arXiv:2603.17853v1 [math.AT] 18 Mar 2026

双侧全局谱与温和上同调

William Balderrama*、Jack Morgan Davies† 和 Sil Linskens‡

2026年3月19日

摘要

我们引入全局等变谱的推广形式，用以编码配备额外转移的全局等变上同调理论，例如等变拓扑 K-理论中出现的降维映射。我们称之为 Q-双向全局谱，其中 Q 是一个参数，用来编码允许哪些额外转移。

作为主要示例，我们证明，由 Lurie 构造、与一个定向$\mathbf{P}$-可除群相关联的温和上同调理论，可由一个-双向全局$\mathbf{E}_\infty$ 环谱表示；它编码了沿全局空间之间所有相对 π-有限映射的转移。我们通过一种一般的参数化去分类化过程建立这一结果；该过程或许本身也具有独立意义，它能从适当的稳定 ∞-范畴的全局族构造 Q-双向全局谱。通过允许 Q 变化，我们能够连贯地编码这样一个事实：定向$\mathbf{P}$-可除群之间的不可逆态射会诱导温和理论之间的映射，而这些映射只与某些转移相容。

借助这些 π 双向增强，我们探究温和理论作为等变稳定同伦类型的基本性质。我们为任意 π 有限空间 F 构造了一个性质良好的 F-整体同调理论，并使其具有良好的基变换性质。取有限群 H 的 $F=\mathbf{B}H$，即可得到温和理论的几何不动点的一般基变换结果。利用这一结果，我们计算温和理论的 H 几何不动点，证明它们在 H 非阿贝尔时消失，而在 H 为阿贝尔时具有简单的代数几何模型，并呈现出可识别的蓝移性质。

目录

1 引言 **2**1.1 温和上同调理论作为 π-双侧全局谱 . . . . . 4 1.2 函子性作为 Q-双向全局谱. 5 1.3 参数化范畴论与温和局部系统.8 1.4 温和同调与几何不动点.10

*williamb@math.uni-bonn.de
†davies@uni-wuppertal.de
‡sil.linskens@mathematiks.uni-regensburg.de

2 双伴全局谱 1 **4**
2.1 Q-交换幺半群.14 2.2 作为对称幺半范畴.19 2.3 与双侧$\mathbf{E}_\infty$ 环相关的同调理论 24

3 参数化范畴论与去范畴化 27
3.1 半加性稳定参数化范畴.28 3.2 对称幺半参数化范畴.30 3.3 对称幺半参数化范畴的解直化 33 3.4 参数化稳定范畴的整体截面.39 3.5 去范畴化.41

4 温和局部系统与参数化稳定性 4 **4**
4.1 关于$\mathbf{P}$-可除群与温和局部系统的回顾 . . . . . 44 4.2 温和局部系统的函子性.48 4.3 远离素数集的相对 π-有限态射 52 4.4 远离素数的态射刻画.56 4.5 温和局部系统的参数化正合性.63 4.6 向层叠推广.69

5 $\mathbf{Eq}$温和上同调的等变同伦论 70
5.1 温和上同调作为一个 π-双伴随谱.71 5.2 定向$\mathbf{P}$-可除群的结构层.76 5.3 温和（上）同调与基变换.79 5.4 几何不动点.82 5.5 阿贝尔几何不动点.84

参考文献 **93**

1 引言

设 G 是一个有限群。Atiyah 和 Segal [Seg68, AS69] 引入了紧 G-空间 X 的 G-等变复 K-理论：

$$KU_G^0(X) = \left\{ \begin{array}{c} G\text{-equivariant vector} \\ \text{bundles over } X \end{array} \right\} \Big/ \text{stable equivalence.}$$

在 [Lur19], Lurie 中，他通过引入温和上同调理论极大地推广了这一概念。这类理论与等变复 K-理论具有相同的基本性质（例如 Atiyah–Segal[AS69]完备化定理和 Hopkins–Kuhn–Ravenel [HKR00] 特征标理论），并与环 ∞ 上的定向 $\mathbf{P}$-可除群 相关。其例子包括等变复 K-理论本身，它源自 KU 上乘法群概形的挠子群；以及更高色数类比，例如等变椭圆上同调理论，它们源自定向椭圆曲线的挠子群。

本文继续研究温和上同调理论。我们的主要目标之一是捕捉温和上同调中存在的额外结构。为此，考虑等变复 K-理论这一经典例子。一个 G-空间 X 的 G-等变复 K-理论由其在胞腔 $G/H_+ \wedge S^n$ 上的取值构造而成。这里的基本计算将 0-胞腔的上同调

$$KU_G^0(G/H) \cong RU(H)$$

与 H的复表示环相关。随着群 G 的变化，表示环$RU(G)$具有大量重要的代数结构：对于任意子群包含映射 $i\colon H \subset G$，都有限制 i^* 和转移映射 $i_!$

$$i^*\colon RU(G) \to RU(H), \qquad i_! = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} (-)\colon RU(H) \to RU(G),$$

对于任意满同态 $p\colon G \to K$，都有膨胀 p^* 和降压 $p_!$映射

$$p^*\colon RU(K) \to RU(G), \qquad p_! = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} (-)\colon RU(G) \to RU(K). \tag{1.0.1}$$

表示环上的这种代数结构反映了等变复 K-理论中存在的更高阶结构。例如，G-等变复 K-理论由一个真正的 G-谱表示这一事实

$$KU_G \in \mathrm{Sp}_G$$

编码了 G的子群之间的限制和转移的存在。随着群 G的变化，这些 G-谱组装成一个全局等变谱

$$\mathbf{KU} \in \mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}$$

在 Schwede [Sch18], 定义的、在全局空间 （或轨形空间）上给出上同调理论的意义下。此外，它还编码了膨胀的存在。所有温和理论都具有这些精化：在 [GLP24], Gepner、Pol 和第三位作者证明了，与一个定向$\mathbf{P}$-可除群相关的温和上同调理论由一个全局$\mathbf{E}_\infty$ 环表示，即由 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}})$ 中的一个对象表示。对于 K-理论，这种额外的乘法结构精化了表示的张量积，以及其与限制、转移和膨胀的相容性。

这一图景中显著缺少的是降压，也就是沿满群同态的转移；表示环上则存在这类转移。事实上，Lurie 的*tempered* 全能性定理 [Lur19, Th.1.1.21]表明，温和理论具有降压，且远不止于此：它们还具有沿全局空间之间所有相对 π-有限映射的转移。这些是 Hopkins–Lurie 的$K(n)$-局部全能性定理 [HL13]所产生的 $K(n)$-局部转移的整系数类比。

1.1 温和上同调理论作为 π-双向的整体谱

为涵盖这些额外的转移，我们引入范畴 $\mathrm{Sp}_{\pi}^{\mathrm{gl}}$，其对象为具有 π-双向性的全局谱。该范畴精确刻画了配备沿全局空间之间所有相对 π-有限态射转移的全局上同调理论（见下文例 1.2.3）。接着我们证明，Lurie 的温和上同调理论 $\mathrm{A}^{(-)}_{\mathbf{G}}$ 与一个定向的$\mathbf{P}$-可除群$\mathbf{G}$ 在 $\mathbf{E}_\infty$ 环 A 上相联系，并且可精化为一个 π-双向的$\mathbf{E}_\infty$ 环 $\mathrm{A}_{\mathbf{G}} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_{\pi}^{\mathrm{gl}})$。此外，这一构造关于 A 是自然的，因此我们可以将其应用于任意基底叠上的定向$\mathbf{P}$-可除群族（包括非连通谱德利涅–芒福德叠等，见 §4.6）。由此得到下述结论，它是下文定理 A 的一个特例。

定理 1.1.1. 设 $\mathbf{G}$ 是栈 M 上一个定向的 $\mathbf{P}$-可除群。那么$\mathbf{G}$ 为$\mathbf{E}_\infty$ 环的结构层$\mathcal{O}_{\mathsf{M}}$ 赋予提升，使其成为一个$\mathcal{O}_{\mathbf{G}}$ 层，取值于 π-双向整体$\mathbf{E}_\infty$ 环：

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_{\pi}^{\mathrm{gl}}) \\ & \overset{\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}}{\nearrow} & \big\downarrow \\ \mathrm{Aff}_{/\mathsf{M}}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}} & \mathrm{CAlg}\,. \end{array}$$

特别地，M 的全局截面环 $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathsf{M}})$ 是一个π-双向整体 $\mathbf{E}_\infty$ 环 $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbf{G}}) \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_{\pi}^{\mathrm{gl}})$的底层谱。

若 $\mathsf{M} = \mathrm{Spec}A$ 是仿射的，则 $\underline{\mathrm{A}}_{\mathbf{G}} = \Gamma(\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}})$ 是 Lurie 的温和上同调理论 $\mathrm{A}^{(-)}_{\mathbf{G}}$ 的精化，使其成为一个 π-双向整体 $\mathbf{E}_\infty$ 环。我们指出，上述定理的这个特例实质上已包含在 Ben-Moshe [BM24] 的工作中。

例 1.1.2. 乘法群概形的挠子群 $\mu_{\mathbf{P}^\infty} \subset \mathbf{G}_m$ 在 KU 上典范地具有定向的 $\mathbf{P}$-可除群结构 [Lur18b, Th.6.5.1]。根据 [Lur19, Th.4.1.2], , 与之关联的温和上同调理论等价于等变复 K-理论。因此，我们得到一个 π-双向的等变复K-理论谱

$$\mathbf{KU} \coloneqq \Gamma(\mathcal{O}_{\mu_{\mathbf{P}^\infty}\,/\,\mathrm{Spec}\,\mathrm{KU}}) \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_{\pi}^{\mathrm{gl}})$$

编码上述讨论的所有结构，包括降压。

为了说明这种额外的降压结构，设 G 是一个有限群，X 是一个 G-空间。给定一个在 X 上适当不连续作用的正规子群 $N \triangleleft G$，覆盖映射 $X \to X/N$ 可扩展为一个相对 1-有限映射

$$p\colon X//G \to (X/N)//(G/N)$$

的全局空间。因此可以得到一个转移映射

$$p_!\colon KU^0_G(X) \to KU^0_{G/N}(X/N)$$

在等变 K-理论中，将 G-等变向量丛 $\xi \to X$ 的类映射为 $p_!(\xi)$ 这一 G/N-等变向量丛的类；其纤维 $(p_!\xi)_{Nx}$ 自然等价于 $x \in X$ 的余不变元空间 $\left(\bigoplus_{n\in N} \xi_{nx}\right)_N$。

定理 1.1.1 具有额外的灵活性，适用于任意基底叠上的定向 $\mathbf{P}$-可除群，因此我们可以将此例推广到等变 实 K-理论。

例 1.1.3。 正如 [BDL26, §A], 中将更详细说明的，复共轭作用于 KU 所得的商叠 Spec KU $/C_2$ 等价于一个定向环面的模叠 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori}}$。KU 上的定向$\mathbf{P}$-可除群 $\mu_{\mathbf{P}^\infty}$ 下降到 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori}}$，因此应用定理 1.1.1，我们得到一个 π-等变实 K-理论谱

$$\mathbf{KO} \coloneqq \Gamma(\mathcal{O}_{\mu_{\mathbf{P}^\infty}/\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori}}}) \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_\pi),$$

满足 $\mathbf{KO} \simeq \mathbf{KU}^{\mathrm{h}C_2}$。

我们强调，即使对于这些经典例子，我们构造出的结构也是新的：据我们所知，此前尚未在等变K-理论中构造过相干消缩，尽管在表示环层面，这种构造早已广为人知。

考虑与椭圆上同调理论相关联的$\mathbf{P}$-可除群，我们还可以得到更多例子。

例 1.1.4。 Goerss–Hopkins–Miller 的定向椭圆曲线模叠 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell}}$，尽管我们在此处的使用关键性地采用了 Lurie 在 [Lur18b, §7], 中的解释，携带着普遍定向椭圆曲线 E。挠子群 $\mathsf{E}[\mathbf{P}^\infty] \subset \mathsf{E}$ 是 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell}}$上的定向$\mathbf{P}$-可除群，应用定理 1.1.1 可得到一个 π-全局$\mathbf{E}_\infty$ 环，即拓扑模形式的全局上同调理论

$$\mathbf{TMF} \coloneqq \Gamma(\mathcal{O}_{\mathcal{E}[\mathbf{P}^\infty]}) \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_\pi).$$

这是 Hopkins 的$\mathbf{E}_\infty$ 环 TMF（拓扑模形式）的一个 π-全局精化；根据 [Dav23] ，它表示与 Gepner–Meier [GM23]和 Gepner–Linskens–Pol [GLP24]所构造的等变椭圆上同调理论相同的全局上同调理论（对于有限阿贝尔群）。

这些例子以及其他例子和它们之间的关系，将在 §5.1 中进一步讨论。

尽管定理 1.1.1 中给出的 O_G 的 π-双侧结构是新的，但本文的重点之一是探讨 O_G 在一般定向的 不可逆态射下的微妙函子性 ，这些态射作用于 $\mathbf{P}$-可除群。要陈述这种相容性，需要对 π-双侧全局谱的概念作若干变体。我们将借此机会详细阐述一些关键定义。

1.2 作为 $\mathcal{Q}$-双侧全局谱的函子性

用 S 表示空间范畴。

De定义 1.2.1. 有限阿贝尔群的全局轨道范畴是全子范畴 ry

$$\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}} \subset \mathcal{S}$$

由有限阿贝尔群的分类空间张成的空间。记

$$\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}} \coloneqq \mathrm{Psh}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})$$

表示 ab-全局空间的范畴。给定一个有限阿贝尔群 H，我们用 $\mathbf{B}H \in \mathsf{Glo}_{\mathrm{ab}} \subset \mathsf{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$ 表示相应的可表 ab-全局空间。

全局空间也称为轨形空间，是全局等变不稳定同伦理论的一种模型；参见 Gepner–Henriques [GH07], 、Lurie [Lur19, §3], 和 Schwede [Sch20] 的著作。全局上同调理论是一个保持极限的函子

$$(\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sp}.$$

非正式地说，可以将“真正的全局上同调理论”视为配备了转移的全局上同调理论。经典情况下，人们考虑沿群胚的忠实映射进行转移，由此得到 Schwede [Sch18] 定义的全局谱范畴 $\mathsf{Sp}^{\mathrm{gl}}$。然而，正如我们所见，许多有趣的例子都允许多得多的转移。为涵盖这些例子，我们将通过某些称为可归纳的子范畴 $\mathsf{Q} \subset \mathsf{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$，对不同类型的真正全局上同调理论进行参数化；精确定义见定义 2.1.4。给定一个可归纳子范畴 $\mathsf{Q} \subset \mathsf{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$，存在一个全局空间的跨度范畴 $\mathsf{Span}_{\mathsf{Q}}(\mathsf{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}})$，其反向映射任意，而前向映射则要求局部属于 Q。

定义 1.2.2. 一个 Q-双伴随谱 E 是一个函子

$$E\colon \mathrm{Span}_{\mathsf{Q}}(\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}}) \to \mathrm{Sp}$$

其对 $(\mathsf{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\text{阿贝尔群}})^{\mathrm{op}} \subset \mathsf{Span}_{\mathsf{Q}}(\mathsf{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\text{阿贝尔群}})$ 的限制是一个全局上同调理论。记

$$\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_{\mathsf{Q}} \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathsf{Q}}(\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sp})$$

为 Q-双向全局谱的范畴。该范畴是稳定的 (Lm.2.1.19) 且可呈示的 (Lm.2.1.18)，并具有一种对称幺半结构，其交换幺半群恰好是配备了宽松对称幺半结构的那些 Q-双伴随谱 E: $\mathsf{Span}_{\mathsf{Q}}(\mathsf{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\text{阿贝尔群}}) \to \mathsf{Sp}$ (Pr.2.2.10)。

例 1.2.3. 随着 Q 的变化，Q-双伴随谱的范畴涵盖了全局谱的许多有趣变体：

1. 假设 $\mathsf{Q} \subset \mathsf{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$ 由同构组成。那么 $\mathsf{Sp}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathsf{Q}}$ 就是全局上同调理论的 ∞-范畴。

