})$ 对等变同伦群的作用，就是 Boltje 和 Symonds 的显式 *Brauer* 归纳。

备注 5.15（显式 Brauer 归纳）。Brauer 在 [8, 定理 I] 中证明，有限群的复表示环作为阿贝尔群由从子群的一维表示诱导得到的表示生成。Segal 在 [28,命题 3.11 (ii)]，中将这一结果推广到了紧李群，其中“归纳法”指光滑诱导。我们用 $\mathbf{A}(T,G)$ 表示自由阿贝尔群，其基由符号 $[H,\chi]$ 构成，其中 H 遍历 G 的所有具有有限 Weyl 群的闭子群共轭类，而 $\chi\colon\ H \longrightarrow T = U(1)$ 遍历 H 的所有特征。于是，Brauer–Segal 定理可以改述为：对于每个紧李群 G，映射

$$\mathbf{A}(T,G) \longrightarrow R(G) \tag{5.16}$$

将 $[H,\chi]$ 映射到 $\mathrm{tr}_H^G(\chi^*[\nu_1])$ 的映射是满射，其中 $[\nu_1] \in R(T)$ 是 $\mathbb{C}$ 上典范 T 表示的类。通俗地说，“显式 Brauer 归纳”是指对映射 (5.16) 的一组截面，这些截面由直接方法（例如显式公式）给出，并且当群 G 变化时具有自然性。因此，这类映射提供了一种“显式且自然”的方法，可将虚表示写成一维表示的诱导表示的线性组合。当然，何为“显式”，见仁见智。

第一个显式 Brauer 归纳是 Snaith 公式 [33, 定理 2.16]；然而，Snaith 的映射不满足加法性，也不与对子群的限制相容。Boltje [7] 纯粹通过代数方法为有限群给出了另一种显式 Brauer 归纳公式；Symonds [34] 则在紧李群的背景下，对同一个截面给出了拓扑解释。Symonds 对这些截面的构造 [34, §4]

$$b_G\ :\ R(G) \longrightarrow \mathbf{A}(T,G) \tag{5.17}$$

其设计目的是使得

$$b_{U(k)}[\nu_k] \ =\ [U(k-1,1), p_2] \qquad \text{in} \quad \mathbf{A}(T,U(k)) \tag{5.18}$$

对所有 $k \geq 1$，其中 $p_2\colon\ U(k-1,\ 1) \longrightarrow U(1) = T$是到第二个块的投影。Boltje–Symonds 映射具有加性，并且在沿连续群同态进行限制时具有自然性；而 b_G在特征为 χ 的一维表示上的取值为：$G \longrightarrow T$

$$b_G[\chi] \ =\ [G,\chi] \ \in\ \mathbf{A}(T,G)\ .$$

一般而言，Boltje–Symonds 映射 (5.17) 与转移不相容（事实上也不可能相容）。

由于正交空间 $\mathbf{P}$ 是圆群 T 的全局分类空间，全局函子$\pi_0(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 由 T 表示，见 [24, 命题 4.2.5]。更直观地说，这意味着阿贝尔群 $\pi_0^G(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 是自由的，其基由类 $\mathrm{tr}_H^G(\chi^*(e_T))$ 构成，其中 $(H,\ \chi)$ 遍历所有具有有限 Weyl 群的闭子群 H of G 的共轭类，以及所有连续同态$\chi\colon\ H \longrightarrow T$；见 [24, 推论 4.1.13]。群 $\mathbf{A}(T,\ G)$ 被定义为具有相应基的自由阿贝尔群，因此映射

$$\mathbf{A}(T,G) \longrightarrow \pi_0^G(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})\ ,\quad [H,\chi] \longmapsto \mathrm{tr}_H^G(\chi^*(e_T)) \tag{5.19}$$

是阿贝尔群的同构。

Boltje–Symonds 映射 $b_G\colon\ R(G) \longrightarrow \mathbf{A}(T,\ G)$ 是针对 $A = *$ 的等变 Segal–Becker 分裂 (5.11) 的特殊情形，具体而言，复合映射

$$R(G) = KU_G(*) \xrightarrow{\vartheta_{G,*}} [*, \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})]^G \ = \ \pi_0^G(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}) \cong_{(5.19)} \mathbf{A}(T,G)$$

与 (5.17) 一致。事实上，根据 (5.18) 和命题 5.4，b_G 和 $\vartheta_{G,\ *}$ 在典范表示ν_k的类上对 $G = U(k)$ 一致。因此，由自然性可知，它们对任意酉表示都一致；由可加性可知，它们对虚表示也一致。因此，下面的定理成为关于$A = *$的定理 5.12 的特殊情形。

推论 5.20。对于每个紧李群 G，映射 $\pi_0^G(c)\colon\ \pi_0^G(\mathbf{BUP}) \longrightarrow \pi_0^G(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})$ 等于复合映射

$$\pi_0^G(\mathbf{BUP}) \cong_{(\mathrm{B}.10)} R(G) \xrightarrow[(5.17)]{b_G} \mathbf{A}(T,G) \cong_{(5.19)} \pi_0^G(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})\ .$$

6. Global Adams operations

本节中，我们利用全局 Segal–Becker 分裂来构造等变 K-理论中不稳定 Adams 运算的实全局刚性化 (6.5)。

构造 6.1（等变 K 理论中的 Adams 运算）。令 $\alpha\colon\ G \longrightarrow C$ 为一个增广李群。我们回顾 λ-运算以及 Adams 运算在 Grothendieck 环$KR_\alpha(A)$上的构造，其中该环由紧 G-空间 A上的实 α-等变向量丛构成。对于 A上的任意实 α-向量丛 ξ和 ζ，实 α-向量丛 $\Lambda^n(\xi\oplus\zeta)$ 同构于 $\bigoplus_{i=0}^n \Lambda^i(\xi) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^{n-i}(\zeta)$。因此，映射

$$\Lambda\ :\ \mathrm{Vect}^R_\alpha(A) \longrightarrow KR_\alpha(A)[\![t]\!]\ ,\quad [\xi] \longmapsto \sum\nolimits_{n\geq 0} [\Lambda^n(\xi)]\cdot t^n$$

将 α-向量丛同构类的交换幺半群中的加法映射为幂级数环 $KR_\alpha(A)[\![t]\!]$ 中的乘法。此外，所有这些幂级数的常数项都是 $\Lambda^0(\xi) = 1$，因此它们都是可逆的。因此，Λ 定义了一个从 $\mathrm{Vect}^R_\alpha(A)$ 到环$KR_\alpha(A)[\![t]\!]$的乘法群的幺半群同态。由 Grothendieck 构造的泛性质，便可将其扩张为一个群同态

$$\Lambda\ :\ KR_\alpha(A) \longrightarrow (KR_\alpha(A)[\![t]\!])^\times\ .$$

接下来定义 λ-运算 $\lambda^i\colon\ KR_\alpha(A) \longrightarrow KR_\alpha(A)$：

$$\Lambda(x) \ = \ \sum\nolimits_{i\geq 0} \lambda^i(x)\cdot t^i\ .$$

按照设计，这些运算将实际实向量丛的类上的外幂推广开来。λ-运算使环 $KR_\alpha(A)$ 成为一个特殊的 λ-环，见 [1, 定理 1.5 (i)]。每个特殊的 λ-环都具有 ***Adams* 运算**，即环自同态 ψ^n，其中 $n \geq 1$ 满足 $\psi^m \circ \psi^n = \psi^{mn}$，对所有$m,\ n \geq 1$都成立；此外，对每个素数 p，还满足同余关系 $\psi^p(x) \equiv x^p$ 模 (p)，见 [1, §5]。我们尤其关注这些 Adams 运算

$$\psi^n\ :\ KR_\alpha(A) \longrightarrow KR_\alpha(A)$$

在实等变 K 理论的情形下。一个关键性质是，对于 Real 线丛 ξ 的类，Adams 运算由下式给出：

$$\psi^n[\xi] \ = \ [\xi^{\otimes n}]\ .$$

取向量丛的外幂，对于 G-映射 A中的对象以及沿增广李群连续同态的限制，都是自然的。因此，λ-运算和 Adams 运算都继承了这两种自然性。

例 6.2. 第二 Adams 运算 ψ^2: $KR_\alpha(A) \longrightarrow KR_\alpha(A)$ 在 Realα-向量丛 ξ 的类上的定义公式为

$$\psi^2[\xi] \;=\; [\mathrm{Sym}^2(\xi)] \;-\; [\Lambda^2(\xi)]\;,$$

ξ的二阶对称幂与外幂之形式差。事实上，这个公式在线丛上的表现正确，对 ξ中的 Whitney 和具有可加性，并且关于$(\alpha,\ A)$自然。因此，自然性迫使 ψ^2 由此公式给出。该公式表明，Adams 运算通常不会将向量丛（线丛除外）映到向量丛，而是映到虚向量丛。

现在我们将利用超交换幺半群$\mathbf{P}$ 的幂自同态以及全局 Segal–Becker 分裂，定义$\mathbf{BUP}$上的全局 Adams 运算。

构造 6.3（全局 Adams 运算）。 对于 $n\geq 1$，我们记

$$\mu_n \;:\; T \;\longrightarrow\; T\;,\quad \mu_n(\lambda)=\lambda^n \qquad\text{and}\qquad \tilde{\mu}_n=\mu_n\rtimes C \;:\; \tilde{T} \;\longrightarrow\; \tilde{T}$$

˜表示 n次幂同态，以及它向扩张圆群 $T=T\rtimes C$的扩张，分别记作。˜由于数对$(\mathbf{P}\,u_{\tilde{T}})$表示函子 π_0^T，我们可以在不稳定的C-全局同伦范畴中定义一个态射 $\phi^n\colon \mathbf{P}\longrightarrow\mathbf{P}$，使其满足

$$\phi^n_*(u_{\tilde{T}}) \;=\; \tilde{\mu}_n^*(u_{\tilde{T}})$$

in $\pi^{\tilde{T}}_0(\mathbf{P}\quad)$。态射 ϕ^n 因此表示将线丛提升到其 n 次幂。我们定义 e

$$\kappa^n \;:\; \mathbf{U} \;\longrightarrow\; \mathbf{U} \tag{6.4}$$

为基点非稳定 C-全局同伦范畴中的唯一态射，使下图交换:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{U} & & \xrightarrow{\quad\kappa^n\quad} & & \mathbf{U} \\
{\scriptstyle d}\big\downarrow & & & & \big\downarrow{\scriptstyle \sim\ \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\eta)\circ d} \\
\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})) & \xrightarrow[\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\phi^n))]{} & \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma(\Sigma^\infty_+\mathbf{P})) & \xrightarrow[\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\eta)]{} & \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{KR})
\end{array}$$

全局等价 $C\colon \mathbf{BUP}\xrightarrow{\sim}\Omega^\sigma\mathbf{U}$ 定义于 (B.26) 中。 n次全局 *Adams* 运算

$$\Upsilon^n \;:\; \mathbf{BUP} \;\longrightarrow\; \mathbf{BUP} \tag{6.5}$$

是基点非稳定 C-全局同伦范畴中的唯一态射，使下图交换:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{BUP} & \xrightarrow{\Upsilon^n} & \mathbf{BUP} \\
{\scriptstyle\gamma}\big\downarrow{\scriptstyle\sim} & & {\scriptstyle\sim}\big\downarrow{\scriptstyle\gamma} \\
\Omega^\sigma\mathbf{U} & \xrightarrow[\Omega^\sigma(\kappa^n)]{} & \Omega^\sigma\mathbf{U}
\end{array} \tag{6.6}$$

展开 κ^n 的定义 (6.4) 和 Segal–Becker 分裂 c 的定义 (4.10)，并利用 $\Omega^\bullet(\eta)\circ c=\Theta$，由定理 4.12 可知下图在非稳定 C-全局同伦范畴中交换:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{BUP} & & \xrightarrow{\quad\Upsilon^n\quad} & & \mathbf{BUP} \\
{\scriptstyle c}\big\downarrow & & & & \big\downarrow{\scriptstyle\sim\ \Theta} \\
\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}) & \xrightarrow[\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\phi^n)]{} & \Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+\mathbf{P}) & \xrightarrow[\Omega^\bullet(\eta)]{} & \Omega^\bullet(\mathbf{KR})
\end{array} \tag{6.7}$$

显然，模 态射 ϕ^1 是$\mathbf{P}$的单位元， κ^1 是$\mathbf{U}$的单位元， Υ^1 是$\mathbf{BUP}$的单位元。

下一个命题验证了 Adams 运算设计准则的全局相容版本，即对于线丛， ψ^n 是其 n 次张量幂。 C-全局空间的态射 $h\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{BUP}$是在 (4.15) 中定义的；它表示从线丛到虚向量丛的包含映射。

命题 6.8。 对于每个 $n \geq 1$，以下图表在不稳定的 C-全局同伦范畴中交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} & \xrightarrow{\phi^n} & \mathbf{P} \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \mathbf{BUP} & \xrightarrow[\Upsilon^n]{} & \mathbf{BUP} \end{array}$$

证明。 推论 4.16 表明， $c \circ h\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{\Omega^\bullet(\Sigma^\infty_+ P)}$ 是伴随 $(\Sigma^\infty_+, \Omega^\bullet)$ 的单位元；伴随单位的自然性给出 $(\Sigma^\infty_+\phi^n) \circ c \circ h = c \circ h \circ \phi^n$。因此

$$\Theta \circ \Upsilon^n \circ h \;=_{(6.7)}\; \Omega^\bullet(\eta) \circ (\Sigma^\infty_+\phi^n) \circ c \circ h \;=\; \Omega^\bullet(\eta) \circ c \circ h \circ \phi^n \;=\; \Theta \circ h \circ \phi^n \ .$$

最后一个等式即为定理 4.12。由于根据定理 B.52 (i)， $\Theta\colon \mathbf{BUP} \longrightarrow \mathbf{\Omega^\bullet(KR)}$ 是一个 C-全局等价，我们可以将其约去，从而得到所需的关系。□

下一个定理说明，将态射 $\Upsilon^n\colon \mathbf{BUP} \longrightarrow \mathbf{BUP}$ 称为“全局 Adams 运算”是恰当的。

定理 6.9. 对于每个增广李群 $\alpha\colon \ G \longrightarrow C$、每个有限 G-*CW* 复形 A 以及每个 $n \geq 1$，下列方块交换：

$$\begin{array}{ccc} [A, \mathbf{BUP}]^\alpha & \xrightarrow{\Upsilon^n_*} & [A, \mathbf{BUP}]^\alpha \\ {\scriptstyle (B.10)}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle (B.10)} \\ KR_\alpha(A) & \xrightarrow[\psi^n]{} & KR_\alpha(A) \end{array}$$

证明. 我们定义一个映射

$$\delta_{\alpha,A} \ : \ [A, \mathbf{BUP}]^\alpha \ \longrightarrow \ KR_\alpha(A) \quad \text{by} \quad \delta_{\alpha,A}(x) \ = \ \psi^n\langle x\rangle - \langle \Upsilon^n_*(x)\rangle \ ,$$

为所讨论图表中沿两条路径复合映射之差。我们需要证明，对于所有 (α, A)，都有 $\delta_{\alpha,A} = 0$ 。

我们声称这些映射满足：
(a) 对于 A 中的连续 G-映射以及增广李群的态射，映射 $\delta_{\alpha,A}$ 都是自然的。(b) 映射 $\delta_{\alpha,A}$ 满足 $\delta_{\alpha,A}(2x - y) = 2 \cdot \delta_{\alpha,A}(x) - \delta_{\alpha,A}(y)$，对所有 $x, y \in [A,\mathbf{BUP}]^\alpha$ 均成立。(c) 当增广 α 平凡时，映射 $\delta_{\alpha,A}$ 是可加的。

性质 (a) 显然成立，因为 Adams 运算和同构 (B.10) 关于 A 和 α 自然，而映射 Υ^n_* 也是如此，因为它们源自实全局空间的一个态射。

(b) 将 $[A, -]^\alpha$ 应用于 Υ^n 的定义图表，可得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} [A, \mathbf{BUP}]^\alpha & \xrightarrow{\Upsilon^n_*} & [A, \mathbf{BUP}]^\alpha \\ {\scriptstyle \gamma_*}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle \gamma_*} \\ [A, \Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha & \xrightarrow[(\Omega^\sigma(\kappa^n))_*]{} & [A, \Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha \end{array}$$

其中所有对象都是阿贝尔群，但水平映射未必是加法映射。由于 γ 是超交换 C-幺半群的 C-全局等价，因此垂直映射是阿贝尔群的同构。

由一个 σ-环路映射诱导的映射 $(\Omega^\sigma(\kappa^n))_*$ 满足

$$(\Omega^\sigma(\kappa^n))_*(2x-y) \;=\; 2\cdot(\Omega^\sigma(\kappa^n))_*(x) \;-\; (\Omega^\sigma(\kappa^n))_*(y)$$

对所有 $x,\ y\in[A,\Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha$，见定理 4.20 (i)。因此，上方的水平映射 Υ^n_* 满足类似的关系

$$\Upsilon^n_*(2x-y) \;=\; 2\cdot\Upsilon^n_*(x)-\Upsilon^n_*(y)$$

对所有 $x,\ y\in[A,\mathbf{BUP}]^\alpha$。Adams 运算 ψ^n 具有可加性，因此差 $\delta_{\alpha,\,A}$ 仍具有弱可加性 (b)。

(c) 由构造可知，其底层的“非实”整体态射 Υ^n 是一个全局环路映射。因此，对于所有具有平凡增广的紧李群 G，映射 $\Upsilon^n_*\colon[A,\mathbf{BUP}]^G\longrightarrow[A,\mathbf{BUP}]^G$ 具有可加性。Adams 运算 ψ^n 也具有可加性，因此差 $\delta_{\alpha,\,A}$也具有可加性。

现在我们分五个步骤证明映射 $\delta_{\alpha,\,A}$ 为零。第一步是 $(\alpha,\ A)=(T,\ *)$，以及 tautological Real T-表示的类。根据定义，态射 $h\colon\mathbf{P}\longrightarrow\mathbf{BUP}$ 满足 $i_*\{\nu_1\}=h_*(u_{\tilde T})$，其中 $\pi_0^T(\mathbf{BUP})$。因此

$$\begin{aligned}\langle\Upsilon^n_*(i_*\{\nu_1\})\rangle &= \langle\Upsilon^n_*(h_*(u_{\tilde T}))\rangle \;=\; \langle h_*(\phi^n_*(u_{\tilde T}))\rangle \;=\; \langle h_*(\tilde\mu^*_n(u_{\tilde T}))\rangle\\ &= \langle\tilde\mu^*_n(h_*(u_{\tilde T}))\rangle \;=\; \langle\tilde\mu^*_n(i_*\{\nu_1\})\rangle \;=\; \tilde\mu^*_n\langle i_*\{\nu_1\}\rangle \;=\; \tilde\mu^*_n[\nu_1] \;=\; \psi^n[\nu_1] \;=\; \psi^n\langle i_*\{\nu_1\}\rangle\ .\end{aligned}$$

第二个等式即命题 6.8。这个关系恰好意味着 $\delta_{\tilde T,\,*}(i_*\{\nu_1\})=0$。

第二步处理典范实 $\tilde U(k)$-表示 ν_k。对于 $1\le i\le k$，我们令 $p_i\colon T^k\longrightarrow\tilde T$ 表示到第 i 个因子的投影，随后包含映射到扩张圆群中。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{res}^{\tilde U(k)}_{T^k}(\delta_{\tilde U(k),*}(i_*\{\nu_k\})) &= \delta_{T^k,*}(\mathrm{res}^{\tilde U(k)}_{T^k}(i_*\{\nu_k\})) \;=\; \delta_{T^k,*}(p_1^*(i_*\{\nu_1\})+\cdots+p_k^*(i_*\{\nu_1\}))\\ &= \sum_{1\le i\le k}\delta_{T^k,*}(p_i^*(i_*\{\nu_1\})) \;=\; \sum_{1\le i\le k}p_i^*(\mathrm{res}^{\tilde T}_{T}(\delta_{\tilde T,*}(i_*\{\nu_1\}))) \;=\; 0\ .\end{aligned}$$

第一个和第四个等式是群中的自然性性质 (a)。第三个等式利用了映射 $\delta_{T^k,\,*}$ 由 (c) 可加，因为 T^k 是平凡增广的。限制同态 $\mathrm{res}^{U(k)}_{U\ k\,()}\colon RR(\tilde U(k))\longrightarrow R(U(k))$ 是单射，参见例如 [4, 第 13] 页。限制同态 $\mathrm{res}^{U(k)}_{T^k}\colon R(U(k))\longrightarrow R(T^k)$ 也是单射。因此这证明了 $\delta_{\tilde U(k)\,*}(i_*\{\nu_k\})=0$ 属于 $RR(\tilde U(k))$，即 $U(k)$ 的实表示环。

在第三步中，我们固定 $k\ge0$，并将 $j^k_{\alpha,\,A}$ 记作该复合映射

$$[A,\mathbf{Gr}_k]^\alpha\ \xrightarrow{\ i^k_*\ }\ [A,\mathbf{BUP}]^\alpha\ \xrightarrow{\ \delta_{\alpha,A}\ }\ KR_\alpha(A)\ \xrightarrow{\ (\mathrm{B}.10)^{-1}\ }\ [A,\mathbf{BUP}]^\alpha\ .$$

这里，$i^k\colon\mathbf{Gr}_k\longrightarrow\mathbf{BUP}$ 是态射 $i\colon\mathbf{Gr}\longrightarrow\mathbf{BUP}$ 在第 k 个直和项上的限制。改变 α 和 A，得到一个从 $\mathbf{Gr}_k$ 到 $\mathbf{BUP}$ 的 C-全局变换 j^k，其含义见定义 A.9。正交 C-空间 $\mathbf{Gr}_k$ 是增广李群 $U(k)$ 的一个 C- 全局分类空间，而类 $\{\nu_k\}$ 是典范类 $u_{\tilde U(k),\,*}$，其含义见 (A.11)。我们在前一步中证明了这个 C- 全局变换在典范类上为零；因此，根据定理 A.12 的唯一性部分，对于所有增广李群和所有有限等变 CW 复形，$j^k_{\alpha,\,A}$ 在 $[A,\mathbf{Gr}_k]^\alpha$ 的所有元素上均为零。

