arXiv:2603.17852v1 [math.GR] 18 Mar 2026

双曲群中的粗分离与分裂

Oussama Bensaid、Anthony Genevois 和 Romain Tessera

2026年3月19日

摘要

我们从定量角度研究单端双曲群中的粗分离，重点关注分离子集的体积增长。我们证明，非几乎为曲面群的单端双曲群能够被一个次指数增长的子集粗分离，当且仅当它沿一个几乎循环子群分裂。为此，我们证明，足够大的加厚球面很难被割开，也就是说，其割集的大小呈指数增长；这一结果本身也具有独立的研究价值。作为应用，我们为不沿双端子群分裂的单端双曲群的分离剖面建立了一个多项式下界。我们还将这一判据应用于有限群的图乘积，给出此类图乘积能够被次指数增长的子集粗分离的条件的组合刻画。

目录

1 引言 **1**

2 预备知识 **5**

2.1 粗分离与割集.5 2.2 双曲群及其边界.7 2.2.1 格罗莫夫边界.7 2.2.2 单端双曲群中球面的均匀畸变 . . 10 2.2.3 影.12

3 主要定理的证明 14

4 图乘积的应用 16

4.1 图乘积.16 4.2 双曲性.17 4.3 分解.21 4.4 定理 1.10 的证明及例子.22

参考文献 **23**

1 引言

群中的分离现象长期以来一直在几何群论中发挥着核心作用，因为它们往往反映了代数分解的存在。出发点是 Stallings 定理 [Sta71]：一个有限生成群有多个端，当且仅当它沿一个有限子群分裂。等价地，该群的凯莱图可以被一个有限子集分成至少两个深分支，当且仅当该群

2010年 数学主题分类。 主要分类 20F65。次要分类 20F69。关键词。 双曲群、图乘积、分解、粗分离。

沿一个有限子群分裂。从这个意义上说，粗分离性质已经能够检测到非平凡分解，进而揭示一个在拟等距下不变的代数特征。此后，这一理念沿多个方向得到了发展。对这一原理的首次推广由 Dunwoody–Swenson [DS00], 提出，他们将 Stallings 定理中关于子群的部分，从有限子群推广到了有限生成虚多项式群余维一子群。特别地，如果 G 是单端的且不几乎为曲面群，那么 G 沿一个双端子群分裂，当且仅当它包含一个无限循环余维一子群。回顾一下，若某个子群 $H \leq G$的一个拷贝在 G的凯莱图中的某个有限邻域，能将该凯莱图分成至少两个深分支，则称该子群为余维一。后来，Papasoglu [Pap05], 证明了另一项推广，将 Stallings 定理的几何部分中的有限分离集替换为拟直线：他证明，一个不是与曲面群可公度的单端有限表示群，沿一个双端子群分裂，当且仅当它的凯莱图被一条拟直线分离。特别地，存在这样的分解是一种拟等距不变量。本着同样的思路，并沿着[BGT24], 的工作，我们研究由多个子集而非单个子集造成的粗分离。我们从定量角度展开研究，关注分离集的体积增长，而非其拟等距类型。我们证明

定理 1.1。 设 G 是一个双曲群。假设 G 是单端的，且不几乎为曲面群。那么，当且仅当 G 沿一个几乎循环子群分裂时， G 可由一个次指数增长的族粗分离。

关于粗分离和子集族体积增长的定义，请参见第 2.1 节。排除几乎为曲面群的情形是必要的。事实上，几乎为曲面群的群与 $\mathbb{H}^2$ 准等距，因此可由线性增长的子集粗分离，例如加厚测地线。然而，存在一些几乎为曲面群、但不沿双端子群分裂的双曲三角群 [Bow98]。我们还注意到，在双曲情形下，前面的讨论在边界上也有对应：Bowditch [Bow98]证明，沿双端子群的分裂可由边界中的局部割点检测出来。这一观点对于证明至关重要。

粗分离与分裂。 定理 1.1 展示了一种刚性，并证明：对于不是几乎曲面群的单端双曲群，只有当存在一种强形式的代数分离时，才能由一个次指数增长族实现粗分离；具体而言，就是沿一个几乎循环子群分裂。在即将发表的文章 [BGT26], 中，我们将通过证明以下结论，强调右角阿廷群中的一种类似现象：右角阿廷群能由一个次指数增长族粗分离，当且仅当它沿一个阿贝尔子群分裂。因此，很自然会想知道，这一现象在多大程度上普遍存在于有限生成群中。

问题 1.2. 在什么合理的假设下，一个能由次指数增长族粗分离的有限生成群会（几乎）沿一个次指数增长子群分裂?

鉴于定理 1.1 和 [BGT26], ，我们有理由对以下问题给出肯定回答:

问题 1.3. 如果一个相对双曲群能被一个次指数增长族粗分离，它是否会在某个虚拟循环子群上虚拟分裂?

问题 1.4. 如果一个直角 Coxeter 群，或更一般地，一个几乎是紧致特殊群的群，能被一个次指数增长的族粗分离，那么它是否几乎沿一个几乎阿贝尔子群分裂?

问题 1.2 可以分解为两个子问题。首先，可以问几何分离是否能通过某个子群实现。初看之下，没有理由认为粗分离族在任何意义上都接近某个子群。事实上，我们总能扩充一个粗分离族，使它与某个子群尽可能不同。尽管如此，我们可以问：如果一个给定的有限生成 G 能被一个次指数增长的族粗分离，我们能否找到一个次指数增长的余维一子群$H \leq G$ ？ 注意，也可以将余维一子群 $H \leq G$ 定义为这样一个子群：由 G的有限生成集构造出的施莱尔图 Sch(G， H) 是多端的。也可以说， G沿.....半分裂H。

我们的问题有一个退化情形，涉及自身具有次指数增长的有限生成群。我们能否总是在这类群中找到余维一子群？根据 [Sag95、NR98]，有限生成群含有余维一子群，当且仅当它能在某个中位图（或等价地，某个 CAT(0)立方复形）上作用，且轨道无界。若不存在这样的作用，就称该群满足性质（*FW*）。

问题 1.5. 是否存在满足（FW）的中间增长群?

根据 [NR98]，，满足 Kazhdan 性质（T）的群为满足（FW）的群提供了一类例子，事实上几乎是这类例子的唯一来源。但它们在此无济于事，因为次指数增长群是可 amenable 群，而满足（T）的可 amenable 群只有有限群。

我们的第二个子问题涉及一个几十年前曾备受关注的问题：假设一个有限生成群 G 在某个子群 H上半分裂，我们能否找到一个关于 H相关子群的（虚拟）分解 G？ 关于这一一般问题的更多信息，请参阅综述 [Wal03] 。这里，我们关注 H 具有次指数增长的情形。请注意，即使有这一限制，对该问题作出肯定回答也并不现实。例如，已知格里戈尔丘克群含有余维一子群，且这些子群必然具有次指数增长；然而，由于格里戈尔丘克群是挠群，因此不存在任何（虚拟）分解。另一方面，值得一提的是，对于多项式增长（即几乎幂零群），多亏了代数环面定理 [DS00]，这一问题已相当明了（该定理更一般地讨论沿多循环子群的半分裂）。由于多项式增长的情形似乎更为温和，因此自然会提出：

问题 1.6. 一个被多项式增长族粗分离的有限生成群，是否几乎在一个多项式增长子群上分裂?

事实上，鉴于 Stalling 定理关于端数的结论，以及 Papasoglu 定理 [Pap05]关于由拟直线粗分离的结论，提出下述问题甚至更为自然：

问题 1.7. 一个被 n维拟平坦粗分离的有限生成群，是否几乎在一个秩为 n的几乎阿贝尔子群上分裂?

策略。 事实上，我们证明：如果 G 是一个并非几乎为曲面群、且不沿几乎循环子群分裂的单端双曲群，那么存在一个常数 $D \geq 0$ ，使得所有充分大的球面的 D-邻域都“难以切割”，即它们的割集具有一致指数增长。子图的割集定义见第 2.1 节。我们的主要结果如下定理，由此可推出定理 1.1；该定理本身也具有独立意义。

定理 1.8。设 G 是一个并非几乎为曲面群、且不沿任何双端子群分裂的单端双曲群。那么存在 $t_0 \geq 1$，使得对任意 $t \geq t_0$ 以及任意 $\varepsilon \in (0,1)$，都存在常数 $\lambda > 0$ 和 $C > 0$，使得以下结论成立：对于每个 $g \in G$ 以及每个充分大的整数 n，

$$\mathrm{cut}^{\varepsilon}\left(S_G(g,n)^{+t}\right) \geq Ce^{\lambda n}.$$

证明的大致思路如下。首先注意到，由于 G 是单端的，当 t 足够大时，加厚球面 $S_G(g,n)^{+t}$ 是 G 的一个连通子图。设 $Z_n \subset S_G(g,n)^{+t}$ 是一个 ε-割集，并反设 Z_n “很小”。首先证明 $S_G(g,n)^{+t} \setminus Z_n$ 必定包含两个连通分支，其中有点 x_n, y_n 离 Z_n很远。接着，我们借助影从球面转到边界：影 sh(x_n) 和 sh(y_n) 位于 $\partial G \setminus$ sh(Z_n)的不同连通分支中，因此 sh(Z_n) 分离边界。此外，它们离 sh(Z_n)“很远”。随后，我们使用 Lazarovich–Margolis–Mj 的一个结果 [LMM24], ，见定理 2.12；该结果表明，在边界的任意极小闭分隔集中，在所有小尺度上都具有一致稠密性。通过反复应用这一稠密性，我们在 sh(Z_n) 中得到指数多个彼此分离的点。由于这些点彼此分离，我们可以将这个分离点族拉回到 Z_n内部，得到一个彼此分离的点族，从而迫使 Z_n 本身“很大”，矛盾。

定理 1.1 由定理 1.8 和 [BGT24], 的一个结果推出，见定理 2.7。思路如下。首先，加厚球面构成一个持久族，即相邻的两个加厚球面有正比例的交集。因此，如果两个加厚球面被某个子集分隔，那么沿着相邻球面从一个球面移动到另一个球面，就能找到一个加厚球面，使其与分隔子集的交集是一个割集。由定理 1.8 可知，这类割集的大小呈指数增长，因此分隔子集本身也必定呈指数增长。

我们技术的应用。定理 1.8 的一个推论是，这类双曲群的分离剖面有一个多项式下界：

定理 1.9。设 G 是一个非几乎为曲面群的单端双曲群。若 G 不沿任何双端子群分裂，则存在常数 $C > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{sep}_G(n) \geq Cn^{\varepsilon}.$$

关于群的分离剖面的定义，请参见第 2.1 节。我们指出，Hume–Mackay [HM25 最近也用不同的方法得到了这一结果，定理 1.11]：他们没有证明球面难以切割，而是运用 [Mac19] 中的技术来嵌入“足够厚”的圆树。

定理 1.1 的另一项应用涉及有限群的图乘积。关于这一方向，我们的主要结果如下。

定理 1.10。设 Γ 是一个有限的 □-自由图，G 是由 $V(\Gamma)$ 索引的一族有限群。图乘积 ΓG 能被一个具有次指数增长的族粗略分离，当且仅当 Γ 含有一个分离子图，该子图可写成联结 $A * B$，其中 A 是完全图，而 B 要么为空，要么由两个标记为 $\mathbb{Z}_2$ 的不相邻顶点组成。