2. 假设 Q =Glo^{f} $_{\mathrm{ab}}$ ⊂ Glo$_{\mathrm{ab}}$ 是由忠实映射张成的子范畴。那么，如前所述，根据 [Len25b]的主要结果，关于有限阿贝尔群族，Sp$^{\mathrm{gl}}$ ♀ 等价于 Schwede 的全局谱 Sp$^{\mathrm{gl}}$ ∞-范畴。3. 假设 Q =Glo$_{\mathrm{ab}}$。那么 Sp$^{\mathrm{gl}}$ ♀ 是 Sp$^{\mathrm{gl}}$ $_{\mathrm{ab}}$ 的一个变体，其对象带有额外的降压结构，即沿任意群同态的转移。这一 ∞-范畴尚未出现在文献中，但已有相关暗示；例如参见 [Sch22，第 1331] 页。4. 假设 Q = S$_{\pi}$ ⊂ S 是 π-有限空间的范畴，并通过余自由函子 S →S$^{\mathrm{gl}}$ $_{\mathrm{ab}}$将其视为 S$^{\mathrm{gl}}$ $_{\mathrm{ab}}$ 的全子范畴。那么 Sp$^{\mathrm{gl}}_{\pi}$ 就是 π-双侧全局谱 的范畴，定理 1.1.1 表明它是温和上同调理论的自然归属。根据定义，Sp$^{\mathrm{gl}}_{\pi}$ 的对象配备了沿轨形空间 X → Y 的所有相对 π-有限映射的相容限制和转移映射。

将温和上同调理论的函子性编码在**P**-可除群的态射中，其微妙之处在于，并非等变上同调理论之间的所有自然变换都与额外的转移相交换。特别值得注意的是，对于由 A 上定向**P**-可除群的同态 **G** →**G**′ 所关联的温和上同调理论，其自然变换 A$^{(-)}$ $_{\mathbf{G}'}$ →A$^{(-)}$ $_{\mathbf{G}}$ 通常不能精化为 π-双向谱之间的映射 A$_{\mathbf{G}'}$ →A$_{\mathbf{G}}$ 。然而，在一些例子中，它确实与一大类转移相交换。让 Q 变化，就可以一致地编码这些自然变换通常仅与所有可能转移的一个子集相交换这一含义。

为精确说明这一点，对于每个素数集合 S，我们在 §4.3 中定义一个由 π-有限空间构成的宽子范畴$S^{\perp}\pi \subset \pi$，其中的态射在强意义上不会与p-主信息发生相互作用，条件是 $p \in S$。由此得到范畴 Sp$^{\mathrm{gl}}_{S^{\perp}\pi}$，即远离 S 的 π-双向全局谱。令 $\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{\restriction S} \subset \mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}$ 为定向**P**-可除群的宽子范畴，并要求其中的态射在所有素数 $p \notin S$ 对应的p-局部分量上诱导逐纤维同构；参见定义 4.5.3。我们的第一个主要结果是定理 1.1.1 的以下精化。

定理A (定理 5.1.2)。 对于任意素数集合 S，存在一个函子

$$(\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{S\restriction})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_{S^{\perp}\pi}), \qquad \mathbf{G} \mapsto \Gamma(\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}})$$

细化定理 *1.1.1* 中的赋值。

例 1.2.4。 乘法群概形的挠子群 $\mu_{\mathbf{P}^{\infty}} \subset \mathbf{G}m$ 满足

$$\mu_{\mathbf{P}^{\infty}}(KU[1/S])_{\geq 1} \simeq \Sigma\mathbf{Q}/\mathbf{Z}[1/S]$$

对于任意一组非零整数 S，以及任意整数 ℓ，亚当斯运算 ψ^{ℓ}: KU →KU$[1/\ell]$ 在其上诱导出乘以 ℓ 的映射；当 $S = \emptyset$ 时，这可由 [Bal23，例 6.5 得出。7]

在取挠之后，同样的计算方法普遍适用。特别是，ψ^ℓ 可扩展为一个态射

$$(\psi^\ell, [\ell])\colon (\mathrm{KU}, \mu_{\mathbf{P}^\infty}) \to (\mathrm{KU}[1/\ell], \mu_{\mathbf{P}^\infty})$$

定向的 **P**-可除群，即 $\mathbf{PDiv}^{\mathrm{or}}$ 中的一个态射，其中 $[\ell]$ 是 $\mu_{\mathbf{P}^\infty}$ 的 ℓ 重乘法映射。或者，也可以将 KU 视为形式乘法群 [Lur18b, §6.5], 的定向分类器，并用 $[\ell]$ 扭曲 $\mathrm{KU}[1/\ell]$ 的典范定向，从而将 ψ^ℓ 构造为 $\mathbf{PDiv}^{\mathrm{or}}$ 中的一个态射；参见例 5.1.9 和 5.1.11 以及 [DL25, §6] 中的讨论。对于任意包含 ℓ 的所有素因子的 S，该态射都属于 $\mathbf{PDiv}^{\mathrm{or}}_{S^\dagger}$，因此诱导出一个映射

$$\psi^\ell\colon \mathbf{KU}_{S\perp\pi} \to \mathbf{KU}[1/\ell]_{S\perp\pi}$$

π-双向 $\mathbf{E}_\infty$ 环，远离 S。这<strong?style id='6'>并不是 π-双向谱的映射，除非 $\ell = \pm 1$ （见命题 4.5.13）。由于远离 S 的 π-双向谱在 S 中的素数不整除 G 的阶时，具有一个底层的 G-谱（见约定 2.3.9），这便恢复了平田–河野的一个经典定理 [HK82, Th.3.1]：亚当斯运算ψ^ℓ: KU $\to$ KU$[1/\ell]$ 在 ℓ 与 G的阶互素时，提升为 G-谱的态射 $\mathrm{KU}_G \to \mathrm{KU}_G[1/\ell]$ 。

关于 KO 和 TMF 上亚当斯运算的类似例子，分别见例 5.1.9 和 5.1.11。

1.3 参数化范畴论与温和局部系统

定理 A 的证明占据了本文的大部分篇幅。我们首先在参数化范畴论的框架下建立一种一般性的去范畴化构造，然后将其应用于 Lurie 引入的、基于定向**P**-可除群的温和局部系统 理论。这两个步骤都并非易事，构成了本文的核心技术工作的大部分，分别在 §3 和 §4 中展开。这些工作主要针对一般小范畴 T 而非 $\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$进行，但在引言中我们只讨论这一特殊情形；一般且更精确的定义见 §3.1-3.2。

定义 1.3.1（非正式）。 一个阿-全局范畴 是一个保极限函子

$$\mathcal{C}\colon (\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}\,.$$

给定一个可归纳子范畴 Q $\subset \mathrm{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群，若一个 ab-全局范畴 C 满足以下条件，则称其为 Q-稳定：

1. 对所有 X $\in \mathrm{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群，C(X) 都是稳定的。

2. 对每个局部属于 Q 的映射 $f\colon$ X $\to$ Y，限制 $f^*\colon$ C(Y) $\to$ C(X) 位于一串满足 Beck–Chevalley 条件的伴随 $f_! \dashv f^* \dashv f_*$ 中。

3. 对每个局部属于 Q 的截断映射 $f\colon$ X $\to$ Y，某个范数映射

$$\mathrm{Nm}_f\colon f_! \to f^*$$

是一个等价。

这些构成一个由 Q-稳定范畴和 Q-正合函子组成的范畴 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})_{\mathcal{Q}\text{-st}}$ ： 自然变换 C $\to$ D，其分量是稳定范畴之间的正合函子，并且满足关于 (2) 中伴随的基变换条件。此外，$\mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})_{\mathcal{Q}\text{-st}}$ 具有自然的对称幺半结构，从而得到一个由对称幺半结构Q-稳定范畴组成的范畴 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}_{\mathcal{Q}\text{-st}}$ 。

给定一个普通对称幺半群稳定范畴 C，其幺半群单位的自同态谱 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$ 由 [Lur17, §4.8] 自然地带有 $\mathbf{E}_\infty$ 结构。我们在 §3 中的工作最终导出了这一构造的如下参数化细化。

定理 B (定理 3.5.1)。 将对称幺半稳定范畴 $\mathcal{C}$映至其单位的自同态$\mathbf{E}_\infty$ 环$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$ 的对应关系可细化为一个保极限函子

$$\mathrm{End}_{(-)}(\mathbb{1})\colon \mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}_{\mathcal{Q}\text{-st}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_{\mathcal{Q}})$$

满足 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})^{\mathsf{X}} = \mathrm{End}^{\mathcal{C}(\mathsf{X})}(\mathbb{1})$ ，其中 $\mathsf{X} \in \mathcal{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群。

该定理将 BM24, §3] 中的参数化去范畴化过程推广了。其证明比非参数化情形的对应证明复杂得多，并且需要经过若干中间构造；这些构造在参数化范畴论中或许具有更广泛的意义。不过，由于这些构造仍然较为技术性，我们请读者参阅 §3 以了解更多信息。

要应用定理 B，我们需要 Q-稳定 ab-全局范畴的例子。这类例子来自 Lurie 在 [Lur19] 中引入并研究的温和局部系统理论。给定一个定向的 $\mathbf{P}$-可除群$\mathbf{G}$ 以及一个 ab-全局空间 X，记 $\mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}(\mathsf{X})$ 为 X 上的$\mathbf{G}$-温和局部系统范畴；我们在 §4.1 回顾相关定义。正如我们在 §4.2 中证明的，这一构造关于$\mathbf{G}$ 和 X 都是自然的，并可扩展为一个函子

$$\mathrm{LocSys}_{(-)}\colon (\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}).$$

将其限制到由仿射基底上的定向$\mathbf{P}$可除群及逐纤维同构张成的$\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}$ 子范畴时，这一结果已由 Ben-Moshe 在 [BM24] 中确立；我们将他的构造扩展到允许定向$\mathbf{P}$可除群之间的任意态射。§4 的主定理进一步将其精化为对称幺半结构的 $S\perp\pi$-稳定范畴。

定理 C。 对于任意素数集 S ，将定向$\mathbf{P}$可除群$\mathbf{G}$ 对应到其阿贝尔群-全局$\mathbf{G}$-温和局部系统范畴的赋值，可提升为一个函子

$$\mathrm{LocSys}_{(-)}\colon (\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{S^\dagger})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}_{S\perp\pi\text{-st}}.$$

定理 A 只是定理 B 与定理 C 的复合。

取 $S = \emptyset$，定理 C 断言，对于固定的 $\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}$，ab-全局范畴 $\mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}$ 以一种典范方式具有对称幺半结构的 π-稳定范畴结构，即有

$$\mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}} \in \mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}_{\pi-\mathrm{st}}.$$

这是对 Lurie 的*tempered* 全能性定理 [Lur19, Th.7.2.10] （见 Th.4.5.1）的重新表述。证明定理 C 所需的额外工作源于这样一个观察：这个提升对于 $\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}$而言并非 自然：一般来说，$\mathbf{P}$-可除群之间的态射 $\alpha\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 会诱导函子 $\mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}} \to \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}'}$，而该函子并非 π-正合；不过，正如我们将证明的，它对于 S α 不是逐纤维同构的那些素数集是 $S\perp\pi$-正合的。

1.4 温和同调与几何固定点

构造出由定向的 $\mathbf{P}$-可除群得到的 π-双向谱后，我们接着研究其相关温和理论的等变稳定同伦类型。我们的首要贡献是构造一种合理且一般形式的、与 $\mathbf{P}$-可除群相关的温和同调 。

设 $\mathbf{G}$ 是栈 M 上一个定向的$\mathbf{P}$-可除群。若 F 是一个 π-有限空间，则定理 1.1.1 中的层在 F 上求值后，定义了一个拟凝聚 $\mathbf{E}_\infty$ 环层

$$\mathcal{O}^F_{\mathbf{G}} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(\mathsf{M}))$$

在 M 上（Pr.5.3.3）。记

$$\mathbf{G}(F) \in \mathrm{Stk}^{\mathrm{aff}}_{/\mathsf{M}}$$

为其相对谱，这是一个在 M 上仿射的栈。

定理 D (Con.5.3.6)。 存在一个宽松对称幺半且保余极限的F-全局温和同调函子

$$\mathcal{O}^F_{\mathbf{G}}[-]\colon \mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}/F} \to \mathrm{QCoh}(\mathbf{G}(F)),$$

将 π-有限空间的映射 p： $K \to K'$在 F上的映射发送到 $\mathcal{O}^F_{\mathbf{G}}$-线性转移 $p_!$： $\mathcal{O}^K_{\mathbf{G}} \to \mathcal{O}^{K'}$ $_{\mathbf{G}}$。

取 $F = \mathbf{B}H$ 为有限群 H， H-空间的范畴 S_H 是 H-全局空间范畴 S^{gl} 阿贝尔群/$_{\mathbf{B}H}$ 的一个子范畴，并且对余极限和积封闭。因此，定理 D 的特例给出一个 $\mathbf{G}$-温和 H-等变同调函子

$$\mathcal{O}^{\mathbf{B}H}_{\mathbf{G}}[-//H]\colon \mathcal{S}_H \to \mathrm{QCoh}(\mathbf{G}(\mathbf{B}H)).$$

正如 Lurie 在椭圆上同调的语境中所提出的 [Lur09a，注记 3.14], 温和同调在许多方面都比温和上同调具有更好的性质，尤其是在应用于非紧 H-空间时。特别是，它满足以下一般性的基变换性质。

定理 E （定理 5.3.10）。 设 $\mathbf{G}$ 是代数栈M上的一个定向$\mathbf{P}$-可除群。那么，˜对于任意代数栈的映射 f： $\mathsf{N} \to \mathsf{M}$，诱导映射 f： （$f^*\mathbf{G}$）（F） $\to \mathbf{G}$（F） 满足

$$\tilde{f}^*\left(\mathcal{O}^F_{\mathbf{G}}[\mathsf{X}]\right) \simeq \mathcal{O}^F_{f^*\mathbf{G}}[\mathsf{X}]$$

对于任意 π-有限空间 F和全局空间 $\mathsf{X} \in \mathcal{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群/$_F$。

经过约化同调后，我们构造的 $\mathbf{B}H$-全局同调使我们能够为有限群 H定义 H-几何不动点

$$\mathcal{O}_{\mathbf{G}}^{\Phi H} = \widetilde{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{B}H}[\widetilde{E}\mathscr{P}_H//H] \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(\mathbf{G}(\mathbf{B}H)))$$

的$\mathbf{G}$，其对应的栈

$$\Phi^H\mathbf{G} \in \mathrm{Stk}^{\mathrm{aff}}_{/\mathbf{G}(\mathbf{B}H)}.$$

F-全局温和同调的基变换定理（Th.E）由此特化为几何不动点的基变换，并立即带来一些推论。例如，我们证明，对于任意$\mathbf{P}$-可除群$\mathbf{G}$ 以及任意有限的非阿贝尔群 H， H-几何不动点栈

$$\Phi^H\mathbf{G} = \emptyset \tag{1.4.1}$$

在 H 为非阿贝尔时消失；见 Pr.5.4.4，应用见 Cor.5.4.5。

最后，我们通过给出 $\Phi^H\mathbf{G}$ 的模解释，来完善对几何不动点的讨论，其中 H 为阿贝尔群。根据构造，若 H 为阿贝尔群，则我们可以将其视为

$$\mathbf{G}(\mathbf{B}H) \simeq \mathbf{G}[\widehat{H}] \simeq \mathrm{Hom}(\widehat{H}, \mathbf{G})$$

$\widehat{\ }$作为到 $H \to \mathbf{G}$的同态栈。对于 $H =\mathbf{Z}/(n)$，这等价于$\mathbf{G}$的 n-挠子群。子群 $L \to H$ 的每个包含映射都会诱导一个闭浸入

$$\mathrm{Hom}(\widehat{L}, \mathbf{G}) \to \mathrm{Hom}(\widehat{H}, \mathbf{G}),$$

并定义单射栈

$$\mathrm{Inj}(\widehat{H}, \mathbf{G}) \coloneqq \mathbf{G}[\widehat{H}] \setminus \bigcup_{L \subsetneq H} \mathbf{G}[\widehat{L}]$$

$\widehat{\ }$作为 Hom(H,$\mathbf{G}$) 中避开所有真子群 $L \subsetneq H$ 对应闭浸入的开子叠；参见 Df.5.5.10。我们的最终结果如下。

定理 F。 设 H 是一个有限阿贝尔群，$\mathbf{G}$ 是一个定向的$\mathbf{P}$-可除群。那么存在一个（必然唯一的）等价

$$\Phi^H\mathbf{G} \simeq \mathrm{Inj}(\widehat{H}, \mathbf{G})$$

$\widehat{\ }$由$\mathbf{G}(\mathbf{B}H)$ $\simeq\mathbf{G}[H]$构成的开子叠。

这可以视为对与 Morava E-理论 [BHN$^+$19 相关的 Borel 理论的几何固定点计算的一种整体且几何的精化，§3]。它意味着温和理论的几何不动点存在相应的蓝移 现象。

推论 G (推论 5.5.18)。 设$\mathbf{G}$ 为一个定向的$\mathbf{P}$-可除群。固定一个素数 p，并假设 p-可除群$\mathbf{G}(p)$ 的高度为 $\leq h$。设 H 为一个有限阿贝尔群，并令 $n = \log_p |H/pH|$。那么栈 $\Phi^H \mathbf{G}$ 在素数 p处的色高至多为 $h - n$。特别地，若 $n > h$，则 $\Phi^H \mathbf{G} = \emptyset$。