在第四步中，我们假设 A 是 G-连通的，也就是说，群 $\pi_0(G)$ 在 $\pi_0(A)$ 上传递作用。这保证了 A 上的每个实 α-向量丛都具有常秩。由定理 B.12 (iii) 中的同构可知，$[A,\mathbf{BUP}]^\alpha$ 中的每个元素都具有如下形式：$j^k_{\alpha,A}(y)-j^l_{\alpha,A}(z)$，其中 $k,l\ge0,\ \ y\in[A,\mathbf{Gr}_k]^\alpha$

以及 $z \in [A,\mathbf{Gr}_l]^\alpha$。于是

$$\begin{aligned}\delta_{\alpha,A}(j^k_{\alpha,A}(y) - j^l_{\alpha,A}(z)) \;&=\; \delta_{\alpha,A}(2\cdot j^k_{\alpha,A}(y) - j^{k+l}_{\alpha,A}(y+z))\\ &\overset{\text{(b)}}{=}\; 2\cdot\delta_{\alpha,A}(j^k_{\alpha,A}(y)) \;-\; \delta_{\alpha,A}(j^{k+l}_{\alpha,A}(y+z)) \;=\; 0\,.\end{aligned}$$

第三个等式是第三步。

在第五步也是最后一步中，我们令 A 为任意有限的 G-CW 复形。于是，$A = A_1 \amalg \ldots \amalg A_m$ 是由 G-连通有限 G-CW 复形的不交并，这些复形由 $\pi_0(A)$ 的 $\pi_0(G)$-轨道索引。我们将 $\iota_j\colon A_j \longrightarrow A$ 记作到第 j 个直和项的包含映射。根据第四步，

$$\iota_j^*(\delta_{\alpha,A}(x)) \;=\; \delta_{\alpha,A_j}(\iota_j^*(x)) \;=\; 0$$

对所有 $1 \le j \le m$ a nd 每个 $x \in [A,\mathbf{BUP}]^\alpha$。实等变 K 理论将不交并映为乘积，因此，该映射

$$(\iota_1^*,\ldots,\iota_m^*) \;:\; KR_\alpha(A) \;\longrightarrow\; KR_\alpha(A_1)\times\cdots\times KR_\alpha(A_m)$$

是环同构。因此 $\delta_{\alpha,\ A}(x) = 0$，由此完成证明。 □

Adams 运算满足 $\psi^m \circ \psi^n = \psi^{mn}$ 对所有 $m,\ n \ge 1$均成立。因此根据定理 6.9，实全局空间之间的态射

$$\Upsilon^m \circ \Upsilon^n,\ \Upsilon^{mn} \;:\; \mathbf{BUP} \;\longrightarrow\; \mathbf{BUP}$$

对所有增广李群和所有有限等变 CW 复形，在 $[A,\mathbf{BUP}]^\alpha$ 上诱导相同的映射。我不知道实际上 $\Upsilon^m\circ\Upsilon^n$ 是否等于 Υ^{mn}，即它们是否是非稳定 C-全局同伦范畴中 $\mathbf{BUP}$ 的自同态。或者更进一步，全球 Adams 运算的 σ-脱环 (6.4) 是否满足 $\kappa^m \circ \kappa^n = \kappa^{mn}\colon \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}$。此外，$\Upsilon^n$ 在对所有增广李群和所有有限等变 CW 复形应用 $[A,-]^\alpha$ 后会诱导加法映射；因此一个自然的问题是，Υ^n 是否为 C-全局 H-映射。我认为确实如此，但我们的方法不足以证明这一点。

Appendix A. Some C-global homotopy theory

本附录将介绍本文所需的 C-全局同伦论基础知识。在本文主体部分，群 C 是 $\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{R}$上的伽罗瓦群；本附录中的论证适用范围更广，在此我们令 C 为任意紧李群。本附录的主要结果包括：定理 A.12 中对以 C- 全局分类空间为源的 C- 全局变换的分类，以及命题 A.17 中用于判定余诱导 C- 空间的准则。另外两篇介绍一般C-全局同伦论的参考文献是 [25, 附录 A] 和 [5]。

一个内积空间 是配备数量积（即正定对称双线性形式）的有限维实向量空间。我们用$\mathbf{L}$ 表示这样一个拓扑范畴：其对象为内积空间，态射为线性等距嵌入，并赋予斯蒂费尔流形拓扑。

定义 A.1。设 C 为一个紧李群。一个正交 C-空间 是从线性等距范畴 $\mathbf{L}$ 到 C-空间范畴的连续函子。

正交 C-空间的态射的 C-整体等价 概念定义于 [25, 定义 A.2]和 [5, 定义 3.2]。它推广了正交空间的整体等价概念，后者见 [24, 定义 1.1.2], ；当 C 为平凡群时，该概念就退化为后者。 C-整体等价是正交 C-空间范畴上的 C-整体模型结构 的一部分，该模型结构在 [5, 定理 A.20]中建立。当 C 为平凡群时，这就特殊化为正交空间上的整体模型结构，见 [24, 定理 1.2.21]

构造 A.2（等变同伦集）。 我们引入由正交 C-空间定义的等变同伦集，其中 C为一个紧李群。当 C 为平凡群时，这些内容在 [24,第 1 节5]中有更详细的讨论。

对于每个紧李群 G，我们选取一个完备的 G-全集，即一个可数无限维的正交 G-表示$\mathcal{U}_G$ ，使得每个有限维 G-表示都能通过 G-线性 G-等变等距嵌入嵌入到 $\mathcal{U}_G$中。

我们将 $s(\mathcal{U}_G)$记为 $\mathcal{U}_G$的有限维 G-子表示在包含映射下构成的偏序集。设 E 为正交 C-空间，并设 $\alpha\colon G \longrightarrow C$为紧李群之间的连续同态。对于每个 $V \in s(\mathcal{U}_G)$，空间 $E(V)$通过 E上的 C-作用以及经由 E的函子性诱导的 V 上的 G-作用，成为一个$(C \times G)$-空间。我们将$\alpha^\flat(E(V))$记为沿着$(\alpha, \mathrm{Id})\colon G \longrightarrow C \times G$进行标量限制后得到的 G-空间。换言之， G通过 α在 E 上的 G-作用以及在 V上的作用，对角地作用于 $\alpha^\flat(E(V))$。对于一个 G-空间 A，定义

$$[A, E]^\alpha \;=\; \mathrm{colim}_{V \in s(\mathcal{U}_G)} [A, \alpha^\flat(E(V))]^G \,. \tag{A.3}$$

这里 $[-,-]^G$ 是等变映射的 G-等变同伦类集合。余极限沿着由 $V \subseteq W$在 $s(\mathcal{U}_G)$ 中的包含映射所诱导的映射 $E(V) \longrightarrow E(W)$ 取得。

我们还将使用如下记号

$$\pi_0^\alpha(E) \;=\; \mathrm{colim}_{V \in s(\mathcal{U}_G)}\, \pi_0(\alpha^\flat(E(V))^G) \,.$$

在唯一一点处求值给出一个自然双射 $[*, \alpha^\flat(E(V))]^G \cong \pi_0(\alpha^\flat(E(V))^G)$；在偏序集 $s(\mathcal{U}_G)$ 上取余极限后，这就成为一个自然双射

$$[*, E]^\alpha \;\cong\; \pi_0^\alpha(E) \,.$$

接下 文中我们将经常以此方式将 $[*, E]^\alpha$ 与 $\pi_0^\alpha(E)$ 视为相同，而不再另行说明。

集合 $[A, E]^\alpha$ 对 A 中的连续 G-映射通过前复合具有反变函子性；对于 E 中正交 C-空间之间的态射，则具有协变函子性。 α 中的另一种函子性： $G \longrightarrow C$ 将在下文构造 A.5 中讨论。

当 C 是平凡群时，以下命题特化为 [24, 命题 1.5.3]。在当前的 C-全局语境下，证明几乎完全相同，因此我们略去。

命题 A.4. 设 $\alpha\colon G \longrightarrow C$ 是紧李群之间的连续同态，设 E 是一个正交 C-空间，并设 A 是一个 G-空间。

(i) 假设 G-空间 A 是紧的，且 E 的底层正交空间是闭的，也就是说，所有结构映射 $E(\psi)\colon E(V) \longrightarrow E(W)$ 都是闭嵌入。则典范映射

$$[A, E]^\alpha \;\longrightarrow\; [A, \alpha^\flat(E(\mathcal{U}_G))]^G$$

是双射的，其中 $E(\mathcal{U}_G) = \mathrm{colim}_{V \in s(\mathcal{U}_G)} E(V)$。

(ii) 若 A 是有限的 G-CW 复形，则赋值 $E \mapsto [A, E]^\alpha$ 将正交 C-空间之间的 C-全局等价映为双射。(iii) 若 F 是一个正交 C-空间，then 映射

$$([A, p_E], [A, p_F])\;:\; [A, E \times F]^\alpha \;\longrightarrow\; [A, E]^\alpha \times [A, F]^\alpha$$

是双射的，其中 p_E 和 p_F 是投影。

构造 A.5 （**群中的函子性**。）设 $\alpha\colon G \longrightarrow C$ 是紧李群之间的连续同态， E 是一个正交 C-空间。紧李群之间的连续同态 $\beta\colon K \longrightarrow G$ 诱导出一个限制映射

$$\beta^*\;:\; [A, E]^\alpha \;\longrightarrow\; [\beta^*(A), E]^{\alpha\beta} \,, \tag{A.6}$$

如下。给定 $V \in s(\mathcal{U}_G)$ 和一个连续的 G-等变映射 $f\colon A \longrightarrow \alpha^\flat(E(V))$，沿着 β 限制作用可得到一个 K-等变映射

$$\beta^*(f)\;:\; \beta^*(A) \;\longrightarrow\; \beta^*(\alpha^\flat(E(V))) \;=\; (\alpha\beta)^\flat(E(\beta^*(V))) \,.$$

我们选择一个 K-等变线性等距嵌入 $j\colon \beta^*(V) \longrightarrow \mathcal{U}_K$ 到所选的 K-全集中。于是，$W = j(\beta^*(V))$ 是一个有限维 K-子表示，因此是偏序集 $s(\mathcal{U}_K)$ 的一个元素；而嵌入 j限制后给出一个 K-表示的同构 $j\colon \beta^*(V) \;\cong\; W$。限制映射

(A.6) 将由 f 在 $[A,E]^\alpha$ 中表示的类映至 $[\beta^*(A)\ E]^{\alpha\beta}$ 中的类，该类由复合映射K-等变映射表示

$$\beta^*(A) \xrightarrow{\beta^*(f)} (\alpha\beta)^\flat(E(\beta^*(V))) \xrightarrow[\cong]{E(j)} (\alpha\beta)^\flat(E(W))\ .$$

与 [24, 命题 1.5.8] 中特殊情形 $C=\{1\}$ 和 $A=*$ 的类似论证表明，所得的 $[\beta^*(A)\ E]^{\alpha\beta}$ 中的类不依赖于嵌入 j的选择： $\beta^*(V)\longrightarrow\mathcal{U}_K$，因此该构造定义良好。既然定义良好，该构造显然关于 A 和 E自然，并且对于增广到 C的群具有反变函子性：给定另一个连续同态 $\gamma\colon L\longrightarrow K$，我们有

$$\gamma^*\circ\beta^* \ =\ (\beta\circ\gamma)^*\ :\ [A,E]^\alpha\ \longrightarrow\ [(\beta\gamma)^*(A),E]^{\alpha\beta\gamma}\ .$$

构造 A.7 (归纳同构)**.** 设 $\alpha\colon G\longrightarrow C$ 是紧李群之间的连续同态，设 E 是一个正交 C-空间，并设 H 是 G的闭子群。对于一个H-空间 B，记

$$[1,-]\ :\ B\ \longrightarrow\ G\times_H B\ ,\quad y\ \longmapsto\ [1,y]$$

for H-等变伴随 $(G\times_H -,\mathsf{res}^G_H)$ 的单位元。伴随双射

$$[G\times_H B,\alpha^\flat(E(V))]^G\ \cong\ [B,(\alpha|_H)^\flat(E(V))]^H\ ,\quad [f]\ \longmapsto\ [\mathrm{res}^G_H(f)\circ[1,-]]$$

对于 $V\in s(\mathcal{U}_G)$，以及 $\mathcal{U}_G$ 的底层 H-全集是完备的 H-全集这一事实，给出了一个归纳同构：复合映射

$$[G\times_H B,E]^\alpha\ \xrightarrow{\mathrm{res}^G_H}\ [G\times_H B,E]^{\alpha|_H}\ \xrightarrow{[1,-]^*}\ [B,E]^{\alpha|_H} \tag{A.8}$$

是双射的，其中 res^G_H 是限制同态 (A.6) 的简写，该限制同态与包含映射$H\longrightarrow G$相关联。

如果 H 是紧李群 G中的一个维数较小的闭子群，那么 G-CW 复形的底层 H-空间未必具有 H-CW 结构； [13, 第 2]节给出了一个例子。尽管如此，有限 G-CW 复形的底层 H-空间总是与某个有限 H-CW 复形的底层 H-空间 H-同伦等价，参见 [13, 推论 B]。因此，对于紧李群之间的每个连续同态 β: $K\longrightarrow G$，限制函子 β^* 会将具有有限 G-CW 复形之 G-同伦类型的 G-空间，映到具有有限 K-CW 复形之 K-同伦类型的 K-空间。

定义 A.9 （C-全局变换）。 设 C 是一个紧李群， F和 E 是正交的C-空间。一个从 F 到 E 的 C-全局变换 τ 由映射组成

$$\tau_{\alpha,A}\ :\ [A,F]^\alpha\ \longrightarrow\ [A,E]^\alpha$$

对于所有紧李群之间的连续同态 $\alpha\colon G\longrightarrow C$，以及所有具有有限 G-CW 复形的 G-同伦类型的 G-空间 A，且这些映射满足以下自然性条件:

- 对于每个连续的 G-映射 $f\colon B\longrightarrow A$，都有

$$\tau_{\alpha,B}\circ[f,F]^\alpha\ =\ [f,E]^\alpha\circ\tau_{\alpha,A}\ :\ [A,F]^\alpha\ \longrightarrow\ [B,E]^\alpha\ .$$

- 对于每个紧李群之间的连续同态 $\beta\colon K\longrightarrow G$，都有

$$\tau_{\alpha\beta,\beta^*(A)}\circ\beta^*\ =\ \beta^*\circ\tau_{\alpha,A}\ :\ [A,F]^\alpha\ \longrightarrow\ [\beta^*(A),E]^{\alpha\beta}\ .$$

构造 A.10 （全局分类空间）。 设 $\beta\colon K\longrightarrow C$ 是紧李群之间的连续同态。我们选取一个忠实的 K-表示 V，并将 C-全局分类空间 定义为正交的 C-空间

$$B_{\mathrm{gl}}\beta\ =\ C\times_\beta\mathbf{L}(V,-)\ .$$

更具体地说，$(B_{\mathrm{gl}}\beta)(W)$ 是 C-空间 $C\times\mathbf{L}(V,W)$ 关于以下等价关系的商空间

$$(c,\varphi)\ \sim\ (c\cdot\beta(k),\varphi\circ l_k)$$

对所有 $(c,k)\in C\times K$ 以及所有线性等距嵌入 $\varphi\colon V\longrightarrow W$，其中 $l_k\colon V\longrightarrow V$ 是$k\in K$的作用。记号 $B_{\mathrm{gl}}\beta$ 略显滥用，因为我们没有记录忠实的 K-表示的选择。 [25, 命题 A.5], 表明， $B_{\mathrm{gl}}\beta$ 在 C-全局等价的一个优选之字形序列意义下，与忠实表示的选择无关，因此这种滥用是合理的。

等价类

$$[1,\mathrm{Id}_V]\ \in\ C\times_\beta \mathbf{L}(V,V)\ =\ (B_{\mathrm{gl}}\beta)(V)$$

是 $\beta^\flat$ 的 K-不动点，因此它表示一个类

$$u_\beta\ \in\ \pi_0^\beta(B_{\mathrm{gl}}\beta)\ , \tag{A.11}$$

典范类。

定理 A.12。令 $\beta\colon\ K\longrightarrow C$ 为紧李群之间的连续同态，并令 E 为一个正交 C-空间。对于 $\pi_0^\beta(E)$ 中的每个类 y，存在唯一的 C-全局变换 τ，从 $B_{\mathrm{gl}}\beta$ 到E，使得映射

$$\tau_{\beta,*}\ :\ \pi_0^\beta(B_{\mathrm{gl}}\beta)\ \longrightarrow\ \pi_0^\beta(E)$$

将典范类 u_β 映射为 y。

证明。为构造 τ，我们用一个 K-不动点 $\tilde{y}\in(\beta^\flat E(W))^K$ 表示 y，其中 K 是某个表示。若有必要，通过扩大 W，我们可以假设存在一个 K-等变线性等距嵌入$\varphi\colon V\longrightarrow W$，其定义域为在 $B_{\mathrm{gl}}\beta$ 的构造中隐含的忠实 K-表示。根据 [25,命题 A.5]，正交 C-空间之间的态射

$$\varphi^*=C\times_\beta\mathbf{L}(\varphi,-)\ :\ Y=C\times_\beta\mathbf{L}(W,-)\ \longrightarrow\ C\times_\beta\mathbf{L}(V,-)\ =\ B_{\mathrm{gl}}\beta$$

是一个 C-全局等价。此外，若令 $[\![1,\ \mathrm{Id}_W]\!]\in\pi_0^\beta(Y)$ 表示由 $\beta^\flat(C\times_\beta\mathbf{L}(W,\ W))=\beta^\flat(Y(W))$ 的 K-不动点 $[1,\mathrm{Id}_W]$ 所代表的类，则 $\pi_0^\beta(\varphi^*)[\![1,\ \mathrm{Id}_W]\!]=u_\beta$。

不动点 $\tilde{y}$ 由正交 C-空间之间唯一的态射 $f\colon Y\longrightarrow E$ 表示，并满足映射

$$f(W)\ :\ C\times_\beta\mathbf{L}(W,W)=Y(W)\ \longrightarrow\ E(W)$$

将 $[1,\mathrm{Id}_W]$ 映射到 $\tilde{y}$。全局等价 φ^* 和态射 f 诱导出一个从 $B_{\mathrm{gl}}\beta$ 到 E 的 C-全局变换 τ，其分量为

$$\tau_{\alpha,A}\ :\ [A,B_{\mathrm{gl}}\beta]^\alpha\ \xrightarrow[\cong]{([A,\varphi^*]^\alpha)^{-1}}\ [A,Y]^\alpha\ \xrightarrow{[A,f]^\alpha}\ [A,E]^\alpha\ .$$

这个 C-全局变换满足

$$\tau_{\beta,*}(u_\beta)\ =\ \pi_0^\beta(f)(\pi_0^\beta(\varphi^*)^{-1}(u_\beta))\ =\ \pi_0^\beta(f)[\![1,\mathrm{Id}_W]\!]\ =\ [\tilde{y}]\ =\ y\ .$$

唯一性的证明较为复杂。令 V 为 $B_{\mathrm{gl}}\beta$定义中隐含的忠实 K-表示。令 W 为一个内积空间。群 $C\times O(W)$ 在 $(B_{\mathrm{gl}}\beta)(W)=C\times_\beta\mathbf{L}(V,W)$ 上的作用为

$$(c,A)\cdot[d,\varphi]\ =\ [cd,A\circ\varphi]\ .$$

这个作用是传递的；对于线性等距嵌入 $\varphi\colon V\longrightarrow W$，点$[1,\varphi]\in C\times_\beta\mathbf{L}(V,W)$ 的稳定子是子群

$$\mathcal{S}[\varphi]\ =\ \{(c,A)\in C\times O(W)\colon \text{there is } k\in K \text{ such that } c=\beta(k) \text{ and } A\varphi=\varphi l_k\}\ .$$

由于 K 在 V 上的作用是忠实的，对于每个 $(c,\ A)\in\mathcal{S}[\varphi]$，满足 $c=\beta(k)$ 且 $A\varphi=\varphi l_k$ 的 $k\in K$ 是唯一的，因此我们可以定义连续同态 $\gamma\colon\mathcal{S}[\varphi]\longrightarrow K$，令 $\gamma(c,\ A)$ 等于这个唯一的

元素 k（属于 K）。我们用 $\Pi\colon C\times O(W)\longrightarrow C$ 表示到第一个因子的投影。那么，由连续群同态构成的交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{S}[\varphi] & \xrightarrow{\mathrm{incl}} & C\times O(W)\\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Pi}\\ K & \xrightarrow[\beta]{} & C\end{array}$$

按设计可交换。由于映射

$$(C\times O(W))/\mathcal{S}[\varphi]\ \longrightarrow\ C\times_\beta \mathbf{L}(V,W)=(B_{\mathrm{gl}}\beta)(W)\ ,\quad [c,A]\ \longmapsto\ [c,A\varphi]$$

是一个 $(C\times O(W))$-等 变同胚，归纳同构 (A.8) 表明复合映射

$$[C\times_\beta \mathbf{L}(V,W),E]^\Pi\ \xrightarrow{\mathrm{res}^{C\times O(W)}_{\mathcal{S}[\varphi]}}\ [C\times_\beta \mathbf{L}(V,W),E]^{\beta\gamma}\ \xrightarrow{[1,\varphi]^*}\ \pi_0^{\beta\gamma}(E)$$

对于每个正交 C-空间 E 都是双射的。 $C\times_\beta\mathbf{L}(V,\ W)$ 的单位元表示一个典范类

$$[\mathrm{Id}_{C\times_\beta\mathbf{L}(V,W)}]\ \in\ [C\times_\beta \mathbf{L}(V,W),B_{\mathrm{gl}}\beta]^\Pi$$

它满足

$$[1,\varphi]^*(\mathrm{res}^{C\times O(W)}_{\mathcal{S}[\varphi]}[\mathrm{Id}_{C\times_\beta\mathbf{L}(V,W)}])\ =\ [\![1,\varphi]\!]\ =\ \gamma^*(u_\beta)$$