证明的简要提纲如下。首先，我们准确确定图乘积何时几乎循环或几乎为曲面群。然后，我们根据定义图的分离子图刻画关于几乎循环子群的分裂。最后，我们将这一刻画与定理 1.1 以及几乎循环图乘积的分类相结合，从而得到该定理。

致谢

第一作者感谢 FWO 和比利时法语区科学研究基金会在卓越科学计划（项目 ID40007542）下提供的支持。

2 预备知识

若 (X,d) 是一个度量空间，我们用 $B(x,r)$（分别用 $S(x,r)$）表示半径为 r 的闭球（分别表示球面）：

$$B(x,r) := \{z \in X \mid d(x,z) \le r\}, \qquad S(x,r) := \{z \in X \mid d(x,z) = r\}.$$

若 $A \subseteq X$ 是一个子集，我们用 $|A| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ 表示其基数，用 A^{+r} 表示其 r-邻域：

$$A^{+r} := \{x \in X \mid d(x,A) \le r\}.$$

2.1 粗分离与割集

我们首先回顾 [BGT24] 中的一些定义。由于本文只讨论图，我们将所有定义都限定在图上。我们从粗分离这一核心概念开始。

定义 2.1. 设 X 为一个图，$\mathcal{Z}$ 为一个子图集。若存在 $L \ge 0$，使得对每个$D \ge 0$，都存在某个 $Z \in \mathcal{Z}$，满足 $Y \setminus Z^{+L}$ 至少有两个连通分支，其中的点到 Z的距离为 $\ge D$，则称连通子图 $Y \subset X$ 被粗分离 $\mathcal{Z}$ 分离。我们称 L 为$\mathcal{Z}$的加厚常数 。

定义 2.2. 设 X 为一个有界度图，$\mathcal{S}$ 为 X的一个子图族。我们将其增长定义为

$$V_{\mathcal{S}}(r) := \sup_{s \in Y,\ Y \in \mathcal{S}} |B_X(s,r) \cap Y|.$$

若$\mathcal{S}$ 具有 指数体积增长，则

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log V_{\mathcal{S}}(r) > 0.$$

否则，我们称$\mathcal{S}$ 具有次指数体积增长。我们用 $\mathfrak{M}_{\exp}$ 表示这样一类有界度图：其中任何粗分离子图族都必须具有指数体积增长。

以下关于子图“割集”以及图的分离剖面的定义由 Benjamini–Schramm–Timár [BST12] 提出，用于量化图的连通性。

定义 2.3。 设 X 是一个有界度连通图，并设 $\delta \in (0,\ 1)$。设 $A \subset X$ 是一个有限子图，且 $S \subset A$。若 S 是 A 的一个 δ-割集，则 $A \setminus S$ 的每个连通分支的大小均为 $\le \delta |A|$。我们用 $\mathrm{cut}^{\delta}(A)$ 表示 A 的 δ-割集的最小大小。 X 的分离剖面 是函数

$$\mathrm{sep}_X(n) := \sup\{\, \mathrm{cut}^{\frac{1}{2}}(S) : S \subset X,\ |S| \le n \,\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

在分离剖面的定义中，常数 $1/2$ 可以替换为任意$\delta \in$ （$0,\ 1$），而函数在以下等价关系意义下保持不变：若存在常数 $C \ge 1$，使得两个函数$f,\ g\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$满足

$$\frac{1}{C} g(n) \le f(n) \le C g(n) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

引理 2.4. 设 X 是一个有界度连通图，且 $\delta \in (0,\ 1)$。令 $\delta' = \min(\frac{\delta}{4}, \frac{1-\delta}{4})$。那么，对于任意子集 $E \subset X$ 以及 E 的任意 δ-割集 $S \subset E$，以下情形之一成立

(1) $|S| \geq \delta'|E|$;

(2) $E \setminus S$ 可以划分为

$$E \setminus S = A \sqcup B,$$

其中，A 和 B 各自都是 $E \setminus S$、$|A| \geq \delta'|E|$ 和 $|B| \geq \delta'|E|$ 的连通分支之并。

证明。设 $|S| < \delta'|E|$。令 $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ 为 $E \setminus S$ 的连通分支。那么

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| > (1-\delta')|E|.$$

设这些连通分支按如下方式排列：$|A_i| \geq |A_{i+1}|$。若 $|A_1| \geq \delta'|E|$，则

$$\sum_{i=2}^{n} |A_i| \geq (1-\delta')|E| - \delta|E| \geq \delta'|E|,$$

因为 $|A_1| \leq \delta|E|$。因此我们得到这个划分。否则，令 p 为满足 $\sum_{i=1}^{p} |A_i| \geq \delta'|E|$ 的最小整数。那么 $\sum_{i=1}^{p} |A_i| \leq 2\delta'|E|$。

$$\sum_{i=p+1}^{n} |A_i| \geq (1-\delta')|E| - 2\delta'|E| \geq \delta'|E|,$$

因为 $\delta' \leq \frac{1}{4}$。- □

定义 2.5。设 X 是一个有界度连通图，且设 $r_0 \geq 0$ 和 $\alpha > 0$。由 X 的子图构成的族 $\{A_x(r)\}_{x \in X,\, r \geq r_0}$ 称为 α-持久的，如果对于每个 $r \geq r_0$，以下条件成立：

- 对于所有 $x \in X$，$A_x(r) \subset B_X(x,\ 4r)$;
- 对于所有 $x,\ y \in X$，$|A_x(r)| = |A_y(r)|$;
- 对于每一对相邻顶点 $x,\ y \in X$，$|A_x(r) \cap A_y(r)| \geq \alpha |A(r)|$。

例 2.6。设 X 是一个价为 d 的连通点传递图，并设 $t \geq 1$。对于每个 $x \in X$ 以及每个 $r \geq t$，令

$$A_x(r) := S(x,r)^{+t}.$$

那么族 $\{A_x(r)\}_{x \in X,\, r \geq t}$ 是 α-持久的，其中 $\alpha = |B^{1}(t)|$，见 [BGT24，例 2.14]。

我们以如下结果结束本小节。该结果是 [BGT24，定理 3.5] 的一个特例，并且为持久族的定义提供了动机。

定理 2.7. 设 X 是一个有界度连通图，并设 $\{A_x(r)\}_{x,r}$ 是一个 α-持久族。若存在常数 C，$\beta > 0$，使得对每个 $x \in X$ 以及每个充分大的 r，

$$\mathrm{cut}^{\delta}(A_x(r)) \geq Ce^{\beta r},$$

其中 $\delta = 1 - \frac{\alpha}{2}$，于是 $X \in \mathfrak{M}_{\exp}$。

2.2 双曲群及其边界

2.2.1 格罗莫夫边界

设 G 是一个非初等双曲群，即一个不是几乎循环群的无限双曲群。我们还用 G 表示其关于某个固定有限生成集的凯莱图，并令 δ 为其双曲性常数，也就是说， G 中的每个测地三角形都是 δ-薄的。格罗莫夫边界 ∂G 上存在一个视觉度量 ρ：存在 $a > 1$、 $C \geq 1$ ，使得对于所有 ξ， $\eta \in \partial G$ 以及连接它们的任意双向无限测地线 γ ，都有

$$\frac{1}{C} a^{-d(e,\gamma)} \leq \rho(\xi, \eta) \leq C a^{-d(e,\gamma)}.$$

给定 x， $y \in G$ 和 $\xi \in \partial G$，我们用 $[x, y]$ 表示从 x 到 y的一条测地线段，用$[x, \xi)$表示从 x 到 ξ的一条测地射线。以下命题是标准结果。为完整起见，我们给出证明。

命题 2.8. 存在常数 $C_1, C_2 > 0$ ，使得对于任意 $\xi, \eta \in \partial G$、任意$n \in \mathbb{N}$以及任意 x, $y \in S_n$ ，若存在测地射线 $[e, \xi)$ 和 $[e, \eta)$ 分别经过 x和 y，则有

$$\rho(\xi, \eta) \leq C_2\, a^{-n} a^{\frac{d(x,y)}{2}}. \tag{1}$$

特别地，对于每个 $\omega > 0$,

$$\text{if} \quad \rho(\xi, \eta) \geq \omega \qquad \textit{then} \qquad d(x, y) \geq 2n + 2 \log_a \left(\frac{\omega}{C_2} \right). \tag{2}$$

此外，若 $d(x, y) \geq d_0 := 20\delta + 1$，则

$$C_1\, a^{-n} a^{\frac{d(x,y)}{2}} \leq \rho(\xi, \eta). \tag{3}$$

特别地，如果 $d(x, y) \geq d_0$，那么对于任意延拓$[e, x]$（分别为 $[e, y]$）的 $\xi_x \in \partial G$（分别为 ξ_y），都有 $\rho(\xi_x, \xi_y) > 0$。

证明。对于第一个不等式，请参见 [BGT24，断言 3.19 (i)]。设$d(x, y) \geq 20\delta+1$，并令 $\tilde{\gamma}$为一条端点为 ξ, η的双向无限测地线。（广义）三角形 $[e, \xi] \cup \tilde{\gamma} \cup [e, \eta]$ 是 5δ-薄的，参见 [CDP90，命题 2。2]，因此 $x \in (\tilde{\gamma} \cup [e, \eta])^{+5\delta}$。若 $x \in [e, \eta]^{+5\delta}$，则可得 $d(x, y) \leq 10\delta$。因此 $x \in \tilde{\gamma}^{+5\delta}$，同理可得 $y \in \tilde{\gamma}^{+5\delta}$。令 $x', y' \in \tilde{\gamma}$ 使得

$$d(x, x') \leq 5\delta, \quad d(y, y') \leq 5\delta.$$

设 γ 是从 x 到 y 的测地线段， m 是其中点。设 α 是从 x 到 y' 的测地线段。在测地三角形 $\gamma \cup \alpha \cup [y, y']$ 中，由于 $d(m, y) \geq 10\delta$，因此 $d(m, [y, y']) \geq 5\delta$。所以，存在 $m_1 \in \alpha$ 使得 $d(m, m_1) \leq \delta$。现在考虑测地三角形 $\alpha \cup [x', y'] \cup [x, x']$。我们有 $d(m_1, x) \geq d(m, x) - \delta \geq 9\delta$，所以 $d(m_1, [x, x']) \geq 4\delta$。因此，存在 $m' \in [x', y']$ 使得 $d(m_1, m') \leq \delta$。因此

$$d(m, m') \leq 2\delta.$$

现在考虑测地三角形 $[e, x] \cup \gamma \cup [e, y]$。根据 δ-瘦性，同样有 $m \in ([e, x] \cup [e, y])^{+\delta}$。我们可以假设存在 $z \in [e, x]$ 使得 $d(m, z) \leq \delta$。由于

$$\frac{d(x, y)}{2} = d(x, m) \leq d(x, z) + d(z, m) \leq d(x, z) + \delta,$$

我们得到 $d(x, z) \geq \frac{d(x,y)}{2} - \delta$。因此 $d(e, z) \leq n - \frac{d(x,y)}{2} = \delta$，并且

$$d(e, m) \leq n - \frac{d(x, y)}{2} + 2\delta.$$

最后，我们得到

$$d(e,\tilde{\gamma}) \le d(e,m') \le d(e,m) + d(m,m') \le n - \frac{d(x,y)}{2} + 4\delta.$$