上述大多数结果都是在代数栈与拟凝聚层的几何框架下陈述并证明的，因为基变换 Th.E 在这一框架中完全普遍成立。可以应用松对称幺半全局截面函子 Γ: QCoh(M) $\to$ Mod$_{\Gamma(\mathcal{O}_{\mathrm{M}})}$，从而得到关于 $\mathbf{E}_\infty$ 环和谱的结论；但需要稍加注意，因为一般而言 Γ 不一定保余极限；例如，一般而言， $\Gamma(\Phi^H \mathbf{G}) \not\simeq \Gamma(\mathrm{O}_{\mathrm{G}})^{\Phi H}$。

在实践中，Mathew–Meier [MM15] 的工作以及我们先前的工作 [BDL25, Ths.A & B] 表明，色同伦论中关注的栈往往是 0-半仿射的，也就是说， Γ: QCoh(M) $\to$ Mod$_{\Gamma(\mathcal{O}_{\mathrm{M}})}$ 确实保余极限。这包括上文例 1.1.2 至 1.1.4 以及下文 §5.1 中给出的所有例子。在这一假设下，前述所有定理都与整体截面相容。特别地，若 $\mathbf{G}$ 是 0-半仿射栈 M 上的定向 $\mathbf{P}$-可除群，那么 $\Phi^H \mathbf{G}$ 的整体截面可恢复 H-几何不动点，即 π-双侧的整体 $\mathbf{E}_\infty$环 $\Gamma(\mathrm{O}_{\mathrm{G}})$:

$$\Gamma(\mathcal{O}_{\Phi^H \mathbf{G}}) \simeq \Gamma(\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}})^{\Phi H};$$

参见注记 5.3.8。

例 1.4.2。 [MM15] 的主定理指出，栈 $\mathrm{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{or}}$ 是 0-仿射的。根据 (1.4.1) 和推论 G 中的消失结论，我们由此可知，等变 TMF 满足

$$\mathbf{TMF}^{\Phi H} \simeq \begin{cases} \Gamma(\mathcal{O}_{\mathrm{Inj}(\widehat{H},\mathcal{E})}), & H \text{ abelian and requiring at most 2 generators,} \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases}$$

参见例 5.5.20。将 H 的阶求逆后，栈 Inj(H，E) 在 $\mathrm{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{or}}$ 上成为 étale 的，并且可以将其识别为 E 上水平 H-结构 的经典模空间栈:

$$\mathbf{TMF}^{\Phi C_n \times C_n} \simeq \mathrm{TMF}(n), \qquad \mathbf{TMF}^{\Phi C_n}[1/n] \simeq \mathrm{TMF}_1(n).$$

这意味着，$\mathbf{TMF}^{\Phi H} \neq 0$ 当且仅当 H 是一个至多需要 2 个生成元的有限阿贝尔群，由此按照 [MNN19] 的方法计算出导出缺陷基 $\mathbf{TMF}$。更仔细地考察单射栈，我们看到 $\mathbf{TMF}^{\Phi C_n}$ 是 TMF$_1$(n) 的一个整数精化，也就是说，它在所有整除 n 的素数 p 处的色高恰为 1；相比之下，TMF$_1$(n) 在这些素数处的高度为 0。这对应于如下事实：如果椭圆曲线 E 含有一个同构于常值群概形 C_p的子群，那么它的形式高度至多为 1；而完备局部环上的普通椭圆曲线则提供了形式高度恰为 1 的例子。

这些结果为进一步将温和上同调理论作为等变谱进行研究奠定了坚实基础。关于温和上同调理论的几何不动点的基变换结果，已被第二和第三位作者用于

我们的论文 [DL25, Th.7.14]研究全局 Tate K-理论。在即将发表的工作 [BDL26], 中，我们依赖几何不动点的模空间解释 Th.F，在 几何范数 上构造 $\mathbf{TMF}$ ，并为 $\mathbf{TMF} \otimes \mathbf{Q}$构造超交换结构。

提纲

本文共分为四节；每节开头都有更详细的介绍。

- 在 §2 中，我们引入一般范畴 C 中的 Q-双侧幺半群范畴，记作 $\mathrm{CMon}_{\mathrm{gl}\ \wr}(\mathrm{C})$。当 C $=$ Sp 且 Q $\subset \mathrm{S}_{\mathrm{gl\ ab}}$ 时，它特化为 Df.1.2.2 中的 $\mathrm{Sp}_{\mathrm{gl}\ \wr}$ ，并确立其基本范畴性质。

- 在 §3 中，我们回顾并证明参数化范畴论中的必要概念与论述，包括 Q-稳定性。本节最后证明一般去范畴化结果定理 B。

- 在 §4 中，我们说明 Lurie 的温和局部系统范畴 $\mathrm{LocSys}_{\mathrm{G}}$ 定义了π-稳定的全局范畴，并讨论定向$\mathbf{P}$-可除群的哪些态射会对不同的 Q 诱导 Q-稳定的全局范畴之间的态射。特别地，本节包含定理 C 的证明。

- 在 §5 中，我们结合前两节的内容，说明 Lurie 的温和上同调理论由 π-双侧全局谱表示，并讨论这些例子的等变稳定同伦论。

愿意将定理 A（以及由此也包括定理 B 和 C）作为已知结论的读者，可以只阅读 §2 了解谱$^{\mathrm{gl}}{}_{\wr}$ 的定义，并阅读 §5 了解其在温和上同调理论的等变稳定同伦论中的应用。

致谢

SL 谨此感谢 Bastiaan Cnossen 就 §3 展开的有益讨论，也感谢他和 Tobias Lenz 在准备 [CLL24] 期间的交流。SL 还感谢 Shay Ben-Moshe 关于温和理论中的去范畴化与转移所进行的启发性讨论。本文与 [BM24] 的工作有所重叠，这要归功于他慷慨地分享了自己的想法。

JMD 获得了德国研究联合会资助的研究生培训组 GRK 2240「代数、算术与拓扑中的代数几何方法」的支持。SL 是 SFB：高阶不变量的准成员。JMD 和 SL 均谨此感谢艾萨克·牛顿数学科学研究所（剑桥）在语境中的等变同伦论 项目期间提供的支持与款待；本文的研究工作正是在该项目期间开展的。本研究获得英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号 EP/K032208/1。

2 双向全局谱

本节回顾 Df.1.2.2 以及 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathcal{Q}}$ 的基本性质。事实上，我们将稍微推广这一处理：在定义中以任意小范畴T 替换 $\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$ 。首先，我们引入 T上预层之间映射的可归纳 类 Q 的概念，然后在 §2.1 中定义带有极限的一般范畴 C 中的 Q-双向幺半群 ，记为 $\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}$(C)。当 $T = \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$且 C $= \mathrm{Sp}$ 时，这一概念特化为 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathcal{Q}}$ 。接着，我们研究这一构造的基本范畴性质。在 §2.2 中，我们证明 $\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}$(C) 从 C 继承了规范的对称幺半结构，并给出该结构的两种等价刻画。最后，在 §2.3 中，我们利用 Q-双向幺半群构造同调理论，从而推广经典的等变同调理论构造。

在本节中，我们固定一个小范畴 T，并将 P 记为 T上的预层范畴 $\mathrm{Psh}(T) = \mathrm{Fun}(T_{\mathrm{op}}, \mathrm{S})$。我们将通过 Yoneda 嵌入把 T视为 P 的一个子范畴。

2.1 $\mathcal{Q}$-交换幺半群

定义 2.1.1. 若小子范畴 Q $\subset$P 满足以下条件，则称其为可归纳的：

1. Q 包含 T 的所有对象。2. 映射 $f\colon X \to Y$，若 $Y \in$ 属于 Q，则它属于 Q 当且仅当对所有映射 $A \to Y$（其中 $A \in T$）， $f \times_Y A$ 都成立。3. Q 对角映射封闭：若 $X \to Y$属于 Q，则 $X \to X \times_Y X$ 属于 Q。4. Q 中所有以 T 中对象为目标的态射都是截断的。

定义 2.1.2. 给定一个可归纳子范畴 Q $\subset$P，其局部类

$$\bar{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{P}$$

由 Q 生成的是 P 的宽子范畴，其态射由那些局部属于 Q 的态射 $X \to Y$ 构成；也就是说，对于所有满足 $A \in T$ 的 $A \to Y$， $X \times_Y A \to A$ 都属于 Q。

¯局部类 Q 根据构造对基变换封闭，因此我们可以作出如下定义。

定义 2.1.3. 给定一个可归纳子范畴 Q，我们将 $\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}$(P) 记作范畴¯：它由 P 中的跨构成，其中反向映射任意，而正向映射属于 Q。

因此，$\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}$(P) 的对象就是 P 的对象，但其映射空间

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})}(X,Y) = \left\{ \begin{array}{ccc} & W & \\ {\scriptstyle \in \bar{\mathcal{Q}}}\swarrow & & \searrow \\ X & & Y \end{array} \right\};$$

复合由拉回给出，即

$$(X \leftarrow W \rightarrow Y) \circ (Y \leftarrow V \rightarrow Z) = (X \leftarrow W \times_Y V \rightarrow Z)\,.$$

形式化定义见 [HHLN23] 。

定义 2.1.4。 设 C 是一个具有小极限的范畴。C 中的 Q-双向幺半群 是一个函子

$$E\colon \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathscr{P}) \to \mathcal{C}$$

其沿 $\mathrm{P}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow$Span$_{\mathcal{Q}}$(P) 的限制保极限。此类对象构成一个范畴

$$\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathscr{P}), \mathcal{C}).$$

定义 2.1.5。 Sp 中的 Q-双向幺半群称为 Q-双伴随谱，记作

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{Q}} \coloneqq \mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Sp})$$

表示 Q-双伴随谱范畴。更一般地，我们将在引理 2.1.19 中验证，只要 C 是稳定的，CMon$_{\mathcal{Q}}$(C) 就是稳定的。因此，在这种情况下，我们将 CMon$_{\mathcal{Q}}$(C) 记作 Sp$_{\mathcal{Q}}$(C)，并将其中的对象称为 C 中的 Q-双伴随谱（对象）。

注 2.1.6。 注意，借助对 Q $\subset$ Psh(T) 的选取，记号 T 中隐含了范畴。当 $T = \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$ 时，我们将 Sp$^{\mathrm{gl}}{}_{\mathcal{Q}} \coloneqq$ Sp$_{\mathcal{Q}}$ 中的对象称为 Q-双侧全局谱，如引言中所述。

注 2.1.7. 我们将在下文的 Lm.2.1.18 中验证：只要 C 可呈示，相应地，稳定，CMon$_{\mathcal{Q}}$(C) 便可呈示，相应地，稳定。于是形式上可得

$$\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{S}) \otimes \mathcal{C},$$

对于任意可呈范畴 C，以及

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Sp}_{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{C}$$

对于任意稳定的可呈范畴 C。

除作为本文主要关注点的全局等变例子外，Q-双伴随谱的语言在传统的 G-等变稳定同伦论中也有意义。记 Fin$_G$ 为有限群 G 的有限 G-集合所构成的范畴。

例 2.1.8。 设 G 是一个有限群。或许，最早考虑上述定义的例子是 (T，Q) $=$(Orb$_G$，Fin$_G$)，分别表示传递G-集范畴和有限 G-集范畴。我们遵循文献中的用法，将 CMon$^{\mathcal{F}\mathrm{in}_G}$(C) $\simeq$ Fun$^{\times}$(Span(Fin$_G$)，C) 中的对象称为 C 中的 G-交换幺半群，并记作 CMon$_G$(C)。

重要的是，Guillou–May 定理将 $\mathrm{Sp}^{\mathcal{F}_{\mathrm{in}G}}$ 与 Sp_G 这一真正的G-谱范畴等同起来，参见例如 [CLL25，推论 9.16]。特别地，我们注意到，当 C 稳定时，CMon_G(C) 等价于 C 与（真正的） G-谱的张量积 $\mathrm{C} \otimes \mathrm{Sp}_G$。因此，在这种情况下，我们可以将 CMon_G(C) 称为 C 中的 G-谱范畴。类似地，我们将 CAlg(CMon_G(C)) 中的对象称为 C 中的 G-等变 $\mathbf{E}_\infty$-环。

注 2.1.9。若 $\mathrm{Q} \subset \mathrm{Q}'$，则沿诱导函子 $\mathrm{Span}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{P}) \to \mathrm{Span}_{\mathrm{Q}'}(\mathrm{P})$ 的限制定义了一个保守且保持极限的限制函子

$$\mathrm{res}\colon \mathrm{CMon}_{\mathrm{Q}'}(\mathcal{C}) \to \mathrm{CMon}_{\mathrm{Q}}(\mathcal{C}).$$

让我们展开一个 Q-双向幺半群所编码的结构。

记号 2.1.10。设 E 是 C 中的一个 Q-双向幺半群。对 P 中的每个映射$f\colon X \to Y$，都关联一个限制映射

$$\mathrm{res}_f \coloneqq E(Y \leftarrow X = X)\colon E(Y) \to E(X),$$

并且对 Q 中的每个映射 $q\colon Y \to Z$，都关联一个转移映射

$$\mathrm{tr}_q \coloneqq E(Y = Y \to Z)\colon E(Y) \to E(Z).$$

$\mathrm{Span}_{\mathrm{Q}}(\mathrm{P})$ 中的复合法则立即告诉我们

$$\mathrm{res}_f \,\mathrm{res}_g \simeq \mathrm{res}_{gf} \quad \text{and} \quad \mathrm{tr}_q \,\mathrm{tr}_p \simeq \mathrm{tr}_{qp}\,.$$

转移与限制的复合由沿 Q 中映射的拉回结构控制：给定 P 中的映射 $f\colon X \to Z$ 和 Q 中的映射 $q\colon Y \to Z$，我们可以构造拉回

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{q'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{q} & Z. \end{array}$$

E 的结构中包含一个同伦，它见证了 $\mathrm{res}_f \,\mathrm{tr}_q \simeq \mathrm{tr}_{q'}\mathrm{res}_{f'}$。

例 2.1.11。当 $T = \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$ 和 $f\colon \mathbf{B}H \to \mathbf{B}G$，$q\colon \mathbf{B}K \to \mathbf{B}G$ 是轨道的忠实映射时，我们可以计算得出

$$\mathbf{B}H \times_{\mathbf{B}G} \mathbf{B}K \simeq \coprod_{[g] \in H\backslash G/K} \mathbf{B}(H^g \cap K).$$

因此，上述限制与转移之间的关系在这种情况下具体表现为通常的双陪集公式；该公式描述了等变同伦论和表示论中熟知的沿单射群同态的限制与转移之间的关系：

$$\mathrm{res}^G_H \,\mathrm{tr}^G_K \simeq \sum_{[g] \in H\backslash G/K} \mathrm{tr}^H_{H \cap {}^g K} \circ c^*_g \circ \mathrm{res}^K_{H^g \cap K}$$

对于任意两个子群 H，$K \subset G$。

$_{\mathrm{NO}}$下面我们详细介绍 $\mathrm{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\text{阿贝尔群}}$ 的可归纳子范畴的例子，这些子范畴在本文中发挥作用 $\quad_{\mathrm{e.}}$

例 2.1.12。 令 G 表示有限群胚范畴，并令 $\mathrm{O}\ \subset$G 表示由具有阿贝尔各向同性群的群胚之间的忠实态射所张成的宽子范畴。沿 $\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}\ \subset$G 的受限 Yoneda 嵌入将 G 实现为阿贝尔全局空间的一个全子范畴。一个简单的论证表明，通过这种方式，O 和 G 都定义了 $\mathrm{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$ 的可归纳子范畴。根据 [Len25b，定理 A]，，O-双侧阿贝尔全局谱范畴 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathcal{O}}$ 等价于（其底层 ∞-范畴）Schwede 针对有限阿贝尔群族定义的全局谱范畴 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$ 。

例 2.1.13。 由可归纳子范畴 G，我们得到一个 G-双侧全局谱范畴 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathcal{G}}$ 。按照构造，G-双侧全局谱允许降压亏格映射，即沿满群同态的转移，并且存在一个遗忘函子 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathcal{G}}$ $\to\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$ ，它遗忘这些降压。

接下来的例子需要以下定义。

定义 2.1.14。 求值函子

$$\mathrm{ev}_*\colon \mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}} \to \mathcal{S}$$

具有一个记作 $\mathbf{R}$ 的完全忠实右伴随。由于 $\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$ 是 S 的全子范畴，$\mathbf{R}$由受限 Yoneda 嵌入 $\mathbf{R}(X)(\mathbf{B}A)\ \simeq$ 映射$_{\mathcal{S}}(BA, X)$ 计算得到。