在$\pi_0^{\beta\gamma}$ $(B_{\mathrm{gl}}\beta)$。

现在令 τ 为从 $B_{\mathrm{gl}}\beta$ 到 E的任意 C-全局变换。其自然性给出如下关系：

$$\begin{aligned}&[1,\varphi]^*(\mathrm{res}^{C\times O(W)}_{\mathcal{S}[\varphi]}(\tau_{\Pi,C\times_\beta\mathbf{L}(V,W)}[\mathrm{Id}_{C\times_\beta\mathbf{L}(V,W)}]))\\ &\qquad=\ \tau_{\beta\gamma,*}([1,\varphi]^*(\mathrm{res}^{C\times O(W)}_{\mathcal{S}[\varphi]}[\mathrm{Id}_{C\times_\beta\mathbf{L}(V,W)}]))\\ &\qquad=\ \tau_{\beta\gamma,*}(\gamma^*(u_\beta))\ =\ \gamma^*(\tau_{\beta,*}(u_\beta))\ .\end{aligned}$$

由于复合映射 $[1,\varphi]^*\circ\mathrm{res}^{C\times O(W)}_{\mathcal{S}[\varphi]}$ 由归纳同构 (A.8) 可知是双射的，这一关系表明类$\tau_{\Pi,\ C\times_\beta\mathbf{L}(V,\ W)}[\mathrm{Id}_{C\times_\beta\mathbf{L}(V,\ W)}]$由类$\tau_{\beta,\ *}(u_\beta)$决定，并说明了其决定方式。

现在考虑另一个紧李群 G、一个连续同态 $\alpha\colon G\longrightarrow C$、一个有限 G-CW-复形 A以及一个类 $x\in[A,B_{\mathrm{gl}}\beta]^\alpha$。我们用某个 G-表示 W对应的连续 G-映射 $f\colon A\longrightarrow\alpha^\flat((B_{\mathrm{gl}}\beta)(W))$来表示 x。若 $A=\emptyset$，则 $[A,E]^\alpha$ 只有一个元素，无需证明任何内容。若 A非空，则$(B_{\mathrm{gl}}\beta)(W)$也非空，并且存在一个线性等距嵌入 $\varphi\colon V\longrightarrow W$。

我们令 $\rho\colon G\longrightarrow O(W)$ 对 W 上的 G-作用进行分类。于是，$(\alpha,\rho)\colon G\longrightarrow C\times O(W)$ 是一个在 C 上的同态，也就是说 $\Pi\circ(\alpha,\rho)=\alpha$。 $\alpha^\flat(C\times_\beta\mathbf{L}(V,W))=\alpha^\flat((B_{\mathrm{gl}}\beta)(W))$ 上的 G-作用，是由 $(C\times O(W))$-作用沿着 $(\alpha,\rho)\colon G\longrightarrow(C\times O(W))$ 限制得到的。因此

$$f\ :\ A\ \longrightarrow\ (\alpha,\rho)^*(C\times_\beta\mathbf{L}(V,W))$$

是 G-等变的。此外，典范关系

$$x\ =\ [f]\ =\ f^*((\alpha,\rho)^*[\mathrm{Id}_{C\times_\beta\mathbf{L}(V,W)}])$$

成立，即 x 是典范类在复合映射下的像

$$[C\times_\beta \mathbf{L}(V,W),B_{\mathrm{gl}}\beta]^\Pi\ \xrightarrow{(\alpha,\rho)^*}\ [(\alpha,\rho)^*(C\times_\beta \mathbf{L}(V,W)),B_{\mathrm{gl}}\beta]^\alpha\ \xrightarrow{f^*}\ [A,B_{\mathrm{gl}}\beta]^\alpha\ .$$

C-整体变换 τ 的自然性给出

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha,A}(x)\ &=\ \tau_{\alpha,A}(f^*((\alpha,\rho)^*[\mathrm{Id}_{C\times_\beta\mathbf{L}(V,W)}]))\\ &=\ f^*((\alpha,\rho)^*(\tau_{\Pi,C\times_\beta\mathbf{L}(V,W)}[\mathrm{Id}_{C\times_\beta\mathbf{L}(V,W)}]))\ .\end{aligned}$$

我们在上文论证了，类 $\tau_{\Pi,C\times_\beta\mathbf{L}(V,W)}[\mathrm{Id}_{C\times_\beta\mathbf{L}(V,W)}]$ 由类 $\tau_{\beta,*}(u_\beta)$ 决定。因此，$\tau_{\alpha,A}(x)$ 也由类 $\tau_{\beta,*}(u_\beta)$ 决定。至此，唯一性的证明完成。□

在本附录的其余部分，我们将考察余诱导 C-全局空间这一类对象。对于这些对象， C-全局信息由底层正交空间的全局信息决定，准确地说，这符合命题 A.15 的意义，也就是忘掉 C-作用之后。这类对象与我们的研究相关，因为对于 $C = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$，全局空间 CBUP、$\mathbf{U}$ 以及 $\mathbf{\Omega^\bullet(KR)}$ 都是余诱导的，参见定理 B.22 和 B.47。

命题 A.13. 设 C 是一个紧李群。设 $\phi\colon A \longrightarrow B$ 是正交 C-空间之间的一个态射，忘却 C-作用后，它在底层正交空间上是一个全局等价。那么对于每个自由 C-空间 E，态射 $\phi \times E\colon A \times E \longrightarrow B \times E$ 是一个 C-全局等价。

证明。 与任意拓扑空间取乘积都会保持正交空间的全局等价，见 [24, 命题 1.1.9 (vii)]。由于 ϕ 的底层态射是一个全局等价， $\phi \times E$ 的底层态射也是如此。因此，要证明 $\phi \times E$ 是一个 C-全局等价，只需针对所有非平凡连续同态$\alpha\colon G \longrightarrow C$，验证满足 [25, 定义 A.2] 中定义 C-全局等价时所要求的提升性质。但若 α 非平凡，则对每个 G- 表示 V，空间

$$\alpha^\flat((B \times E)(V))^G \;=\; \alpha^\flat(B(V))^G \times E^{\alpha(G)}$$

是空的，因为因为 C 在 E上自由作用。因此， α没有需要解决的提升问题，这就完成了 $\phi \times E$ 是一个 C-全局等价的证明。□

在下文中，我们将用 $[\![-,\ -]\!]^C$ 表示 C-全局同伦范畴中的态射集合，也就是将正交 C-空间范畴在 C-全局等价类处局部化所得的范畴。我们令 EC 为一个万有自由 C-空间，也就是一个底空间可缩的自由 C-CW复形。我们还将用 $p\colon EC \longrightarrow *$ 表示唯一的映射。

定义 A.14. 设 C 为一个紧李群。若对于每个正交 C-空间 A ，由 X 诱导的映射余诱导 正交 C-空间 X ，则称其为

$$[\![A \times p, X]\!]^C \;:\; [\![A, X]\!]^C \;\longrightarrow\; [\![A \times EC, X]\!]^C$$

由 $A \times p\colon A \times EC \longrightarrow A$ 诱导的映射是双射的。

命题 A.15. 设 X 和 Y 为余诱导正交 C-空间。

(i) 对于每个正交 C-空间之间的态射 $\phi\colon\ A \longrightarrow B$ ，若遗忘 C-作用后，它在底层正交空间上是全局等价，则映射

$$[\![\phi, X]\!]^C \;:\; [\![B, X]\!]^C \;\longrightarrow\; [\![A, X]\!]^C$$

是双射的。

(ii) 设 $f\colon\ X \longrightarrow Y$ 是一个态射，遗忘 C-作用后，它在底层正交空间上是全局等价。那么 f 是一个 C-全局等价。

证明。 **(i)** 由于 ϕ 的底层态射是全局等价，且 EC 上的 C-作用是自由的，根据命题 A.13，态射 $\phi \times EC\colon A \times EC \longrightarrow B \times EC$ 是一个 C- 全局等价。因此，下面交换图中的下方水平映射是双射的：

$$\begin{array}{ccc} [\![B, X]\!]^C & \xrightarrow{\quad [\![\phi, X]\!]^C \quad} & [\![A, X]\!]^C \\ {\scriptstyle [\![B\times p, X]\!]^C}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle [\![A\times p, X]\!]^C} \\ [\![B \times EC, X]\!]^C & \xrightarrow[[\![\phi\times EC, X]\!]^C]{\cong} & [\![A \times EC, X]\!]^C \end{array}$$

其证 tical 映射是双射的，因为 X 是余诱导的，因此 $[\![\phi,\ X]\!]^C$ 也是双射的，正如所声称的那样 d.

(ii) 由于 X 是余诱导的，根据第 (i) 部分，映射 $[\![f,\ X]\!]^C\colon [\![Y,\ X]\!]^C \longrightarrow [\![X,\ X]\!]^C$ 是双射的。因此，在 C-全局同伦范畴中存在一个态射 $g\colon Y \longrightarrow X$，使得 $gf = \mathrm{Id}_X$。于是

$$[\![f,Y]\!](fg) \ = \ fgf \ = \ f \ = \ [\![f,Y]\!](\mathrm{Id}_Y)\ .$$

由于 Y 是余诱导的，根据 (i) 的结论，映射 $[\![f,\ Y]\!]^C\colon [\![Y,\ Y]\!]^C \longrightarrow [\![X,\ Y]\!]^C$ 是双射的，因此 $fg = \mathrm{Id}_Y$。所以，f 在 C-全局同伦范畴中是一个同构，从而是一个 C-全局等价。□

正交 C-空间 X 在 [5, 定理 A 的 C-全局模型结构中是纤维化的，当且仅当满足以下条件，参见 [5, 定义 A.13]：对于紧李群之间的每个连续同态 $\alpha\colon G \longrightarrow C$，以及 G- 表示的每个线性等距嵌入 $\varphi\colon V \longrightarrow W$，只要 G 在 V 上忠实作用，映射

$$\alpha^\flat(X(\varphi))^G \ :\ \alpha^\flat(X(V))^G \ \longrightarrow\ \alpha^\flat(X(W))^G$$

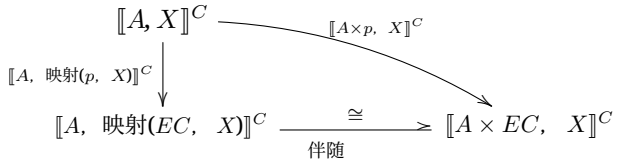
是一个弱等价。我们将这样的正交 C-空间称为 C-纤维化。

命题 A.16. *A C-纤维化正交 C-空间 X 是余诱导的，当且仅当正交 C-空间之间的态射*

$$\mathrm{map}(p,X)\ :\ X\ \longrightarrow\ \mathrm{map}(EC,X)$$

是一个 C-全局等价。

证明. 伴随函子 $(-\times EC, \mathrm{map}(EC,-))$ 是 C-整体模型结构下的一对 Quillen 函子，因此在 C-整体同伦范畴层面诱导出一对导出函子伴随。左伴随 $-\times EC$ 是完全同伦的，即它保留任意的 C-全局等价，例如由命题 A.13 可知；因此它下降到 C-整体同伦范畴，下降后的函子即为导出左伴随。由于 X 是 C-纤维化的，正交 C-空间 $\mathrm{map}(EC,X)$ 是 X 上 $\mathrm{map}(EC,-)$ 的全右导出函子的模型。下图交换：



那么，X 是余诱导的，当且仅当对于每个正交的 C-空间 A，左垂直映射 $[\![A,\ 映射(p,\ X)]\!]^C$ 是双射的。这当且仅当映射$(p,\ X)$是 C-全局同伦范畴中的一个同构，这等价于映射$(p,\ X)$是一个 C-全局等价。□

如果 X 是一个正交空间，而 G是一个紧李群，那么 X 的底层 G-空间 是 G-空间

$$X(\mathcal{U}_G)\ =\ \mathrm{colim}_{V\in s(\mathcal{U}_G)}\, X(V)\ ;$$

余极限是沿着包含映射，在偏序集 $s(\mathcal{U}_G)$上取的；该偏序集由所选完备 G-全集 $\mathcal{U}_G$的有限维 G-子表示构成。如果 X 是一个正交 C-空间，那么 X 上的 C-作用会诱导出 $X(\mathcal{U}_G)$上的连续 C-作用，且该作用与 G-作用可交换，因此 $X(\mathcal{U}_G)$ 成为一个$(C\times G)$-空间。我们将沿着$(\alpha,\mathrm{Id})\colon G \longrightarrow C\times G$进行标量限制所得到的 G-空间记作 $\alpha^\flat(X(\mathcal{U}_G))$。

根据 [5, 命题 3.5], ，闭正交 C-空间之间的态射 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是 C-全局等价，当且仅当对于任意紧李群之间的连续同态 $\alpha\colon G \longrightarrow C$，映射

$$\alpha^\flat(f(\mathcal{U}_G))^G \ :\ \alpha^\flat(X(\mathcal{U}_G))^G \ \longrightarrow\ \alpha^\flat(Y(\mathcal{U}_G))^G$$

是弱等价。

命题 A.17。 设 X 是一个正交 C-空间，其底层正交空间是闭的。则以下条件等价。

(a) 正交 C-空间 X 是余诱导的。

(b) 对于紧李群之间的每个连续同态 $\alpha\colon G \longrightarrow C$，映射

$$\alpha^\flat(\mathrm{map}(p, X(\mathcal{U}_G))^G \;:\; \alpha^\flat(X(\mathcal{U}_G))^G \;\longrightarrow\; \alpha^\flat(\mathrm{map}(EC, X(\mathcal{U}_G)))^G = \mathrm{map}^G(\alpha^*(EC), \alpha^\flat(X(\mathcal{U}_G)))$$

是一个弱等价。

证明。 我们先进行一个预备性的化简步骤。通过在 C-全局模型结构中选取一个目标为纤维化对象的无圈余纤维化 $X \longrightarrow X'$，我们可以在两部分中都不失一般性地假设 X 不仅是闭的，而且是 C-纤维化的。令 $\alpha\colon G \longrightarrow C$ 为一个连续同态，并令 V 为全集 $\mathcal{U}_G$ 的一个忠实 G-子表示。由于 X 是 C-纤维化且闭的，交换图中的左垂直映射

$$\begin{array}{ccc} \alpha^\flat(X(V))^G & \xrightarrow[\sim]{\alpha^\flat(\mathrm{map}(p, X(V)))^G} & \alpha^\flat(\mathrm{map}(EC, X(V)))^G \\ {\scriptstyle\sim}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\ \alpha^\flat(X(\mathcal{U}_G))^G & \xrightarrow[\alpha^\flat(\mathrm{map}(p, X(\mathcal{U}_G)))^G]{} & \alpha^\flat(\mathrm{map}(EC, X(\mathcal{U}_G)))^G \end{array} \tag{A.18}$$

是一个弱等价。由于函子 $\mathrm{map}(EC, -)$ 保持图子群等价的 $(C \times G)$-映射这一类，右垂直映射也同样是弱等价。

(i)$\Longrightarrow$(ii) 由于 X 是余诱导的且为 C-纤维化对象，命题 A.16 表明，态射 $\mathrm{map}(p, X) : X \longrightarrow \mathrm{map}(EC, X)$ 是一个 C-全局等价。由于 X 是 C-纤维化对象，$\mathrm{map}(EC, X)$ 也如此。作为两个 C-纤维化对象之间的 C-全局等价，态射 $\mathrm{map}(p, X)$ 是一个 C-层级等价，见 [5, 引理 A.19]。因此，图表 (A.18) 中的上方水平映射是弱等价。于是，(A.18) 中的下方水平映射也为弱等价，从而证明了条件 (ii)。

(ii)$\Longrightarrow$(i) 我们将前面的论证反过来。由于图表 (A.18) 中下方的水平映射是弱等价，因此对于每个忠实的 G-表示 V，上方的水平映射也是弱等价。所以态射 $\mathrm{map}(p, X)\colon X \longrightarrow \mathrm{map}(EC, X)$ 是一个 C-层级等价，因而是一个 C-全局等价。由于 X 是 C-纤维化的，命题 A.16 表明 X 是余诱导的。□

命题 A.19. 设 X 是一个有基点的正交 C-空间，其底层正交 C-空间是余诱导的。那么对于每个有限的有基点 C-*CW* 复形 A，映射$_*(A, X)$ 也具有余诱导的底层正交C-空间。

证明。 由于函子 $\mathrm{map}_*(A, -)$ 保持有基点正交 C-空间之间的 C-全局等价，我们不妨假设 X 是 C-纤维化的。于是，根据命题 A.16，态射 $p^*\colon X \longrightarrow \mathrm{map}(EC, X)$ 是一个 C-全局等价。由于 $\mathrm{map}_*(A, -)$ 保持 C-全局等价，态射也

$$\mathrm{map}_*(A, p^*) \;:\; \mathrm{map}_*(A, X) \;\longrightarrow\; \mathrm{map}_*(A, \mathrm{map}(EC, X))$$

是一个 C-全局等价。态射 $p^*\colon \mathrm{map}_*(A, X) \longrightarrow \mathrm{map}(EC, \mathrm{map}_*(A, X))$ 同构于 $\mathrm{map}_*(A, p^*)$，因而是一个 C-全局等价。由于 X 是 C-纤维化的，$\mathrm{map}_*(A, X)$ 也是如此，因此再次应用命题 A.16 可知，$\mathrm{map}_*(A, X)$ 是余诱导的。□

Appendix B. Real-global K-theory

在本附录中，我们将全局 K 理论的若干特性推广到实全局语境。特别是，我们给出了 [24] 第 2.5、6.3 和 6.4 节中许多结果的实全局推广。在定理 B.12 中，我们证明实全局空间 $\mathbf{BUP}$ 表示实全局 K 理论。在定理 B.24 中，我们建立了实全局 Bott 周期性，即实全局超交换幺半群 $\mathbf{BUP}$ 与 $\Omega^\sigma\mathbf{U}$之间的等价。我们在定理 B.52 中证明，实全局 K 理论谱$\mathbf{KR}$ 名副其实：对于每个增广李群 $\alpha\colon G \longrightarrow C = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$，真正的 G-谱 $\alpha^*\mathbf{(KR)}$ 表示 α-等变实 K 理论。定理 B.49 表明，实全局空间 $\mathbf{U}$ 是实全局无限

环空间 $\mathbf{KR}\wedge S^{\sigma}$ 的环空间。因此，实全局空间 $\mathbf{BUP}\ \sim\Omega^{\sigma}\mathbf{U}$ “是”$\mathbf{KR}$ 的底层实全局无限循环空间，参见定理 B.52 (i)。

B.1. **不稳定实全局 K 理论**。 在本小节中，我们将全局 K 理论的若干不稳定特征推广到实全局语境。主要结果是，正交 C-空间 $\mathbf{BUP}$ 表示实全局 K 理论，见定理 B.12；以及实全局 Bott 周期性，即 $\mathbf{BUP}$ 与 $\Omega^{\sigma}\mathbf{U}$之间存在实全局超交换幺半群的等价，见定理 B.24。在此过程中，我们证明正交 C-空间 $\mathbf{BUP}$ 和 $\mathbf{U}$ 是余诱导的，见定理 B.22。

构造 B.1 ($\mathbf{Gr}_k$)。 我们回顾一下格拉斯曼流形模型 $\mathbf{Gr}_k$，它是扩张酉群 $U(k)=U(k)\rtimes C$的实全局分类空间，并配有投影 $U(k)\rtimes C\longrightarrow C$。我们对第 2 节的记号略作调整：3], 其中，不带上标的$\mathbf{Gr}$ 表示加法格拉斯曼流形的实版本，而复版本记作$\mathbf{Gr}^{\mathbb{C}}$；此外，齐性直和项$\mathbf{Gr}_k$ 记作$\mathbf{Gr}^{\mathbb{C},\,[k]}$。在本文中，我们只讨论复格拉斯曼流形，因此将采用不带上标的简化名称。$\mathbf{Gr}_k$ 在欧几里得内积空间 V 上的取值为

$$\mathbf{Gr}_k(V)\ =\ Gr_k^{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})\ ,$$

复化 $V_{\mathbb{C}}\ =\ \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V$ 中复数 k 维子空间的格拉斯曼流形。由线性等距嵌入 $\varphi\colon\ V\longrightarrow W$ 诱导的结构映射$\mathbf{Gr}_k(\varphi)\colon\mathbf{Gr}_k(V)\longrightarrow\mathbf{Gr}_k(W)$ 将子空间映射到它们在复化线性等距嵌入 $\varphi_{\mathbb{C}}\colon\ V_{\mathbb{C}}\longrightarrow W_{\mathbb{C}}$ 下的像。$\mathbb{R}$-向量空间 V 的复化带有一个优选的 $\mathbb{C}$-半线性对合

$$\psi_V\ :\ V_{\mathbb{C}}\longrightarrow V_{\mathbb{C}}\ ,\quad \lambda\otimes v\longmapsto\bar{\lambda}\otimes v\ . \tag{B.2}$$

该对合

$$\psi(V)\ :\ \mathbf{Gr}_k(V)\longrightarrow\mathbf{Gr}_k(V)$$

使其成为一个 $\bar{}$ 正交 C 空间将 $\mathbb{C}$ 子空间 $L\subset V_{\mathbb{C}}$ 映射到共轭子空间 $L=\psi_V(L)$.

根据 [24, 命题 A.31], , 对于每个增广李群 $\beta\colon\ K\longrightarrow C$ 以及每个完备的 K-全集$\mathcal{U}_K$，复 Stiefel 流形 $\mathbf{L}^{\mathbb{C}}(\nu_k,\mathcal{U}_K^{\mathbb{C}})$ 配备其由 $K\times_C\tilde{U}(k)$ 作用给出的作用

$$(k,A)\cdot\varphi\ =\ l_k\circ\varphi\circ l_A^{-1}$$

˜是一个 $(K\times_C U(k))$-空间，作为那些与 $1\times U(k)$ 交集平凡的闭子群族的万有空间。 [24, 定理 A.33 (i)] 中阐明的一个推论是，$\mathbf{Gr}_k$ 从 C-全局等价处接收映射

$$B_{\mathrm{gl}}\tilde{U}(k)\ =\ C\times_{\tilde{U}(k)}\mathbf{L}(u(\nu_k),-)\ ,$$

一个 C-全局 ˜增广李群 $U(k)$ 的分类空间，按构造 A.10 的意义 .