因此，

$$\rho(\xi,\eta) \ge \frac{1}{C} a^{-d(e,\tilde{\gamma})} \ge \frac{1}{C} a^{-(n-\frac{d(x,y)}{2}+4\delta)} = \frac{a^{-4\delta}}{C}\, a^{-n} a^{\frac{d(x,y)}{2}}.$$

设 $C_1 := \frac{a^{-4\delta}}{C}$。 □

根据 [Coo93，定理 7.2]，，存在 $\alpha > 0$ 和 $K \ge 1$，使得对于任意 $g \in G$ 及任意整数 n,

$$\frac{1}{K} e^{\alpha n} \le |B(g,n)| \le K e^{\alpha n}. \tag{4}$$

由于 G 是非初等的，因而是非 amenable 的，所以存在 $K' \ge 1$，使得对于任意 $g \in G$ 及任意整数 n,

$$\frac{1}{K'} e^{\alpha n} \le |S(g,n)| \le K' e^{\alpha n}. \tag{5}$$

为简化记号，设 $B_n := B(e,\ n)$，且 $S_n := S(e,\ n)$。作为引理 2.4 的推论，下一个命题表明，除非加厚球面的一个 ε-割集大小呈指数级增长，否则它必然留下两个连通分支，其中包含距离该割集非常远的点。

命题 2.9。设 G 是一个非初等双曲群，并令 α、K、K' 为 (4) 和 (5) 中给出的常数。令 $\varepsilon \in (0,\ 1)$ 且 $t \ge 1$。那么存在 $\Theta > 0$，使得对于每个整数 n 及每个 ε-割集 $Z_n \subset S_n^{+t}$，以下情形之一成立：

(1) 存在位于 $S_n^{+t} \setminus Z_n$ 的不同连通分支中的 x_n、y_n，使得

$$d(\{x_n, y_n\}, Z_n) > \frac{n}{2};$$

(2) $|Z_n| \ge \Theta e^{\frac{\alpha}{2} n}$。

证明。令 n 为一个整数，并令

$$S_n^{+t} \setminus Z_n = A \sqcup B$$

为 $S_n^{+t} \setminus Z_n$ 的连通分支的一个划分，如引理 2.4 所示。将这些连通分支记为 $A = \sqcup_{i\in I} A_i$ 和 $B = \sqcup_{j\in J} B_j$。如果对任意 $i \in I$ 都有 $A_i \subset Z_n^{+\frac{n}{2}}$，则 $A \subset Z_n^{+\frac{n}{2}}$，且

$$\varepsilon' |S_n^{+t}| \le |A| \le |Z_n| \times \sup_{g\in G} |B(g, n/2)| \le |Z_n| K e^{\alpha \frac{n}{2}},$$

其中 $\varepsilon' = \min(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{1-\varepsilon}{4})$。由于

$$\frac{1}{K'} e^{\alpha n} \le |S_n| \le |S_n^{+t}|,$$

我们得到

$$|Z_n| \ge \Theta e^{\frac{\alpha}{2} n},$$

对于 $\Theta = \frac{\varepsilon'}{KK'}$。否则，令 $i_0 \in I$ 使得 $A_{i_0} \not\subset Z_n^{+\frac{n}{2}}$。如果不满足 (1)，那么对于任意 $j \in J$，$B_j \subset Z_n^{+\frac{n}{2}}$。因此 $B \subset Z_n^{+\frac{n}{2}}$，相同论证再次表明 $|Z_n| \ge \Theta e^{\frac{\alpha}{2} n}$。

□

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 π_n： $G \setminus B_{n-1} \to S_n$ 为如下投影：相对于从 e出发的测地线段 $[e,g]$ 的固定选择，它将 g 关联到 S_n 与 $[e,g]$的交集。

命题 2.10. 设 G 是一个非初等双曲群。

(i) 对于命题 *2.8* 中的 $d_0 > 0$，若 γ_1、γ_2 是从 e 出发的渐近测地射线，则对任意 $t \geq 0$,

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq d_0.$$

(ii) 存在一个常数 $D \geq 0$，使得每条 $g \in G$ 到一条从 e 出发的测地射线的距离至多为 D。

(iii) 对每个 x， $y \in G \setminus B_{n-1}$,

$$d(\pi_n(x), \pi_n(y)) \leq d(x,y) + 2\delta.$$

证明。 部分 (*i*) 直接由 (3) 得出；关于 (*ii*)，参见 [BM91，引理 3.1] 。

(*iii*) 令 $x, y \in G \setminus B_{n-1}$，并令 α 为测地线段 $[x,y]$。考虑测地三角形 $[e,x] \cup \alpha \cup [y,e]$。若 $\pi_n(x) \in [e,y]^{+\delta}$ 或 $\pi_n(y) \in [e,x]^{+\delta}$，则容易验证

$$d(\pi_n(x), \pi_n(y)) \leq 2\delta.$$

否则，令 $x', y' \in \alpha$ 满足 $d(\pi_n(x)\ x') \leq \delta$，且 $d(\pi_n(y)\ y') \leq \delta$。由于 $d(x', y') \leq d(x,y)$，由三角不等式可得结论。 □

命题 2.11. 设 G 是一个非初等双曲群， $d_0 > 0$ 如命题 *2.8* 中所述， $n \in \mathbb{N}$，且 x、$y \in S_n$。则有以下结论。

(i) 若 x 位于某条测地射线 $[e,\xi)$ 上，且 y 位于某条测地射线 $[e,\eta)$上，则任意从 ξ 到 η 的连续路径 $\tilde{\gamma} \subset \partial G$ 都可以回拉为 S_n 中的一条 d_0-路径：存在一列点 $x = x_0$、x_1、…、$x_k = y$，它们属于 S_n，使得对于任意 i，$d(x_i$、$x_{i+1}) \leq d_0$，且 x_i 位于某条测地射线 $[e,\xi_i)$ 上，其中 $\xi_i \in \tilde{\gamma}$。

(ii) 若 G是单端的，令

$$t_0 := 3\max\{D, d_0\},$$

其中， D 是命题 *2.10* 中的常数， d_0 是命题 *2.8* 中的常数。则对任意 $t \geq t_0$ 和 $n \in \mathbb{N}$, S_n^{+t}是连通的。

(iii) 设 $t \geq t_0$。若存在一条长度为 d 的路径，在 $G \setminus B_{n-1}$中从 x 到 y，则存在一条长度为 $\leq (1+2\delta)d$的路径，在S_n^{+t}中从 x 到 y。

证明。 (*i*) 设 $\tilde{\gamma}$: $[0,L] \to \partial G$ 是一条连续路径。由 $\tilde{\gamma}([0,L])$的紧致性，存在一个划分

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = L$$

使得对任意 i,

$$\rho(\tilde{\gamma}(t_i), \tilde{\gamma}(t_{i+1})) < \frac{1}{C_1} a^{-n},$$

其中 C_1 是命题 2.8 中的常数。对每个 i，令 x_i 为从 e 到 $\tilde{\gamma}(t_i)$的测地射线与 S_n的交点。由 (3)，可得

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq d_0.$$

(*ii*) 设 $t \geq t_0$，并设 $n \in \mathbb{N}$。设 $x, y \in S_n^{+t}$。选取 $x', y' \in S_n$，使得

$$d(x,x') \leq t \quad \text{and} \quad d(y,y') \leq t.$$

存在从 e 出发的测地射线 c, c'，以及点 $x'' \in c$, $y'' \in c'$，使得 t

$$d(x', x'') \le D \quad \text{and} \quad d(y', y'') \le D.$$

在前面的不等式中将 D 替换为 $2D$ 后，不妨设 $x'', y'' \in S_n$。由于 $t \ge t_0$，我们有

$$d_0 \le t \quad \text{and} \quad 2D \le t.$$

考虑 ∂G 中从 $c(+\infty)$ 到 $c'(+\infty)$ 的一条路径，并将 (i) 应用于这条路径，可得 S_n 中从 x'' 到 y''的一条 d_0-路径。将这条 d_0-路径的每一步替换为 G中的一条测地线段，并且由于 $d_0 \le t$，可得一条包含于 S_n^{+t}中的路径。最后，添加这些测地线段

$$[x, x'], \quad [x', x''], \quad [y'', y'], \quad [y', y],$$

并且由于 $2D \le t$，这些线段也包含于 S_n^{+t}中。因此，我们得到一条 S_n^{+t}中的路径，从x到 y。

(iii) 设 γ是 $G \setminus B_{n-1}$中一条从 x到 y、长度为 d的路径。根据命题 2.10， $\pi_n(\gamma)$ 是 S_n 中一条从 x 到 y的 $(1+2\delta)$-路径。将这条 $(1+2\delta)$-路径的每一步替换为 G中的一条测地线段，并且由于 $1 + 2\delta \le t_0 \le t$，可得一条包含于 S_n^{+t}中的路径。此外，其长度为 $\le (1+2\delta)d$。

□

我们以引用 Lazarovich–Margolis–Mj [LMM24，命题 4.2 和 4.3]，的一项结果来结束本小节。该结果描述了边界中的极小闭分隔集，并表明它们满足一致稠密性。此结果对于定理 1.8 的证明至关重要。

定理 2.12。设 G 是一个不能沿二端子群分裂的单端双曲群，且 ρ 是 ∂G 上的视觉度量。则存在一个常数$\lambda \in (0,\ 1)$ 使得下述结论成立。若 $Z \subseteq \partial G$ 分离 ∂G，且 ξ_1、$\xi_2 \in \partial G \setminus Z$ 属于 $\partial G \setminus Z$ 的不同连通分支，则存在 Z 的一个极小闭子集（关于包含关系而言） Z'，它分离 ξ_1 和 ξ_2。此外，对于任意$\xi \in Z'$和任意 $0 < r < \rho(\{\xi_1, \xi_2\},\ Z')$,

$$Z' \cap \left(\bar{B}_\rho(\xi, r) \setminus B_\rho(\xi, \lambda r)\right) \ne \emptyset,$$

其中， B_ρ 和 B_ρ 分别表示（$\partial G, \rho$）中的闭球和开球。

2.2.2 单端双曲群中球面的统一畸变

由命题 2.11 可知，对每个 $t \ge t_0$ 和每个 $n \in \mathbb{N}$， S_n^{+t}都是连通的。对于 x， $y \in S_n^{+t}$，我们将 $d_{S_n^{+t}}(x,\ y)$ 定义为 S_n^{+t} 中连接 x 和 y 的最短路径的长度。

本小节旨在证明，族 $(S_n^{+t},\ d_{S_n^{+t}})_{n \in \mathbb{N}}$ 是统一指数畸变的，且与 n 无关：

命题 2.13。设 G 是单端双曲群，且 t_0 如命题 *2.11* 中所述。则对每个 $t \ge t_0$，存在常数 μ_1, μ_2, $A_1, A_2 > 0$，使得下述结论成立。对每个 $n > t$ 以及满足 $d(x, y) \ge 9\delta + 6t$ 的每个 x, $y \in S_n^{+t}$,

$$A_1 e^{\mu_1 d(x,y)} - 2t \le d_{S_n^{+t}}(x, y) \le A_2 e^{\mu_2 d(x,y)}.$$

证明将由以下引理得出。第一个引理是标准结果。

引理 2.14。设 X 是一个 δ-双曲图，其中 $\delta > 0$，并设 $t \ge 0$。那么对每个 $R > t$以及每个 $o, x, y \in X$，只要满足 $x, y \in S(o, R)$，以下结论成立：若$d(x, y) \ge 9\delta + 4t$，则从 x到 y且位于 $B(o, R-t)$补集中的任意路径，其长度均为$\ge 2^{\frac{d(x,y)}{4\delta} - 1}$。