例 2.1.15。 令 $\mathrm{S}_{\pi}\ \subset$S 表示 π-有限空间的全子范畴：具有有限个路径连通分支的空间，其中每个分支都有有限个非零同伦群，且这些同伦群全都是有限群。本质像 $\pi = \mathbf{R}(\mathrm{S}_{\pi})\ \subset\mathrm{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\text{阿贝尔}}$ 是可归纳的，因此生成一个局部类 $\underline{\pi}\subset\mathrm{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\text{阿贝尔}}$。按照 [Lur19, 定义7.2.4]，我们将 π 相对 π-有限 的映射称为阿贝尔全局空间的映射。正如定理1.1.1所论证的，范畴 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_{\pi}$的 π-双向性阿贝尔全局谱编码了与定向**P**-可除群相关的温和上同调理论中，能够由 Lurie 的温和自伴随定理及我们的去范畴化结果获得的最大结构。

例 2.1.16。 设 S 为一个素数集。在 §4.3 中，我们将确定一个可归纳子范畴$S^{\perp}\pi \subset \pi \subset \mathrm{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$ ，它由阿贝尔全局空间中相对 π-有限的映射组成；从强意义上说，这些映射不与 $p \in S$ 的 p-主信息发生相互作用。由此得到的范畴 $\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_{S^{\perp}\pi}$编码了这样的阿贝尔全局上同调理论：仅沿着相对 π-有限且不与 S发生相互作用的映射进行转移。该类将在我们讨论与一个定向的 **P**-可除群相关联的 π-自伴阿贝尔全局谱的自然性时发挥关键作用。

最后，我们提及下面这个平凡的例子。

例 2.1.17。 同构的集合 $\simeq := T^{\simeq}$ 始终构成 P 的一个可归纳子范畴。由此得到的 $\simeq$-双向谱范畴 $\mathrm{Sp}^{T}_{\simeq}$ 等价于从 $\mathrm{P}^{\mathrm{op}}\ \to$到 Sp 的保极限函子范畴，即（朴素）上同调

理论。当 $T = \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$ 时，这些就是引言中的（朴素）ab-全局上同调理论。

现在我们来讨论关于 $\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C})$ 的一些基本范畴论事实。

引理 2.1.18. 设 $\mathcal{Q}$ 是$\mathcal{P}$的一个可归纳子范畴，并记 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{P}$ 中由 $\mathcal{Q}$ 中对象张成的全子范畴。则对任意 $\mathcal{C} \in \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}$，限制函子

$$\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}), \mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}), \mathcal{C})$$

是全忠实的，并且将 $\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C})$ 实现为函子范畴 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}),\mathcal{C})$ 的一个可达布斯菲尔德局部化。特别地，$\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C})$ 是可呈示的。

证明. 记 $j\colon T \subset \mathrm{D}$ 和 $i\colon \mathrm{D} \subset \mathrm{P}$ 为包含映射，并考虑下图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}), \mathcal{C}) & \underset{\mathrm{Span}(i)_*}{\overset{\mathrm{Span}(i)^*}{\rightleftarrows}} & \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}), \mathcal{C}) & & \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \\
\mathrm{Fun}((\mathcal{P})^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}) & \underset{i_*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} & \mathrm{Fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}) & \xleftarrow[j_*]{} & \mathrm{Fun}(T^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}).
\end{array}$$

注意，沿 i 的右 Kan 延拓由 [Lur09b, Th.5.1.5.6.]的对偶版本存在。另一方面，沿 $\mathrm{Span}(i)$ 的右 Kan 延拓存在，且 Beck–Chevalley 变换 $\mathrm{res}\,\mathrm{Span}(i)_* \Rightarrow i_*\,\mathrm{res}$ 由 [BH21, Pr.C.18] 可知是一个等价。现在我们断言，函子 $E\colon \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{P}) \to \mathrm{C}$ 属于 $\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{C})$，当且仅当满足以下条件：

(∗) E 与 $\mathrm{Span}(i)_*E'$ 同构，其中函子为 $E'\colon \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{D}) \to \mathrm{C}$，且 $\mathrm{res}\ E'$ 是从 T 右 Kan 延拓而来。

要证明这一断言，注意根据定义，E 属于 $\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{C})$ 当且仅当 $\mathrm{res}\,E$ 保持极限；根据 [Lur09b, Th.5.1.5.6] 的对偶，这当且仅当 $\mathrm{res}\,E$ 沿 ij 右 Kan 延拓，或者等价地，当且仅当单位映射 $\mathrm{res}\,E \to i_*i^*\,\mathrm{res}\ E \to (ij)_*(ij)^*\,\mathrm{res}\,E$ 是等价。由上图的交换性可得 $i_*i^*E \simeq \mathrm{res}\,\mathrm{Span}(i)_*\,\mathrm{Span}(i)^*E$，因此这当且仅当单位 $E \to \mathrm{Span}(i)_*\,\mathrm{Span}(i)^*E$ 是等价，并且 $E' = \mathrm{Span}(i)^*E$ 具有 $\mathrm{res}\,E' = i^*E$ 从 T 右 Kan 延拓而来的性质，正如所要证明的。

为证明这是一个可达布斯菲尔德局部化，我们首先注意到显然j_* 是一个可达布斯菲尔德局部化，因为它是右伴随，并且当 κ 大于对所有对象 $X \in \mathrm{D}$ 的切片 $(T^{\mathrm{op}})_{/X}$ 时，它与κ-滤过余极限交换（回想一下，D 是小的）。因此，根据 [Lur09b，命题 5.5.4，函子属于 j_*的本质像，当且仅当它对于 $\mathrm{Fun}(\mathrm{D}^{\mathrm{op}},\mathrm{C})$ 中一组态射 S 而言是 S-局部的。但根据定义，$\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{D}) \to \mathrm{C}$ 属于 $\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{C})$，当且仅当它是 $\iota_!(S)$-局部的，其中 $\iota_!$ 是沿着 $\iota\colon \mathrm{D}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{D})$ 的限制的左伴随。再次应用上述命题，我们得出 $\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}} \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{D}),\mathrm{C})$ 是一个可达布斯菲尔德局部化。

For 可表性方面，请注意，Span$_{\mathcal{Q}}$(D) 现在是小的，因此 Fun(Span$_{\mathcal{Q}}$(D),C) 是可表的 le.
□

引理 2.1.19。 若 $\mathcal{C}$ 稳定，则$\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C})$ 稳定。特别地，Sp$_{\mathcal{Q}}$ 稳定。 *e.*

证明。 根据定义，CMon$_{\mathcal{Q}}$(C) 位于如下笛卡尔图表中

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}),\mathcal{C}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathrm{Fun}^{\mathrm{R}}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}},\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\mathcal{P}^{\mathrm{op}},\mathcal{C}). \end{array}$$

若 C 稳定，则这是由稳定范畴和正合函子组成的图表，因此拉回仍然稳定。

□

2.2 作为对称幺半范畴

设 C 是一个可呈示的对称幺半范畴，且 Q ⊂P 是一个可归纳子范畴。我们的下一个目标是在 CMon$_{\mathcal{Q}}$(C) 上引入对称幺半结构。首先注意，Span$_{\mathcal{Q}}$(P) 关于 P 中的笛卡尔积构成对称幺半范畴（见 [CHLL25, 例 3.2.2]）。需要注意的是，这并非 Span$_{\mathcal{Q}}$(P) 中的范畴论笛卡尔积。我们希望指出，

$$\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}),\mathcal{C})$$

通过对 Day 卷积进行局部化，可以继承对称幺半范畴的结构。然而，由于 Span$_{\mathcal{Q}}$(P) 是一个大型范畴，因此需要谨慎处理。本节的工作将表明，尽管如此，实质上确实如此。我们按如下方式展开。

构造 2.2.1。 令 D ⊂P 为由 Q 的对象张成的全子范畴。由于 D 在积下封闭，Span$_{\mathcal{Q}}$(D)$^{\otimes}$ 上存在诱导的对称幺半结构。由于 Span$_{\mathcal{Q}}$(D) 是小的，我们接着可以赋予其

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}),\mathcal{C})$$

Day 卷积对称幺半群结构，参见 [Lur17, §2.2.6]。

命题 2.2.2。包含映射

$$\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}),\mathcal{C})$$

是对称幺半布斯菲尔德局部化中的右伴随。

证明。 根据 [Hin16, Pr.3.3.4], 只需证明，被局部化映射为等价的映射

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}),\mathcal{C}) \to \mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C})$$

在张量积下封闭。事实上，由于张量积分别与两个变量中的余极限交换，只需证明来自证明 Lm.2.1.18 的生成类 $\iota_!(S)$ 中的映射的张量积再次被送到等价。为 D^{op} 赋予余笛卡尔幺半群结构，从而 $\mathrm{D}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{D})$ 是强对称幺半群函子。根据 [BMS23, Pr.3.6], 函子

$$\iota_!\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}),\mathcal{C})$$

若我们为源和目标赋予 Day 卷积对称幺半群结构，则该函子是强对称幺半。利用这一事实，简单计算可知，只需证明 S 中映射的张量积在局部化下再次被送到等价

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}(T^{\mathrm{op}},\mathcal{C}).$$

这是显然的，因为 $\mathrm{Fun}(\mathrm{D}^{\mathrm{op}}, \mathrm{C})$ 上的 Day 卷积对称幺半群结构等价于逐点对称幺半结构 [LNP25, Example 3.14.] ，而局部化由沿包含映射 $T^{\mathrm{op}} \subset \mathrm{D}^{\mathrm{op}}$ 的限制给出。 □

推论 2.2.3。 $\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C})$ 具有唯一的对称幺半结构，使得局部化

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}),\mathcal{C}) \to \mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C})$$

是强对称幺半的。 □

这使我们能够作出如下定义。

定义 2.2.4。 C 中的一个 Q-全能 $\mathbf{E}_\infty$ 环 是 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{C}))$ 中的一个对象。对于 $\mathrm{C} = \mathrm{Sp}$，我们将 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_{\mathcal{Q}})$ 中的对象称为 Q-全能 $\mathbf{E}_\infty$ 环。

给定两个对称幺半范畴 J 和 C，$\mathrm{Fun}(\mathrm{J},\mathrm{C})$ 上 Day 卷积幺半结构的交换幺半群（当其存在时）恰好是松对称幺半函子 $\mathrm{J} \to \mathrm{C}$。我们的下一个目标是推导出 Q-全能阿贝尔群全局 $\mathbf{E}_\infty$ 环的类似描述。这将成为下一节去范畴化定理的一个关键组成部分。我们现在先进行一些准备工作。

定义 2.2.5。 设 $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ 是一个松对称幺半函子，并设 $X,\ Y \in \mathrm{D}$。记

$$\otimes\colon \mathcal{C}_{X/} \times \mathcal{C}_{Y/} \to \mathcal{C}_{X\otimes Y/} \tag{2.2.6}$$

对于将一对 $\{(A,\ X \to F(A)),\ (B,\ X \to F(B))\}$ 映射为 $(A \otimes B,\ X \otimes Y \to F(A) \otimes F(B) \to F(A \otimes B)$ 的函子。若上述函子对所有 $X,\ Y \in \mathrm{D}$ 都是始对象，则称 $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ 是可延拓的。

引理 2.2.7。 设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是小对称幺半范畴之间的可延拓松对称幺半函子。那么，对于所有 $\mathcal{E} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$，限制函子

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$$

关于 *Day* 卷积，它是强对称幺半的。特别地，沿 F 的右 *Kan* 延拓在典范意义下是宽松对称幺半的。

证明。 回忆一下，沿 F 的限制关于 Day 卷积是宽松对称幺半的，由此得到一个变换

$$F^*(I) \otimes^{\mathrm{Day}} F^*(J) \to F^*(I \otimes^{\mathrm{Day}} J)$$

对所有 I， $J \in$ 函子范畴(D,E)均成立。在 $C \in$ C上取上述变换，并应用 Day 卷积中张量积的公式，我们发现上述映射与以下映射同伦

$$\mathrm{colim}_{\otimes\downarrow C}\, IF(A) \otimes IF(B) \to \mathrm{colim}_{\otimes\downarrow F(C)}\, I(X) \otimes I(Y)$$

¯由函子 $F\colon \otimes\downarrow C \to \otimes\downarrow F(C)$ 在余极限上诱导，该函子由 F 诱导。应用 Quillen 定理 A，函子 F 是终对象当且仅当范畴 $(\otimes\downarrow C)^{(X,Y)/}$ 对所有 $(X,\ Y) \in \otimes\downarrow F(C)$ 都是可缩的。然而，很容易看出，这些范畴等价于函子 (2.2.6) 的下切片。再次应用 Quillen 定理 A 可知，这些范畴可缩当且仅当 (2.2.6) 是始对象，从而证明了该结论。 □

对于以下命题，我们在 $\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}$(P) 上赋予由 P 的笛卡尔幺半结构诱导的对称幺半结构。

引理 2.2.8. 对称幺半范畴嵌入 $\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})$ 是可延拓的。

证明。 固定 $X, Y \in$ P，并考虑以下交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D})_{X/} \times \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D})_{Y/} & \xrightarrow{\otimes} & \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D})_{X\times Y/} \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\mathcal{D}_{/X})^{\mathrm{op}} \times (\mathcal{D}_{Y/})^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\times} & (\mathcal{D}_{/X\times Y})^{\mathrm{op}}. \end{array}$$

正如在 [BH21, Pr.C.18], 的证明中所观察到的，两个竖直函子都是始函子。然而，底部的水平函子也为始函子，因为它有一个右伴随。因此，根据始函子的右消去性，顶部函子也是始函子。 □

给定一个可呈范畴 C，令 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{P}), \mathrm{C})^{\mathrm{Day}}$ 表示 Day 卷积运算子，参见 [Lur17, Con.2.2.6.7]。由于大小问题，这并不是一个对称幺半范畴（事实上，它可能不是局部小的）。尽管如此，我们有以下结果。

命题 2.2.9。 存在一个范畴的全忠实包含映射

$$\mathrm{CAlg}(\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C})) \subset \mathrm{CAlg}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}), \mathcal{C})^{\mathrm{Day}}),$$

其本质像是那些底层函子可由$\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D})$右 *Kan* 延拓得到的对象。

证明。 设 S 是一个大空间的宇宙，且 C 关于 S 是小的；令$\widehat{\mathrm{C}} :=$函子范畴$^{\mathrm{small}-R}(\mathrm{C}^{\mathrm{op}}, \widehat{\mathrm{S}})$ 为保持小极限的函子 $\mathrm{C}^{\mathrm{op}} \to \widehat{\mathrm{S}}$ 所构成的范畴，于是 C 关于 S 是可呈示的。现在 Fun(Span$_{\mathcal{Q}}$(P),C)（在这个更大的宇宙中）是一个对称幺半范畴，因此前两个引理结合起来给出一个全忠实的宽松对称幺半函子

$$\mathrm{Ran}\colon \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}), \widehat{\mathcal{C}}) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}), \widehat{\mathcal{C}}).$$

因此，我们得到一个全忠实包含映射

$$\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{CAlg}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}), \widehat{\mathcal{C}})) \subset \mathrm{CAlg}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}), \widehat{\mathcal{C}})).$$

由于 $\mathrm{C} \to \widehat{\mathrm{C}}$ 与所有小极限相交换，这可以因子分解为

$$\mathrm{CAlg}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}), \mathcal{C})^{\mathrm{Day}}) \subset \mathrm{CAlg}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}), \widehat{\mathcal{C}})),$$

由此得到所需的全忠实包含映射。展开定义即可轻易刻画其本质像。

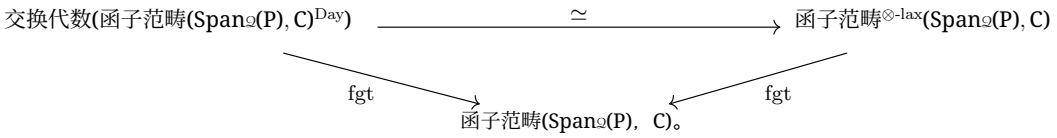
□

命题 2.2.10。 设 $\mathcal{C} \in$交换代数(Pr$^{\mathrm{L}}$)。存在一个全忠实包含映射

$$\mathrm{CAlg}(\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C})) \subset \mathrm{Fun}^{\otimes\text{-lax}}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}), \mathcal{C})$$

这将$\mathcal{Q}$-双向的$\mathbf{E}_\infty$ 环在$\mathcal{C}$ 中的范畴识别为松对称幺半函子的子范畴$\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) \to \mathcal{C}$，其中底层函子是$\mathcal{Q}$-双向的$\mathcal{C}$中的幺半对象。