构造 B.3 (格拉斯曼流形 和$\mathbf{BUP}$)。 正交 C-空间

$$\mathbf{Gr}\ =\ \coprod_{k\geq 0}\mathbf{Gr}_k$$

是构造 B.1 中格拉斯曼流形的不交并。因此，**格拉斯曼流形**在内积空间 V 上的取值，是复化 $V_{\mathbb{C}}$中所有复格拉斯曼流形的不交并。子空间的直和，以及沿同构 $V_{\mathbb{C}}\oplus W_{\mathbb{C}}\cong(V\oplus W)_{\mathbb{C}}$ 的识别，在**格拉斯曼流形**上赋予超交换乘法，并与复共轭所诱导的对合相容。此结构使**格拉斯曼流形**成为一个超交换 C-幺半群。

超交换幺半群$\mathbf{BUP}$ 是超交换幺半群$\mathbf{BOP}$的实全局类比，后者在 [24, 例 2.4.1], 中引入；其底层全局空间是 [24, 例 2.4.33]中同名的复周期格拉斯曼流形。$\mathbf{BUP}$ 的取值为

$$\mathbf{BUP}(V)\ =\ \coprod\nolimits_{n\geq 0}Gr_n^{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}^2)\ ,$$

$V^2_{\mathbb{C}}$的复子空间全格拉斯曼流形。与线性等距嵌入 $\varphi\colon\ V \longrightarrow W$ 相关联的结构映射$\mathbf{BUP}(\varphi)\colon \mathbf{BUP}(V) \longrightarrow \mathbf{BUP}(W)$由下式给出

$$\mathbf{BUP}(\varphi)(L) \ = \ \varphi^2_{\mathbb{C}}(L) \ + \ ((W-\varphi(V))_{\mathbb{C}} \oplus 0) \ .$$

虽然 C-空间 $\mathbf{BUP}(V)$ 和 $\mathbf{Gr}(V^2)$ 相等，但它们的结构映射不同，因此是不同的实全局同伦类型。

$\mathbf{BUP}$ 的超交换乘法定义如下：

$$\mu_{V,W} \ : \ \mathbf{BUP}(V) \times \mathbf{BUP}(W) \ \longrightarrow \mathbf{BUP}(V \oplus W) \ , \quad \mu_{V,W}(L, L') \ = \ \kappa_{V,W}(L \oplus L') \ ,$$

其中 $\kappa_{V,W}\colon\ V^2_{\mathbb{C}} \oplus W^2_{\mathbb{C}} \ \cong (V \oplus W)^2_{\mathbb{C}}$是洗牌同构 $\kappa_{V,W}(v, v', w, w') \ = (v, w, v', w')$。一个对合

$$\psi(V) \ : \ \mathbf{BUP}(V) \ \longrightarrow \ \mathbf{BUP}(V)$$

其定义方式与 $\mathbf{Gr}$ 相同，即对复子空间应用复共轭对合 $\ \psi^2_V\colon\ V^2_{\mathbb{C}} \ \longrightarrow V^2_{\mathbb{C}}$。所有这些数据使 $\mathbf{BUP}$ 成为一个超交换 C-幺半群。

我们定义一个超交换 C-幺半群的态射

$$i \ : \ \mathbf{Gr} \ \longrightarrow \ \mathbf{BUP} \tag{B.4}$$

在欧几里得内积空间 V by

$$\mathbf{Gr}(V) \ = \ \coprod_{k\geq 0} Gr^{\mathbb{C}}_k(V_{\mathbb{C}}) \ \longrightarrow \ \coprod_{n\geq 0} Gr^{\mathbb{C}}_n(V^2_{\mathbb{C}}) = \mathbf{BUP}(V) \ , \quad L \ \longmapsto \ V_{\mathbb{C}} \oplus L \ .$$

在 [24, 命题 2.4.5], 中，我们证明，在实（小写“r”）语境下，对于每个紧李群G和每个 G-空间 A，同态 $[A, i^{\mathbb{R}}]^G\colon\ [A, \mathbf{Gr}^{\mathbb{R}}]^G \longrightarrow [A, \mathbf{BOP}]^G$是阿贝尔幺半群的群完备化。证明中的所有论证几乎都可以原封不动地移植到我们当前的实全局语境中，从而得到以下结果：

命题 B.5. 对于每个增广李群 $\alpha\colon\ \ G \longrightarrow C$ 和每个 G-空间 A，同态

$$[A, i]^\alpha \ : \ [A, \mathbf{Gr}]^\alpha \ \longrightarrow \ [A, \mathbf{BUP}]^\alpha$$

是阿贝尔幺半群的群完备化。

构造 B.6（实等变向量丛）。我们回顾增广李群 $\alpha\colon\ G \longrightarrow C$的实等变向量丛的概念。这个概念涵盖实和复等变向量丛，以及 Atiyah 的 Real 向量丛 [2]。一个定义在 G-空间 A 上的 实 α-向量丛 是以下数据：

- 一个复向量丛 $\xi\colon\ \ E \longrightarrow A$,
- 全空间 E上的连续 G作用，

使得投影 ξ是 G-等变的，并且对所有 $(g,\ a) \in G\times A$，平移映射 $g\cdot -\colon\ E_a \longrightarrow E_{ga}$是$\alpha(g)$-线性的。换言之，若 $\alpha(g) = 1$，则按 g 平移是 $\mathbb{C}$-线性的；若 $\alpha(g) \neq 1$，则按 g 平移是共轭线性的。

一个重要例子是正交 G-表示 V对应的格拉斯曼流形 $\mathbf{Gr}(V) = \coprod_{k\geq 0} Gr^{\mathbb{C}}_k(V_{\mathbb{C}})$上的典范向量丛 γ_V。这里， G 在 $\mathbf{Gr}(V)$上按对角方式作用：通过给定的 V作用的复化，以及沿增广 $\alpha\colon\ G \longrightarrow C$的复共轭。换言之，对于 $V_{\mathbb{C}}$中的复子空间 L ，我们定义

$$g \cdot L \ = \ \begin{cases} l^{\mathbb{C}}_g(L) & \text{for } \alpha(g) = 1, \text{ and} \\ \psi_V(l^{\mathbb{C}}_g(L)) = l^{\mathbb{C}}_g(\psi_V(L)) & \text{for } \alpha(g) \neq 1. \end{cases}$$

这里， $l_g\colon\ V \longrightarrow V$是按 $g \in G$的平移，而 $l^{\mathbb{C}}_g\colon\ V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ 是它的复化。

在 $\mathbf{Gr}(V)$ 上的典范丛 γ_V 的全空间是

$$\{(w, L) \ \in V_{\mathbb{C}} \times \mathbf{Gr}(V)\colon w \in L\} \ ;$$

这个丛不具有常秩。群 G 通过以下方式作用于全空间：

$$g\cdot(w,L) \;=\; \begin{cases} (l_g^{\mathbb{C}}(w), l_g^{\mathbb{C}}(L)) & \text{for } \alpha(g)=1, \text{ and} \\ (\psi_V(l_g^{\mathbb{C}}(w)), \psi_V(l_g^{\mathbb{C}}(L))) & \text{for } \alpha(g)\neq 1. \end{cases}$$

这些数据使 γ_V 成为 $\mathbf{Gr}(V)$ 上的实 α-向量丛。

我们在例 B.13 和 B.14 中回顾，实等变向量丛如何分别在平凡增广和乘积增广下特化为实等变向量丛和复等变向量丛。对于由单位元增广的群 C，实等变向量丛特化为 Atiyah 在 [2] 中提出的 Atiyah 的 Real 向量丛。在 [3,第 5] 节和 [4, 第 6], 节中，Atiyah 和 Segal 研究了他们所称的“Real 李群”，即配备乘法对合 $\tau\colon\ G\longrightarrow G$ 的李群G；这对应于半直积$G\rtimes_\tau C$的情形，并以到第二个因子的投影作为增广。Karoubi 在 [17, 18] 中研究了一般增广李群的情形。

现在我们说明实全局空间 $\mathbf{Gr}$ 在何种意义上表示实等变向量丛，以及实全局空间 $\mathbf{BUP}$ 在何种意义上表示实等变 K 理论。这些构造和定理是将 [24, 第 2 节4] 中的结果从全局语境改编到实全局语境。

构造 B.7. 令 $\alpha\colon\ G\longrightarrow C$ 为一个增广李群，且 $k\geq 0$。我们用 $\mathrm{Vect}_\alpha^{k,R}(A)$ 表示 G-空间 A上秩为 k 的 Real α-向量丛的同构类集合。我们定义一个映射

$$\langle-\rangle\ :\ [A,\mathbf{Gr}_k]^\alpha\ =\ \mathrm{colim}_{V\in s(\mathcal{U}_G)}\,[A,\alpha^\flat(\mathbf{Gr}_k(V))]^G\ \longrightarrow\ \mathrm{Vect}_\alpha^{k,R}(A) \tag{B.8}$$

如下。令 $f\colon\ A\longrightarrow\alpha^\flat(\mathbf{Gr}_k(V))$ 为连续的 G-映射，其中 V 是某个正交 G-表示。我们拉回位于 $\mathbf{Gr}_k(V)$ 上的典范 Real α-向量丛 γ_V^k，得到一个秩为 k 的 Real α-向量丛$f^*(\gamma_V^k)\colon\ E\longrightarrow A$。由于典范向量丛的底空间 $\mathbf{Gr}_k(V)$ 是紧致的，因此向量丛 $f^*(\gamma_V^k)$ 的同构类仅取决于 f 的 G-同伦类。由此，构造给出了一个良定义映射

$$[A,\alpha^\flat(\mathbf{Gr}_k(V))]^G\ \longrightarrow\ \mathrm{Vect}_\alpha^{k,R}(A)\ ,\quad [f]\ \longmapsto\ [f^*(\gamma_V^k)]\ .$$

若 $\varphi\colon\ V\longrightarrow W$ 是正交 G-表示之间的线性等距嵌入，那么沿映射$\mathbf{Gr}_k(\varphi)\colon\mathbf{Gr}_k(V)\longrightarrow\mathbf{Gr}_k(W)$ 限制位于 $\mathbf{Gr}_k(W)$ 上的典范 Real α- 向量丛 γ_W，所得向量丛与位于 $\mathbf{Gr}_k(V)$ 上的典范 Real α- 向量丛 γ_V 同构。因此，两个位于 A 上的 α-向量丛 $f^*(\gamma_V)$ 和 $(\mathbf{Gr}_k(\varphi)\circ f)^*(\gamma_W)$ 同构。于是，我们可以对偏序集 $s(\mathcal{U}_G)$ 取余极限；该偏序集由 $\mathcal{U}_G$ 的有限维 G-子表示构成，从而得到一个良定义映射 (B.8)。

我们用 $\mathrm{Vect}_\alpha^R(A)$ 表示 A 上 Realα-向量丛的同构类在 Whitney 和下构成的交换幺半群。我们定义一个幺半群同态

$$\langle-\rangle\ :\ [A,\mathbf{Gr}]^\alpha\ \longrightarrow\ \mathrm{Vect}_\alpha^R(A) \tag{B.9}$$

其定义方式与映射 (B.8) 大致相同，主要区别在于此处的向量丛不必具有常秩。映射 (B.9) 是一个幺半群同态，因为其中所有加法都来自内积空间的直和。

现在我们对整个图式取群完备化。我们用 $KR_\alpha(A)$ 表示 A 的 α-等变实 K 群，即交换幺半群 $\mathrm{Vect}_\alpha^R(A)$ 的群完备化（格罗滕迪克群）。在其他一些文献中，实 K 群 $KR_\alpha(A)$ 记作 $KR_G(A)$，也就是说，记号中只记录群 G，而不记录增广 $\alpha\colon\ G\longrightarrow C$。复合映射

$$[A,\mathbf{Gr}]^\alpha\ \xrightarrow[(\mathrm{B.9})]{\langle-\rangle}\ \mathrm{Vect}_\alpha^R(A)\ \longrightarrow\ \ KR_\alpha(A)$$

是到阿贝尔群的幺半群同态。态射 $[A,i]^\alpha\colon\ [A,\mathbf{Gr}]^\alpha\longrightarrow[A,\mathbf{BUP}]^\alpha$ 根据命题 B.5 是阿贝尔幺半群的群完备化，其中 $i\colon\mathbf{Gr}\ \longrightarrow\mathbf{BUP}$ 是在 (B.4) 中定义的。所以存在

存在唯一的阿贝尔群同态

$$\langle - \rangle \ : \ [A, \mathbf{BUP}]^\alpha \ \longrightarrow \ KR_\alpha(A) \tag{B.10}$$

使得下面的方块交换:

$$\begin{array}{ccc} [A, \mathbf{Gr}]^\alpha & \xrightarrow{\langle - \rangle} & \mathrm{Vect}^R_\alpha(A) \\ {\scriptstyle [A,i]^\alpha}\downarrow & & \downarrow \\ [A, \mathbf{BUP}]^\alpha & \xrightarrow[\langle - \rangle]{} & KR_\alpha(A) \end{array} \tag{B.11}$$

下一个定理将 [24, 定理 2.4.10] 推广到 Real-等变背景。

定理 B.12. 设 $\alpha\colon G \longrightarrow C$ 是一个增广李群，且 A 是一个有限的 G-*CW* 复形。

(i) 对于每个 $k \geq 0$，映射 (B.8)

$$\langle - \rangle \ : \ [A, \mathbf{Gr}_k]^\alpha \ \longrightarrow \ \mathrm{Vect}^{k,R}_\alpha(A)$$

是双射的。

(ii) 幺半群同态 (B.9)

$$\langle - \rangle \ : \ [A, \mathbf{Gr}]^\alpha \ \longrightarrow \ \mathrm{Vect}^R_\alpha(A)$$

是一个同构。

(iii) 群同态 (B.10)

$$\langle - \rangle \ : \ [A, \mathbf{BUP}]^\alpha \ \longrightarrow \ KR_\alpha(A)$$

是一个同构。

证明。 **(i)** 这一陈述的证明基本上与其在 [24, 定理 2.4.10], 中的实数版本（小写"r"）前身所用的论证相同，只需作相应调整。该论证利用了复 Stiefel 流形 $\mathbf{L}^{\mathbb{C}}(\nu_k, \mathcal{U}_G^{\mathbb{C}})\tilde{}$带有 $(G \times_C U(k))$-作用

$$(g, A) \cdot \varphi \ = \ l_g \circ \varphi \circ l_A^{-1}$$

$\tilde{}$是一个 $(G \times_C U(k))$-空间，且对于所有与 $1 \times U(k)$ 交集平凡的闭子群组成的族而言是万有的，参见 [24, 命题 A.31]。这进而意味着， G-空间 $\alpha^\flat(\mathbf{Gr}_k(\mathcal{U}_G^{\mathbb{C}})) = \mathbf{L}^{\mathbb{C}}(\nu_k, \mathcal{U}_G^{\mathbb{C}})/U(k)$ 是紧 G-空间上秩为 k 的实 α-等变向量丛的分类空间。

(ii) 首先假设 A 是 G-连通的，即群 $\pi_0(G)$ 在 $\pi_0(A)$ 上传递作用。这保证了 A 上的每个 Real α-向量丛都具有常秩，并且每个连续的 G-映射 $A \longrightarrow \alpha^\flat(\mathbf{Gr}(V))$ 都经由某个 $\alpha^\flat(\mathbf{Gr}_k(V))$ 分解，其中 $k \geq 0$。因此，在下方由包含映射 $\mathbf{Gr}_k \longrightarrow \mathbf{Gr}$ 诱导的交换方块中，两个竖直映射都是双射的:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{k\geq 0} [A, \mathbf{Gr}_k]^\alpha & \xrightarrow[(\mathrm{B.8})]{\langle - \rangle} & \coprod_{k\geq 0} \mathrm{Vect}^{k,R}_\alpha(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [A, \mathbf{Gr}]^\alpha & \xrightarrow[\langle - \rangle]{(\mathrm{B.9})} & \mathrm{Vect}^R_\alpha(A) \end{array}$$

根据 **(i)**，上方的水平映射是双射的，因此下方的水平映射也是双射的。

一般而言， $A = A_1 \amalg \ldots \amalg A_m$ 是由 $\pi_0(G)$ 在 $\pi_0(A)$ 上的轨道所索引的 G-连通有限 G-CW 复形的不交并。由于两个函子 $[-, \mathbf{Gr}]^\alpha$ 和 Vect^R_α 都将有限不交并映为乘积，一般情形即可得出。

（iii）由（ii）得出，因为在交换方块（B.11）中，两个垂直映射分别根据命题 B.5 和定义，都是阿贝尔幺半群的群完备化。□

正如我们将在接下来的两个例子中说明的，同构 $[A,\mathbf{BUP}]^{\alpha} \cong KR_{\alpha}(A)$ 推广了实 K 群和复 K 群中类似的同构；这些同构已在 [24,第 2 节4]中讨论过。

例 B.13（平凡增广李群）。对于紧李群 G，我们将平凡增广李群记为 G^{tr}，即赋予 G 到 C的平凡同态。于是，实 G^{tr}-向量丛无非就是复向量丛，因此

$$KR_{G^{\mathrm{tr}}}(A) \;=\; KU_G(A)\ .$$

$\mathbf{BUP}$ 的底层正交空间是同名的复周期格拉斯曼流形，见[24, 例 2.4.33]。因此，对于平凡增广李群，定理 B.12 特化为一个同构

$$\langle -\rangle \;:\; [A,\mathbf{BUP}]^{G^{\mathrm{tr}}} \xrightarrow{\;\cong\;} KU_G(A)\ ,$$

这是 [24, 定理 2.4.10]中同构的复类比。

例 B.14（乘积增广李群）。我们通过投影 $G\times C\longrightarrow C$ 到第二个因子，给紧李群 G 与伽罗瓦群 C 的乘积赋予增广结构。下文中，我们将省略该投影，并简单地将这个增广李群记为 $G\times C$。

我们考虑一个 G-空间 A，并令群 C在 A 上平凡作用。于是， A 上的实（$G\times C$）向量丛不过就是一个实 G 向量丛（注意这里的“实”用小写 r）。更确切地说，实（$G\times C$）向量丛的纤维 $E_a=\xi^{-1}(a)$ 上，元素 $(1,\ \psi)\in G\times C$ 的作用是复向量空间 E_a 上的共轭线性对合，即实结构。被此对合固定的 $\mathbb{R}$ 子空间（E_a）$^{\psi}$ 构成一个实 G 向量子丛

$$\xi^{\psi} \;=\; \ker(\mathrm{Id}-(1,\psi)\cdot -\colon \xi\longrightarrow\xi)$$

ξ 上的，且 ξ 自然同构于 ξ^{ψ} 的复化。此构造在任何带平凡 C作用的 G-空间上，实现了实（$G\times C$）向量丛范畴与实 G 向量丛范畴之间的等价。该等价诱导出一个同构

$$KR_{G\times C}(A) \;\cong\; KO_G(A)\ . \tag{B.15}$$

被对合固定的 $\mathbf{BUP}$ 的正交子空间“就是”周期格拉斯曼流形$\mathbf{BOP}$，见 [24,例 2.4.1]。更确切地说，复化映射

$$\mathbf{BOP}(V) \;=\; \amalg_{n\geq 0}\, Gr_n^{\mathbb{R}}(V^2) \;\longrightarrow\; \amalg_{n\geq 0}\, Gr_n^{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}^2) \;=\; \mathbf{BUP}(V)\ ,\quad L\;\longmapsto\; \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} L$$

构成到 ψ-不动子对象 $\mathbf{BUP}^{\psi}$ 的超交换幺半群同构。因此，对于任何带有平凡 C作用的 G-空间 A，它诱导出一个同构

$$[A,\mathbf{BOP}]^{G} \xrightarrow{\;\cong\;} [A,\mathbf{BUP}]^{G\times C}\ . \tag{B.16}$$

在 t 根据识别 (B.15) 和 (B.16)，定理 B.12 因而特化为同构

$$\langle -\rangle \;:\; [A,\mathbf{BOP}]^{G} \xrightarrow{\;\cong\;} KO_G(A)$$

来自 [24, 定理 2.4.10]。

构造 B.17（超交换 C-幺半群$\mathbf{U}$）。我们回顾由酉群构造的超交换幺半群 $\mathbf{U}$，参见 [24, 例 2.37]。欧几里得内积 $\langle -,-\rangle$ 在 V 上诱导出厄米内积（$-,-$），定义为满足（$1\otimes v, 1\otimes w$）$=\langle v,w\rangle$ 对所有 $v,w\in V$ 都成立的唯一半双线性型。正交空间 $\mathbf{U}$ 在 V 上的取值为

$$\mathbf{U}(V) \;=\; U(V_{\mathbb{C}})\ ,$$

V复化的酉群。每个 $\mathbb{R}$线性等距嵌入$\varphi\colon V\longrightarrow W$ 的复化都保持厄米内积，因此我们可以定义一个连续单同态

$$\mathbf{U}(\varphi) \;:\; \mathbf{U}(V) \;\longrightarrow\; \mathbf{U}(W)$$

通过 $\varphi_{\mathbb{C}}$的共轭 $V_{\mathbb{C}} \longrightarrow W_{\mathbb{C}}$ 以及像 $\varphi_{\mathbb{C}}$的正交补上的单位元。$\mathbf{U}$ 的交换乘法由酉自同构的直和给出

$$\mathbf{U}(V) \times \mathbf{U}(W) \longrightarrow \mathbf{U}(V \oplus W)\ , \quad (A, B) \longmapsto A \oplus B\ ,$$

其中我们隐含地使用了优选的复等距映射 $V_{\mathbb{C}} \oplus W_{\mathbb{C}} \cong (V \oplus W)_{\mathbb{C}}$。超交换幺半群 $\psi\colon \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}$ 的一个对合自同构由映射 V给出

$$\psi(V)\ :\ U(V_{\mathbb{C}}) \longrightarrow U(V_{\mathbb{C}})\ , \quad A \longmapsto \psi_V \circ A \circ \psi_V\ ,$$

其中 $\psi_V\colon V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathbb{C}$-半线性的共轭对合（B.2）。此对合使 $\mathbf{U}$ 成为一个正交的 C-空间，表示一个不稳定实全局同伦类型。

我们用 $\mathbf{BU}$ 表示 $\mathbf{BUP}$ 中取值为 C的正交 C-子空间

$$\mathbf{BU}(V) \ = \ Gr^{\mathbb{C}}_{|V|}(V^2_{\mathbb{C}})\ ,$$

其中 $|V| = \dim_{\mathbb{R}}(V)$。这个子对象是 $\mathbf{BUP}$上 $\mathbb{Z}$-分次中度为 0 的齐性直和项，并且在超交换乘法下封闭。我们的下一个目标是证明，正如记号所示，超交换C-幺半群 $\mathbf{BU}$ 是 $\mathbf{U}$的一个 C-全局去环路化。此去环路化将由一串由两个实全局等价组成的映射见证。