证明。令 $d := d(x,\ y)$，设 α 为一条测地线段 $[x,y]$，并令 m 为其中点。通过考察测地三角形 $[o,x]\cup\alpha\cup[y,o]$ 并利用其 δ-薄性，我们按照命题 2.8 的证明思路证明：

$$d(o,m) \le R - \frac{d}{2} + 2\delta.$$

根据三角不等式，并且由于 $d > 8\delta + 4t$，我们得到

$$B\left(m, \frac{d}{4}\right) \subseteq B(o, R-t).$$

设 γ 是从 x 到 y 的任意一条路径，且包含于 $X\setminus B(o,\ R-t)$ 中。则 γ 避开 $B(m,\ \frac{d}{4})$，结论由 [BH13，第 3 章，命题 1。6] 得出。 □

对于另一个不等式，我们需要用到单端性。在此之前，先回顾如下事实。设 D 为命题 2.10 的常数。在 [BM91], 中，Bestvina–Mess 为 $M > 0$ 引入了如下性质（$\ddagger_M$）。我们称 G 满足性质（$\ddagger_M$），如果存在一个常数 $L > 0$，使得对于每个 $R > 0$ 以及每一对点 $x,\ y \in S_R$，若 $d(x,\ y) \le M$，则存在一条位于 $G\setminus B_{R-D}$ 中、从 x 到 y 且长度至多为 L 的路径。Bestvina–Mess 证明了，如果对于某个 $M > 0$，（$\ddagger_M$）不成立，那么边界必然包含一个割点。然而，Bowditch、Levitt 和 Swarup 后来在 [Bow99、Lev98、Swa96] 中证明，单端双曲群的边界绝不可能包含割点。因此，对于单端双曲群的每个 $M > 0$，（$\ddagger_M$）都成立。作为推论，我们有

引理 2.15。*([HR25，引理 4.1])* 设 G 是一个单端双曲群。存在 $\lambda > 0$，使得下述结论成立。若 c 和 c' 是从 e出发的测地射线，且 α 是在球 B_r的补集中从 c 到 c' 的一条长度至多为 ℓ 的路径，那么存在一条路径 β，它在球B_{r+1}的补集中从 c到 c'，长度至多为 $\lambda\ell$。

因此，可以将 S_n中两点之间的路径向外“推”，从而得到上界。

引理 2.16。设 G 是一个单端双曲群，并且令 t_0 如命题 *2.11* 中所述。存在常数 μ、$C > 0$，使得下述结论成立。对于每个$n \in \mathbb{N}$、每个 $t \ge t_0$以及每个 x、$y \in S_n$，都存在一条从 x 到 y、位于 S_n^{+t}中的路径，其长度为 $\le Ce^{\mu d(x,y)}$。

证明。令 D 为命题 2.10 中的常数，并令 $L > 0$ 使得（$\ddagger_{2D}$）成立。若d（$x,\ y$）$\le 2D$，则性质（$\ddagger_{2D}$）意味着存在一条路径 γ，其长度为 $\le L$，从x 到 y，且位于 B_{n-D}的补集内。通过投影回到 S_n，对于 γ 中离开 S_n^{+t}的任意子路径，根据命题 2.11 的第（iii）项，存在一条从 x到 y 的路径，位于 S_n^{+t}中，长度为$\le L\,(1+2\delta)$。

假设 d（$x,\ y$）$> 2D$，并令 γ为一条测地线段 $[x,y]$。设 $d := d$（$x,\ y$）。则 γ位于 B（$e,\ n-\frac{d}{2}-1$）的补集内。令 $c,\ c'$为从 e发出的测地射线，并取点 $x' \in c$ 和 $y' \in c'$ 使得

$$d(x,x') \le D \quad \text{and} \quad d(y,y') \le D,$$

与命题 2.10 中一样。将前述不等式中的 D 替换为 $3D$ 后，不妨设 $x', y' \in S_n$。因此，存在一条从 x'到 y'的路径 γ'，其长度为 $\le \ell := d + 2L$，且位于 $B(e, n-\frac{d}{2}-1)$的补集中。特别地，γ'是连接 c和c'的路径。因此，在$B(e, n-\frac{d}{2})$的补集中，存在一条连接 c 和 c'、长度为 $\le \lambda\ell$ 的路径，其中 λ是引理 2.15 中的常数。不妨设 $\lambda > 1$。通过

重复这一过程 $\lceil \frac{d}{2} \rceil$ 次，我们得到一条连接 c 和 c'、长度为 $\leq \lambda^{\lceil \frac{d}{2} \rceil} \ell$ 的路径 α，它位于 $B(e, n-1)$ 的补集中。根据命题 2.11 的第（iii）项，将 α 投影到 S_n 上，得到一条从 x' 到 y'、位于 S_n^{+t} 中且长度为 $\leq (1+2\delta)\lambda^{\lceil \frac{d}{2} \rceil} \ell$ 的路径 β。由于 $d(x, x') \leq 3D$、$d(y, y') \leq 3D$，且 $3D \leq t$，因此存在一条在 S_n^{+t} 中连接 x 和 y、长度为 $\leq (1+2\delta)\lambda^{\lceil \frac{d}{2} \rceil}(d+2L)+6D$ 的路径。由于 $\lambda > 1$，存在一个常数 $C \geq 1$，仅依赖于 δ、λ、L 和 D（而不依赖于 n 或 t），使得对每个 $d \geq 0$，

$$(1+2\delta)\,\lambda^{\lceil d/2 \rceil}(d+2L) + 4D \leq Ce^{\mu d},$$

其中 $\mu := \log(\lambda)$。证明至此完成。 □

命题 *2.13* 的证明。 G 是单端的，因此 $\delta > 0$。令 $t \geq t_0$ 为固定值。令 $n > t$ 和 $x, y \in S_n^{+t}$ 满足 $d(x, y) \geq 9\delta + 6t$。令 $x', y' \in S_n$ 满足

$$d(x, x') \leq t \quad \text{and} \quad d(y, y') \leq t.$$

那么 $d(x', y') \geq 9\delta + 4t$。根据引理 2.14，

$$d_{S_n^{+t}}(x', y') \geq 2^{\frac{d(x', y')}{4\delta} - 1}.$$

因此，

$$d_{S_n^{+t}}(x, y) \geq 2^{\frac{d(x,y)-2t}{4\delta} - 1} - 2t.$$

令 $\mu_1 := \log_{4\delta} 2$，并令 $A_1 := 2^{-\frac{t}{2\delta} - 1}$。对于上界，我们有

$$d_{S_n^{+t}}(x', y') \leq Ce^{\mu d(x', y')},$$

其中 $\mu, C > 0$ 是引理 2.16 中的常数。因此，

$$d_{S_n^{+t}}(x, y) \leq d_{S_n^{+t}}(x', y') + 2t \leq Ce^{\mu(d(x,y)+2)} + 2t.$$

令 $A_2 := Ce^{2\mu} + 2t$ 和 $\mu_2 := \mu$。 □

2.2.3 影

在本小节余下部分中，∂G 配备第 2.2.1 节中的视觉度量 ρ，并采用命题 2.8 中的常数 C_1, C_2。

定义 2.17. 若 G 是一个非初等双曲群，令 $t_0 \geq 0$ 取命题 2.11 中的定义。对于 $x \in G$，我们将其影 $\mathrm{sh}(x) \subset \partial G$ 定义为满足以下条件的边界点 ξ 的集合：存在一条经过 $B(x, t_0)$ 的测地射线 $[e, \xi)$。若 $A \subset G$ 是一个子集，则将其影定义为

$$\mathrm{sh}(A) := \bigcup_{a \in A} \mathrm{sh}(a).$$

根据 t_0 的选取，我们有 $t_0 \geq D$，其中 D 是命题 2.10 中的常数。因此，对每个 $x \in G$，都存在 $x' \in B(x, t_0)$，使得测地线段 $[e, x']$ 可以延伸为一条测地射线 $[e, \xi)$。特别地，$\mathrm{sh}(x) \neq \emptyset$。

引理 2.18. 设 G 是一个非初等双曲群，t_0 如命题 *2.11* 中所述，且 $t \geq t_0$。那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$，若 x、$y \in S_n^{+t}$ 和 $d(x, y) \geq 5t_0 + 2t$，则

$$\mathrm{sh}(x) \cap \mathrm{sh}(y) = \emptyset.$$

证明。令 $\xi \in \mathrm{sh}(x)$，并令 $x' \in B(x, t_0)$ 满足 $[e, \xi)$ 延伸 $[e, x']$。令 x'' 为 $[e, \xi)$ 与 S_n 的交集，因此 $d(x, x'') \le 2t_0 + t$。令 $\eta \in \mathrm{sh}(y)$，并以类似方式构造 $y'' \in S_n$。因此 $d(x'', y'') \ge 5t_0 + 2t - 2(2t_0 + t) = t_0$。于是

$$\rho(\xi, \eta) \ge \frac{1}{C_1} a^{-n} > 0,$$

其中 C_1 是命题 2.8 中的常数。 □

度量空间 (X, d) 中的点族 $\{x_i\}_{i \in I}$ 称为 r-分离的，其中$r \ge 0$满足

$$d(x_i, x_j) \ge r$$

对任意不同的 $i, j \in I$。

引理 2.19。设 G 是一个非初等双曲群，且 t_0 如命题 *2.11* 中所述。设 $t \ge t_0$, $n \in \mathbb{N}$, $\omega > 0$，且 $Z \subset S_n^{+t}$是一个子集。若存在 $\{\zeta_i\}_{i \in I}$ 属于$\mathrm{sh}(Z) \subset \partial G$ 的一个 ω-分离族，则存在 $\{z_i\}_{i \in I}$ 属于 Z 的一个 d_ω-分离族，使得

$$d_\omega := 2n + 2\log_a\left(\frac{\omega}{C_2}\right) - 4t_0 - 2t,$$

其中 C_2 是命题 *2.8* 中的常数

证明。对每个 $i \in I$, $\zeta_i \in \mathrm{sh}(Z)$，因此存在 $z_i \in Z$ 和 $z_i' \in B(z_i, t_0)$，使得$[e, z_i']$ 可延伸至 $[e, \zeta_i)$。用球 $B(z_i, 2t_0 + t)$ 替代 $B(z_i, t_0)$ 后，我们可以假设 $z_i' \in S_n$。对每个属于 I 的 $i \ne j$， $\rho(\zeta_i, \zeta_j) \ge \omega$，因此由 (2) 得

$$d(z_i', z_j') \ge 2n + 2\log_a\left(\frac{\omega}{C_2}\right).$$

由于 $d(z_i, z_i') \le 2t_0 + t$，我们得到

$$d(z_i, z_j) \ge 2n + 2\log_a\left(\frac{\omega}{C_2}\right) - 4t_0 - 2t.$$

设 $d_\omega := 2n + 2\log_a\left(\frac{\omega}{C_2}\right) - 4t_0 - 2t$。

□

命题 2.20。设 G 是一个单端双曲群。设 t_0 如命题 *2.11* 中所述，并设 $t \ge t_0$。那么存在一个常数 $\theta > 0$，使得下述结论成立。对于每个 $n \in \mathbb{N}$、每个子集 $Z \subseteq S_n^{+t}$，以及任意一对点 $x, y \in S_n^{+t}$，若它们包含于 $S_n^{+t} \setminus Z$ 的不同连通分支中且满足

$$d(\{x, y\}, Z) \ge \theta,$$

影 $\mathrm{sh}(x)$ 和 $\mathrm{sh}(y)$ 互不相交，且位于$\partial G \setminus \mathrm{sh}(Z)$的不同连通分支中。特别地，$\mathrm{sh}(Z)$ 分离 ∂G。