证明。 Day 卷积的泛性质（参见 [Lur17，例 2.2.6）9], 给出如下交换图表



结合命题 2.2.9，即得所求结果。 □

我们通常会透过前一个命题的视角来考察 C 中的 Q-自伴随$\mathbf{E}_\infty$ 环。例如，采用这一视角，我们可以突出 Q-自伴随$\mathbf{E}_\infty$ 环所包含的一些重要附加结构。

注 2.2.11。 设 $E \in$CAlg(CMon$_{\mathcal{Q}}$(C)) 是 C 中的 Q-自伴随$\mathbf{E}_\infty$ 环，将其视为一个宽松对称幺半函子

$$\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) \to \mathcal{C}$$

其对 P^{op} 的限制保极限。

1. 考虑赋予笛卡尔对称幺半结构的 P。则包含映射 $\mathrm{P}^{\mathrm{op}} \subset$Span$_{\mathcal{Q}}$(P) 是强幺半群的。通过此函子预复合 E，我们得到一个松幺半群函子 $\mathrm{P}^{\mathrm{op}} \to$C。 注意，$\mathrm{P}^{\mathrm{op}}$ 是余笛卡尔对称幺半群，因此根据余笛卡尔对称幺半范畴的泛性质，上述函子等价于一个函子 $\mathrm{P}^{\mathrm{op}} \to$CAlg(C)。特别地，对于所有 $X \in$ P，$E(X)$ 都是一个 $\mathbf{E}_\infty$ 环；对于所有 f: $X \to Y$，res$_f$: $E(Y) \to E(X)$ 是 $\mathbf{E}_\infty$ 环之间的映射。

2. 考虑 Q 中的一个映射 q: $Y \to X$。如下文命题 2.2.13 所述，Span$_{\mathcal{Q}}$(P) 中的 Span $Y = Y \to X$ 是一个 X-模的映射，其中 X 通过前一点是 Span$_{\mathcal{Q}}$(P) 中的交换代数，而 Y 通过 res$_q$ 是一个 X-模。松对称幺半函子 E 保持这一结构，因此我们得到映射

$$\mathrm{tr}_q \colon E(Y) \to E(X)$$

自然是一个 $E(X)$-模之间的映射。我们可以将其视为弗罗贝尼乌斯互反律的一个类似物。

我们来解释上面注释第 2 点中的主张。为便于后续使用，我们还将记录该陈述的一个相干形式。

命题 2.2.12. 设 $\mathcal{C} \in$交换代数(Pr$^{\mathrm{L}}$)，且 E 是 $\mathcal{Q}$-双向的 $\mathbf{E}_\infty$ 环，位于$\mathcal{C}$中。那么存在一个提升

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Mod}_{E(*)}(\mathcal{C}) \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) & \xrightarrow{E} & \mathcal{C} \end{array}$$

将 E 提升为$\mathcal{Q}$-双向的 $\mathbf{E}_\infty$ 环，位于模$E(*)(\mathcal{C})$中。

证明。 点 $*$ 是 Span$_{\mathcal{Q}}$(P) 的单位元，因此我们可以将所需的 E 提升定义为以下复合

$$\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) \simeq \mathrm{Mod}_* \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) \xrightarrow{E} \mathrm{Mod}_{E(*)}(\mathcal{C}). \qquad \square$$

我们还可以通过以下命题得到这一陈述相对于任意 $X \in$P 的一个版本。在以下命题中，我们用 Span$_{\mathcal{Q}}$(P/$_X$) 表示由以下形式的 Span 所构成的范畴

在 $\mathbf{P}_{/X}$ 中

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longleftarrow & W & \xrightarrow{\in\bar{\mathcal{Q}}} & Z \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & X. & & \end{array}$$

这同样通过 $\mathbf{P}_{/X}$ 中的拉回具有对称幺半结构。

命题 2.2.13。 设 $X \in \mathcal{P}$。那么限制

$$\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}_{/X}) \to \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})$$

是典范的宽松对称幺半结构。特别地，给定 $E \in$交换代数$(\mathbf{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C}))$，存在一个图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}_{/X}) & \xrightarrow{E_{|X}} & \mathrm{Mod}_{E(X)}(\mathcal{C}) \\ \downarrow & & \| \\ \mathrm{Mod}_X(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}_{E(X)}(\mathcal{C}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{fgt}} \\ \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) & \xrightarrow{E} & \mathcal{C} \end{array}$$

由宽松对称幺半函子组成。

证明。 考虑伴随

$$\mathrm{fgt}\colon \mathcal{P}_{/X} \rightleftarrows \mathcal{P}\colon - \times X,$$

并注意到 $- \times X$ 是强对称幺半的。应用 [BH21, Cor.C.21],可导出一个伴随

$$\mathrm{Span}(- \times X)\colon \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) \rightleftarrows \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}_{/X})\colon \mathrm{Span}(\mathrm{fgt}).$$

然而，按定义，$\mathbf{Span}(- \times X)$ 再次具有强幺半结构，因此我们得出 $\mathbf{Span}(\mathbf{fgt})$ 具有典范的宽松对称幺半结构。“特别是”这一说法可通过将前一命题的论证应用于宽松对称幺半复合而得。

$$\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}_{/X}) \to \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) \xrightarrow{E} \mathcal{C}. \qquad \square$$

2.3 与两可 $\mathbf{E}_\infty$ 环相关的同调理论

现在我们解释如何定义与 $\mathbf{C}$ 中的 $\mathbf{Q}$-全能$\mathbf{E}_\infty$环 E 相关的“同调理论”。非正式地说，我们将通过要求 E-同调 $\mathbf{D}E(-)$ 与可表对象上的 E-上同调一致来定义它，即对于 $A \in T$，$\mathbf{D}E(A) := E(A)$。不过，这一赋值的函子性将通过转移而非限制体现。随后，对所有 T上的预层作 Kan 延拓，得到一个同调理论。要使这一定义合理，显然必须有 $T \subset \mathbf{Q}$，因此我们作出如下假设：

假设 2.3.1。 在本小节中，可归纳子范畴 $\mathsf{Q} \subset \mathsf{P}$ 包含由可表对象张成的全子范畴 $T \subset \mathsf{P}$。

为便于后续使用，我们也将定义推广到任意对象 $Y \in \mathsf{Q}$。

例 2.3.2。 一个关键例子是可归纳子范畴 $\pi \subset \mathsf{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群。将本节的构造应用于温和上同调，就得到 §5.3 中研究的温和同调理论。一个重要的反例是 $\mathsf{O} \subset \mathsf{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群。特别是，我们不会按照 Schwede 的含义为全局谱定义同调理论。

注 2.3.3。 注意，左 Kan 延拓定义了悬挂谱函子的一个类似物 $\Sigma^\infty_+ \colon \mathsf{P} \to$谱$_{\mathcal{Q}}$。给定 $E \in$ 谱$_{\mathcal{Q}}$，对 E-同调的定义有一个自然的猜想，它将等变谱和普通谱情形下的定义推广而来，即 $X \mapsto \Sigma^\infty_+ X \otimes E$.我们的定义通常与此不同，而是旨在确保良好的对偶性质。一个重要的例外是 T，$\mathsf{Q} = \mathsf{Orb}_G$ 的情形；此时我们的定义确实还原了通常的 G-等变同调定义，见注 2.3.8。

定义 2.3.4. 令 $E \colon \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathsf{P}) \to \mathsf{C}$ 为 C 中的一个 Q-双手性 $\mathbf{E}_\infty$ 环，并令$Y \in \mathsf{Q}$。考虑松对称幺半函子

$$E_{|Y} \colon \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathscr{P}_{/Y}) \to \mathrm{Mod}_{E(Y)}\, \mathcal{C}.$$

注意存在一个包含映射

$$\mathcal{Q}_{/Y} \subset \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}/F})$$

它是对称幺半范畴之间的包含映射。沿此包含映射限制 $E_{|F}$，可得到一个松对称幺半函子

$$\mathcal{Q}_{/F} \to \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathscr{P}_{/F}) \to \mathrm{Mod}_{E(F)}\, \mathcal{C}$$

根据 Pr.2.2.12。沿包含映射对该函子取左 Kan 延拓

$$\mathcal{Q}_{/F} \subset \mathscr{P}_{/F}$$

得到一个函子

$$\mathsf{D}E \colon \mathscr{P}_{/Y} \to \mathrm{Mod}_{E(F)}\, \mathcal{C},$$

我们称之为 E-同调。由于沿强幺半函子取左 Kan 延拓，在 Day 卷积下仍是强幺半的（BMS23, 推论 3.8],），因此会诱导出交换代数上的函子，我们发现 $\mathsf{D}E$ 仍然典范地是松对称幺半的。

上述构造通常表现不佳；下面的命题将说明它在何种情况下表现良好。

命题 2.3.5。 设 E 是 $\mathcal{Q}$-双侧的 $\mathbf{E}_\infty$ 环（*ring*），位于 $\mathcal{C}$ 中，并设 $Y \in \mathcal{Q}$。若该复合映射

$$\mathcal{Q} \to \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathscr{P}) \xrightarrow{E} \mathcal{C}$$

是从 T 左 *Kan* 延拓而来，则 E-同调

$$\mathsf{D}E\colon \mathcal{P}_{/Y} \to \mathrm{Mod}_{E(Y)}\,\mathcal{C}$$

是保余极限的。

注 2.3.6。 我们将在 Pr.3.5.3 中看到，对于通过去范畴化获得的 Q-自伴的$\mathbf{E}_\infty$ 环，即来自定理 3.5.1 的环，这一条件是满足的。

命题 *2.3.5* 的证明。 为证明此结论，我们可以忘掉 $E(Y)$-模结构。于是，由函子 $\mathsf{P}_{/Y} \to \mathsf{C}$ 是保余极限的当且仅当它是从 $T_{/Y}$ 左 Kan 延拓而来这一事实，结论立即成立。 □

让我们以例 2.1.8 中的 G-等变稳定同伦论为例，明确写出这一同调构造。

定义 2.3.7。 设 C 是一个稳定可呈对称幺半范畴，且 $E \in \mathsf{CAlg}(\mathsf{CMon}_G(\mathsf{C}))$。与 E 相关的 G-同调理论是如下宽松对称幺半且保余极限的函子

$$E[-]\colon \mathcal{S}_G \to \mathrm{Mod}_{E(*)}\,\mathcal{C}$$

由复合

$$\mathcal{F}\mathrm{in}_G \to \mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in}_G) \xrightarrow{E} \mathrm{Mod}_{E(*)}\,\mathcal{C}$$

沿包含映射 $\mathsf{Fin}_G \subset \mathsf{S}_G$ 作左 Kan 延拓得到。

注 2.3.8。 当 $\mathsf{C} = \mathsf{Sp}$ 时，我们对 G-同调的定义与经典定义一致。这是因为函子 $\mathsf{Span}(\mathsf{Fin}_G) \to \mathsf{Sp}^G$ sending G/H to$\Sigma^\infty_+ G/H$ 是强对称幺半的，再结合 $\mathsf{Span}(\mathsf{Fin}_G)$ 中的对偶是通过反射跨得到的这一事实即可得出。

构造 2.3.9。 存在一个典范的全忠实强对称幺半函子

$$(-)//G\colon \mathcal{F}\mathrm{in}_G \to \mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}/\mathbf{B}G}, \qquad G/H \mapsto (G/H)//G \simeq \mathbf{B}H \to (G/G)//G \simeq \mathbf{B}G.$$

因此，对于任意包含 G 的子群的分类空间之间的忠实态射的可归纳子范畴 $\mathsf{Q} \subset \mathsf{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群，沿 $\mathsf{Span}(\mathsf{Fin}_G) \to \mathsf{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathsf{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群$/\mathbf{B}G)$ 的限制定义了一个 lax 对称幺半且保持极限的函子

$$\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{CMon}_G(\mathcal{C}), \qquad E \mapsto E_G.$$

此外，根据构造，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_G & \xrightarrow{E_G[-]} & \mathrm{Mod}_{E_G(*)}\mathcal{C} \\ \big\downarrow{\scriptstyle (-)//G} & & \big\downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ \mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}/\mathbf{B}G} & \xrightarrow{\mathsf{D}E} & \mathrm{Mod}_{E(\mathbf{B}G)}\mathcal{C} \end{array}$$

是交换的，其中 $E_G[-]$ 和 DE 是 Df.2.3.4 和 Df.2.3.7 中构造的 G-等变同调理论，而右侧的等价将 $E(\mathbf{B}G)$ 与 $\simeq E_G(*)$ 识别起来。

3 参数化范畴论与去范畴化

上一节为我们赋予了一个性质良好的 Q-双可逆$\mathbf{E}_\infty$ 环范畴，它编码了乘法上同调理论，并配备了针对局部属于 Q 的映射的一致转移体系。本节将证明定理 3.5.1，通过去范畴化过程构造此类对象的例子。作为动机，回顾函子的存在性

$$\mathrm{CAlg} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}}), \qquad A \mapsto \mathrm{Mod}_A$$

该函子将一个$\mathbf{E}_\infty$ 环映射到其模范畴。此函子具有一个右伴随，即去范畴化函子，它将 C $\in$CAlg($\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}}$) 映射到 C 中单位元的$\mathbf{E}_\infty$ 环自同态。我们对 Q-双可逆$\mathbf{E}_\infty$ 环的构造，具体而言，它们在限制下的取值与函子性，同样将通过取适当图表 C(–) 中单位元的自同态来进行；这里的 C(–) 是由可呈稳定范畴组成的图表，即一个参数化范畴。

相干转移映射的构造将受到 [Har20] 的启发。具体而言，Harpaz 指出，$K(n)$-局部上同调理论中的相干转移映射，是由 [HL13] 意义下 $K(n)$-局部范畴的高阶 半加性所提供的。类似地，在假设 C(–) 具有所谓的 Q-参数化半加性 之后，我们将构造由 Q-两可的$\mathbf{E}_\infty$ 环所编码的相干转移。这个概念由 [CLL24] 开发，读者在本节阅读过程中或许可以参考该文 。

为使记号更简洁，并为今后的应用提供便利，我们再次在一般的参数化情形下进行讨论。为此，我们再次固定一个任意的小范畴 T。回顾一下，我们用 P 表示 T 上的预层范畴。

我们在 §3.1 回顾参数化高阶范畴论中的半加性和稳定性概念，并定义依赖于适当子范畴 Q $\subset$P 的变体。在 §3.2，我们讨论参数化幺半性及其与半加性的相互作用。特别地，我们证明普适 Q-半加性范畴是某个适当范畴中的幂等代数。这足以赋予对称幺半 Q-半加性范畴的单位元以 Q-两可$\mathbf{E}_\infty$-环结构，但这种结构仅在参数化范畴“内部”成立。

要从这里推导出定理 3.5.1，还需要进一步工作。在 §3.3 中，我们注意到幺半参数化范畴的非直化本身也是幺半的，并为

它给出一种新的表示。从某种意义上说，这使我们能够计算此前得到的结构的外化。在 §3.4 中，我们构造了与幺半稳定范畴相关的整体截面函子的一个参数化版本。最后，在 §3.5 中，我们将所有这些部分结合起来，证明一般性的去范畴化结论定理 3.5.1。

3.1 半可加与稳定参数化范畴

我们从参数化范畴论的基本概念开始。

定义 3.1.1。 A T-范畴 C 是一个保持极限的函子 $\mathsf{C} : \mathsf{P}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Cat}$。这定义了一个范畴

$$\mathrm{Cat}(T) \subset \mathrm{Fun}(\mathscr{P}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}),$$

其态射称为 T-范畴之间的函子 。

注 3.1.2。 显然，右 Kan 延拓与限制定义了一个等价

$$\mathrm{Cat}(T) \simeq \mathrm{Fun}(T^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}).$$

特别地，Cat(T) 是可呈示的。

本文中，我们最感兴趣的是 $T = \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$ 的情形。我们称 $\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$-范畴为***ab*-全局范畴**。

定义 3.1.3。 给定一个 T-范畴 C，我们将其底层范畴 C($*$) 定义为 C 在 $* \in \mathsf{P}$ 上的取值。由于 C 保持极限，我们得到一个等价 $\mathsf{C}(*) \simeq \lim_{T^{\mathrm{op}}} \mathsf{C}$。

注 3.1.4。 范畴 Cat(T) 自然地是 Cat-富集的。给定 ab-全局范畴 C 和 D，我们用 Fun(C,D) 表示从 C 到 D 的函子范畴。

定义 3.1.5。 我们定义 T-范畴 T-空间:

$$\underline{\mathcal{S}}_T \colon \mathscr{P}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}, \quad X \mapsto \mathscr{P}_{/X},$$