构造 B.18. 我们定义一个超交换 C-幺半群 F 以及超交换幺半群之间的态射

$$\mathbf{U} \xrightarrow{\ g\ } F \xleftarrow{\ h\ } \Omega(\mathbf{BU})\ .$$

为此，我们引入一个辅助的超交换 C-幺半群 $\mathcal{L}$。它在一个内积空间上的取值是斯蒂费尔流形

$$\mathcal{L}(V) \ = \ \mathbf{L}^{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, V^2_{\mathbb{C}})$$

$\mathbb{C}$-线性等距嵌入 $V_{\mathbb{C}}$ 到 $V^2_{\mathbb{C}}$ 的空间。群 $O(V)$ 和非单位元 $\psi \in C$ 通过共轭作用，即

$${}^{A}\varphi \ = \ A^2_{\mathbb{C}} \circ \varphi \circ A^{-1}_{\mathbb{C}} \qquad \text{and} \quad {}^{\psi}\varphi \ = \ \psi^2_V \circ \varphi \circ \psi_V$$

对于 $(A, \varphi) \in O(V) \times \mathbf{L}^{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, V^2_{\mathbb{C}})$。超交换乘法定义为

$$\mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(W) \longrightarrow \mathcal{L}(V \oplus W)\ , \quad (\varphi, \phi) \longmapsto \kappa_{V,W} \circ (\varphi \oplus \phi)\ ,$$

其中 $\kappa_{V,W}\colon V^2_{\mathbb{C}} \oplus W^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow (V \oplus W)^2_{\mathbb{C}}$ 是 $\kappa_{V,W}(v, v', w, w') = (v, w, v', w')$。单位元为 $i_1\colon V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V^2_{\mathbb{C}}, i_1(v) = (v, 0)$，它是 $(O(V) \times C)$-不变的且具有乘法性。

超交换 C-幺半群之间的态射 $\mathrm{im}\colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{BU}(V)$ 将 $\varphi \in \mathbf{L}(V_{\mathbb{C}}, V^2_{\mathbb{C}})$ 映到其像 $\mathrm{im}(\varphi) \in Gr^{\mathbb{C}}_{|V|}(V^2_{\mathbb{C}}) = \mathbf{BU}(V)$。我们将超交换幺半群 F 定义为态射 $\mathrm{im}\colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{BU}(V)$ 在 $\mathbf{BU}$ 的单位元上的同伦纤维，即由超交换 C-幺半群范畴中的一个拉回图给出：

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\quad p \quad} & \mathcal{L} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{im}} \\ \{V_{\mathbb{C}} \oplus 0\} \times_{\mathbf{BU}} \mathbf{BU}^{[0,1]} & \xrightarrow[\mathrm{ev}_1]{} & \mathbf{BU} \end{array} \tag{B.19}$$

具体而言， $F(V)$ 是所有二元组 $(\omega, \varphi) \in \mathbf{BU}(V)^{[0,1]} \times \mathcal{L}(V)$ 构成的空间，其中包含一条路径 $\omega\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{BU}(V) = Gr_{|V|}(V^2_{\mathbb{C}})$ 以及一个线性等距嵌入 $\varphi\colon V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V^2_{\mathbb{C}}$，满足

$$\omega(0) \ = \ V_{\mathbb{C}} \oplus 0 \quad \text{and} \quad \omega(1) \ = \ \mathrm{im}(\varphi)\ .$$

作为拉回， $O(V)$-作用、结构映射、对合、乘法和单位元均继承自$\mathbf{BU}$和 $\mathcal{L}$。

超交换 C-幺半群 f 的态射：$\mathbf{U} \longrightarrow F$ 在 V 处由下式给出

$$f(V) \;:\; \mathbf{U}(V) = U(V_{\mathbb{C}}) \;\longrightarrow\; F(V)\;, \quad A \;\longmapsto\; (\mathrm{const}_{V_{\mathbb{C}}\oplus 0}, i_1 \circ A)\;.$$

这里，$\mathrm{const}_{V_{\mathbb{C}}\oplus 0}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{BU}(V)$ 是 $V_{\mathbb{C}} \oplus 0$ 处的常值路径，而 $i_1\colon V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}^2$ 是作为第一个直和项的嵌入。超交换幺半群的态射 $g\colon \Omega(\mathbf{BU}) \longrightarrow F$ 在 V 处由下式给出

$$g(V) \;:\; \mathrm{map}_*(S^1, \mathbf{BU}(V)) \;\longrightarrow\; F(V)\;, \quad \omega \;\longmapsto\; (\omega \circ t, i_1)\;,$$

其中 $t\colon [0,1] \longrightarrow S^1$ 是连续映射 $t(x) = (2x-1)/(x(1-x))$，它通过一个同胚 $[0,1]/\{0,1\} \cong S^1$ 分解。

命题 B.20. 这些态射

$$f \;:\; \mathbf{U} \;\longrightarrow F \qquad \textit{and} \qquad g \;:\; \Omega(\mathbf{BU}) \;\longrightarrow\; F$$

是 C-全局等价的超交换 C-幺半群。

证明。 我们先考察态射 f，并证明它甚至是一个 C-级等价。令 $\alpha\colon G \longrightarrow C$ 为一个增广李群，其图为 $\Gamma = \{(\alpha(\gamma)\ \gamma)\colon\ \gamma \in G\}$。令 V 为一个正交 G-表示。映射

$$\mathrm{im}(V)^\Gamma \;:\; \mathcal{L}(V)^\Gamma \;=\; (\mathbf{L}^{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}}^2))^\Gamma \;\longrightarrow\; (Gr^{\mathbb{C}}_{|V|}(V_{\mathbb{C}}^2))^\Gamma \;=\; \mathbf{BU}(V)^\Gamma \tag{B.21}$$

是从斯蒂费尔流形到相应格拉斯曼流形的投影的不交并。因此，该映射是一个局部平凡纤维丛，因而是塞尔纤维化。所以，从 (B.21) 在 $V_{\mathbb{C}} \oplus 0$ 上的严格纤维到同伦纤维的映射是弱同伦等价。$\mathbf{U}(V)^\Gamma = U(V_{\mathbb{C}})^\Gamma$ 在 i_1 上通过前复合给出的右作用：$V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}^2$，将 $\mathbf{U}(V)^\Gamma$ 识别为 (B.21) 的严格纤维。因此映射

$$f(V)^\Gamma \;:\; \mathbf{U}(V)^\Gamma \;\longrightarrow\; \{V_{\mathbb{C}} \oplus 0\} \times_{\mathbf{BU}(V)^\Gamma} (\mathbf{BU}(V)^\Gamma)^{[0,1]} \times_{\mathbf{BU}(V)^\Gamma} \mathcal{L}(V)^\Gamma \;=\; F(V)^\Gamma$$

是弱同伦等价。这表明态射 $f\colon \mathbf{U} \longrightarrow F$ 是按照 [5,定理 A.2]，意义下的 C-层级等价，因而特别是一个 C-全局等价。

为处理态射 g，我们首先证明正交 C-空间 $\mathcal{L}$ 是 C-全局平凡的。对于每个内积空间 V，同伦

$$\begin{aligned} H \;:\; \mathbf{L}^{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}}^2) \times [0, \pi/2] \;&\longrightarrow\; \mathbf{L}^{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}^2, V_{\mathbb{C}}^2 \oplus V_{\mathbb{C}}^2) \\ H(\varphi, t)(w, w') \;&=\; (\cos(t) \cdot \varphi(w), (w', \sin(t) \cdot w)) \end{aligned}$$

证明映射

$$- \oplus i_1 \;:\; \mathcal{L}(V) = \mathbf{L}^{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}}^2) \;\longrightarrow\; \mathbf{L}^{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}^2, V_{\mathbb{C}}^2 \oplus V_{\mathbb{C}}^2)$$

在（$O(V) \times C$）-等变同伦意义下同伦于一个常值映射。结构映射

$$\mathcal{L}(i_1) \;:\; \mathcal{L}(V) \;\longrightarrow\; \mathcal{L}(V^2)$$

是 $- \oplus i_1$ 与由 $\kappa_{V,V}\colon V_{\mathbb{C}}^2 \oplus V_{\mathbb{C}}^2 \cong (V \oplus V)_{\mathbb{C}}^2$ 诱导的同胚的复合映射，因此结构映射 $\mathcal{L}(i_1)$ 也在（$O(V) \times C$）-等变意义下零伦。因此， $\mathcal{L}$ 的底层正交 C-空间是 C-全局可缩的。

定义拉回方块 (B.19) 中较低的水平评价态射是一个 C-层纤维化。因此，它的基变换 $p\colon F \longrightarrow \mathcal{L}$ 也是一个 C-层纤维化。此外，拉回方块中的右侧垂直态射

$$\begin{array}{ccc} \Omega(\mathbf{BU}) & \longrightarrow & * \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ F & \xrightarrow[p]{} & \mathcal{L} \end{array}$$

根据上述内容，这是一个 C-全局等价。沿着一个 C-层纤维化拉回 C-全局等价，仍然是 C-全局等价，参见 [5, 引理 A.18]。因此， $g\colon \Omega(\mathbf{BU}) \longrightarrow F$ 是一个 C-全局等价。□

余诱导正交 C-空间在定义 A.14 中引入。下面我们将证明，实全局 K 理论的表示 C-空间 $\mathbf{BUP}$ 就是一个例子。这对我们的目的很有用，因为余诱导对象之间的 C-全局等价可以通过底层全局空间来检测，参见命题 A.15。

定理 B.22. 正交的 C-空间 $\mathbf{BUP}$、$\mathbf{U}$和$\Omega^\sigma\mathbf{U}$ 是余诱导的。

证明。 为了证明$\mathbf{BUP}$是余诱导的，我们将利用它表示实等变 K 理论这一事实，见定理 B.12 (iii)。我们滥用记号，简记 C 为增广李群 $\mathrm{Id}_C\colon\ C\longrightarrow C$。我们记$\widetilde{\beta}\in KR_C(S^{1+\sigma})$为与 $\mathbb{C}$上的一维实 C-表示相关联的 Bott 类，参见$\widetilde{\ }$，例如 [2, 定理 2.3] 或 [3, 定理 5.1]。那么，$i^*(\beta)$是 $KR_C(S^1)$中的一个类，其中 $i\colon\ S^1\longrightarrow S^{1+\sigma}$是 C-不动点的包含映射。因此，$(i^*(\beta))^3$ 属于群 $KR_C(S^3)$，它同构于$\widetilde{KO}(S^3)\cong\pi_3(KO)$，故为平凡群。

现在令 $\alpha\colon\ G\longrightarrow C$ 为一个增广李群。我们滥用记号，也用 σ 表示沿增广映射限制符号 C-表示所得的对象。沿 $\alpha\colon\ G\longrightarrow C$ 的膨胀与实等变 K 理论中的乘积相容，因此 $\alpha^*(i^*(\beta)^3)=(i^*(\beta_{\alpha^*(\mathbb{C})}))^3=0$ 属于群 $KR_\alpha(S^3)$，其中$\widetilde{\beta}_{\alpha^*(\mathbb{C})}\in KR_\alpha(S^{1+\sigma})$ 是实 α-表示 $\alpha^*(\mathbb{C})$ 的 Bott 类。因此，类 $\alpha^*(i^*(\beta)^3)$ 的外乘法在每个基点有限 G-CW 复形的约化 KR_α-上同调上都是平凡的。这种乘法的一个例子是复合映射

$$\widetilde{KR}_\alpha(A\wedge S^{3\sigma})\ \xrightarrow{i_3^*}\ \widetilde{KR}_\alpha(A)\ \xrightarrow{\beta^3_{\alpha^*(\mathbb{C})}\cdot}\ \widetilde{KR}_\alpha(A\wedge S^{3(1+\sigma)})\ ,$$

其中 $i_3\colon\ S^0\longrightarrow S^{3\sigma}$ 是点 $\{0,\infty\}$ 的包含映射。乘以 $\beta_{\alpha^*(\mathbb{C})}$ 是一个同构，见[3, 定理 (5.1)], ，因此上面的限制映射 i_3^* 是平凡的。于是对每个 $n\geq 3$，余纤维序列的 KR_α-上同调长正合序列

$$A\wedge S(n\sigma)_+\ \xrightarrow{A\wedge p_+}\ A\ \xrightarrow{A\wedge i_n}\ A\wedge S^{n\sigma}$$

分裂出一个短正合序列：

$$0\ \longrightarrow\ \widetilde{KR}_\alpha(A)\ \xrightarrow{(A\wedge p)^*}\widetilde{KR}_\alpha(A\wedge S(n\sigma)_+)\xrightarrow{\partial}\ \widetilde{KR}^1_\alpha(A\wedge S^{n\sigma})\ \longrightarrow\ 0$$

n 和 $n+3$ 的这些正合序列构成一个交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \widetilde{KR}_\alpha(A) & \xrightarrow{(A\wedge p_+)^*} & \widetilde{KR}_\alpha(A\wedge S((n+3)\sigma)_+) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{KR}^1_\alpha(A\wedge S^{(n+3)\sigma}) & \longrightarrow & 0\\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle (A\wedge j_+)^*} & & \downarrow{\scriptstyle (A\wedge S^{n\sigma}\wedge i_3)^*} & & \\
0 & \longrightarrow & \widetilde{KR}_\alpha(A) & \xrightarrow[(A\wedge p_+)^*]{} & \widetilde{KR}_\alpha(A\wedge S(n\sigma)_+) & \xrightarrow[\partial]{} & \widetilde{KR}^1_\alpha(A\wedge S^{n\sigma}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

这里，$j\colon\ S(n\sigma)\longrightarrow S((n+3)\sigma)$ 是 $j(x_1,\ .....,\ x_n)=(x_1,\ .....,\ x_n,\ 0,\ 0,\ 0)$。右侧的垂直映射是限制映射 i_3^* 的另一个实例，因此是平凡的。所以，中间的垂直映射 $(A\wedge j_+)^*$ 可经由左下方的水平映射 $(A\wedge p_+)^*$分解。这表明映射 $(A\wedge p_+)^*$ 构成从$\widetilde{\ }$取值为 $KR_\alpha(A)$ 的常值塔到该塔的原同构

$$\ldots\longrightarrow\widetilde{KR}_\alpha(A\wedge S((n+1)\sigma)_+)\longrightarrow\widetilde{KR}_\alpha(A\wedge S(n\sigma)_+)\longrightarrow\ldots\longrightarrow\widetilde{KR}_\alpha(A\wedge S(\sigma)_+)\ .$$

定理 B.12 中的自然同构 $\langle-\rangle\colon\ [A,\mathbf{BUP}]^\alpha\cong KR_\alpha(A)$ 传递到约化群上，并给出一个自然同构

$$[A,\mathbf{BUP}]^\alpha_*\ \cong\ \widetilde{KR}_\alpha(A)\ ,$$

其中 A 是任意有限的基点 G-CW 复形。因此，映射 $(A\wedge p_+)^*\colon\ [A,\mathbf{BUP}]^\alpha_*\longrightarrow[A\wedge S(n\sigma)_+,\ \mathbf{BUP}]^\alpha_*$构成从值为 $[A,\mathbf{BUP}]^\alpha_*$ 的常值塔到该塔的原同构

$$\ldots\longrightarrow[A\wedge S((n+1)\sigma)_+,\mathbf{BUP}]^\alpha_*\longrightarrow[A\wedge S(n\sigma)_+,\mathbf{BUP}]^\alpha_*\longrightarrow\ldots\longrightarrow[A\wedge S(\sigma)_+,\mathbf{BUP}]^\alpha_*\ .$$

特别地， $[A,\mathbf{BUP}]_*^\alpha$ 与逆极限同构

$$[A,\mathbf{BUP}]_*^\alpha \xrightarrow{\cong} \lim [A\wedge S(n\sigma)_+,\mathbf{BUP}]_*^\alpha ,$$

且该塔的导出逆极限为零。 C-空间 $\bigcup_{n\geq 0} S(n\sigma)$ 是普遍自由 C-空间 EC 的一个模型。因此，群 $[A\wedge EC_+,\alpha^\flat(\mathbf{BUP}(\mathcal{U}_G))]_*^G$参与一个 Milnor 短正合序列，其中包含逆极限和为零的导出逆极限。我们得出映射

$$(A\wedge p_+)^* \;:\; [A,\mathbf{BUP}(\mathcal{U}_G)]_*^\Gamma \longrightarrow [A\wedge EC_+,\mathbf{BUP}(\mathcal{U}_G)]_*^\Gamma \cong [A,\mathrm{map}(EC,\mathbf{BUP}(\mathcal{U}_G))]_*^\Gamma$$

对每个有限的带基点 G-CW 复形 A 都是同构，其中 Γ 是 α 的图： $G\longrightarrow C$。取$A=S^k$，令 $k\geq 0$ 且带有平凡的 G-作用，可知映射

$$(p^*)^\Gamma \;:\; \mathbf{BUP}(\mathcal{U}_G)^\Gamma \longrightarrow \mathrm{map}^\Gamma(EC,\mathbf{BUP}(\mathcal{U}_G))$$

在 π_0 上诱导双射，并在指定基点处诱导同伦群同构。由于$\mathbf{BUP}(\mathcal{U}_G)$ 是类群 G-E_∞-空间，$(p^*)^\Gamma$ 是非等变类群 E_∞-空间之间的映射，因此是弱同伦等价。命题 A.17 表明，正交 C-空间 $\mathbf{BUP}$ 是余诱导的。

由于 $\mathbf{BUP}$ 是余诱导的，因此 $\Omega(\mathbf{BUP}) = \Omega(\mathbf{BU})$ 也由命题 A.19 可知是余诱导的。由命题 B.20，$\mathbf{U}$ 与 $\Omega(\mathbf{BU})$ C-全局等价，因此它是余诱导的。接着，由命题 A.19，$\Omega^\sigma\mathbf{U}$ 也是余诱导的。□

在 [24, 定理 2.5.41], 中，我们通过展示 $\mathbf{BUP}$与 $\Omega\mathbf{U}$之间由两个超交换幺半群的全局等价组成的锯齿形链，建立了 Bott 周期性的全局等变形式。现在我们将把它提升为$\mathbf{BUP}$ 与 $\Omega^\sigma\mathbf{U}$之间的实全局等价。

构造 B.23. 我们赋予 $\Omega^\sigma\mathbf{U} = 映射_*(S^\sigma,\mathbf{U})$ 一种对合，该对合由 S^σ 上的符号作用与 $\mathbf{U}$上的复共轭对合对角给出。借助从 $\mathbf{U}$继承的逐点乘法，这成为一个超交换 C幺半群。我们用 $\mathrm{sh}_\otimes\mathbf{U} = \mathrm{sh}_\otimes^{\mathbb{R}^2}\mathbf{U}$ 表示 $\mathbf{U}$ 按 $\mathbb{R}^2$ 作的“乘法平移”，其含义见 [24, 例 1.1.11]。因此，这个正交空间的取值如下：

$$(\mathrm{sh}_\otimes\mathbf{U})(V) \;=\; \mathbf{U}(V\otimes\mathbb{R}^2) \;=\; U((V\otimes\mathbb{R}^2)_{\mathbb{C}}) .$$

结构映射、超交换乘法和一个对合继承自$\mathbf{U}$，使 $\mathrm{sh}_\otimes\mathbf{U}$ 成为一个超交换 C-幺半群。作为第一个直和项的嵌入

$$j(V) \;=\; -\otimes(1,0) \;:\; V \longrightarrow V\otimes\mathbb{R}^2$$

诱导出一个超交换幺半群的态射

$$\mathbf{U}\circ j \;:\; \mathbf{U} \longrightarrow \mathrm{sh}_\otimes\mathbf{U} .$$

在 [24, 页 224]，我们定义了一个超交换幺半群的态射 β：$\mathbf{BUP}\longrightarrow\Omega(\mathrm{sh}_\otimes\mathbf{U})$。当时我们没有考虑任何对合。然而，检查所有定义后可以看出，该态射相对于$\mathbf{BUP}$ 和$\mathbf{U}$上的复共轭对合，以及目标中环路坐标上的符号对合，是 C-等变的；出现符号对合是因为凯莱变换$\mathfrak{c}$： $S^1\longrightarrow U(1)$相对于源上的符号对合和目标上的复共轭是 C-等变的。因此， β 也是一个超交换 C-幺半群的态射

$$\bar\beta \;:\; \mathbf{BUP} \longrightarrow \Omega^\sigma(\mathrm{sh}_\otimes\mathbf{U}) .$$

以下结果将 [24,定理 2.5.41] 推广到实全局语境。

定理 B.24 (实全局 Bott 周期性)。 超交换 C-幺半群的态射

$$\mathbf{BUP} \xrightarrow{\bar\beta} \Omega^\sigma(\mathrm{sh}_\otimes\mathbf{U}) \xleftarrow{\Omega^\sigma(\mathbf{U}\circ j)} \Omega^\sigma\mathbf{U}$$

是实全局等价。

证明。超交换 C-幺半群的态射 $\mathbf{U}\circ j\colon \mathbf{U}\longrightarrow \mathrm{sh}_\otimes \mathbf{U}$ 根据[5, 引理 3.8]是实全局等价。因此，$\Omega^\sigma(\mathbf{U}\circ j)\colon \Omega^\sigma\mathbf{U}\longrightarrow\Omega^\sigma(\mathrm{sh}_\otimes\mathbf{U})$ 也同样是实全局等价。正交C-空间 $\mathbf{BUP}$ 和 $\Omega^\sigma\mathbf{U}$ 根据定理 B.22 是余诱导的。态射 $\Omega^\sigma(\mathbf{U}\circ j)$ 是实全局¯等价，因此 $\Omega^\sigma(\mathrm{sh}_\otimes\mathbf{U})$ 也是余诱导的。态射 $\beta\colon \mathbf{BUP}\longrightarrow\Omega^\sigma(\mathrm{sh}_\otimes\mathbf{U})$ 是底层非实正交空间之间的全局等价¯，根据 [24, 定理 2.5.41]。所以 β 根据命题 A.15 是实全局等价。□