证明。设 A_1, A_2, μ_1, $\mu_2 > 0$ 是命题 2.13 中的常数。取足够大的 $\theta \ge 10t$，使得

$$2(A_1 e^{\mu_1 \theta} - 2t) > A_2 e^{10t\mu_2}. \tag{6}$$

我们证明该结论对这个 θ 成立。如果 $d(x, Z) \ge \theta$，那么 $d(x, Z) \ge 10t$，并且根据引理 2.18，$\mathrm{sh}(x)$ 与 $\mathrm{sh}(Z)$ 不相交。$\mathrm{sh}(y)$ 与 $\mathrm{sh}(Z)$ 也同样如此。此外， $d(x, Z) \ge \theta$ 意味着

$$d_{S_n^{+t}}(x, Z) \ge A_1 e^{\mu_1 d(x, Z)} - 2t \ge A_1 e^{\mu_1 \theta} - 2t.$$

y 也同样如此。由于 x 和 y 位于 $S_n^{+t}\setminus Z$ 的不同连通分支中，我们得到

$$d_{S_n^{+t}}(x,y)\geq d_{S_n^{+t}}(x,Z)+d_{S_n^{+t}}(y,Z)\geq 2(A_1e^{\mu_1\theta}-2t).$$

因此，根据命题 2.13,

$$d(x,y)\geq \frac{\log\left(\frac{d_{S_n^{+t}}(x,y)}{A_2}\right)}{\mu_2}\geq 7t,$$

其中右侧的不等式由 (6) 得出。因此，根据引理 2.18，sh(x) 和 sh(y) 不相交。

现在假设存在一条从 sh(x) 到 sh(y)、避开 sh(Z) 的路径 $\tilde{\gamma}$ in ∂G 。设 x' （分别为 y'）是 S_n 与一条从 e到 sh(x)（分别为 sh(y)）的测地射线的交点，并设 γ 是由命题 2.11 给出的 $\tilde{\gamma}$ 在 S_n 上的拉回。那么，γ 是 S_n 中一条从 x' 到 y' 、避开 Z^{+t_0}的 d_0-路径，其中 d_0 是命题 2.8 中的常数。然而，由于 $d(x,x')\leq 2t_0+t<\theta$, 点 x 和 x' 属于 $S_n^{+t}\setminus Z$的同一个连通分支，同理， y 和 y' 也属于同一个连通分支。因此， x' 和 y' 属于 $S_n^{+t}\setminus Z$的两个不同连通分支。特别地， S_n^{+t}中每一条从 x' 到 y' 的路径都与 Z 相交，而每一条从 x'到 y' 的 d_0-路径都必须与 Z^{+d_0}相交；尤其是，由于 $t_0\geq d_0$，它必须与 Z^{+t_0} 相交。这与 γ 避开 Z^{+t_0}这一事实矛盾。 □

3 主定理的证明

现在我们准备证明定理 1.8。

定理 *1.8* 的证明。令 $t_0\geq 1$ 如命题 2.11 所述，并令 $t\geq t_0$ 和 $\varepsilon\in(0,1)$。令 $n\in\mathbb{N}$，并令 $Z_n\subset S_n^{+t}$ 为一个 ε-割集。令 Θ 和 α 为命题 2.9 中的常数。

如果命题 2.9 中的情形 (1) 不成立，那么

$$|Z_n|\geq \Theta e^{\frac{\alpha}{2}n}. \tag{7}$$

否则，令 x_n,y_n 属于 $S_n^{+t}\setminus Z_n$ 的不同连通分支，使得

$$d(\{x_n,y_n\},Z_n)>\frac{n}{2}.$$

因此，对于足够大的 n，根据命题 2.20，sh(x_n) 和 sh(y_n) 包含在 sh(Z_n) 的两个不同连通分支中。

令 $\xi_n\in$ sh(x_n)、 $\eta_n\in$ sh(y_n)，且 $\zeta\in$ sh(Z_n)。因此，存在 $z\in Z_n$ 和 $z'\in B(z,\ t_0)$，使得 $[e,z']$ 延伸至 $[e,\zeta)$。用球 $B(z,\ 3t)$ 替代 $B(z,\ t_0)$，我们可以假设 $z'\in S_n$。类似地，令 x_n' 属于 $B(x_n,\ 3t)$，且 $\cap S_n$ 使得 $[e,x_n']$ 延伸至$[e,\xi_n)$。由于 $d(x_n,\ Z_n)>\frac{n}{2}$，

$$\frac{n}{2}\leq d(x_n,z)\leq d(x_n,x_n')+d(x_n',z')+d(z',z)\leq d(x_n',z')+6t.$$

因此，当 n 充分大时， $d(x_n',\ z')\geq\frac{n}{2}-6t$，这大于 d_0 （命题 2.8 中的）。因此，根据命题 2.8,

$$\rho(\xi_n,\zeta)\geq C_1\,a^{-n}\,a^{\frac{n}{2}-6t}=\frac{C_1}{a^{6t}}a^{-\frac{n}{2}}.$$

对于 $\rho(\eta_n,\ \zeta)$ նույնպես成立。于是

$$\rho(\{\xi_n,\eta_n\},\mathrm{sh}(Z_n))\geq\frac{C_1}{a^{6t}}a^{-\frac{n}{2}}.$$

令 $r_0:=\frac{C_1}{a^{6t}}a^{-\frac{n}{2}}$。由 [LMM24，断言4.2和4.3], 见定理 2.12，存在一个关于包含关系的极小闭子集 $Y\subseteq\mathrm{sh}(Z_n)$，它分离 $\xi_n,\ \eta_n$。特别地

$$\rho(\{\xi_n,\eta_n\},Y)\geq r_0.$$

此外，存在一个仅依赖于 $(\partial G,\ \rho)$ 的常数 $\lambda\in(0,\ 1)$，使得对于所有 $\zeta\in Y$ 和 $r\in(0,\ r_0)$，都有

$$Y\cap\left(\bar{B}_\rho(\zeta,r)\setminus B_\rho(\zeta,\lambda r)\right)\neq\emptyset,\tag{8}$$

其中，B_ρ 表示 $(\partial G,\ \rho)$ 中的闭球，而 B_ρ 表示开球。

由于 $\lambda<1$，将其替换为某个 $N\in\mathbb{N}$ 对应的 λ^N 后，我们可假设 $\lambda<\frac{1}{3}$。选取某个 $\zeta_1\in Y$，并固定 $r=\frac{r_0}{2}$。

断言3.1。对于每个 $p\in\mathbb{N}^*$，在 Y 中存在 2^p 个两两 $\lambda^{2p}r$-分离的点。

该断言的证明。我们对 p 使用归纳法。对于 $p=1$，由 (8) 可知，存在

$$\zeta_2\in Y\cap\left(\bar{B}_\rho(\zeta_1,\lambda r)\setminus B_\rho(\zeta_1,\lambda^2 r)\right).$$

因此 $\{\zeta_1,\zeta_2\}$ 是 λ^2r-分离的。

假设我们找到了 2^p 个点$\{\zeta_i\}_{1\leq i\leq 2^p}$，它们位于 Y 中且两两 $\lambda^{2p}r$-分离。注意，由于$\lambda<\frac{1}{3}$，对于任意属于$\{1,\dots,2^p\}$ 的 $i\neq j$，

$$B_\rho(\zeta_i,\lambda^{2p+1}r)\cap B_\rho(\zeta_j,\lambda^{2p+1}r)=\emptyset$$

因为 $2\lambda^{2p+1}r<\lambda^{2p}r\leq\rho(\zeta_i,\zeta_j)$。应用 (8)，对于每个 $i\in\{1,\dots,2^p\}$，存在

$$\zeta_i'\in Y\cap\left(\bar{B}_\rho(\zeta_i,\lambda^{2p+1}r)\setminus B_\rho(\zeta_i,\lambda^{2p+2}r)\right).$$

对于任意 $i\neq j$，$B_\rho(\zeta_i,\lambda^{2p+1}r)\cap B_\rho(\zeta_j,\lambda^{2p+1}r)=\emptyset$，因此

$$\rho(\zeta_i',\zeta_j)\geq\lambda^{2p+1}r>\lambda^{2p+2}r.$$

此外，

$$\begin{aligned}\lambda^{2p}r\leq\rho(\zeta_i,\zeta_j)&\leq\rho(\zeta_i,\zeta_i')+\rho(\zeta_i',\zeta_j')+\rho(\zeta_j',\zeta_j)\\&\leq\lambda^{2p+1}r+\rho(\zeta_i',\zeta_j')+\lambda^{2p+1}r.\end{aligned}$$

因此，

$$\rho(\zeta_i',\zeta_j')\geq\lambda^{2p}r-2\lambda^{2p+1}r=\lambda^{2p}r(1-2\lambda)>\lambda^{2p+2}r,$$

其中右侧不等式成立，因为$\lambda<\frac{1}{3}$。因此，$\{\zeta_i,\zeta_i'\}_{1\leq i\leq 2^p}$ 在 Y 中是 $\lambda^{2(p+1)}r$-分离的。

□

根据引理 2.19，$Y\subset\mathrm{sh}(Z_n)$ 中的每个 $\lambda^{2p}r$-分离族都会在 Z_n 中产生一个 d_p-分离族，其中

$$d_p:=2n+2\log_a\left(\frac{\lambda^{2p}r}{C_2}\right)-4t_0-2t.$$

因此，要在 G 中得到不同的点，应该有 $d_p \geq 1$。由于 $r = \frac{r_0}{2} = \frac{C_1}{2a^{6t}} a^{-\frac{n}{2}}$，我们有

$$\begin{aligned} d_p \geq 1 &\iff 2n + 2\log_a \left(\frac{\lambda^{2p} \frac{C_1}{2a^{6t}} a^{-\frac{n}{2}}}{C_2} \right) - 4t_0 - 2t \geq 1 \\ &\iff p \leq \tau\, n + \Omega, \end{aligned}$$

其中

$$\tau := \frac{1}{4\log_a\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \qquad \text{and} \qquad \Omega := \frac{2\,\log_a\left(\frac{C_1}{2C_2}\right) - 14t - 4t_0 - 1}{4\log_a\left(\frac{1}{\lambda}\right)}.$$

注意，τ 和 Ω 仅取决于 G 和 t，并且 $\tau > 0$，因为 $\lambda < 1$。因此，p可以取为 $p = \lfloor \tau\, n + \Omega \rfloor \geq \tau\, n + \Omega - 1$。所以，$Z_n$ 包含一个至少有 $2^{\Omega-1}2^{\tau n}$个点的族，其中任意两点之间的距离至少为 1。因此

$$|Z_n| \geq 2^{\Omega-1}2^{\tau n}.$$

结合 (7)，我们得出

$$|Z_n| \geq \min\{2^{\Omega-1}2^{\tau n}, \Theta e^{\frac{\alpha}{2}n}\}. \quad \square$$