其中函子性由拉回给出。由 ∞-topos P 的下降性质，这是一个 T-范畴

定义 3.1.6。 设 $\mathsf{Q} \subset \mathsf{P}$ 是一个可归纳子范畴。一个 T-范畴 C

1. 若对于 Q 中的任意映射 p: $X \to Y$，限制 $p^* \colon \mathsf{C}(Y) \to \mathsf{C}(X)$ 都存在左伴随 $p_!$: $\mathsf{C}(X) \to \mathsf{C}(Y)$，且这些左伴随满足基变换，则具有 Q- 余极限 。这意味着，每个方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(Y) & \xrightarrow{p^*} & \mathcal{C}(Z) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2^*} \\ \mathcal{C}(X) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^*} & \mathcal{C}(X \times_Y Z), \end{array}$$

¯由 P 中的拉回方块诱导，且 p 属于 Q 时，都是垂直左伴随可交换的，即自然变换 $\mathrm{pr}_{1!} \circ \mathrm{pr}_2^* \to f^* \circ p_!$ 是等价。

2. 若 $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \coloneqq (-)^{\mathrm{op}} \circ \mathsf{C}$ 具有 Q-余极限，则具有 Q-极限。若 C 具有 Q-极限，我们将把沿着 Q 中的映射 $p\colon X \to Y$ 的限制 $p^*\colon \mathsf{C}(Y) \to \mathsf{C}(X)$ 的右伴随记作 $\bar{}p_*\colon \mathsf{C}(X) \to \mathsf{C}(Y)$。

3. 若 $\mathsf{C}\colon T^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ 通过具有 K-余极限的范畴及保持 K-余极限的函子所构成的子范畴 $\mathbf{Cat}^{\mathcal{K}\text{-L}} \subset \mathbf{Cat}$ 因子化，则对一组范畴 K，C 具有纤维逐点 K- 余极限，

4. 若 C^{op} 具有纤维逐点 K-余极限，换言之，要求 C 通过 $\mathbf{Cat}^{\mathcal{K}\text{-R}}$ 因子化，则具有纤维逐点K-极限。

5. 若其具有 Q-余极限和 Q-极限，并且对于 Q 中每个截断的映射 $_f\colon X \to Y$，典范范数映射

$$\mathrm{Nm}_f\colon f_! \to f_*,$$

从 f 的左伴随到右伴随的映射（根据 f 的截断次数归纳定义）是一个等价。

注 3.1.7。 关于范数映射 Nmf 的定义详情（最初由 Hopkins–Lurie [HL13, 定义），请参阅 [CLL24, Con.3.3]。

定义 3.1.8. 设 C 和 D 是两个具有 Q-余极限的 T-范畴。若对于 Q 中的每个映射 $f\colon X \to Y$，方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(Y) & \xrightarrow{F_Y} & \mathcal{D}(Y) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathcal{C}(X) & \xrightarrow{F_X} & \mathcal{D}(X) \end{array}$$

垂直方向上可左伴随化。在这种情况下，存在一个典范等价 $F_Y f_! \simeq f_! F_X$。对偶地，可以定义具有 Q-极限的 T-范畴之间的保 Q-极限函子。若每个函子 $F(X)\colon \mathsf{C}(X) \to \mathsf{D}(X)$ 都保持 K-（余）极限，则称 F 保持纤维逐点 K-（余）极限。

For 对于 Q-半加性 T-范畴之间的函子，我们有以下令人欣喜的自对偶性 ty.

引理 3.1.9 ([CLL24,Cor.3.17])。 设 $\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ 都是$\mathcal{Q}$-半加性的。那么，函子$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保持$\mathcal{Q}$-余极限，当且仅当它保持$\mathcal{Q}$-极限。

定义 3.1.10。考虑 $\mathbf{Cat}(T)$ 的以下子范畴：

1. $\mathbf{Cat}(T)_{\mathcal{Q}\text{-co}}$ 由那些具有 Q-余极限的 T-范畴以及保持 Q-余极限的函子所张成。

2. Cat(T)$_{\mathcal{Q}\text{-sa}}$是 Cat(T)$_{\mathcal{Q}\text{-co}}$的全子范畴，由 Q-半加性T-范畴所张成。

3. Cat(T)$_{\mathcal{Q}\text{-st}}$是 Cat(T)$_{\mathcal{Q}\text{-sa}}$的全子范畴，其对象为那些还能够通过由稳定范畴和正合函子组成的子范畴 Cat$^{\mathrm{st}}$ ⊂Cat 的 Q-半加性范畴 C。这类 T-范畴称为 Q-稳定。

下面是一个重要的 Q-半加性范畴例子。

例 3.1.11。 </style]在 [CLL24, Con.4.1], 中，构造了一个 Q-半加性 T-范畴 Span(Q)，满足

$$\underline{\mathrm{Span}}(\mathcal{Q})(X) \coloneqq \mathrm{Span}(\bar{\mathcal{Q}}_{/X}).$$

给定一个映射 $f\colon X \to Y$，函子

$$f^*\colon \mathrm{Span}(\bar{\mathcal{Q}}_{/Y}) \to \mathrm{Span}(\bar{\mathcal{Q}}_{/X})$$

由对拉回函子 : Q Q 应用 Span(f^* $_{/Y} \to$ $_{/X}$ f) 得到。此外，当 本身属于 Q 时，f^* 的左伴随（也是右伴随） $f_!$ 由 $f_!(A \to X) = A \to X \to Y$ 给出，即由后复合函子诱导的跨上的函子。

考虑对象 $* \in$ Span(Q) $\simeq$ Span(Q)($*$)。根据同上文献中的定理 5.1，对于每个 Q-半加性 T-范畴 C，(Span(Q) $*$) 都满足以下泛性质：函子

$$\mathrm{ev}_*\colon \mathrm{Fun}^{\mathcal{Q}\text{-co}}(\underline{\mathrm{Span}}(\mathcal{Q}), \mathcal{C}) \to \mathcal{C}(*)$$

是一个等价，其中左侧表示 Fun(Span(Q)，C) 中由保 Q-余极限的函子所张成的全子范畴。

定义 3.1.10 中的所有范畴在 Cat(T) 中都对极限封闭。我们将在与我们相关的一个情形中证明这一点；其他情形更简单。

命题 3.1.12。 $\mathrm{Cat}(T)_{\mathcal{Q}\text{-st}}$ 存在所有小极限，并且这些极限在包含映射 $\mathrm{Cat}(T)_{\mathcal{Q}\text{-st}} \to \mathrm{Cat}(T)$下保持。

证明。 由 [Lur17, Cor.4.7.4.18] 与 Cat$^{\mathrm{st}}$ ⊂Cat 保持极限这一观察相结合即可得出。 □

3.2 对称幺半参数化范畴

现在让我们来考察参数化世界中的幺半结构。

定义 3.2.1. T-范畴构成的范畴 Cat(T)，借助笛卡尔对称幺半结构成为对称幺半范畴，从而得到范畴

$$\mathrm{Cat}(T)^{\otimes} \coloneqq \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}(T)) \simeq \mathrm{Fun}^{\mathrm{R}}(\mathscr{P}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}^{\otimes})$$

的对称幺半结构 T-范畴。

例3.2.2。设 C 是一个具有纤维积有限积的对称幺半结构 T-范畴。那么，通过为每个 C(X) 配备笛卡尔对称幺半结构，我们得到一个对称幺半结构 T-范畴 C$^{\times}$ 。

定义 3.2.3. 根据 [MW22, Cor.8.2.5], ，对于任意一类 K $\subset$ Cat(T) 中的 T-范畴，范畴 Cat(T)$_{\mathcal{K}\text{-co}}$ 上都存在对称幺半结构，其对象为 K-余完备T-范畴；两个 K-余完备T-范畴的张量积上的函子 C $\otimes$ D $\to$ E，等价于一个在每个变量上分别保 K-余极限的函子 C $\times$ D $\to$ E。将此应用于子范畴 Cat(T)$_{\mathcal{Q}\text{-co}} \subset$ Cat(T)，我们便在 Cat(T)$_{\mathcal{Q}\text{-co}}$ 上得到一个对称幺半结构。

现在我们将明确给出 Cat(T)$_{\mathcal{Q}\text{-co}}$ 中交换代数的结构。其他两种情形也有类似的陈述。

定义 3.2.4. Q-*lex* 对称幺半 T-范畴 是一个对称幺半T-范畴 C，满足

1. C 是一个 Q-余完备 T-范畴;

¯2. 对每个映射 $f\colon X \to Y$ 属于 Q，投影映射

$$f_!(f^*C \otimes D) \to C \otimes f_!D$$

对所有 $C \in$ C(Y) 和 $D \in$ C(X) 都是等价。

我们将 Cat(T)$^{\otimes}$ $_{\mathcal{Q}\text{-co}} \subset$ Cat(T)$^{\otimes}$ 定义为由 Q-余完备对称幺半 T-范畴，以及保持 Q-余极限的强幺半函子 $F\colon$ C $\to$ D 所张成的子范畴。

命题 3.2.5. 存在一个等价 $\mathrm{Cat}(T)^{\otimes}{}_{\mathcal{Q}\text{-co}} \simeq \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}(T)_{\mathcal{Q}\text{-co}})$。

证明。 对称幺半范畴 Cat(T)$_{\mathcal{Q}\text{-co}}$按定义是 Cat(T)$^{\times}$ 的忠实子运算子，因此，对称幺半 T-范畴属于 Cat(T)$^{\otimes}$ $_{\mathcal{Q}\text{-co}}$是一种性质，函子也同样如此。查阅 [MW22, Df.2.6.1.1]可知，该条件恰好就是上文给出的条件。

□

命题 3.2.6。 $\mathcal{Q}$ 中的积使$\mathrm{Span}(\mathcal{Q})$ 成为一个$\mathcal{Q}$-*lex* 对称幺半T-范畴。

证明。 注意，Q/•: P$^{\mathrm{op}} \to$ Cat 经由 Cat$^{\times}$ 分解。取相应的笛卡尔幺半范畴后，我们得到一个对称幺半范畴的图表。现在，我们可以对其应用 Span(–)，得到作为对称幺半范畴图表的 Span(Q)；这里用到了 Span(–) 保持有限积这一点。

从这里也很容易计算出投影映射是一个等价，因为根据例 3.1.11 中对 $f_!$ 的描述，它展开后就是基变换等价。 □

定义 3.2.7. 我们将命题 3.2.6 所保证的 Span(Q) 上的 Q-有限极限对称幺半结构记作 $\underline{\mathrm{Span}}(\mathrm{Q})^{\otimes}$ 。

定理 3.2.8。 遗忘函子

$$\mathrm{Mod}_{\underline{\mathrm{Span}}(\mathcal{Q})}\left(\mathrm{Cat}(T)_{\mathcal{Q}\text{-co}}\right) \to \mathrm{Cat}(T)_{\mathcal{Q}\text{-co}}$$

是全忠实的，其本质像为 $\mathrm{Cat}(T)_{\mathcal{Q}\text{-sa}}$。特别地，$\mathrm{Span}(\mathcal{Q})$ 是 $\mathrm{Cat}(T)_{\mathcal{Q}\text{-co}}$ 中的幂等代数，并且一个 $\mathcal{Q}$-余完备的 T-范畴是 $\mathrm{Span}(\mathcal{Q})$上的模，当且仅当它是$\mathcal{Q}$-半加性的。

证明。 本证明仿照 [Har20, Cor.5.3]中的证明。首先注意，遗忘函子有一个左伴随，由 Span(Q) $\otimes$ – 给出。我们首先证明，单位 C $\to$ Span(Q) $\otimes$C 是等价，当且仅当 C 是 Q-半加性的。若单位是等价，则 C 张量化于 Span(Q) 上，因此根据 [CLL24, Cor.6.4]，C 是 Q- 半加性的。反过来，假设 C 是 Q-半加性的。那么根据 前引文中的定理 6.5，$\underline{\mathrm{Span}}(\mathrm{Q}) \otimes \mathrm{C}$ 也是 Q-半加性的。因此，只需证明诱导映射

$$\mathrm{Fun}^{\mathcal{Q}\text{-co}}(\underline{\mathrm{Span}}(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Fun}^{\mathcal{Q}\text{-co}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

对于所有 Q-半加性 D，它是一个等价；然而，通过柯里化，该函子等价于函子

$$\mathrm{Fun}^{\mathcal{Q}\text{-co}}(\underline{\mathrm{Span}}(\mathcal{Q}), \mathrm{Fun}^{\mathcal{Q}\text{-co}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})) \to \mathrm{Fun}^{\mathcal{Q}\text{-co}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

由沿包含映射 $* \to$ Span(Q) 限制所诱导。由于 $\mathrm{Fun}^{\mathcal{Q}\text{-co}}$(C，D) 再次承认 Q-半加性范畴 C 的作用，根据上引定理 6.5，它也是 Q-半加性的。因此，根据上引定理 5.1，上述映射是一个等价。

现在我们将证明，对于所有 Span(Q)-模 C，余单位是一个等价。注意，根据前面的论证，这样的 C 是 Q-半加性的。由于遗忘函子是保守的，这一结论由复合这一事实推出：

$$\mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Span}}(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

根据三角恒等式，该复合与 C 的恒等态射同伦，而第一个映射根据前一部分是一个等价。这两个观察结合起来，便证明了第一个断言。最后一个断言由幂等代数理论推出；参见 [Lur17, §4.8]。 □

推论 3.2.9。 $\mathrm{Cat}(T)_{\mathcal{Q}\text{-sa}}$ 是一个对称幺半范畴，其单位元为$\mathrm{Span}(\mathcal{Q})$。

3.3 非直化对称幺半参数化范畴

设 $\mathsf{C}^{\otimes}\colon \mathsf{P}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Cat}^{\otimes}$ 是一个对称幺半 T-范畴。那么，给定两个对象$X \in \mathsf{C}(A)$ 和 $Y \in \mathsf{C}(B)$, 我们可以通过以下公式定义 X 和 Y 的外张量积：

$$X \boxtimes Y \coloneqq \pi_1^*(X) \otimes \pi_2^*(Y) \in \mathcal{C}(A \times B).$$

在本小节中，我们将说明一种方法，证明外张量积在 $\int \mathsf{C}$（即 $\mathsf{C}^{\otimes}$ 的余笛卡尔解直化）上定义了一个对称幺半结构。我们的方法适用于显式计算，我们将把它应用于 Span(Q) 这一具体例子。我们先从 Bachmann–Hoyois 的一个关键结果开始；为此，需要建立以下记号。

定义 3.3.1。 给定一个范畴 S，我们用 $\mathrm{Fin}(S)$ 表示 S 的有限余积完备化。容易看出，$\mathrm{Fin}(S)$ 等价于函子

$$\mathrm{Fun}(-, S)\colon \mathcal{F}\mathrm{in}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}, \quad I \mapsto \mathrm{Fun}(I, S).$$

$\mathrm{Fin}(S)$ 中的一个映射若为笛卡尔映射，则称为折叠映射。这定义了一个拉回稳定子范畴 $\mathrm{Fin}(S)_{\nabla} \subset \mathrm{Fin}(S)$。

由于 $\mathrm{Fin}(S)$ 具有有限余积，包含映射 $S \hookrightarrow \mathrm{Fin}(S)$ 唯一延拓为一个函子

$$\iota\colon \mathcal{F}\mathrm{in} \times S \to \mathcal{F}\mathrm{in}(S), \quad (I, X) \mapsto \coprod_I X.$$

为函子 ι 的源和目标赋予适当的三元组结构（按 [HHLN23] 的意义）

$$(\mathcal{F}\mathrm{in} \times S, \mathcal{F}\mathrm{in} \times S, \mathcal{F}\mathrm{in} \times S^{\simeq}) \quad \text{and} \quad (\mathcal{F}\mathrm{in}(S), \mathcal{F}\mathrm{in}(S), \mathcal{F}\mathrm{in}(S)_{\nabla}),$$

我们得到一个函子

$$\mathrm{Span}(\iota)\colon \mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in}) \times S^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Span}_{\nabla}(S).$$

命题 3.3.2 ([BH21,Pr.C.4])。 设 S 为任意范畴。则沿函子的限制

$$\mathrm{Span}(\iota)^*\colon \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}_{\nabla}(\mathcal{F}\mathrm{in}(S)), \mathrm{Cat}) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in}) \times S^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat})$$

在以下两个满子范畴之间诱导出一个等价:

1. 保积函子的全子范畴 $\mathrm{Span}\nabla(S) \to \mathrm{Cat}$;

2. 函子 $\mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in}) \times S^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}$ 中在第一变量上保持积的全子范畴；该范畴本身等价于 函子范畴$(S^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}^{\otimes})$。

回顾完这些内容后，我们可以给出本节的主要定义。

定义 3.3.3. 给定一个对称幺半结构 T-范畴 $\mathsf{C}^{\otimes}$，将其视为一个保持积函子 $\mathsf{C}^{\otimes}$: Span$_{\nabla}$(Fin(P)) $\to$ Cat（通过上述等价得到），我们定义$\int\mathsf{C}^{\otimes} \to$ Span(Fin) 为以下复合

$$\int \mathcal{C}^{\otimes} \to \mathrm{Span}_{\nabla}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathcal{P})) \to \mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in}).$$