命题 B.20 和定理 B.24 给出了超交换 C-幺半群的实全局等价

$$\Omega^{\sigma+1}(\mathbf{BUP}) \;=\; \Omega^\sigma(\Omega(\mathbf{BUP})) \;=\; \Omega^\sigma(\Omega(\mathbf{BU})) \;\sim\; \Omega^\sigma\mathbf{U} \;\sim\; \mathbf{BUP}\ .$$

这些实全局等价实现了实等变 K 理论的 $(\sigma+1)$-周期性（也称为 $(2,1)$-周期性）的一种高度结构化细化。

构造 B.25。我们记

$$\gamma \;:\; \mathbf{BUP} \xrightarrow{\ \sim\ } \Omega^\sigma\mathbf{U} \tag{B.26}$$

¯为超交换 C-幺半群的同伦范畴中唯一的态射，使得 $\Omega^\sigma(\mathbf{U}\circ j)\circ\gamma=\beta$。超交换 C-幺半群的一个态射 $\beta\colon \mathbf{Gr}\longrightarrow\Omega^\sigma\mathbf{U}$ 定义于 [24, (2.5.38)]；其在

$$\beta(V)\;:\;\mathbf{Gr}(V)=Gr^{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})\;\longrightarrow\;\Omega^\sigma(U(V_{\mathbb{C}}))=(\Omega^\sigma\mathbf{U})(V) \tag{B.27}$$

一个内积空间 V上的取值将一个复子空间 $L\subset V_{\mathbb{C}}$送到环路 $\beta(V)(L)\colon S^\sigma\longrightarrow U(V_{\mathbb{C}})$，其中 $\beta(V)(L)(x)$ 在 L 上为乘以 $\mathfrak{c}(x)\in U(1)$，并在L的正交补上为单位元。态射 β 关于 $\mathbf{Gr}$ 和 $\mathbf{U}$上的复共轭对合，以及目标中环路坐标的符号对合，是 C-等变的；这再次是因为凯莱变换$\mathfrak{c}\colon S^\sigma\longrightarrow U(1)$关于源上的符号对合和目标上的复共轭是 C-等变的。检验定义可知，下方交换图表可交换：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Gr} & \xrightarrow{\ \beta\ } & \Omega^\sigma\mathbf{U} \\
{\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \sim\ \Omega^\sigma(\mathbf{U}\circ j)} \\
\mathbf{BUP} & \xrightarrow[\ \bar\beta\ ]{\ \sim\ } & \Omega^\sigma(\mathrm{sh}_\otimes\,\mathbf{U})
\end{array}$$

So

$$\Omega^\sigma(\mathbf{U}\circ j)\circ\gamma\circ i \;=\; \bar\beta\circ i \;=\; \Omega^\sigma(\mathbf{U}\circ j)\circ\beta\ .$$

由于 $\Omega^\sigma(\mathbf{U}\circ j)$ 是实全局等价，这意味着以下关系

$$\gamma\circ i \;=\; \beta \;:\; \mathbf{Gr}\;\longrightarrow\;\Omega^\sigma\mathbf{U} \tag{B.28}$$

作为实全局超交换幺半群的同伦范畴中的态射。

构造 B.29 （$\mathbf{U}$ 的逆态射）。 逆映射

$$\Im(V)\;:\;\mathbf{U}(V)=U(V_{\mathbb{C}})\;\longrightarrow\;U(V_{\mathbb{C}})=\mathbf{U}(V)\ ,\quad \Im(V)(A)=A^{-1}$$

与复共轭相容，并使下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{U}(V)\times\mathbf{U}(W) & \xrightarrow{\ \Im(V)\times\Im(W)\ } & \mathbf{U}(V)\times\mathbf{U}(W) \\
{\scriptstyle\oplus}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\oplus} \\
\mathbf{U}(V\oplus W) & \xrightarrow[\ \Im(V\oplus W)\ ]{} & \mathbf{U}(V\oplus W)
\end{array}$$

因此，它们构成了超交换 C-幺半群 $\Im$ 的态射：$\mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}$，该态射刻画了超交换加法中的逆映射。事实上，酉自同构的复合是超交换 C-幺半群 $\circ$ 的态射：$\mathbf{U} \times \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}$，并使下列图表交换：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{U}\boxtimes\mathbf{U} & & & \overset{\mu^{\mathbf{U}}}{\searrow} & \\ \downarrow{\scriptstyle (\rho_1,\rho_2)}\ \sim & & & & \\ \mathbf{U} & \xrightarrow[(\mathrm{Id},\Im)]{} & \mathbf{U}\times\mathbf{U} & \xrightarrow[\circ]{} & \mathbf{U} \end{array} \tag{B.30}$$

这里 $\rho_1, \rho_2 \colon \mathbf{U}\boxtimes\mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}$ 是到两个因子的投影；复合态射 $(\rho_1, \rho_2) : \mathbf{U}\boxtimes\mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U} \times \mathbf{U}$ 由 [5, 命题 3.9] 可知是一个 C-全局等价。下方的水平复合映射是常值映射，其值为恒等自同构，因此它是超交换乘法中的零态射。所以该图表表明，$\Im$ 是逆态射。

和之前一样，我们用 $\epsilon\colon\ S^\sigma \longrightarrow S^\sigma$ 表示符号对合 $\epsilon(x) = -x$。与 ϵ 前复合给出一个对合 $\epsilon^*\colon \Omega^\sigma\mathbf{U} \longrightarrow \Omega^\sigma\mathbf{U}$。在凯莱变换 (2.7) 下，符号对合 ϵ 变为 $U(1)$ 上的复共轭。因此，酉自同构 $\beta(V)(L)(x) \in \mathbf{U}(V)$ 和 $\beta(V)(L)(\epsilon(x))$ 具有相同的特征子空间 L，但特征值互为逆。于是 $\beta(V)(L)(x)$ 和 $\beta(V)(L)(\epsilon(x))$ 互为逆映射。这表明以下超交换 C-幺半群之间的态射图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Gr} & \xrightarrow{\beta} & \Omega^\sigma\mathbf{U} \\ \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon^*} \\ \Omega^\sigma\mathbf{U} & \xrightarrow[\Omega^\sigma\Im]{} & \Omega^\sigma\mathbf{U} \end{array} \tag{B.31}$$

命题 B.32. 设 $\alpha\colon\ G \longrightarrow C$ 是一个增广李群，A 是一个有限的 G-*CW* 复形。则映射 $[A, \epsilon^*]^\alpha\colon [A, \Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha \longrightarrow [A, \Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha$ 是乘以 -1的映射。

证明. 交换图表 (B.30) 表明，超交换 C-幺半群$\Im$的对合：$\mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U}$ 是逆态射；因此 $\Omega^\sigma\Im\colon \Omega^\sigma\mathbf{U} \longrightarrow \Omega^\sigma\mathbf{U}$也如此。特别地，映射 $[A, \Omega^\sigma\Im]^\alpha\colon [A, \Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha \longrightarrow [A, \Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha$ 是乘以 -1的映射。交换图表 (B.31) 表明，复合映射

$$[A, \mathbf{Gr}]^\alpha \xrightarrow{[A,\beta]^\alpha} [A, \Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha \xrightarrow{[A,\epsilon^*]^\alpha} [A, \Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha$$

等于 $[A, (\Omega^\sigma\Im)]^\alpha \circ [A, \beta]^\alpha = -[A, \beta]^\alpha$。因此，$[A, \epsilon^*]^\alpha$ 在 $[A, \beta]^\alpha$的像上是乘以 -1 的映射。态射

$$[A, i]^\alpha \ :\ [A, \mathbf{Gr}]^\alpha \longrightarrow [A, \mathbf{BUP}]^\alpha$$

根据命题 B.5，它是交换幺半群的群完备化。特别地，群 $[A,\mathbf{BUP}]^\alpha$ 由 $[A, \beta]^\alpha$ 的像生成。由 (B.26) 给出的 C-全局等价 $\gamma\colon \mathbf{BUP} \xrightarrow{\sim} \Omega^\sigma\mathbf{U}$ 满足$\gamma \circ i = \beta\colon \mathbf{Gr} \longrightarrow \Omega^\sigma\mathbf{U}$，见 (B.28)。因此，群 $[A, \Omega^\sigma\mathbf{U}]^\alpha$ 由 $[A, \beta]^\alpha$ 的像生成。由于$[A, \epsilon^*]^\alpha$ 是群同态，且在生成集上的乘法为 -1，所以它在所有元素上的乘法均为 -1。□

注记 B.33。事实上，存在比命题 B.32 更强的结论：态射 $\epsilon^*\colon \Omega^\sigma\mathbf{U} \longrightarrow \Omega^\sigma\mathbf{U}$ 在超交换 C-幺半群的同伦范畴中等于 $\Omega^\sigma\Im$，因此 $\epsilon^* = -\mathrm{Id}_{\Omega^\sigma\mathbf{U}}$。下面简述证明。若对每个增广李群 $\alpha\colon\ G \longrightarrow C$，交换幺半群 $\pi_0^\alpha(R)$ 都是群，则称超交换 C- 幺半群 R 是类群的 。可以将 [24, 定理 2.5.33] 的证明推广到实全局语境，并证明态射 $i\colon \mathbf{Gr} \longrightarrow \mathbf{BUP}$ 是实全局群完备化，即在超交换 C-幺半群的同伦范畴中，它是从 $\mathbf{Gr}$ 到类群对象的所有态射中的初始对象。实全局等价 $\gamma\colon \mathbf{BUP} \longrightarrow \Omega^\sigma\mathbf{U}$ 满足 $\gamma \circ i = \beta$，因此态射

β: $\mathbf{Gr} \longrightarrow \Omega^\sigma\mathbf{U}$ 也是真全局群完备化。由于 $\Omega^\sigma\mathbf{U}$ 是类群的，且根据 (B.31)，$\epsilon^* \circ \beta = (\Omega^\sigma\Im) \circ \beta$，实全局群完备化的泛性质表明 $\epsilon^* = \Omega^\sigma\Im$。

B.2. **连通实全局 K 理论**。连通全局 K 理论谱$\mathbf{ku}$ 是在 [24,构造 3.6.9], 中通过调整 Segal 的构形空间模型以适用于全局等变语境而定义的。本小节回顾其定义，以及由复共轭给出的对合 ψ；该对合将其增强为连通实全局 K 理论谱$\mathbf{kr} = (\mathbf{ku}\ \psi)$。在 (B.36) 中，我们回顾特征空间态射 $\mathrm{eig}\colon \mathbf{U} \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\, \mathbf{kr})$，并在命题 B.40 (i) 中证明它是一个 C-全局 H-映射。

构造 B.34（连通实全局 K 理论谱 $\mathbf{kr}$）。令 $\mathcal{U}$ 为一个可数维（有限或无限维）厄米内积空间。我们回顾由 Γ给出的“ $\mathcal{U}$中的正交子空间” $\mathscr{C}(\mathcal{U})$ 空间。对于有限带基点集合 A，令 $\mathscr{C}(\mathcal{U}, A)$ 表示由元组 $(E_a)_{a\in A\setminus\{0\}}$ 构成的空间，这些元组以 A 的非基点元素为指标，且其分量是 $\mathcal{U}$ 的有限维两两正交 $\mathbb{C}$子空间。$\mathscr{C}(\mathcal{U}, A)$ 上的拓扑是格拉斯曼流形乘积中若干子空间的不交并拓扑。$\mathscr{C}(\mathcal{U}, A)$ 的基点是满足对所有 $a \in A \setminus \{0\}$ 都有 $E_a = \{0\}$ 的元组。对于一个基点映射 $\alpha\colon A \longrightarrow B$，诱导映射$\mathscr{C}(\mathcal{U}, \alpha)\colon \mathscr{C}(\mathcal{U}, A) \longrightarrow \mathscr{C}(\mathcal{U}, B)$ 将 (E_a) 送到 (F_b)，其中

$$F_b = \bigoplus\nolimits_{\alpha(a)=b} E_a\ .$$

每个 Γ-空间都可以通过余端构造在带基点空间上求值，参见例如 [24, (4.5.14)]。从范畴论的角度来说，这个余端实现了沿着从 Γ 到带基点空间范畴的包含映射的富化 Kan 延拓。我们将 $\mathscr{C}(\mathcal{U},\ K) = \mathscr{C}(\mathcal{U})(K)$ 记作 Γ- 空间 $\mathscr{C}(\mathcal{U})$ 在带基点空间 K 上的取值。$\mathscr{C}(\mathcal{U},\ K)$ 的元素可以解释为 “ 带标签构形 ”：一个点由一个无序元组表示

$$[E_1, \dots, E_n;\, k_1, \dots, k_n]$$

其中 $(E_1,\ \dots\dots,\ E_n)$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个 n-元组，由有限维、两两正交的子空间组成；$k_1,\ \dots\dots,\ k_n$ 是 K 中的点，其中 n 取某个值。拓扑的性质是，粗略地说，每当两个点碰撞时，它们的标签就会相加；每当一个点趋近于 K 的基点时，相应的标签就会消失。

正交谱 $\mathbf{kr}$ 在欧几里得内积空间 V 上的取值为

$$\mathbf{kr}(V) = \mathscr{C}(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}), S^V)\ ,$$

球面 S^V 上的 Γ-空间 $\mathscr{C}(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}))$ 的值；对称代数上的内积见 [24, 命题 6.3.8]。正交群 $O(V)$ 在 V 上的作用随后扩展为对 $\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}})$ 的酉作用。我们令 $O(V)$ 对角作用，该作用由其在球面 S^V 上的作用以及在 Γ-空间 $\mathscr{C}(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}))$ 上的作用给出。结构映射参见 [24, 构造 6.3.9]。对合$\psi(V)\colon \mathbf{kr}(V) \longrightarrow \mathbf{kr}(V)$ 由 $\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}})$ 上的复共轭诱导，它保持子空间的正交性。

构造 B.3 **5** （特征空间态射）。我们回顾一下 [24, (6.3.26)]中的特征空间态射

$$\mathrm{eig}\ :\ \mathbf{U} \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\, \mathbf{kr})\ . \tag{B.36}$$

其在内积空间 V 处的值

$$\begin{aligned}\mathrm{eig}(V)\ :\ \mathbf{U}(V) = U(V_{\mathbb{C}}) &\longrightarrow \mathrm{map}_*(S^V, \mathscr{C}(\mathrm{Sym}((V\oplus\sigma)_{\mathbb{C}}), S^{V\oplus\sigma}))\\ &= \mathrm{map}_*(S^V, \mathbf{kr}(V\oplus\sigma)) = \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\, \mathbf{kr})(V)\end{aligned}$$

定义如下。对于酉自同态 $A \in U(V_{\mathbb{C}})$，令 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in U(1) \setminus \{1\}$ 为不同于 1 的特征值，并令 $E(\lambda_j)$ 为 A 对应于特征值 λ_j 的特征子空间。令

$$\mathfrak{c}^{-1}\ :\ U(1) \xrightarrow{\cong} S^\sigma\ ,\quad \mathfrak{c}^{-1}(\lambda) = i\cdot(\lambda+1)(\lambda-1)^{-1} \tag{B.37}$$

是 Cayley 变换 (2.7) 的逆变换。然后，$\mathrm{eig}(V)$ 定义为

$$\mathrm{eig}(V)(A)(v) = [E(\lambda_1), \dots, E(\lambda_n);\, (v, \mathfrak{c}^{-1}(\lambda_1)), \dots, (v, \mathfrak{c}^{-1}(\lambda_n))]\ .$$

换言之，$\mathrm{eig}(V)(A)(v)$ 是点 $(v,\ \mathfrak{c}^{-1}(\lambda_i)) \in S^{V\oplus\sigma}$ 的构型，这些点由 A 的特征子空间$E(\lambda_i)$ $E(\lambda_i)$ 标记，因此得名。严格来说，$E(\lambda_i)$ 是 $V_{\mathbb{C}}$ 的一个子空间，我们将其嵌入 $\mathrm{Sym}((V\oplus\sigma)_{\mathbb{C}})$ 的线性直和项中。

若 $A \in \mathbf{U}(V)$ 的特征子空间为 $E_1,\dots,E_n$，对应特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$，则 ψA 的特征子空间为 $\psi(E_1)\dots,\psi(E_n)$，对应特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$。在 $(\mathrm{sh}^\sigma \mathrm{kr})(V) = \mathrm{kr}(V\oplus\sigma)$ 上，对合在标记向量空间上由复共轭给出，在存储特征值的 σ 坐标上则由符号给出。逆 Cayley 变换 $\mathfrak{c}^{-1}\colon U(1) \longrightarrow S^\sigma$ 是 C-等变的，即 $\mathfrak{c}^{-1}(\bar\lambda) = -\mathfrak{c}^{-1}(\lambda)$。因此，映射 $\mathrm{eig}(V)\colon \mathbf{U}(V) \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma \mathrm{kr})(V)$ 与这些对合相容。由此可知，特征空间态射 (B.36) 是正交 C-空间的态射。

我们考虑一个超交换的 C-幺半群 R 和一个正交 C-谱 Y。有几处我们需要知道，由某个正交 C-空间 f的态射 $R \longrightarrow \Omega^\bullet(Y)$所诱导的映射 $[A,f]^\alpha\colon [A,R]^\alpha \longrightarrow [A,\Omega^\bullet(Y)]^\alpha$ 是可加的。为此，我们现在引入“C-全局 H-映射”的概念。

构造 B.38. 对于每个正交 C-谱 Y，稳定结构在 C-全局同伦范畴中的对象 $\Omega^\bullet(Y)$ 上赋予阿贝尔群结构，如下所示。从楔和到乘积的典范态射$\kappa\colon Y\vee Y \longrightarrow Y\times Y$是正交 C-谱之间的 C-全局等价，因此它诱导出正交 C-空间之间的 C-全局等价

$$\Omega^\bullet(\kappa)\ :\ \Omega^\bullet(Y\vee Y) \xrightarrow{\ \sim\ } \Omega^\bullet(Y\times Y) \cong \Omega^\bullet(Y)\times\Omega^\bullet(Y)\ .$$

这个态射在基于 C的全局同伦范畴中变为同构，因此我们可以在其中构成复合映射

$$\oplus\ :\ \Omega^\bullet(Y)\times\Omega^\bullet(Y) \xrightarrow[\cong]{\Omega^\bullet(\kappa)^{-1}} \Omega^\bullet(Y\vee Y) \xrightarrow{\Omega^\bullet(\nabla)} \Omega^\bullet(Y)\ .$$

这里 $\nabla\colon\ Y\vee Y \longrightarrow Y$是折叠态射。态射 $\oplus$ 使 $\Omega^\bullet(Y)$ 成为 C-全局同伦范畴中的阿贝尔群对象；并且对于每个增广李群 $\alpha\colon\ G\longrightarrow C$，它在 $\pi_0^\alpha(\Omega^\bullet Y) = \pi_0^G(\alpha^*Y)$ 上的作用是稳定同伦群上的加法。

定义 B.39。设 R 是一个超交换 C-幺半群，且 Y 是一个正交 C-谱。基于正交 C-空间的态射 $f\colon R\longrightarrow\Omega^\bullet Y$ 若满足下图在基于不稳定 C-全局同伦范畴中交换，则称其为 C-全局 H-映射：

$$\begin{array}{ccc} R\boxtimes R & \xrightarrow{(f\rho_1, f\rho_2)} & (\Omega^\bullet Y)\times(\Omega^\bullet Y) \\ {\scriptstyle\mu_R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\oplus} \\ R & \xrightarrow[f]{} & \Omega^\bullet Y \end{array}$$

这里 ρ_1，$\rho_2\colon\ R\boxtimes R\longrightarrow R$ 表示到两个因子的投影。

在 $\mathbf{U}$ 上的超交换乘法诱导出悬挂谱 $\Sigma^\infty_+\mathbf{U}$ 上的 C-环谱结构。进而，这诱导出 $\Sigma^\infty_+\mathbf{U}$ 的等变同伦群上的乘积结构。态射 $\varrho\colon\ \Sigma^\infty_+\mathbf{U}\longrightarrow\mathbb{S}$ 源自正交空间的唯一态射 $\mathbf{U}\longrightarrow *$，是超交换 C-环谱的态射，因而诱导出等变同伦环的态射

$$\varrho_*\ :\ \pi^G_\star(\Sigma^\infty_+\mathbf{U}) \longrightarrow \pi^G_\star(\mathbb{S})$$

对每个增广李群都成立。态射 $\mathbf{U}\longrightarrow *$ 有一个由$\mathbf{U}$的乘法单位元给出的截面，因此 ϱ_* 是满射。$\pi^G_\star(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})$ 的增广理想 是该同态 ϱ_*的核。态射 $q\colon\Sigma^\infty_+\mathbf{U}\longrightarrow\Sigma^\infty\mathbf{U}$ 由带基点的态射 $\mathbf{U}_+\longrightarrow\mathbf{U}$ 诱导，该态射将源的外部基点映射到目标的乘法单位元。

命题 B.40。

(i) 态射 $\mathrm{eig}\colon \mathbf{U} \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{kr})$ 是一个 C-全局 H-映射。

(ii) 对于每个增广李群 $\alpha\colon G \longrightarrow C$，复合映射

$$\pi_\star^G(\Sigma^\infty_+\mathbf{U}) \xrightarrow{q_*} \pi_\star^G(\Sigma^\infty\mathbf{U}) \xrightarrow{\mathrm{eig}^\flat_*} \pi_\star^G(\mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{kr})$$

消灭增广理想的平方。

证明。 为用于这两部分，我们引入一个正交 C-谱 $\mathbf{kr}^{[2]}$，它与两个 $\mathbf{kr}$ 的乘积实全局等价。正交谱 $\mathbf{kr}^{[2]}$ 在欧几里得内积空间 V 上的取值是构型空间

$$\mathbf{kr}^{[2]}(V) \;=\; \mathscr{C}(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}), S^V \vee S^V)\;,$$

Γ-空间 $\mathscr{C}(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}))$ 在两个 S^V 的楔和上的取值。 $O(V)$ 的作用、$\mathbf{kr}^{[2]}$ 的结构映射以及对合的定义方式与 $\mathbf{kr}$ 的情形大致相同。投影和折叠映射

$$p_1,\, p_2,\, \nabla \;:\; S^V \vee S^V \;\longrightarrow\; S^V$$

诱导出构型空间之间连续、基点保持且 $(C\times O(V))$-等变的映射

$$p_1(V),\, p_2(V),\, \nabla(V) \;:\; \mathbf{kr}^{[2]}(V) \;=\; \mathscr{C}(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}), S^V \vee S^V) \;\longrightarrow\; \mathscr{C}(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}), S^V) \;=\; \mathbf{kr}(V)\;.$$