定理 *1.1* 的证明。 如果 G 沿双端子群 H分裂，那么 G 被 H粗分离。此外，由于 H 几乎循环，且循环子群在双曲群中是非扭曲的，因此 H 是非扭曲的。因此，G被一个线性增长的子集粗分离。

假设 G 不沿双端子群分裂，并令 $t \geq 0$ 如定理 1.8 中所述。由于族 $\{S_G(g,n)^{+t}\}_{g\in G, n\geq t}$ 是持久的（见例 2.6），由定理 2.7 可知，G 无法被任何次指数增长子集族粗分离。

□

4 图乘积的应用

本节旨在证明定理 1.10。我们首先在第 4.1 节回顾与图乘积相关的基本定义和性质。第 4.2 节专门讨论这类群的双曲性。特别地，我们精确确定图乘积何时是虚曲面群。在第 4.3 节，我们研究图乘积的分解，尤其刻画了以虚拟循环群为基的分解。最后，我们在第 4.4 节证明定理 1.10，并在其中提及几个具体例子。

4.1 图乘积

给定一个图 Γ 以及由图 Γ 的顶点索引的群族 $\mathcal{G} = \{G_u \mid u \in V(\Gamma)\}$，图乘积 $\Gamma\mathcal{G}$ 是由相对表示定义的群

$$\langle G_u\ (u \in V(\Gamma)) \mid [G_u, G_v] = 1\ (\{u,v\} \in E(\Gamma))\rangle,$$

其中 $E(\Gamma)$ 表示 Γ 的边集，$[G_u, G_v] = 1$ 是“$[a,b] = 1$ 对所有 $a \in G_u$ 和 $b \in G_v$”的简写。我们将$\mathcal{G}$ 中的群称为顶点群。

通常，人们会说，图乘积介于自由积（当 Γ没有边时，也就是说“没有任何元素交换”）和直和（当 Γ 是完全图时，也就是说“所有元素都交换”）之间。经典例子还包括右角阿廷群（=由无限循环群构成的图乘积）和右角考克斯特群（= 由二阶循环群构成的图乘积）。

约定。 在本文余下部分，我们始终假设图乘积中的顶点群都是非平凡的。

给定一个图 Γ 以及由 $V(\Gamma)$ 索引的群族 $\mathcal{G}$，元素 $g \in \Gamma\mathcal{G}$可以写成乘积 $s_1 \cdots s_n$，其中每个 s_i 都属于一个顶点群。我们将这样的乘积称为一个字，并将其中的每个 s_i 称为一个音节。注意，对于这样的字 $r_1 \cdots r_m$，施行以下操作不会改变它所表示的 $\Gamma\mathcal{G}$ 中的元素：

(C消去) 若存在某个 $1 \leq i \leq m$ 使得 $r_i = 1$，则删去音节 r_i ；

（合并） 若存在某个 $1 \leq i \leq m-1$ 使得 r_i 和 r_{i+1} 属于同一顶点群，则将子字 $r_i r_{i+1}$ 替换为单个音节（$r_i r_{i+1}$）；

（换序） 若存在某个 $1 \leq i \leq m-1$ 使得 r_i 和 r_{i+1} 属于相邻顶点群，则将子字 $r_i r_{i+1}$ 替换为子字 $r_{i+1} r_i$。

如果一个字无法通过施加一系列此类操作而缩短，则称其为图形约化词。

命题 4.1 （[Gre90]）。设 Γ 为一张图，G 为一个由$V(\Gamma)$ 索引的群族。ΓG 的每个元素都可由一个图形约化词表示。此外，任意两个这样的字彼此仅相差一系列换序操作。

下文中，我们将需要一些与图有关的术语，现在加以介绍。

- 两个图的联结 $A * B$ 是由不交并$A \sqcup B$ 得到的图：将 A 的每个顶点与 B的每个顶点之间都连接一条边。
- 给定一个图 Γ 和一个顶点 $u \in V(\Gamma)$， u 在 Γ中的链接 记为 link(u)，是由 u的邻点诱导的 Γ 的子图。
- 给定一个图 Γ 和一个顶点 $u \in V(\Gamma)$， u 在 Γ中的星 记为 star(u)，是由 link(u) $\cup$ $\{u\}$诱导的 Γ 的子图。

最后，给定一个图 Γ、由 $V(\Gamma)$ 索引的群族$\mathcal{G}$ 以及一个子图$\Lambda \leq \Gamma$，我们用$\langle \Lambda \rangle$ </style>表示由的顶点所索引的顶点群生成的G 的子群。注意，如果 Λ 分解为联结 $\Phi * \Psi$，那么$\langle \Lambda \rangle = \langle \Phi \rangle \oplus \langle \Psi \rangle$。

4.2 双曲性

本节聚焦于图乘积的双曲性。首先，我们记录如下刻画：

定理 4.2 ([Mei96]). 设 Γ 是一个有限图，G 是由 $V(\Gamma)$索引的一族有限生成群。图乘积 ΓG 是双曲的，当且仅当满足以下条件：

- G 中的每个群都是双曲的；
- 没有两个无限顶点群在 Γ 中相邻；
- 与同一个无限顶点群相邻的两个顶点群必须彼此相邻；
- 该图 Γ 是 $\square$-自由的。

现在，我们希望确定给定的图乘积何时属于某些特定的双曲群族。

当为虚循环群时。我们首先考虑虚拟循环群族 .

命题 4.3. 设 Γ 是一个有限图，G 是由 $V(\Gamma)$索引的群族。当且仅当以下条件成立时，图乘积 $\Gamma\mathcal{G}$ 几乎循环：

- 或者 Γ 是一个完全图，且其所有顶点都标记为有限群；
- 或者 Γ 是一个完全图，其中一个顶点标记为虚拟无限循环群，其余所有顶点都标记为有限群；
- 或者 Γ 是一个联结，由一个所有顶点都标记为有限群的完全图和两个标记为 $\mathbb{Z}_2$ 的不相邻顶点构成。

我们对该命题的证明将基于以下观察：

引理 4.4. 设 Γ 是一个图，G 是由 $V(\Gamma)$索引的群族，$\Lambda \leq \Gamma$ 是一个子图。当且仅当 $\Gamma = \mathrm{star}(\Lambda)$ 和 $\mathrm{link}(\Lambda)$ 是一个有限完全图，且其所有顶点都标记为有限群时，子群 $\langle\Lambda\rangle$ 在 $\Gamma\mathcal{G}$ 中具有有限指数。

证明。 如果 $\Gamma = \mathrm{star}(\Lambda)$ 且 $\mathrm{link}(\Lambda)$ 是一个有限完全图，其所有顶点都标记为有限群，那么 $\Gamma\mathcal{G} = \langle\Lambda\rangle \oplus \langle\mathrm{link}(\Lambda)\rangle$ 是有限的（因为它是有限多个有限群的乘积）。因此，$\langle\Lambda\rangle$ 在 $\Gamma\mathcal{G}$中具有有限指数。

反过来，假设 Λ 在 ΓG 中具有有限指数。如果 $\Gamma \neq \mathrm{star}(\Lambda)$，那么我们可以找到两个不相邻的顶点 $u \notin V(\mathrm{link}(\Lambda))$ 和 $v \in V(\Lambda)$。取两个非平凡元素 $a \in u$ 和 $b \in v$。注意到对于每个$n \geq 1$，$(ab)^n$ 都不属于 Λ，由此可推得 Λ 在 ΓG 中不可能具有有限指数。因此，必有$\Gamma = \mathrm{star}(\Lambda)$。这意味着 $\Gamma G = \Lambda \oplus \mathrm{link}(\Lambda)$。显然，$\Lambda$ 在 ΓG 中具有有限指数，当且仅当 $\mathrm{link}(\Lambda)$ 是有限的；这又当且仅当 $\mathrm{link}(\Lambda)$ 是一个有限完全图，且其所有顶点都标记为有限群。 □

命题 *4.3* 的证明。将 Γ 分解为联结 $\Gamma_0 * \Gamma_1 * \cdots * \Gamma_n$，其中 Γ_0是完全图（可能为空），而 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ 均不是联结，且每个都至少包含两个顶点。注意，

$$\Gamma\mathcal{G} = \langle\Gamma_0\rangle \oplus \langle\Gamma_1\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\Gamma_n\rangle;$$

并且对于每个 $1 \leq i \leq n$，$\langle\Gamma_i\rangle$ 都是无限的，因为 Γ_i 不是完全图。因此，如果 $n \geq 2$，那么 $\Gamma\mathcal{G}$ 不可能是几乎循环的，因为它包含两个无限群的乘积。同样，如果 $n = 1$ 且 Γ_0 有一个顶点标记着无限群，那么 $\Gamma\mathcal{G}$ 不可能是几乎循环的。因此只剩下两种情况需要考虑。

第一种情况是 $n = 0$。在这种情况下，Γ 是完全图，也就是说，$\Gamma\mathcal{G}$ 是其顶点群的直和。因此，$\Gamma\mathcal{G}$ 几乎循环，当且仅当顶点群全部有限（即 Γ是一个所有顶点都标记着有限群的完全图），或者恰有一个顶点群是虚拟无限循环群，而其余顶点群均有限（即 Γ 是一个完全图，其中一个顶点标记着虚拟无限循环群，其余顶点均标记着有限群）。

第二种情况是 $n = 1$，且 Γ_0 是一个完全图，其所有顶点都标记为有限群。于是，$\Gamma G = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1$，其中 Γ_0 是有限群，因此 ΓG 几乎循环当且仅当 Γ_1 几乎循环。由于 Γ_1 不是完全图且至少包含两个顶点，它必定包含两个不相邻顶点 $u, v \in V(\Gamma_1)$。由于 u, $v \simeq u * v$ 必然几乎循环，标记 u 和 v 的群必须都是 $\mathbb{Z}_2$。于是，u, v 是一个无限二面体群；又由于它在 Γ_1 中的指数有限，由引理 4.4 以及 Γ_1 不是联结这一事实可知，Γ_1 可缩减为这对不相邻顶点 $\{u, v\}$。因此，我们证明了 Γ 是一个联结，其中一部分是有限完全图，且其所有顶点均标记为有限群（即 Γ_0），另一部分是两个标记为 $\mathbb{Z}_2$ 的不相邻顶点（即 u和 v）。

□

当一个曲面群。接下来，我们想确定图乘积何时几乎为曲面群。这里，我们将曲面群称为亏格为 ≥ 2 的闭曲面的基本群。

命题 4.5. 设 Γ 是一个有限图，G 是由 $V(\Gamma)$ 索引的群族。当且仅当满足以下条件时，图乘积 ΓG 几乎为曲面群：

- 或者 Γ 是一个完全图，其中一个顶点标记为虚曲面群，其余顶点均标记为有限群；
- 或者 Γ 分解为一个联结，其中一部分是所有顶点均标记为有限群的完全图，另一部分是长度为 ≥ 5 的圈，且其所有顶点均标记为 $\mathbb{Z}_2$。

在转向证明我们的刻画之前，我们先观察到：

命题 4.6. 设 Γ 是一个有限图，G、H 是由 $V(\Gamma)$ 索引的两个有限生成群族。若对每个 $u \in V(\Gamma)$ 都存在双*Lipschitz*嵌入 $\iota_u \colon G_u \hookrightarrow H_u$，则存在双*Lipschitz*嵌入 $\Gamma G \to \Gamma H$。