这定义了一个函子

$$\int(-)\colon \mathrm{Cat}(T)^{\otimes} \to \mathrm{Cat}_{/\,\mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in})}\,. \tag{3.3.4}$$

在下面的命题中，我们借助解直化以及包含映射 $\mathsf{Cat}^{\otimes} \simeq \mathsf{CMon}(\mathsf{Cat}) \subset$ 函子范畴 (Span(Fin)，Cat)，将 $\mathsf{Cat}^{\otimes}$ 视为 $\mathsf{Cat}_{/\,\mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in})}$ 的一个子范畴。

命题 3.3.5. 上面的函子 *(3.3.4)* 分解经过 $\mathrm{Cat}^{\otimes}$。

证明. 根据 [PLL25，推论 2.49], ，余笛卡尔纤维化 p: C $\to$ D 是某个保持积函子的解直化，当且仅当满足以下两个条件：

1. C 存在由 p 保持的积；
2. 对所有 X，$Y \in$ C，投影 $X \times Y \to X$ 都是余笛卡尔边。

由于余笛卡尔纤维化以及上述条件都在复合下封闭，要证明 $\int\mathsf{C}^{\otimes} \to$ Span(Fin) 是某个保持积函子的解直化，只需分别证明函子 $\int\mathsf{C}^{\otimes} \to$ Span$_{\nabla}$(Fin(P)) 和 Span$_{\nabla}$(Fin(P)) $\to$ Span(Fin) 满足这一点。根据上面的等价，前者满足这些性质，因为按定义它就是某个保持积函子的解直化。另一方面，根据 [CHLL25，命题 3.1.2]，映射 Span$_{\nabla}$(Fin(P)) $\to$ Span(Fin) 也是某个保持积函子的余笛卡尔解直化。

□

注 3.3.6。 容易计算得出，$\int\mathsf{C}^{\otimes}$ 在 $1 \in$Span(Fin) 上的纤维恰好是 $\int$C，因此前一个命题为 $\int$C 赋予了对称幺半结构。更明确地说，考虑 (X, A) 和 (Y, B)，它们是 $\int$C 中的两个对象。这两个对象沿 $* \amalg * \to *$ 的余笛卡尔推前，可通过以下步骤给出：首先，计算 Span$_{\nabla}$(Fin(P)) $\to$Span(Fin) 中从 A 和 B 的余积出发的余笛卡尔边。随后，$\int\mathsf{C}^{\otimes}$ 中的张量积由沿该映射的余笛卡尔推前给出。然而，前者很容易看出就是这个 Span

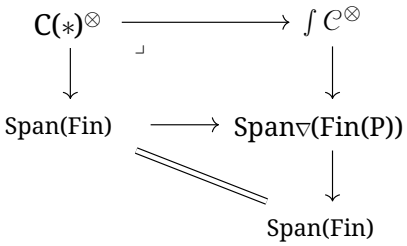
$$A \amalg B \xleftarrow{\pi_A \amalg \pi_B} A \times B \amalg A \times B \xrightarrow{\nabla} A \times B.$$

该映射的余笛卡尔推前给出 $\pi_A^* X \otimes \pi_B^* Y$，正如所需。类似地，可以计算出 $\int\mathsf{C}^{\otimes}$ 的单位元为对象 $(\mathbb{1}_{\mathcal{C}(*)}, *)$。

注 3.3.7。 前一个命题只用到了 P 存在有限积，因此命题 3.3.5 在这一一般性下成立。特别地，给定任意具有有限积的范畴 S 和一个函子 F: $S \to \mathsf{Cat}^{\otimes}$，底层函子 $S \to$ Cat 的解直化 $\int F$ 具有由外张量积给出的典范对称幺半结构。

命题 3.3.8。 设 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 是一个对称幺半 T-范畴。那么，存在一个关于 $\mathcal{C}$ 自然的全忠实对称幺半范畴嵌入 $\mathcal{C}(*)^{\otimes} \to \int \mathcal{C}^{\otimes}$。

证明。 考虑由 T 的终对象到 $*$ →P 的包含映射所诱导的函子 Span(Fin) → Span▽(Fin(P))。这诱导出以下交换图



容易看出，所得函子

$$\mathcal{C}(*)^{\otimes} \to \int \mathcal{C}^{\otimes}$$

在 Span(Fin) 上保持余笛卡尔态射。此外，由于终对象 $*$ 的唯一自态射是恒等态射，我们也立即得到该函子是全忠实的。

□

在讨论了对称幺半 T-范畴的余笛卡尔解直化上的对称幺半结构的一般构造之后，本节余下部分的目标是明确计算 ∫Span(Q)$^{\otimes}$，即对称幺半 T-范畴 Span(Q)$^{\otimes}$ 的解直化。

定义 3.3.9。 令 $\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}$(P) 为箭范畴 Ar(P) =函子范畴([1],P) 的全子范畴，其由 Q 中的映射张成，并通过笛卡尔积视为一个对称幺半范畴。若映射 η 属于 $\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}$(P)，且 $t(\eta)$ 可逆，则称其为纤维逐点映射，其中t: Ar(P) → P 表示在 $[1]$ 的目标处求值。纤维逐点映射在 $\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}$(P) 中对积和拉回封闭，因此我们得到对称幺半范畴 $\mathrm{Span}_{\mathrm{fw}}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{P}))^{\otimes}$，其中前向映射是纤维逐点映射。

我们将证明以下定理:

定理 3.3.10。 存在一个等价

$$\int \underline{\mathrm{Span}}(\mathcal{Q})^{\otimes} \simeq \mathrm{Span}_{\mathrm{fw}}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}))^{\otimes}$$

，两边都是对称幺半范畴。

考虑函子 Q/•: P$^{\mathrm{op}}$ → Cat，并注意到它经过范畴 Cat$^{\times}$ ⊂ Cat 分解；该范畴由具有有限积的范畴及保持有限积的函子组成。

应用全忠实包含映射 $\mathrm{Cat}^{\otimes} \subset \mathrm{Cat}^{\times}$，我们得到一个对称幺半结构$T$-范畴，并将其识别为一个保持积函子

$$\mathcal{Q}^{\times}_{/\bullet}\colon \mathrm{Span}_{\nabla}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathcal{P})) \to \mathrm{Cat} \tag{3.3.11}$$

通过 Pr.3.3.2。我们从证明中单独提取出一个观察：

引理 3.3.12. 函子 *(3.3.11)* 的笛卡尔解直化由下式给出

$$\mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathrm{ev}_1))\colon \mathrm{Span}_{\nabla,\mathrm{all}}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}))) \to \mathrm{Span}_{\nabla,\mathrm{all}}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathcal{P})) \simeq \mathrm{Span}_{\nabla}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathcal{P}))^{\mathrm{op}}.$$

我们将此函子记为 Φ。

证明. 我们首先注意到，$\mathrm{Q}^{\times}_{/\bullet}$ 由以下三个性质确定：

1. $\mathrm{Q}^{\times}_{/\bullet}$ 保积，
2. $\mathrm{Q}^{\times}_{/\bullet}$ 沿函子作出的限制

$$i_X\colon \mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in}) \to \mathrm{Span}_{\nabla}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathcal{P})), \quad I \mapsto \coprod_I X$$

对于所有 $X \in$P，都等价于 $\mathrm{C}(X)^{\times}$，

3. T函子 $\mathrm{P}^{\mathrm{op}} \to$Span∇(Fin(P)) 沿途对 $\mathrm{Q}^{\times}_{/\bullet}$ 的限制等价于 Q/•。

也就是说，由 Pr.3.3.2，性质 (1) 表明 $\mathrm{Q}^{\times}_{\bullet}$ 由其对 $\mathrm{Fun}(\mathrm{P}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}^{\otimes})$ 的限制决定。然而，性质 (2) 表明，这一限制经由全忠实包含 $\mathrm{Cat}^{\times} \subset \mathrm{Cat}^{\otimes}$ 分解，因此只需将底层函子 $\mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{P}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat})$ 与 Q/• 识别。这正是性质 (3)。

现在考虑所讨论的函子 Φ。回顾一下，$\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{P}) \to \mathrm{P}$ 是函子 $\mathrm{Q}/\bullet\colon \mathrm{P}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}$ 的笛卡尔展开。简单计算可知，$\mathrm{Fin}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(T)) \to \mathrm{Fin}(T)$ 仍是一个笛卡尔纤维化。接着，应用 Barwick 展开 [HHLN23, Th.3.1], ，并利用 P 中积的存在性，可知 Φ 是一个余笛卡尔纤维化。我们将相应的函子记为 $\phi\colon \mathrm{Span}_{\nabla}(\mathrm{Fin}(T)) \to \mathrm{Cat}$。我们将证明它满足刻画 $\mathrm{Q}^{\times}_{/\bullet}$ 的三个性质，从而完成证明。

1. Φ 的源和靶都存在余积，且这些余积由 Φ保持。此外，容易看出直和项嵌入是笛卡尔态射。因此，根据 [PLL25, Cor.2.49], 的对偶， Φ 的直化保持积。2. 由于取跨与取拉回可交换，我们可以显式计算沿 i_X限制 ϕ 所得的解直化。容易看出，它等价于 [CHLL25, Pr.3.1.2]中给出的 $\mathrm{C}(X)^{\times}$ 的笛卡尔解直化描述。3. 类似地，沿 $T^{\text{对偶}} \to \mathrm{Span}_{\nabla}(T)$ 限制 ϕ所得的解直化，可以通过拉回计算，其结果为 $\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(T) \to T$。根据定义，这就是 Q/• 的笛卡尔解直化。

□

Th.3.3.10 的证明。 证明通过显式计算两边作为 Span(Fin) 上的余笛卡尔纤维化来进行。我们先处理左边。

1. 首先，我们回顾一下，$\mathrm{Q}^{\times}_{/\bullet}$ 的笛卡尔解直化由如下函子给出

$$\Phi\colon \mathcal{D} \coloneqq \mathrm{Span}_{\nabla,\mathrm{all}}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}))) \to \mathrm{Span}_{\nabla,\mathrm{all}}(\mathcal{P}) \simeq \mathrm{Span}_{\nabla}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathcal{P}))^{\mathrm{op}}.$$

   将 D_{fw} 记为由逐纤维 映射生成的 D 的宽子范畴；这些映射位于 $\mathrm{Span}_{\nabla}(\mathrm{P})^{\mathrm{op}}$中的等价之上。

2. 接着，我们可以计算复合的余笛卡尔解直化

$$\underline{\mathrm{Span}}(\mathcal{Q}^{\times}_{/\bullet}) = \mathrm{Span} \circ \mathcal{Q}_{/\bullet}\colon\ \mathrm{Span}_{\nabla}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathcal{P})) \to \mathrm{Cat}$$

   它就是如下映射

$$\mathrm{Span}_{\mathrm{all,fw}}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Span}_{\mathrm{all},\simeq}(\mathrm{Span}_{\nabla}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathcal{P}))^{\mathrm{op}}) \simeq \mathrm{Span}_{\nabla}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathcal{P}))$$

   根据 [HHLN23，定理 3.9]。

3. 最后，我们得出结论， $\int\mathrm{Span}(\mathrm{Q})^{\otimes}$ 的解直化恰好由下式给出

$$\begin{aligned}\mathrm{Span}_{\mathrm{all,fw}}(\mathrm{Span}_{\nabla,\mathrm{all}}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})))) &\to \mathrm{Span}_{\mathrm{all},\simeq}(\mathrm{Span}_{\nabla,\mathrm{all}}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathcal{P})))\\ &\simeq \mathrm{Span}_{\nabla}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathcal{P})).\end{aligned}$$

   与映射 $\mathrm{Span}_{\nabla}(\mathrm{Fin}(\mathrm{P})) \to \mathrm{Span}(\mathrm{Fin})$ 复合后，我们得到函子

$$\mathrm{Span}_{\mathrm{all,fw}}(\mathrm{Span}_{\nabla\text{-pb,all}}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})))) \to \mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in})$$

   它由唯一的函子 $\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{P}) \to *$诱导。

现在我们来明确计算右侧。

1. 根据 [CHLL25, Pr.3.1.2], ，我们可以将 $\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{P})^{\times}$ 的笛卡尔解直化计算为

$$\mathrm{Span}_{\mathrm{cart,all}}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}))) \to \mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in}),$$

   其中 cart 表示函子 $\mathrm{Fin}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{P})) \to \mathrm{Fin}$ 的笛卡尔态射。然而，这些恰好就是折叠映射，因此我们也可以将其等价地写为

$$\mathrm{Span}_{\nabla,\mathrm{all}}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}))) \to \mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in}),$$

2. 根据 [HHLN23, Th.3.9], 的另一项应用，我们可以将 $\mathrm{Span}_{\mathrm{fw}}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}})^{\otimes} = \mathrm{Span} \circ \mathrm{Ar}(\mathrm{P})^{\times}$ 的解直化计算为

$$\mathrm{Span}_{\mathrm{all,fw}}(\mathrm{Span}_{\nabla,\mathrm{all}}(\mathcal{F}\mathrm{in}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})))) \to \mathrm{Span}_{\mathrm{all},\simeq}(\mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in})) \simeq \mathrm{Span}(\mathcal{F}\mathrm{in})$$

   由函子 $\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathrm{P}) \to *$ 导出，正如所需。 □

我们还记录以下结果，以备后用：

命题 3.3.13。 函子 $\mathrm{ev}_0\colon \mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) \to \mathcal{P}$ 诱导出一个对称幺半结构的 *Dwyer–Kan* 局部化

$$\mathrm{Span}_{\mathrm{fw}}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}))^{\otimes} \to \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})^{\otimes}$$

对于形如

$$\begin{array}{ccccc} X & = & X & = & X \\ {\scriptstyle fq}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ Z & \xleftarrow[f]{} & Y & = & Y \end{array}$$

其中 q 和 fq 是$\mathcal{Q}$中的映射。

证明。 函子 $\mathrm{ev}_0\colon \mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) \to \mathcal{P}$ 显然保积，因此诱导出一个对称幺半结构 $\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})^{\times} \to \mathcal{P}^{\times}$。将 $\mathrm{Span}(-)$ 应用于此结构，得到一个对称幺半函子

$$\mathrm{Span}(\mathrm{ev}_0)\colon \mathrm{Span}_{\mathrm{fw}}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}))^{\otimes} \to \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})^{\otimes}.$$

根据 [CLL24, Pr.8.21], ，底层函子是一个 Dwyer–Kan 局部化，因此我们得出 $\mathrm{Span}(\mathrm{ev}_0)$ 是一个对称幺半 Dwyer–Kan 局部化。此函子恰好将命题中的映射取为可逆映射，因此最后的结论便显而易见。 □

注 3.3.14。 转到底层范畴后，Th.3.3.10 表明映射

$$\mathrm{Span}(\mathrm{ev}_0)\colon \mathrm{Span}_{\mathrm{fw}}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})) \to \mathrm{Span}(\mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{P}^{\simeq}) \simeq \mathcal{P}^{\mathrm{op}}$$

是函子 $\mathrm{Span}(\mathcal{Q})\colon \mathcal{P}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 的余笛卡尔解直化。这一点早已在 [CLL24], 中被观察到，前一个命题在限制到底层范畴后也是如此。

由于 $\mathrm{Span}(\mathcal{Q})$ 存在 $\mathcal{Q}$-极限，我们知道上面的函子也构成一个笛卡尔纤维化。事实上，位于 $f\colon Y \to Z$ 上、目标为 $q\colon X \to Y$ 的笛卡尔边恰好是

$$\begin{array}{ccccc} X & = & X & = & X \\ {\scriptstyle fq}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ Z & \xleftarrow[f]{} & Y & = & Y, \end{array}$$

正如简单计算所示。因此，前述命题证明了 $\mathrm{Span}(\mathrm{ev}_0)$ 是关于笛卡尔态射的 Dwyer-Kan 局部化。

3.4 参数化稳定范畴的整体截面

设 C 是一个稳定对称幺半范畴。回顾 [Nik16]，存在一个正合松幺半函子

$$\hom_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}, -)\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Sp},$$

其特征是它是函子范畴 $\mathsf{Fun}^{\otimes\text{-lax}}{}_{\mathrm{lex}}(\mathsf{C},\mathsf{Sp})$ 的始对象。我们将其称为 C 的整体截面函子，并记为 $\Gamma\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Sp}$。根据整体截面的泛性质，它对稳定范畴的对称幺半函子具有宽松自然性。这体现了存在一个自然变换

$$\hom_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}, -) \Rightarrow \hom_{\mathcal{D}}(\mathbb{1}_{\mathcal{D}}, F(-))$$