对于变化的 g 内积空间 V，这些映射组装成正交 C-谱的态射 a

$$p_1,\, p_2,\, \nabla \;:\; \mathbf{kr}^{[2]} \;\longrightarrow\; \mathbf{kr}\;.$$

我们断言该态射

$$(p_1, p_2) \;:\; \mathbf{kr}^{[2]} \;\longrightarrow\; \mathbf{kr}\times\mathbf{kr}$$

是一个 C-全局等价。为此，令 $\alpha\colon G \longrightarrow C$ 为一个增广李群。若一个正交G-表示 V 是充足的，则称其为充足表示，当且仅当复对称代数 $\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}})$ 是一个完备的实 (G,α)-全集。若 V是充足的，则由 [24, 定理 6.3.19 (i)],, G-Γ-空间 $\mathscr{C}(\alpha^\flat(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}))\ -)$ 是特殊的；并且由 [24, 例 6.3.16]，它是 G-余纤维的。因此，G-Γ-空间 $\mathscr{C}(\alpha^\flat(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}))\ S^1\wedge -)$ 非常特殊且余纤维，故根据 [24,定理 B.61 (i)]，它将有限带基点 G-CW 复形的楔和映至乘积（相差一个 G-弱等价）。特别地，若 V是充足的且 $V^G\neq 0$，则映射

$$(p_1(V), p_2(V)) \;:\; \alpha^\flat(\mathbf{kr}^{[2]}(V)) = \mathscr{C}(\alpha^\flat(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}})), S^V\vee S^V) \;\longrightarrow$$
$$\mathscr{C}(\alpha^\flat(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}})), S^V)\times\mathscr{C}(\alpha^\flat(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}})), S^V) = \alpha^\flat(\mathbf{kr}(V)\times\mathbf{kr}(V))$$

是一个 G-弱等价。具有非零 G-不动点的充足 G-表示在所有正交 G-表示中共尾，因此这证明了态射（p_1，p_2）是一个 C-全局等价。

（i）我们定义一个正交 C-空间的态射 $\mathbf{eig}^{[2]}\colon \mathbf{U}\boxtimes\mathbf{U} \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{kr}^{[2]})$，它是特征空间态射（B.36）的一种变体，但使用两个（而非一个）酉参数。它在内积空间 V 上的取值是映射

$$\mathrm{eig}_{[2]}(V) \;:\; (\mathbf{U}\boxtimes\mathbf{U})(V) \;\longrightarrow\; \mathrm{map}_*(S^V, \mathscr{C}(\mathrm{Sym}((V\oplus\sigma)_{\mathbb{C}}), S^{V\oplus\sigma}\vee S^{V\oplus\sigma}))$$
$$= \mathrm{map}_*(S^V, \mathbf{kr}^{[2]}(V\oplus\sigma)) = \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\,\mathbf{kr}^{[2]})(V)$$

定义如下。$(\mathbf{U}\boxtimes\mathbf{U})(V)$的元素是酉自同态对$(A,B)$，其中 $A,B\in U(V)$满足以下意义下的横截 条件：存在一个正交直和分解 $V = V'\oplus V''$，使得 A 在 V'上是单位元，而 B 在 V''上是单位元。横截性假设特别意味着 A 与 B 可交换（但该假设更强），因此 A 与 B 可同时对角化。令 $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in U(1)\setminus\{1\}$ 为 A和 B中不同于1的特征值集合；令 $E(\lambda_j)$为 A 对应特征值 λ_j的特征子空间，并令 $F(\lambda_j)$为 B 对应特征值 λ_j 的特征子空间。通过

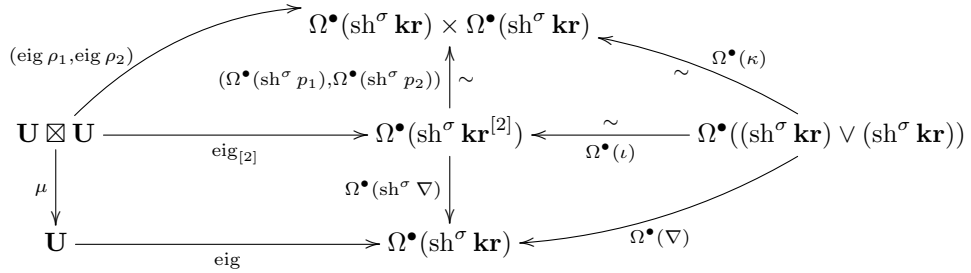
根据横截性假设，所有这些特征子空间 $E(\lambda_i)$和 $F(\lambda_j)$两两正交。于是我们可以定义映射$\mathrm{eig}_{[2]}(V)$如下：

$$\mathrm{eig}_{[2]}(V)(A,B)(v) \;=\; \{E(\lambda_j), i_1(v,\mathfrak{c}^{-1}(\lambda_j))\}_{1\le j\le n} \;\cup\; \{F(\lambda_j), i_2(v,\mathfrak{c}^{-1}(\lambda_j))\}_{1\le j\le n}\ .$$

和之前一样，$\mathfrak{c}^{-1}$是逆 Cayley 变换 (B.37)。而 i_1，i_2：$S^{V\oplus\sigma}\longrightarrow S^{V\oplus\sigma}\vee S^{V\oplus\sigma}$表示两个楔和项的嵌入。换言之，$A$ 的特征子空间 $E(\lambda_j)$ 附着在第一个楔和项中的点 $(v,\ \mathfrak{c}^{-1}(\lambda_j))$ 上，而 B的特征子空间 $F(\lambda_j)$ 附着在第二个楔和项中的点 $(v,\ \mathfrak{c}^{-1}(\lambda_j))$ 上。

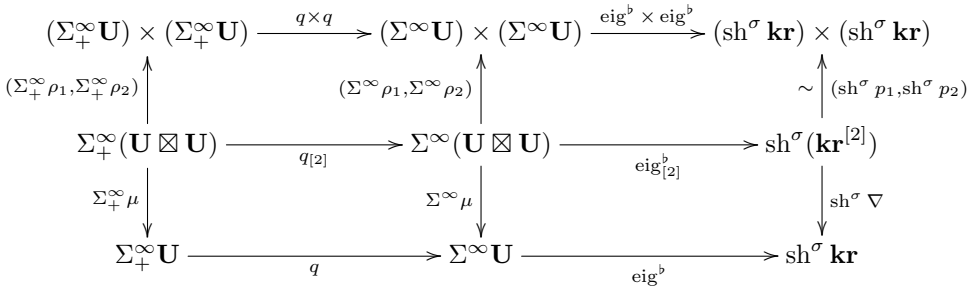
于是，以下正交 C-空间图表可交换：

(B.41)



态射 $(p_1,\ p_2)$: $\mathbf{kr}^{[2]}\longrightarrow\mathbf{kr}\times\mathbf{kr}$ 是一个实全局等价。函子 sh^σ 和 $\Omega^\bullet$ 保实全局等价与乘积，因此中间向上的垂直态射是正交 C-空间之间的实全局等价。因此，带波浪号标记的态射都是实全局等价。经过实全局同伦范畴后，我们可以将实全局等价求逆，所得图表表明 $\mathrm{eig}:\mathbf{U}\longrightarrow\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\mathbf{kr})$ 是一个 C-全局 H-映射。

(ii) 在交换图 (B.41) 中，我们对伴随 $(\Sigma^\infty,\Omega^\bullet)$ 取伴随映射。这给出了下图右侧部分在 C-全局稳定同伦范畴中的交换性：



给定表示分次同伦类 $x\in\pi_V^G(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})$ 和 $y\in\pi_W^G(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})$，我们将 (x,y) 在复合映射下的像记为 $x\boxtimes y$

$$\pi_V^G(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})\times\pi_W^G(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})\;\longrightarrow\;\pi^G_{V\oplus W}((\Sigma^\infty_+\mathbf{U})\wedge(\Sigma^\infty_+\mathbf{U}))\;\cong\;\pi^G_{V\oplus W}(\Sigma^\infty_+(\mathbf{U}\boxtimes\mathbf{U}))\ ,$$

其中，第一个映射是外配对 [24, (3.5.13)], ，而这个同构由非约化悬挂谱函子的强对称幺半结构诱导，参见 [24, (4.1.17)]。于是

$$(\Sigma^\infty_+\mu)_*(x\boxtimes y)\;=\;x\cdot y\ .$$

态射 $\Sigma^\infty_+\rho_1$: $\Sigma^\infty_+(\mathbf{U}\boxtimes\mathbf{U})\longrightarrow\Sigma^\infty_+\mathbf{U}$ 可分解为复合映射

$$\Sigma^\infty_+(\mathbf{U}\boxtimes\mathbf{U})\;\cong(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})\wedge(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})\;\xrightarrow{\mathrm{Id}\wedge\varrho}\;(\Sigma^\infty_+\mathbf{U})\wedge\mathbb{S}\;\cong\;\Sigma^\infty_+\mathbf{U}\ ,$$

其中最后一个同构是扣积的单位同构。因此，如果 y 属于增广理想，那么

$$(\Sigma^\infty_+\rho_1)_*(x\boxtimes y) \;=\; x\cdot\varrho_*(y) \;=\; 0\;,$$

因此

$$(\mathrm{sh}^\sigma\, p_1)_*((\mathrm{eig}^\flat_{[2]}\circ q_{[2]})_*(x\boxtimes y)) \;=\; (\mathrm{eig}^\flat\circ q\circ(\Sigma^\infty_+\rho_1))_*(x\boxtimes y) \;=\; 0\;.$$

类似地，$(\mathrm{sh}^\sigma\, p_2)_*((\mathrm{eig}^\flat_{[2]}\circ q^{[2]})_*(x\boxtimes y)) = 0$ 当 x 属于增广理想.

态射 $(\mathrm{sh}^\sigma\, p_1,\mathrm{sh}^\sigma\, p_2)$ 是一个 C-全局等价，因此它在等变同伦群上诱导的映射是同构。因此，如果 x 和 y 都属于增广理想，我们便可得出 $(\mathrm{eig}^\flat_{[2]}\circ q_{[2]})_*(x\boxtimes y) = 0$。上述图表的交换性进而给出所需的关系：

$$(\mathrm{eig}^\flat\circ q)_*(x\cdot y) \;=\; (\mathrm{eig}^\flat\circ q\circ(\Sigma^\infty_+\mu))_*(x\boxtimes y) \;=\; ((\mathrm{sh}^\sigma\,\nabla)\circ\mathrm{eig}^\flat_{[2]}\circ q_{[2]})_*(x\boxtimes y) \;=\; 0\;. \qquad \square$$

B.3. **周期实全局 K-理论**。 全局 K 理论谱**复 K 理论谱 KU**由 Joachim 在[15, 定义 4.3] 中引入，作为交换正交环谱，另见 [24, 构造 6.4.9]。Joachim 在 [15, 定理 4.4]中证明，作为全局谱**复 K 理论谱 KU** 的底层对象，其真正的 G-谱表示G-等变复 K 理论。 [24, 推论 6.4.23]中给出了另一种证明。通过适当地纳入复共轭，Joachim 的正交环谱可以增强为一个正交 C-谱$\mathbf{KR}$；据我所知，这一额外的对合最早由 Halladay 和 Kamel 在文献 [12, 第 6], 节中讨论，他们用记号 $KU_{\mathbb{R}}$ 表示由此得到的正交 C-环谱。在 [12, 命题 6.2], 中，Halladay 和 Kamel 将$\mathbf{KR}$的真正 C-不动点谱识别为 KO，从而验证了 $KU_{\mathbb{R}}$ 是 Atiyah 实 K-理论谱的一个模型。

我们回顾构造 B.43 中正交 C-谱$\mathbf{KR}$的定义，并称之为实全局 K 理论谱。定理 B.52 说明这个名称名副其实：对于每个增广李群α: $G\longrightarrow C$，正交 G-谱 $\alpha^*\mathbf{(KR)}$ 表示 α-等变实 K 理论 KR_α。我们的论述从定理 B.46 中一个自成一体的证明出发： C-符号表示的预欧拉类在 $\pi^C_\star\mathbf{(KR)}$中是幂零的。这立即推出，对于所有满射增广 α: $G\longrightarrow C$，几何不动点同伦群 $\Phi^G_*(\alpha^*\mathbf{(KR)})$ 都消失。这意味着$\mathbf{KR}$ 的实全局同伦型是从底层整体谱余诱导（或称“相对 C-Borel”）而来的。定理 B.49 表明（并说明其方式）：实全局空间$\mathbf{U}$是$\mathbf{KR}\wedge S^\sigma$底下的实全局无限环空间。因此，实全局空间$\mathbf{BUP}\;\sim\Omega^\sigma\mathbf{U}$ “就是”$\mathbf{KR}$底下的实全局无限环空间，见定理 B.52 (i)。

构造 B.42 （Clifford 代数）。设 V 为一个欧几里得内积空间。我们将复 Clifford 代数 $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ 定义为

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(V) \;=\; (TV)_{\mathbb{C}}/(v\otimes v-|v|^2\cdot 1)\;,$$

V的复化张量代数关于由对所有 $v\in V$ 的元素 $v\otimes v-|v|^2\cdot 1$生成的理想所取的商空间。记 $[-]$: $V\longrightarrow\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ 为如下 $\mathbb{R}$-线性且单射的复合映射

$$V\;\xrightarrow{\text{linear summand}}\;TV\;\xrightarrow{1\otimes -}\;(TV)_{\mathbb{C}}\;\longrightarrow\;\mathbb{C}\mathrm{l}(V)\;.$$

采用此记号，对所有 $v\in V$，关系 $[v]^2=|v|^2\cdot 1$ 在 $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ 中成立。Clifford 代数构造对于 $\mathbb{R}$-线性等距嵌入是函子性的，因此尤其 $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ 继承了正交群 $O(V)$ 的作用。Clifford 代数具有 $\mathbb{Z}/2$-分次，该分次来自张量代数按偶张量幂和奇张量幂所给出的分次。

复 Clifford 代数实际上是一个 $\mathbb{Z}/2$-分次的 C^*-代数。$\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ 上的 $*$-对合定义为规定 $[v]^*=[v]$ 对所有 $v\in V$成立，并将其延拓为一个 $\mathbb{C}$-半线性反自同构。这样，对于 $v\in S(V)$，元素 $[v]$ 成为 $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ 中的酉元。$\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ 上的范数源自 $V_{\mathbb{C}}$ 的外代数的自同态代数上的算子范数，相关说明例如见 [24, 构造 6.4.5]。

复合　　例如，Clifford 代数 $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ 上有三种与我们的目的相关的不同对合　　：

- 分次对合 $\alpha\colon \mathbb{C}\mathrm{l}(V) \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{l}(V)$；它是 $\mathbb{C}$-线性的且具有乘法性，并满足 $\alpha[v] = -[v]$。α 的 $+1$ 和 -1 特征子空间分别是 $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ 的偶部分和奇部分。
- 共轭对合 $(-)^*\colon \mathbb{C}\mathrm{l}(V) \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{l}(V)$；它是共轭线性的且反乘法，并满足 $[v]^* = [v]$。
- 我们将 $\psi\colon \mathbb{C}\mathrm{l}(V) \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ 定义为满足$\psi[v] = [v]$的唯一共轭线性且具有乘法性的映射。因此，此对合的不动点就是与正定型相关联的实 Clifford 代数，即

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(V)^{\psi} \;=\; (TV)/(v\otimes v - |v|^2\cdot 1)\ .$$

$\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ 上的三个对合 α、$(-)^*$ 和 ψ 彼此可交换。对 $((-)^*,\alpha)$ 使 $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ 成为一个复的、$\mathbb{Z}/2$-分次的 C^*-代数，而定义作为正交谱的 **复 K 理论谱 KU** 时只会用到这些数据。$\mathbb{C}(V)$ 的共轭线性对合 ψ 将在定义 $\mathbf{KR}$ 的对合时用到，该对合使其成为一个正交 C-环谱。

构造 B.43（实全局 K 理论谱）。对于欧几里得内积空间 V，我们将 $\mathcal{H}_V$ 记作复化对称代数 $\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}})$ 关于 [24, 命题 6.3.8] 中所规定的内积的希尔伯特空间完备化。于是，$\mathcal{K}_V$ 表示作用于 $\mathcal{H}_V$ 上的 C^*紧算子代数，并集中在偶次分次。交换正交环谱 **复 K 理论谱 KU** 在 V 处的值定义为

$$\mathbf{KU}(V) \;=\; C^*_{\mathrm{gr}}(s, \mathbb{C}\mathrm{l}(V)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{K}_V)\ .$$

环谱 **复 K 理论谱 KU** 的单位映射使用“泛函演算”

$$\mathrm{fc}\ :\ S^V \;\longrightarrow\; C^*_{\mathrm{gr}}(s, \mathbb{C}\mathrm{l}(V))\ ,\quad v \;\longmapsto\; (-)[v]\ , \tag{B.44}$$

对于 $v\in V$，$*$-同态 $\mathrm{fc}(v)$ 在 s 的齐次元素上的定义为

$$f[v] \;=\; \mathrm{fc}(v)(f) \;=\; \begin{cases} f(|v|)\cdot 1 & \text{when } f \text{ is even, and} \\ \frac{f(|v|)}{|v|}\cdot[v] & \text{when } f \text{ is odd.} \end{cases}$$

对于 $v=0$，奇函数的公式应解释为 $f[0]=0$；这是连续的，因为当 $v\neq 0$ 时，$f(|v|)/|v|\cdot[v]$ 的范数为 $f(|v|)$，而当 v趋于 0 时，它趋于 $f(0)=0$。如果 v 的范数趋于无穷大，那么 $f(|v|)$ 趋于 0，因此 $\mathrm{fc}(v)$ 趋于取值为 0 的常值 $*$-同态；0 是 $C^*_{\mathrm{gr}}(s,\ \mathbb{C}\mathrm{l}(V))$ 的基点。单位映射

$$\eta_V\ :\ S^V \;\longrightarrow\; C^*_{\mathrm{gr}}(s, \mathbb{C}\mathrm{l}(V)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{K}_V) \;=\; \mathbf{KU}(V) \tag{B.45}$$

于是定义为以下复合映射

$$S^V \xrightarrow{\ \mathrm{fc}\ } C^*_{\mathrm{gr}}(s, \mathbb{C}\mathrm{l}(V)) \xrightarrow{\ (-\otimes p_0)_*\ } C^*_{\mathrm{gr}}(s, \mathbb{C}\mathrm{l}(V)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{K}_V) \;=\; \mathbf{KU}(V)\ ,$$

其中 $p_0\in\mathcal{K}_V$ 是对称代数中到常数直和项的正交投影。单位映射的乘法性由泛函演算映射的乘法性质 [24, (6.4.8)] 得出。

现在我们来说明 **复 K 理论谱 KU**(V) 上的对合，另见 [12, 定义 6.2]。复共轭是一个共轭线性等距映射 $\psi\colon \mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}})$；因此它唯一地延拓为希尔伯特空间完备化上的连续共轭线性等距映射 $\psi\colon \mathcal{H}_V\longrightarrow\mathcal{H}_V$。由 ψ 给出的共轭于是构成一个共轭线性对合自同构

$$(-)^{\psi}\ :\ \mathcal{K}_V \;\longrightarrow\; \mathcal{K}_V$$

C^*紧算子代数。例如，若 E 是 $\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}})$ 的有限维 $\mathbb{C}$子空间，且 $p_E\in\mathcal{K}_V$ 是相应的正交投影，则

$$(p_E)^{\psi} \;=\; \psi\circ p_E\circ\psi \;=\; p_{\psi(E)}\ .$$

我们将共轭线性乘法对合 $\psi\colon \mathbb{C}l(V) \longrightarrow \mathbb{C}l(V)$ 和 $(-)^{\psi}\colon \mathcal{K}_V \longrightarrow \mathcal{K}_V$合并为一个共轭线性乘法对合

$$\psi \otimes (-)^{\psi} \;:\; \mathbb{C}l(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_V \;\longrightarrow\; \mathbb{C}l(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_V \;.$$

最后，我们定义一个对合

$$\psi \;:\; \mathbf{KU}(V) \;=\; C^*_{\mathrm{gr}}(s, \mathbb{C}l(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_V) \;\longrightarrow\; C^*_{\mathrm{gr}}(s, \mathbb{C}l(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_V) \;=\; \mathbf{KU}(V)$$

将同态 $h\colon s \longrightarrow \mathbb{C}l(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_V$映射为复合映射

$$s \xrightarrow{(-)^*} s \xrightarrow{h} \mathbb{C}l(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_V \xrightarrow{\psi\otimes(-)^{\psi}} \mathbb{C}l(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_V \;.$$

第一个映射是对 s 的共轭，即对函数逐点取复共轭。若 h 是一个 $*$-同态，则特别有 $h \circ (-)^* = (-)^* \circ h$。因此，$\mathbf{KU}(V)$ 上的对合也可表示为将 $h\colon s \longrightarrow \mathbb{C}l(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_V$ 与映射后复合

$$\mathbb{C}l(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_V \xrightarrow{(-)^*} \mathbb{C}l(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_V \xrightarrow{\psi\otimes(-)^{\psi}} \mathbb{C}l(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_V \;.$$

该复合映射是 $\mathbb{C}$-线性的且反乘法的。我们略去验证这些对合与正交谱 $\mathbf{KU}$ 的乘法和结构映射相容。我们用 $\mathbf{KR} = (\mathbf{KU}, \psi)$ 表示周期实全局 K-理论谱，即带有由该对合给出的 C-作用的交换正交 C-环谱 $\mathbf{KU}$。

我们用 $a = a_\sigma \in \pi^C_{-\sigma}(\mathbb{S})$ 表示群 C 的符号表示的预欧拉类 (0.1)，也表示它在单位态射 $\mathbb{S} \longrightarrow \mathbf{KR}$ 下于 $\pi^C_{-\sigma}(\mathbf{KR})$ 中的像。在表示 Atiyah 实 K-理论的 C-谱中，a 的三次幂为零。我们从头证明这一性质，以此说明正交 C-谱 $\mathbf{KR}$ 模拟了“正确”的实全局同伦型。