我们的命题的证明将基于以下技术引理：

引理 4.7. 设 Γ 是一个图，G 是由 $V(\Gamma)$ 索引的群族。任意两个元素 x、$y \in \Gamma G$ 分别可以表示为图约化词 $pa_1 \cdots a_n r$ 和 $pb_1 \cdots b_n s$，使得 $s^{-1}(a_1 b_1^{-1}) \cdots (a_n b_n^{-1}) r$ 是表示 $y^{-1}x$ 的图约化词。

证明。 我们利用 [Gen17] 给出的几何视角来证明引理。由 [Gen17，命题 8.2] 可知，凯莱图

$$\mathrm{QM}(\Gamma, \mathcal{G}) := \mathrm{Cayl}\left(\Gamma\mathcal{G}, \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G\right)$$

是拟中位的，因此由 [Gen17，命题 2.84] 可知，存在一个等边三角形 p，pq_x，$pq_y \in \Gamma\mathcal{G}$，使得下列等式

$$\begin{cases} d(1,x) = d(1,p) + d(p,pq_x) + d(pq_x,x) \\ d(1,y) = d(1,p) + d(p,pq_y) + d(pq_y,y) \\ d(x,y) = d(x,pq_x) + d(pq_x,pq_y) + d(pq_y,y) \end{cases}$$

在 QM(Γ, G) 中成立。由于 QM(Γ, G) 中的测地线由图约化词给出[Gen17，引理 8.3]，，第一个（分别为第二个）等式表明 x （分别为 y）可以写成图约化词 $pq_x r$ （分别为 $pq_y s$）。接着，第三个等式表明 $y^{-1}x$ 可以写成图约化词 $s^{-1}qr$，其中 q 是表示 $q_y^{-1}q_x$ 的图约化词。但由 [Gen17，命题 8.2 和推论 8.7] 可知， q_x 和 q_y 属于某个完全子图 $\Lambda \leq \Gamma$ 所对应的 Λ，因此我们可以分别将 q_x 和 q_y 写成由两两可交换的音节组成的图约化词 $a_1 \cdots a_n$ 和 $b_1 \cdots b_m$。注意，由于三角形 p、pq_x、pq_y 是等边的，$n = m$ 和 $(b_1^{-1}a_1) \cdots (b_n^{-1}a_n)$ 必然是图约化的。所需结论由此得证。

□

命题 *4.6* 的证明。为方便起见，令 $\iota \colon \bigcup\mathcal{G} \to \bigcup\mathcal{H}$ 表示在每个 G_u 上限制为 ι_u 的映射。给定一个元素 $g \in \Gamma\mathcal{F}$，我们将 g 写成图形约化词 $s_1 \cdots s_n$，并定义 $\Phi(g) := \iota(s_1) \cdots \iota(s_n)$。注意，由命题 4.1 可知， $\Phi(g)$ 所定义的 $\Gamma\mathcal{H}$ 中的元素不依赖于所选

表示 g 的图形约化词。我们声称映射 $\Phi : \Gamma\mathcal{G} \to \Gamma\mathcal{H}$ 是一个双Lipschitz嵌入。

因此，设 $x, y \in \Gamma\mathcal{G}$ 为两个元素。根据引理 4.7，分别将 x 和 y 写成图形约化词 $pa_1 \cdots a_n r$ 和 $pb_1 \cdots b_n s$。令 $r_1 \dots r_k$（分别为 $s_1 \cdots s_\ell$）表示一个表示 r（分别为 s）的图形约化词。一方面，

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\ell} \|s_i\| + \sum_{i=1}^{n} \|b_i^{-1} a_i\| + \sum_{i=1}^{k} \|r_i\|,$$

其中，$\|\cdot\|$ 表示所考虑音节在包含它的顶点群中的词长。另一方面，

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) = \sum_{i=1}^{\ell} \|\iota(s_i)\| + \sum_{i=1}^{n} \|\iota(b_i)^{-1} \iota(a_i)\| + \sum_{i=1}^{k} \|\iota(r_i)\|,$$

因此

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \geq \frac{1}{L} \left(\sum_{i=1}^{\ell} \|s_i\| + \sum_{i=1}^{n} \|b_i^{-1} a_i\| + \sum_{i=1}^{k} \|r_i\| \right) = \frac{1}{L} d(x, y)$$

and

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq L \left(\sum_{i=1}^{\ell} \|s_i\| + \sum_{i=1}^{n} \|b_i^{-1} a_i\| + \sum_{i=1}^{k} \|r_i\| \right) = L d(x, y),$$

其中 $L > 0$ 是一个常数，使得每个 ι_u 都是 L-双利普希茨的。 □

命题 4.5 的证明。将 Γ 分解为联结 $\Gamma_0 * \Gamma_1 * \cdots * \Gamma_n$，其中 Γ_0 是一个完全图，而 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ 均不是联结，且各自至少含有两个顶点。注意，对每个 $1 \leq i \leq n$，Γ_i 都是无限群，因为 Γ_i 不是完全图且含有至少两个顶点。因此，若 $n \geq 2$，则 $\Gamma\mathcal{G}$ 含有两个无限群的乘积，因而不是双曲的（更不可能是虚曲面群）。若 $n = 0$，则 $\Gamma = \Gamma_0$ 是完全图，且 $\Gamma\mathcal{G}$ 与其顶点群的乘积相同。要成为虚曲面群，由于虚曲面群（更一般地，任何双曲群）都不含有两个无限群的乘积，Γ 中必须恰有一个顶点标记为虚曲面群，其余所有顶点都必须标记为有限群。接下来考虑情形 $n = 1$。由于 $\Gamma\mathcal{G} = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1$，且 Γ_1 是无限群，因此 Γ_0 必须是有限群，也就是说，Γ_0 的所有顶点都必须标记为有限群。注意，此时 $\Gamma\mathcal{G}$ 是虚曲面群，当且仅当 Γ_1 几乎为曲面群。

因此，为了完成命题的证明，还需验证：若 Γ 不是联结且至少包含两个顶点，则当且仅当 Γ 是一个长度为 ≥ 5、所有顶点均标记为 $\mathbb{Z}_2$ 的圈时，$\Gamma\mathcal{G}$ 是虚曲面群。

若 Γ 是弦图，即不含长度为 ≥ 4 的诱导圈，那么根据 [Dir61]，我们知道它含有一个分离完全子图，记作 $\Lambda \leq \Gamma$。我们选取顶点数最少的 Λ。如果 Λ 的所有顶点都标记为有限群，那么 $\Gamma\mathcal{G}$ 沿有限子群分裂（即 Λ），这意味着 $\Gamma\mathcal{G}$ 有多个端，因此不是虚曲面群。所以存在 $u \in V(\Lambda)$，使得 u 是无限的。若 link(u) 不是完全子图，即存在两个不相邻顶点 v、w，它们都与 u 相邻，那么 $\Gamma\mathcal{G}$ 不可能是双曲的（因而更不可能是虚曲面群），因为它包含两个无限群的乘积，即 $u, v, w \simeq u \oplus (v * w)$。因此 link($u$) 必须是完全子图。但这样一来，$\Lambda \backslash \{u\}$ 也必须分离 Γ，这与 Λ 的极小性矛盾。因此，我们证明了 Γ 不可能是弦图。

换句话说，Γ 必须包含一个长度为 ≥ 4 的圈。如果 Γ 中的 (r, s, t, u) 是一个长度为 4 的圈，那么 $\Gamma\mathcal{G}$ 就不可能是双曲的（更不可能是虚曲面群），因为

它包含两个无限群的乘积，即 $\langle r,\ s,\ t,\ u\rangle = (\langle r\rangle * \langle t\rangle) \oplus (\langle s\rangle * \langle u\rangle)$。因此， Γ 必须包含一个长度为 ≥ 5 的圈 Ξ 。

首先，假设 Ξ 的所有顶点都标记为 $\mathbb{Z}_2$。那么，$\langle \Xi\rangle$ 是一个虚曲面群。由于曲面群的无限指数子群是自由群，因此 $\Gamma\mathcal{G}$ 是虚曲面群，当且仅当 $\langle \Xi\rangle$ 在 $\Gamma\mathcal{G}$中具有有限指数。根据引理 4.4，并且由于 Γ 不是联结，这相当于说 $\Gamma = \Xi$。换言之， Γ 是一个长度为 ≥ 5 的圈，其所有顶点都标记为 $\mathbb{Z}_2$。

接下来，假设 Ξ 至少有一个顶点标记为大小为 $\geq$ 3的群。由命题 4.6 可知，存在一个拟等距嵌入 $\Xi\mathcal{H} \to \Gamma\mathcal{G}$，其中 $\mathcal{H}$ 是一个由一个 $\mathbb{Z}_3$ 和若干其他群构成的集合，且这些其他群都是 $\mathbb{Z}_2$。为了完成本命题的证明，我们需要验证 $\Gamma\mathcal{G}$ 不是虚曲面群，这可由以下观察得出：

断言 4.8。 群 ΞH 是一个单端双曲群，并且它不几乎为曲面群。

由定理 4.2 和 [Var20]（另见下文的推论 4.10）可知， $\Xi\mathcal{H}$ 是一个单端双曲群。由 [Kim12, 引理 21] 可知， $\Xi\mathcal{H}$ 包含一个子群，它同构于循环群的图乘积 Θ(2)（即一个直角 Coxeter 群），其中 Θ 是三条长度为（length(Ξ) $-$ 2）的路径沿其端点粘合而成的并集。这三条路径中的两条构成一个长度为 2(length(Ξ) $-$ 2) ≥ 6 的圈 Ω。因此，Θ(2) 包含一个虚拟曲面子群，即 $\langle\Omega\rangle$；根据引理 4.4，该子群具有无限指数。由于曲面群中的无限指数子群都是自由群，因此 Θ(2)，进而 $\Xi\mathcal{H}$，都不是虚曲面群。

□

4.3 分裂

证明定理 1.10 的最后一步，是弄清有限群的图乘积何时沿几乎循环群分裂。我们的刻画将从下一个观察得出，该观察遵循 [GH17] 的思路。给定一个群 G 和一个子群族 $\mathcal{H}$，我们将相对于 G $\mathcal{H}$ 的分解称为G 的分解，其中 $\mathcal{H}$ 中的每个子群都在相应的 Bass-Serre 树中是椭圆的（等价地说，它包含在分解中某个因子的一个共轭元中）。

命题 4.9. 设 Γ 是一个有限图，G 是由 $V(\Gamma)$ 索引的群族，且 $H \leq \Gamma G$ 是一个子群。若 ΓG 相对于 G 沿 H 分裂，则存在一个分离子图 $\Lambda \leq \Gamma$ ，使得 $\langle\Lambda\rangle$ 的一个共轭元包含于 H 中。

证明。我们知道， ΓG 在某棵树 T 上非平凡地作用，其边稳定子与 H 共轭，且顶点群为椭圆群；这棵树就是由我们的分解给出的 Bass-Serre 树。对每个顶点 $u \in V(\Gamma)$, 考虑非空子树 $T_u := \mathrm{Fix}(u)$。若这些 T_u 两两相交，则它们必定有公共交点。换言之，我们找到一个被 ΓG 整体固定的点，但我们知道事实并非如此。因此，存在$u, v \in V(\Gamma)$, 使得 $T_u \cap T_v = \emptyset$。取连接 T_u 与 T_v 的测地线上的一条边 e，并令 Λ 表示 Γ 中由满足 w 固定e（等价地， $e \in E(T_w)$）的顶点 $w \in V(\Gamma)$ 所诱导的子图。由于 $T_a \cap T_b \neq \emptyset$，若 $a, b \in V(\Gamma)$ 相邻，则必有Λ是一个非空子图，它在 Γ 中分离 u 与 v。由于 Λ 包含于 stab(e) 中，而后者与 H 共轭，所需结论即得。