定理 B.46。关系 $a^3 = 0$ 在 $\pi^C_{-3\sigma}(\mathbf{KR})$中成立。

证明。对于每个 $n \geq 0$，类 a^n 由以下复合映射表示

$$S^0 \xrightarrow{a^n} S^{n\sigma} \xrightarrow{\eta_{n\sigma}} \mathbf{KR}(n\sigma) \;.$$

根据 $\mathbf{KR}$ 的单位映射定义 (B.45)，该复合映射经过 $\mathrm{fc} \circ a^n\colon S^0 \longrightarrow C^*_{\mathrm{gr}}(s, \mathbb{C}l(n\sigma))$。因此，只需证明对于 $n = 3$，C-不动点 $\mathrm{fc}(0)$ 与

$$\big(C^*_{\mathrm{gr}}(s, \mathbb{C}l(3\sigma))\big)^C$$

基点（零同态）位于同一路径分支中。我们将证明这个不动点空间同胚于圆，因此特别是路径连通的。

对于任意 n，C 在表示 $n\sigma$ 上的作用是乘以 -1。因此，在 Clifford 代数上的诱导对合

$$\mathbb{C}l(-\mathrm{Id}) \;:\; \mathbb{C}l(n\sigma) \;\longrightarrow\; \mathbb{C}l(n\sigma)$$

是一个 $\mathbb{C}$-代数自同构，对所有 $v \in S(n\sigma)$ 都将元素 $[v]$ 取负。因此，对于 C-表示$n\sigma$，由 $\mathbb{C}l(-)$ 的函子性诱导的对合 $\mathbb{C}l(-\mathrm{Id})$ 与分次对合 α 一致。所以，与我们当前目的相关的 $C^*_{\mathrm{gr}}(s, \mathbb{C}l(n\sigma))$ 上的对合由下式给出

- 通过复共轭（$-$）$^*\colon s \longrightarrow s$（逐点复共轭）和 $\psi\colon \mathbb{C}l(n\sigma) \longrightarrow \mathbb{C}l(n\sigma)$对分次 $*$-同态 $f\colon s \longrightarrow \mathbb{C}l(n\sigma)$进行共轭，并
- 应用由 $\mathbb{C}l(-)$ 的函子性导出的对合 $\mathbb{C}l(-\mathrm{Id}_{n\sigma}) = \alpha$。

换言之，我们需要确定该对合的不动点

$$C^*_{\mathrm{gr}}(s, \mathbb{C}l(n\sigma)) \;\longrightarrow\; C^*_{\mathrm{gr}}(s, \mathbb{C}l(n\sigma)) \;, \quad f \;\longmapsto\; \alpha \circ \psi \circ f \circ (-)^* \;.$$

对于每个 $\mathbb{Z}/2$-分次复 C^*-代数 A，在该函数处取值

$$r \,:\, \mathbb{R} \;\longrightarrow\; \mathbb{C}\,, \quad r(x) \;=\; \frac{2i}{x-i}$$

在 C^*-代数 s 中是一个同胚

$$C^*_{\mathrm{gr}}(s,A) \;\cong\; \{x\in A\colon xx^*=x^*x=-x-x^*\ ,\ \alpha(x)=x^*\}\ ,$$

比较 [24, (6.4.3)]。对于 $A=\mathbb{C}\mathrm{l}(n\sigma)$，左侧的相关对合对应于右侧将 $x\in\mathbb{C}\mathrm{l}(n\sigma)$ 送到 $\psi(\alpha(x^*)) = (\psi(\alpha(x)))^*$ 的对合。因此，前一个映射限制为一个同胚

$$\begin{aligned}\big(C^*_{\mathrm{gr}}(s,\mathbb{C}\mathrm{l}(n))\big)^C \;&\cong\; \{x\in\mathbb{C}\mathrm{l}(n)A\colon xx^*=x^*x=-x-x^*\ ,\ \alpha(x^*)=x=\psi(x)\}\\ &\cong\; \{x\in C(n)\colon xx^*=x^*x=-x-x^*\ ,\ \alpha(x^*)=x\}\ .\end{aligned}$$

第二个同胚利用了 $\mathbb{C}\mathrm{l}(n)$ 是实 Clifford 代数的复化

$$C(n) \;=\; T(\mathbb{R}^n)/([v]\otimes[v]-|v|^2\cdot 1)\ ,$$

其中 ψ 对应于 $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} C(n)$ 的复共轭自同构。

现在我们专门考虑 $n=3$。我们用 $e=[1,0,0]$、$f=[0,1,0]$ 和 $g=[0,0,1]$ 表示 $C(3)$ 的乘法生成元，它们来自 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基。于是，e、f 和 g 均为奇元，两两反交换，在共轭 $(-)^*$ 下保持不变，并满足

$$e^2 \;=\; f^2 \;=\; g^2 \;=\; 1\ .$$

我们要找出所有满足以下条件的 $x\in C(3)$：

$$x\cdot x^* \;=\; x^*\cdot x \;=\; -x-x^* \quad\text{and}\quad \alpha(x^*) \;=\; x^*\ .$$

对合 $x\mapsto\alpha(x^*)=\alpha(x)^*$ 固定基元素 1 和 efg，并将 e、f、g、ef、eg 以及 fg 变为其相反数。条件 $\alpha(x^*)=x$ 因此迫使 x 成为 1 和 efg 的 $\mathbb{R}$-线性组合。所以，对某个 $y,\ z\in\mathbb{R}$，有 $x=y+z\cdot efg$。于是，关系 $x\cdot x^*=x^*\cdot x=-x-x^*$ 可化为

$$(y+1)^2+z^2 \;=\; 1\ .$$

该方程的解构成一个圆，正如所声称的那样。 □

˜我们将 $EC=(EC)^\diamond$ 记作万有自由 C-空间 EC的非约化悬挂。

定理 B.47. 设 M 是一个正交 C-谱，并且在实全局稳定同伦范畴中具有$\mathbf{KR}$-模结构。

˜(i) 实全局谱 $M\wedge EC$ 是平凡的。(ii) 正交 C-空间 $\Omega^\bullet(M)$ 是余诱导的。

证明。(i) 任取一个增广李群 $\alpha\colon G\longrightarrow C$。若增广 α 是平凡的，则 G 在 $\alpha^*(EC)$ 上平凡作用，因此它是 G-等变可缩的。特别地，几何不动点同伦群 $\Phi^G_*(M\wedge\tilde{E}C)$ 消失。

若增广 α 是满射，则我们需要采用不同的论证。由于 $a^3=0$，因此 $\alpha^*(a)^3=0$ 属于 $\pi^G_{-3\alpha^*(\sigma)}(\alpha^*(\mathrm{KR}))$。由于 $(\alpha^*(\sigma))^G=\{0\}$，我们有 So $\Phi^G(\alpha^*(a))=1$ 属于几何不动点环$\Phi^G_0(\alpha^*(\mathrm{KR}))$。因此 $1=\Phi^G(\alpha^*(a))^3=\Phi^G(\alpha^*(a^3))=0$，所以环 $\Phi^G_0(\alpha^*(\mathrm{KR}))$ 是平凡的。由于 M 是一个 KR- 模谱，群 $\Phi^G_k(\alpha^*(M))$ 具有关于 $\Phi^G_0(\alpha^*(\mathrm{KR}))=0$ 的模结构，因此对所有 $k\in\mathbb{Z}$，$\Phi^G_k(\alpha^*(M))=0$。由于 $\alpha\colon G\longrightarrow C$是满射，我们有 $(\alpha^*(\tilde{EC}))^G=S^0$，因此

$$\Phi^G_*(\alpha^*(M\wedge\tilde{E}C)) \;\cong\; \Phi^G_*(\alpha^*(M)) \;=\; 0\ .$$

˜因此，对于所有增广李群，$M\wedge EC$ 的所有几何不动点同伦群都消失了，所以$M\wedge EC$ 在实全局稳定同伦范畴中是平凡的。

(ii) 由于 M 是一个$\mathbf{KR}$-模，实全局谱映射 $\mathsf{map}(EC, M)$ 也具有$\mathbf{KR}$-模结构。˜ ˜因此，根据 (i)，实全局谱 $M \wedge EC$和 $\mathsf{map}(EC, M) \wedge EC$都是平凡的。所以，下方交换方块中的两个水平态射都是实全局等价：

$$\begin{array}{ccc} M \wedge EC_+ & \xrightarrow[\sim]{M\wedge p_+} & M \\ {\scriptstyle p^*\wedge EC_+}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^*} \\ \mathrm{map}(EC, M) \wedge EC_+ & \xrightarrow[\mathrm{map}(EC,M)\wedge p_+]{\sim} & \mathrm{map}(EC, M) \end{array}$$

由于态射 $p^*\colon M \longrightarrow \mathsf{map}(EC,\ M)$ 是底层非实全局谱之间的全局等价，根据命题 A.13 的稳定类比，左侧水平态射也是实全局等价。因此，右侧竖直态射 $p^*\colon M \longrightarrow \mathsf{map}(EC,\ M)$ 是实全局等价。函子 $\mathbf{\Omega}^\bullet$ 将正交 C-谱中的实全局等价映为正交 C-空间中的实全局等价；并且它与 $\mathsf{map}(EC,\ -)$ 交换。因此，态射

$$\Omega^\bullet(M) \xrightarrow{\Omega^\bullet(p^*)} \Omega^\bullet(\mathrm{map}(EC, M)) \cong \mathrm{map}(EC, \Omega^\bullet M)$$

是实全局等价。命题 A.16 随即表明 $\mathbf{\Omega}^\bullet(M)$ 是余诱导的。 □

构造 B.48。 我们回顾 [24, 构造 6.4.13] 中从交换正交 C-环谱到

$$j\ :\ \mathbf{kr}\ \longrightarrow\ \mathbf{KR}$$

从连通型到 周期实全局 K-理论的态射的构造。它在欧几里得内积空间 V 上的取值是映射

$$j(V)\ :\ \mathbf{kr}(V)\ =\ \mathscr{C}(\mathrm{Sym}(V_{\mathbb{C}}), S^V)\ \longrightarrow\ C^*_{\mathrm{gr}}(s, \mathbb{C}\mathrm{l}(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_V)\ =\ \mathbf{KR}(V)$$

由.....定义

$$j(V)[E_1, \dots, E_n;\, v_1, \dots, v_n](f)\ =\ \sum_{i=1}^{n} f[v_i] \otimes p_{E_i}\ .$$

这里， $f[v_i] = \mathsf{fc}(v_i)(f)$ 是函数演算映射 (B.44)，而 p_{E_i} 是到 $\mathsf{Sym}(V_{\mathbb{C}}) \subset \mathcal{H}_V$ 的子空间 E_i 上的正交投影。在 [24, Construction 6.4.13] 中，我们已经省略了对这些映射确实构成正交环谱态射这一点的详细验证。这里我们将延续这一传统，也不再检查映射 $j(V)$ 是否与复共轭对合相交换。

以下定理将 [24, Theorem 6.4.21] 从全局语境推广到实全局语境；它说明 $\mathbf{U}$ 是一个实全局真无限环空间，其脱环为 $\mathbf{KR}$ 的 σ-悬挂。

定理 B.49. 基点正交 C-空间之间的态射

$$\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma j) \circ \mathrm{eig}\ :\ \mathbf{U}\ \longrightarrow\ \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR})$$

是一个实全局等价，也是一个 C-全局 H-映射。

证明。 根据定理 B.22，正交 C-空间 $\mathbf{U}$ 是余诱导的。正交 C-空间 $\mathbf{\Omega}^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma\mathbf{KR})$ 根据定理 B.47 也是余诱导的。由 [24, Theorem 6.4.21]，态射 $\mathbf{\Omega}^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma j) \circ \mathrm{eig}\colon \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{\Omega}^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR})$ 是底层非实正交空间之间的全局等价。因此，根据命题 A.15，$\mathbf{\Omega}^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma j) \circ \mathrm{eig}$ 是实全局等价。

特征空间态射是一个 C-全局 H-映射，这由命题 B.40 (i) 得出。由于 $\mathbf{\Omega}^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma j)$ 来自正交 C-谱的一个态射，因此复合映射 $\mathbf{\Omega}^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma j) \circ \mathrm{eig}$ 也是一个 C-全局 H-映射。□

现在我们来说明$\mathbf{KR}$ 名副其实：对于每个增广李群 $\alpha\colon G \longrightarrow C$，正交 G-谱 $\alpha^*\mathbf{(KR)}$ 表示 α-等变实 K-理论 KR_α。若增广$\alpha\colon G \longrightarrow C$ 是平凡的，这相当于说整体谱$\mathbf{KU}$的底层 G-谱表示 G-等变复 K-理论，参见 [15, 定理 4.4] 或 [24, 推论 6.4.23]。对于 $G = C$

以单位元增广时，这相当于说$\mathbf{KR}$ 的底层真 C-谱是 Atiyah 实 K 理论谱的一个模型，参见 [12, 命题 6.2]。

构造 B.50. 我们令 $\Theta\colon \mathbf{BUP} \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathbf{KR})$ 为不稳定带基点 C-全局同伦范畴中使下图交换的唯一态射：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{BUP} & \xrightarrow{\qquad\Theta\qquad} & \Omega^\bullet(\mathbf{KR}) \\ {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow{\scriptstyle\sim} & & {\scriptstyle\sim}\big\downarrow{\scriptstyle\Omega^\bullet(\tilde\lambda^\sigma_{\mathbf{KR}})} \\ \Omega^\sigma\mathbf{U} & \xrightarrow[\Omega^\sigma(\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma j)\circ\mathrm{eig})]{\sim} \Omega^\sigma(\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR})) & \xrightarrow[\cong]{} \Omega^\bullet(\Omega^\sigma(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR})) \end{array} \tag{B.51}$$

$\tilde{}$实全局等价 γ 和 $\lambda^\sigma_{\mathbf{KR}}$ 分别在 (B.26) 和 [24, 命题 3.1.25], 中定义，而未命名的同构交换环路坐标。左下方的水平态射是一个实全局等价，由定理 B.49 得出。

定理 B.52.

(i) 态射 $\Theta\colon\ \mathbf{BUP} \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathbf{KR})$ 是实全局等价，且是一个 C-全局 H-映射。(ii) 对于每个增广李群 $\alpha\colon\ G \longrightarrow C$ 以及每个有限 G-CW-复形 A，复合映射

$$KR_\alpha(A) \ \cong_{(\mathrm{B}.10)}\ [A, \mathbf{BUP}]^\alpha \xrightarrow{[A,\Theta]^\alpha} \mathbf{KR}^0_\alpha(A)$$

是环同构。

证明。 (i) 由于定义 Θ 的交换图 (B.51) 中所有其他态射都是实全局等价，因此 Θ 也是如此。对于第二个断言，我们利用态射 $\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma j)\circ\mathrm{eig} : \mathbf{U} \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{KR})$ 是一个 C-全局 H-映射这一点，这由定理 B.49 得出。因此，(B.51) 中下方的水平复合映射也是 C-全局 H-映射。由于 γ 是超交换 C-幺半群的态射，(B.51) 中逆时针方向的复合映射 $\tilde{}$ 也是 C-全局 H-映射。由于 $\Omega^\bullet(\lambda^\sigma_{\mathbf{KR}})$ 源自一个稳定的 C-全局态射，因此它与构造 B.38 中的“稳定 H-空间结构”相容。所以 Θ 是一个 C-全局 H-映射，证毕。

(ii) 由于 Θ 既是实全局等价，也是 C-全局 H-映射，因此诱导的映射 $[A, \Theta]^\alpha$ 是群同构。根据定理 B.12 (iii)，映射 (B.10) 是群同构。因此，只需证明定理陈述中的复合映射也是乘法的，从而是环同构。按照构造，该复合映射分解为

$$KR_\alpha(A) \ \cong_{(\mathrm{B}.10)}\ [A, \mathbf{BUP}]^\alpha \xrightarrow{[A,\vartheta]^\alpha} \mathbf{kr}^0_\alpha(A) \xrightarrow{j_*} \mathbf{KR}^0_\alpha(A)\ ,$$

其中 $\vartheta\colon\ \mathbf{BUP} \longrightarrow \Omega^\bullet(\mathbf{kr})$ 是不稳定带基点 C-整体同伦范畴中使下图交换的唯一态射：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{BUP} & \xrightarrow{\qquad\vartheta\qquad} & \Omega^\bullet(\mathbf{kr}) \\ {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow{\scriptstyle\sim} & & {\scriptstyle\sim}\big\downarrow{\scriptstyle\Omega^\bullet(\tilde\lambda^\sigma_{\mathbf{kr}})} \\ \Omega^\sigma\mathbf{U} & \xrightarrow[\Omega^\sigma\,\mathrm{eig}]{} \Omega^\sigma(\Omega^\bullet(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{kr})) & \xrightarrow[\cong]{} \Omega^\bullet(\Omega^\sigma(\mathrm{sh}^\sigma \mathbf{kr})) \end{array}$$

由于 $j\colon \mathbf{kr} \longrightarrow \mathbf{KR}$ 是超交换 C-环谱的一个态射，所诱导的等变上同调理论映射 $j_*\colon \mathbf{kr}^0_\alpha(A) \longrightarrow \mathbf{KR}^0_\alpha(A)$ 是乘法的。我们断言 $[A, \vartheta]^\alpha \circ$ (B.10): $KR_\alpha(A) \longrightarrow \mathbf{kr}^0_\alpha(A)$ 也是乘法的。如果增广 α 是平凡的，这已在 [24, 定理 6.3.31 (ii)] 中证明。对于满射增广的证明类似，故略去。□

References

[1] M F Atiyah, D O Tall, *Group representations, λ-rings and the J-homomorphism.* Topology 8（1969）, 253–297。[2] M F Atiyah, *K-theory and reality.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 17（1966）, 367–386。[3] M F Atiyah, *Bott periodicity and the index of elliptic operators.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 19（1968）, 113–140。[4] M F Atiyah, G Segal, *Equivariant K-theory and completion.* J. Differential Geometry 3（1969）, 1–18。[5] M Barrero, *Operads in unstable global homotopy theory.* Algebr. Geom. Topol. 23（2023）, 3293–3355。[6] J C Becker, *Characteristic classes and K-theory.* 拓扑学中的代数与几何方法（1973 年纽约州宾厄姆顿代数拓扑中的拓扑方法会议）, 第 132–143 页。数学讲义, 第 428 卷, Springer, 1974。[7] R Boltje, *A canonical Brauer induction formula.* Ast´erisque 第 181–182 号（1990）5, 31–59。[8] R Brauer, *On Artin's L-series with general group characters.* Ann. of Math. (2) 48（1947）, 502–514。[9] M C Crabb, *On the stable splitting of U(n) and ΩU(n)*。代数拓扑, 巴塞罗那, 1986, 35–53, 数学讲义, 第 1298 卷, Springer, 1987。[10] M C Crabb, *Brauer induction and equivariant stable homotopy.* Arch. Math. (Basel) 77（2001）, 469–475。[11] E Dyer, R K Lashof, *Homology of iterated loop spaces.* Amer. J. Math. 84（1962）, 35–88。

[12] *Real spin bordism and orientations of topological K-theory.* arXiv:2405.00963v2 Z Halladay, Y Kamel,
[13] *Restricting the transformation group in equivariant CW complexes.* 27 1990
S Illman, Osaka J. Math. ( ), 191–206。[14] K Iriye, A Kono, *Segal-Becker theorem for K_G-theory.*J. Math. Kyoto Univ. 22（1982/83）, 499–502。[15] M Joachim, *Higher coherences for equivariant K-theory.* 结构化环谱, 87–114, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 315, Cambridge Univ. Press, 2004。[16] R Joshua, P Pelaez, *The motivic Segal-Becker theorem for algebraic K-theory.*Ann. K-理论 7（2022）, 191–221。[17] M Karoubi, *Algèbres de Clifford et K-théorie.* Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4) 1（1968）, 161–270。[18] M Karoubi, *Sur la K-théorie équivariante.* 1970 S´eminaire Heidelberg-Saarbr¨ucken-Strasbourg sur la K-th´eorie（1967/68）187–253。数学讲义, 第 136 卷, Springer, Berlin[19] A Kono, *Segal-Becker theorem for KR-theory.* Japan. J. Math. (N.S.) 7（1981）, 195–199。[20] L G Lewis, Jr., J P May, M Steinberger, *Equivariant stable homotopy theory.* 数学讲义, 第 1213 卷, Springer, 1986。x+538 页。[21] H Miller, *Stable splittings of Stiefel manifolds.* Topology 24（1985）, 411–419。[22] M Nagata, G Nishida, H Toda, *Segal-Becker theorem for KR-theory.*J. Math. Soc. Japan 34（1982）, 15–33。[23] S Schwede, *Equivariant properties of symmetric products.* J. Amer. Math. Soc. 30（2017）, 673–711。[24] S Schwede, *Global homotopy theory.* New Math. Monogr. 34。Cambridge Univ. Press, 2018。xviii+828页。[25] S Schwede, *Global stable splittings of Stiefel manifolds.*Doc. Math. 27（2022）, 789–845。

[26] *Chern classes in equivariant bordism.* 2024 12 7 1 11 S Schwede, Forum Math.
[27] *Equivariant K-theory as a global localization.*
Sigma ( ), 第： e – S Schwede, 准备中。[28] G Segal, *The representation ring of a compact Lie group.* Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 第 34 号（1968）, 113–128。[29] G Segal, *The stable homotopy of complex projective space.*Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 24（1973）, 1–5。[30] G Segal, *K-homology theory and algebraic K-theory. K*-理论与算子代数（1975 年佐治亚州雅典会议论文集）, 第 113–127 页。数学讲义, 第 575 卷, Springer, 1977。[31] V P Snaith, *Algebraic cobordism and K-theory.* Mem. Amer. Math. Soc. 21（1979）, 第 221 号, vii+152 页。[32] V P Snaith, *Localized stable homotopy of some classifying spaces.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 89（1981）, 325–330。[33] V P Snaith, *Explicit Brauer induction.* Invent. Math. 94（1988）, 455–478。[34] P Symonds, *A splitting principle for group representations.* Comment. Math. Helv. 66（1991）, 169–184。

Email address: schwede@math.uni-bonn.de

Mathematisches Institut, Universität Bonn, Germany