□

推论 4.10。 设 Γ 是一个有限图，G 是一族由 $V(\Gamma)$ 索引的有限群。图乘积 ΓG

- 沿有限子群分裂，即具有多端，当且仅当 Γ包含一个分离的完全图；

- 沿几乎循环子群分裂，当且仅当它包含一个分离子图，该子图是 $A*B$ 与一个完全图和 A 一个图 B 的联结，其中后者要么为空，要么由两个标记为 $\mathbb{Z}_2$ 的不相邻顶点组成。

证明。 如果 $\Gamma\mathcal{G}$ 沿有限子群分裂，那么由命题 4.9 可知， Γ 包含一个分离子图 Λ ，使得 $\langle\Lambda\rangle$ 是有限的。必然， Λ 是一个完全子图，且其所有顶点都标记为有限群。反过来，显然，如果我们知道 Γ 包含这样一个子图，那么 $\Gamma\mathcal{G}$ 沿有限子群分裂。

如果 $\Gamma\mathcal{G}$ 沿虚循环群分裂，那么由命题 4.9 可知， Γ 包含一个分离子图 Λ ，使得 $\langle\Lambda\rangle$ 是虚循环的。根据命题 4.3， Λ 要么是一个完全图，且其所有顶点都标记为有限群；要么是一个完全图与两个标记为 $\mathbb{Z}_2$ 的不相邻顶点之间的联结，其中该完全图的所有顶点都标记为有限群。反过来，显然，如果我们知道 Γ 包含这样一个子图，那么 $\Gamma\mathcal{G}$ 沿几乎循环子群分裂。 □

4.4 定理 1.10 的证明与例子

我们终于可以证明关于有限群的双曲图乘积的主要结果了。

定理 *1.10* 的证明。 如果 Γ 含有一个分离子图 $\Lambda = \Lambda_1 * \Lambda_2$ ，其中 Λ_1 是完全图，且其所有顶点都标记为有限群，而 Λ_2 则为空或由两个不相邻顶点组成，且这两个顶点都标记为 $\mathbb{Z}_2$，那么 $\Gamma\mathcal{G}$ 沿 $\langle\Lambda\rangle$ 分裂，且该群几乎循环。这意味着 $\Gamma\mathcal{G}$ 可以被一个次指数增长的族粗分离。

反过来，假设 $\Gamma\mathcal{G}$ 可以被一个次指数增长的族粗分离。注意，根据定理 4.2，我们知道 $\Gamma\mathcal{G}$ 是双曲的。此外，推论 4.10 表明， $\Gamma\mathcal{G}$ 是多端的，当且仅当 Γ 含有一个分离子图，且其所有顶点都标记为有限群；命题 4.5 表明， $\Gamma\mathcal{G}$ 几乎为曲面群，当且仅当 Γ 可分解为一个联结，其中一侧是所有顶点均标记为有限群的完全图，另一侧是长度为 ≥ 5 的圈，且其所有顶点都标记为 $\mathbb{Z}_2$。在后一种情况下，注意 Γ 含有一个分离子图，该子图是一个联结，其中一侧是所有顶点均标记为有限群的完全图，另一侧是两个标记为 $\mathbb{Z}_2$ 的不相邻顶点。

从现在起，假设 $\Gamma\mathcal{G}$ 是单端的，且不几乎为曲面群。于是，根据定理 1.1，我们知道 $\Gamma\mathcal{G}$ 沿一个虚循环群分裂。所需结论由推论 4.10 给出。 □

我们以几个具体例子结束本节。首先，作为定理 1.10 的直接推论：

推论 4.11。 设 Γ 是一个有限的 □-自由图。右角 *Coxeter* 群 $C(\Gamma)$ 可由一个次指数增长的族粗分离，当且仅当 Γ 包含一个分离子图 $A*B$ ，其中 A 是完全的，且 B 或者是完全的，或者由一对不相邻顶点组成。

我们的下一个例子将在即将发表的工作 [BGT26], 中发挥重要作用；该工作专门研究右角阿廷群中的粗分离。它们还包括所谓的 Bourdon 群，从而扩展了我们之前的结果 [BGT24，定理 1.3]。

例 4.12. 设 Γ 是一个长度为 ≥ 5 的圈，且 $\mathcal{G}$ 是由 $V(\Gamma)$ 索引的有限群族。图乘积 $\Gamma\mathcal{G}$ 可由一个次指数增长的族粗分离，当且仅当 Γ 中存在两个不相邻顶点，且它们都标记为 $\mathbb{Z}_2$。

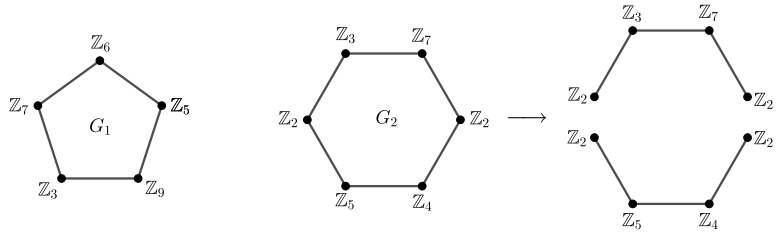

图1：例4.13中的两个图乘积。

最后，让我们说明，定理 1.10 可在确定有限生成群之间是否存在粗嵌入这一问题上有具体应用。

例4.13。 令 G_1 和 G_2 为图1所示的两个图乘积。不存在粗嵌入 $G_1 \to G_2$。事实上，如图所示， G_2 可分解为两个较小图乘积沿一个无限二面体群的 amalgamated积；根据 [LS07]，它们几乎自由。由于 G_1不能被一个次指数增长的族粗分离，因此由[BGT24, 定理4.1] 可知，每个粗嵌入 $G_1 \to G_2$ 的像都必须包含在这些几乎自由因子之一的某个邻域内，这将意味着 G_1 是一个拟树。

参考文献

[BGT24] O. Bensaid、A. Genevois 和 R. Tessera。《花环积的粗分离与大尺度几何》。arxiv:2401.18025，2024年。[BGT26] O. Bensaid、A. Genevois 和 R. Tessera。《直角阿廷群中的粗分离与分裂》。预印本，2026。[BH13] Martin R Bridson 和 André Haefliger。《非正曲率度量空间》，第319卷。施普林格科学与商业媒体，2013年。[BM91] Mladen Bestvina 和 Geoffrey Mess。《负曲率群的边界》。《美国数学会杂志》，4(3):469–481，1991年。[Bow98] Brian H. Bowditch。《双曲群的割点与典范分裂》。《数学学报》，180(2):145–186，1998年。[Bow99] B. H. Bowditch。《由连续统与收敛群产生的类树结构》，《美国数学会回忆录》第139卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999年。[BST12] Itai Benjamini、Oded Schramm 和 Ádám Timár。《无限图的分离剖面》。《群、几何与动力学》，6(4):639–658，2012年。[CDP90] Michel Coornaert、Thomas Delzant 和 Athanase Papadopoulos。《几何与群论：格罗莫夫双曲群》，《数学讲义》第1441卷。施普林格，柏林，1990年。[Coo93] Michel Coornaert。《格罗莫夫意义下双曲空间边界上的帕特森–沙利文测度》。《太平洋数学杂志》，159(2):241–270，1993年。[Dir61] G. Dirac。《刚性回路图》。《汉堡大学数学研讨班报告》，25:71–76，1961年。[DS00] M. Dunwoody 和 E. Swenson。《代数环面定理》。《数学创刊》，140(3):605–637，2000年。[Gen17] A. Genevois。《拟中位图的立方体类几何及其在几何群论中的应用》。博士论文，艾克斯-马赛大学，arxiv:1712.01618，2017年。[GH17] D. Groves 和 M. Hull。《右角阿廷群的阿贝尔分裂》。载于《双曲几何与几何群论》，《纯数学高级研究》第73卷，第159–165页。日本数学会，东京，2017年。

[Gre90] Elisabeth Ruth Green。《群的图积》。博士论文，利兹大学，1990年。[HM25] David Hume 和 John M. Mackay。《连接共形维数与庞加莱剖面》。预印本，arXiv:2511.10469 [math.GR] (2025)，2025年。[HR25] G. Christopher Hruska 和 Kim Ruane。《双曲群与局部连通性》。载于《群的端与边界》。为纪念 Michael Mihalik 70 岁生日而举办的美国数学会特别专题会议，辛辛那提大学，美国俄亥俄州辛辛那提，2023年4月15日至16日，第283–296页。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学会（AMS），2025年。[Kim12] S.-H. Kim。《群图积的曲面子群》。《国际代数与计算杂志》，22(8):1240003，20页，2012年。[Lev98] Gilbert Levitt。《实树上的非嵌套作用》。《伦敦数学会通报》，30(1):46–54，1998年。[LMM24] Nir Lazarovich、Alex Margolis 和 Mahan Mj。《交换化双曲子群》。《美国数学会汇刊》，377(10):7377–7402，2024。[LS07] M. Lohrey 和 G. Sénizergues。《群的图积何时是虚自由的？》。《代数通讯》，35(2):617–621，2007年。[Mac19] J. Mackay。《共形维数大于一的空间与群》。《杜克数学杂志》，153(2):211–227，2019年。[Mei96] J. Meier。《双曲群的图积何时是双曲的？》。《几何专题》，61(1):29–41，1996年。[NR98] G. Niblo 和 M. Roller。《作用于立方体的群与 Kazhdan 性质（T）》。《美国数学会会刊》，126(3):693–699，1998年。[Pap05] P. Papasoglu。《群分裂的拟等距不变性》。《数学年刊》，161(2):759–830，2005年。[Sag95] M. Sageev。《群对的端与非正曲率立方复形》。《伦敦数学会会刊》，71(3):585–617，1995年。[Sta71] John R. Stallings。《群论与三维流形》，《耶鲁数学专著》第4卷。耶鲁大学出版社，纽黑文、伦敦，1971年。该书为 James K. Whittemore 数学讲座，1969年在耶鲁大学开讲。[Swa96] G. A. Swarup。《关于割点猜想》。《美国数学会电子研究通报》，2(2):98–100，1996年。[Var20] O. Varghese。《关于群图积的端数》。《代数通讯》，48(6):2418–2427，2020年。[Wal03] C. Wall。《抽象群及其分裂的几何》。《马德里康普顿斯数学评论》，16(1):5–101，2003年。

鲁汶大学 数学与物理研究所 回旋加速器路2号 1348 新鲁汶
（比利时）电子邮件地址： oussama.bensaid@uclouvain.be

蒙彼利埃大学 亚历山大·格罗滕迪克数学研究所 欧仁·巴塔
永广场 34090 蒙彼利埃（法国）电子邮件地址：
anthony.genevois@umontpellier.fr

巴黎西岱大学 朱西厄-巴黎左岸数学研究所 奥雷莉·内穆尔广场
75013 巴黎（法国）电子邮件地址： romain.tessera@imj-prg.fr