对于稳定范畴之间的每个函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$。对于我们的去范畴化过程，我们需要一个适用于稳定范畴族的整体截面函子的类似物。具体而言，给定一个稳定对称幺半 T-范畴 C，我们将构造一个宽松对称幺半函子 $\Gamma\colon \int\mathsf{C}^{\otimes} \to \mathsf{Sp}^{\otimes}$；当限制到 $\mathsf{C}(X)^{\otimes}$ 时，它等价于 Nikolaus 的整体截面函子 $\Gamma\colon \mathsf{C}(X)^{\otimes} \to \mathsf{Sp}^{\otimes}$。同样，我们还要求它对 C 具有宽松自然性，这意味着存在一个对称幺半自然变换的相干选择，使下图交换

$$\begin{array}{ccc} \int \mathcal{C}^{\otimes} & \xrightarrow{\int F} & \int \mathcal{D}^{\otimes} \\ & \Gamma \searrow \quad \swarrow \Gamma & \\ & \mathrm{Sp}^{\otimes} & \end{array}$$

对于任意稳定对称幺半 T-范畴之间的函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$。关于松变换的严格定义，请读者参阅 [GLP24, §2] 或 [AGH25]。在下述命题中，我们用 $\mathsf{Cat}^{\otimes\text{-lax}}$ 表示对称幺半范畴及其松对称幺半函子所构成的范畴。

命题 3.4.1. 存在一个函子之间的松自然变换 $\Gamma\colon \int(-) \Rightarrow \mathsf{const}(\mathsf{谱}^{\otimes})\,\mathrm{Cat}(T)^{\otimes}_{\mathrm{st}} \to \mathrm{Cat}^{\otimes\text{-lax}}$，它将一个稳定对称幺半 T-范畴 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 映为函子

$$\Gamma\colon \int \mathcal{C}^{\otimes} \to \mathrm{Sp}^{\otimes}$$

该函子给出整体截面函子 $\Gamma\colon \mathcal{C}(X)^{\otimes} \to \mathsf{谱}^{\otimes}$；将其限制到 $X \in \mathcal{P}$ 上方的纤维时，便得到稳定范畴 $\mathcal{C}(X)$。

注 3.4.2。函子 $\Gamma\colon \int\mathsf{C}^{\otimes} \to \mathsf{谱}^{\otimes}$ 编码了稳定范畴在外张量积下整体截面的宽松对称幺半性。给定两个对象 $(A,\ X),\ (B,\ Y) \in \int\mathsf{C}$，取“逐纤维整体截面”可通过以下比较映射成为宽松对称幺半的

比较映射

$$\begin{array}{ccc}\Gamma(A,X)\otimes\Gamma(B,Y) & = & \hom_{\mathcal{C}_A}(\mathbb{1},X)\otimes\hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbb{1},X)\\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1^*\otimes\pi_2^*}\\ & & \hom_{\mathcal{C}_{A\times B}}(\mathbb{1},\pi_1^*X)\otimes\hom_{\mathcal{C}_{A\times B}}(\mathbb{1},\pi_2^*Y)\\ & & \downarrow{\scriptstyle -\otimes-}\\ & & \hom_{\mathcal{C}_{A\times B}}(\mathbb{1},\pi_1^*X\otimes\pi_2^*Y) = \Gamma((A,X)\boxtimes(B,Y)).\end{array}$$

我们预期但不证明，整体截面函子 $\Gamma\colon \int \mathsf{C}^{\otimes}\to \mathsf{Sp}^{\otimes}$ 具有类似于稳定范畴整体截面函子的泛刻画。

Pr.3.4.1 的证明。 设 C 是一个逐纤维稳定的对称幺半 T-范畴，并考虑唯一的对称幺半正合函子 $\mathsf{Sp}^{\omega}\to\mathsf{C}(*)$，它将球谱映射到 $\mathsf{C}(*)$ 的单位元。将其与命题 3.3.8 的对称幺半范畴嵌入 $\mathsf{C}(*)\to\int\mathsf{C}$ 复合，我们得到函子 $F_{\mathcal{C}}\colon \mathsf{Sp}^{\omega}\to\int\mathsf{C}$，它对于逐纤维稳定的对称幺半 T-范畴是自然的。现在考虑复合函子

$$\int\mathcal{C}\xrightarrow{Y}\mathrm{Psh}(\textstyle\int\mathcal{C})\xrightarrow{F_{\mathcal{C}}^*}\mathrm{Psh}(\mathrm{Sp}^{\omega}),$$

其中，两个预层范畴都赋予 Day 卷积对称幺半结构。根据 [Lur17，推论 4.8.1.12]，Yoneda 嵌入是松对称幺半的，而 $F_{\mathcal{C}}^*$ 则由 Day 卷积的泛性质可知。因此，作为松对称幺半函子的复合，该复合函子也是松对称幺半的。此外，简单计算表明，该函子可经由 $\mathsf{Ind}(\mathsf{Sp}^{\omega})$ 分解，而 $\mathsf{Ind}(\mathsf{Sp}^{\omega})$ 等价于保持有限极限的函子 $(\mathsf{Sp}^{\omega})^{\mathrm{op}}\to\mathsf{S}$。对称幺半等价 $\mathsf{Ind}(\mathsf{Sp}^{\omega})\simeq\mathsf{Sp}$ 随即给出所需的松对称幺半函子。

为了说明这一构造关于逐纤维稳定对称幺半范畴 $T\mathsf{C}$ 也是松自然的，我们首先注意到，$F_{\mathcal{C}}^*\colon \mathsf{Psh}(\int\mathsf{C})\to\mathsf{Psh}(\mathsf{Sp}^{\omega})$ 显然在沿稳定对称幺半 T-范畴之间的对称幺半函子作限制时是严格自然的。通过在水平方向转而考虑左伴随，我们得到一个松的伴随变换

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{Psh}(\int\mathsf{C}) & \xrightarrow{(\int F)_!} & \mathsf{Psh}(\int\mathsf{D}^{\otimes})\\ & {\scriptstyle F_{\mathcal{C}}^*}\searrow \quad \Longrightarrow \quad \swarrow{\scriptstyle F_{\mathcal{D}}^*} & \\ & \mathsf{Psh}(\mathsf{Sp}) & \end{array}$$

参见 [AGH25, Th.E]。另一方面，根据 [BMS23, Cor.2.47]，Yoneda 嵌入是一个对称幺半自然变换。将二者复合，即得到所需的松对称幺半函子之间的松自然变换。

□

我们还将记录这一构造的以下变体，它编码了相对于 $\mathsf{C}(*)$ 的 C 的一种整体截面形式。

定义 3.4.3. 令 $\mathsf{Cat}(T)^{\otimes}$ R-松弛 为 $\mathsf{Cat}(T)$ 的满 子范畴，其对象由满足以下条件的对称幺半结构 T-范畴 C 构成：对于 P 中所有映射 $f\colon A \to B$ ， $f^*\colon \mathsf{C}(B) \to \mathsf{C}(A)$ 都有右伴随。需要强调的是，我们并不假设 $\mathsf{Cat}(T)^{\otimes}$ R-松弛 中的函子与这些极限交换。

命题 3.4.4. 存在一个函子$\mathrm{Cat}(T)^{\otimes}{}_{\text{R-lax}} \to \mathrm{Cat}^{\otimes\text{-lax}}$ 的松自然变换 $\int(-) \Rightarrow \mathrm{ev}_*$ ，它将 $\mathrm{Cat}(T)^{\otimes}{}_{\text{R-lax}}$ 中的对称幺半 T-范畴 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 映为一个推前函子

$$\textstyle\int \mathcal{C}^{\otimes} \to \mathcal{C}(*)^{\otimes}$$

其特征在于，它在每个 $X \in \mathcal{P}$ 上方的纤维上的限制，等于由唯一映射 $\pi\colon X \to *$ 诱导的限制的右伴随π_* 。

证明。 考虑自然对称单体包含 $\mathsf{C}(*) \subset \int\mathsf{C}$。 我们声称，它逐点都有一个右伴随，而这些右伴随会自动组合成函子 $\mathsf{Cat}(\mathsf{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}{}_{\text{L-lax}} \to \mathsf{Cat}^{\otimes,\mathrm{lax}}$ 的松自然变换。根据 [AGH25, Th.5.3.6] ，将其应用于 2-范畴 $\mathsf{Cat}^{\otimes,\mathrm{lax}}$ 即可证明这一点。为此，我们注意到，由于存在唯一映射 $\pi\colon A \to *$，因此有一个等价

$$\mathrm{Map}_{\int\mathcal{C}}((*,X),(A,Y)) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{C}(A)}(\pi^*X,Y) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{C}(*)}(X,\pi_*Y)$$

关于映射空间。这证明了右伴随存在，且具有命题所述的形式。

□

3.5 去范畴化

最后，我们来到本节的主定理。该定理指出，对于所有 $\mathsf{C} \in \mathsf{Cat}(T)^{\otimes}{}_{\mathcal{Q}\text{-st}}$，单位元的自同态 $\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}) : \mathsf{P}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Sp}$ 可规范地提升为一个宽松对称幺半函子

$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})\colon \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) \to \mathrm{Sp}\,.$$

定理 3.5.1. 存在一个保持极限的函子

$$\mathrm{End}_{(-)}(\mathbb{1})\colon \mathrm{Cat}(T)^{\otimes}_{\mathcal{Q}\text{-st}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_{\mathcal{Q}}), \qquad \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})(X) = \mathrm{End}_{\mathcal{C}(X)}(\mathbb{1}),$$

赋予 $\mathcal{C} \in \mathrm{Cat}(T)^{\otimes}{}_{\mathcal{Q}\text{-st}}$ 中单位元的自同态谱 $\mathrm{End}^{\mathcal{C}(X)}(\mathbb{1})$ 转移结构，其中转移对应于局部属于$\mathcal{Q}$的映射。

证明。 我们先说明对象层面上的策略。设 $\mathsf{C}^{\otimes}$ 是一个对称幺半 Q-稳定 T-范畴。

1. 由于 C 尤其是一个 Q-半加性的对称幺半 T-范畴，因此存在唯一的对称幺半函子 $F\colon \mathsf{Span(Q)}^{\otimes} \to \mathsf{C}^{\otimes}$ of T- 范畴，它将 $1 \in \Gamma\mathsf{Span(Q)}^{\otimes}$ 映射到 $\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \in \Gamma\mathsf{C}$。

2。取余笛卡尔解直化后，我们得到一个对称幺半函子

$$\int F\colon \int \mathrm{Span}(\mathcal{Q})^{\otimes} \to \int \mathcal{C}^{\otimes}$$

在配备外张量积的相应非直化上。

3. 另一方面，由于 $\mathsf{C}^{\otimes}$ 是逐纤维稳定的 T-范畴，根据 Pr.3.4.1，存在一个宽松对称幺半函子

$$\int \mathcal{C}^{\otimes} \to \mathrm{Sp}^{\otimes}.$$

4. 将这两个函子复合后，我们得到一个宽松对称幺半函子

$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})\colon \int \mathrm{Span}(\mathcal{Q})^{\otimes} \to \int \mathrm{Sp}^{\otimes}$$

更明确地，利用 Th.3.3.10，我们得到一个宽松对称幺半函子

$$\mathrm{Span}_{\mathrm{fw}}(\mathrm{Ar}(\mathcal{P})^{\mathcal{Q}}) \to \mathrm{Sp}.$$

5. 现在可以算出，该函子将 Pr.3.3.13 中的映射变为等价。由 [NS18，Pr.A.5(v)], ，因此我们得到一个宽松对称幺半函子

$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})\colon \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) \to \mathrm{Sp}.$$

也就是说， F 按定义是一个保 Q-余极限的函子，因此根据引理 3.1.9，它也保持 Q-极限。这意味着 $\int F$ 保留笛卡尔态射，因此 Pr.3.3.13 中的映射会被映为 $\int\mathsf{C}$ 中的笛卡尔态射。最后，我们可以证明 $\Gamma\colon \int \mathsf{C} \to$ 谱会将笛卡尔态射映为等价。给定一个映射$f\colon X \to Y$和一个对象 $A \in \mathsf{C}_X$，笛卡尔边 $(A,\ X) \to (f_*A,\ Y)$ 的像是映射

$$\Gamma(f_*A, Y) \coloneqq \hom_{\mathcal{C}_Y}(\mathbb{1}, f_*A) \simeq \hom_{\mathcal{C}_X}(f^*\mathbb{1}, A) \simeq \hom_{\mathcal{C}_Y}(\mathbb{1}, A) =: \Gamma(A, X),$$

从而得到一个等价。

6. 最后，我们计算出，将该函子限制到 P^{op} 后保持极限，因此我们构造出了一个 Q-自伴的 $\mathbf{E}_\infty$ 环。设 $X = \mathsf{colim}_i X_i$ 是 P 中的一个余极限。由于 C 保持极限，这将诱导出一个等价 $\mathsf{C}_X \simeq \mathsf{lim}_i \mathsf{C}_{X_i}$，进而又诱导出一个等价

$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})(X) = \hom_{\mathcal{C}_X}(\mathbb{1},\mathbb{1}) = \lim_i \hom_{\mathcal{C}_{X_i}}(\mathbb{1},\mathbb{1}) \simeq \lim_i \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})(X_i),$$

这证明了将 $\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$ 限制到 P^{op} 后保持极限。

为了使其关于 $\mathsf{Cat}(T)^{\otimes}$ $_{\mathcal{Q}\text{-st}}$ 具有函子性，只需使上述所有构造关于 $\mathsf{Cat}(T)^{\otimes}$ $_{\mathcal{Q}\text{-st}}$都自然，这正是我们竭力做到的。下面我们详细说明。首先，考虑函子的复合：

$$\mathrm{Cat}(T)^{\otimes}_{\mathcal{Q}\text{-st}} \xrightarrow{(f,\Gamma)} \mathrm{Cat}^{\otimes\text{-lax}}_{\mathrm{Span}_{\mathrm{fw}}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}))/} \times_{\mathrm{Cat}^{\otimes\text{-lax}}} \mathrm{Cat}^{\otimes\text{-lax}}_{/\,\mathrm{Sp}} \xrightarrow{-\circ-} \mathrm{Fun}^{\otimes\text{-lax}}(\mathrm{Span}_{\mathrm{fw}}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})), \mathrm{Sp}),$$

whe第二个函子由复合给出。其值落在该函子的纤维中

$$(s,t)\colon \mathrm{Ar}^{\mathrm{opl}}(\mathrm{Cat}^{\otimes\text{-lax}}) \to \mathrm{Cat}^{\otimes\text{-lax}} \times \mathrm{Cat}^{\otimes\text{-lax}}$$

在这对 {Span$_{\mathrm{fw}}$(Ar$_{\mathcal{Q}}$(P))，Sp} 上，它等价于函子范畴 Fun$^{\otimes\text{-lax}}$(Span(Ar$_{\mathcal{Q}}$(P)，Sp)，根据[HHLN23，定理 7.21]。接着我们注意到它经过反转 Pr.3.3.13 中映射 W 的函子子范畴，因此得到复合

$$\mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}_{\mathcal{Q}\text{-st}} \longrightarrow \mathrm{Fun}^{\otimes\text{-lax},W}(\mathrm{Span}_{\mathrm{fw}}(\mathrm{Ar}_{\mathcal{Q}}(\mathscr{P})),\mathrm{Sp}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Fun}^{\otimes\text{-lax}}(\mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathscr{P}),\mathrm{Sp}).$$

如上文 (6) 中所观察到的，这经过其对 P$^{\mathrm{op}}$ 的限制保持极限的函子子范畴。Pr.2.2.10 将其识别为 CAlg(Sp$_{\mathcal{Q}}$)，从而得到陈述中的函子。由此得到的函子 End(𝟙) : Cat(T)$^{\otimes}$ $_{\mathcal{Q}\text{-稳定}}$ → 函子范畴 Fun$^{\otimes\text{-lax}}$(Span$_{\mathcal{Q}}$(P)，Sp) 本身保持极限，这是因为 Q-稳定范畴的极限在底层范畴上计算，如 Pr.3.1.12 所示。具体而言，给定一个 Q-稳定 T-范畴的极限 C $\simeq \lim_i$ C$_i$，我们可以计算得到

$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})(X) \coloneqq \hom_{\mathcal{C}_X}(\mathbb{1},\mathbb{1}) \simeq \lim_i \hom_{\mathcal{C}_{X_i}}(\mathbb{1},\mathbb{1}) \simeq \lim_i \mathrm{End}_{\mathcal{C}_i}(\mathbb{1})(X). \qquad \square$$

我们记录以下变体，以供后文使用。证明与上文完全相同，只需将对 Pr.3.4.1 的调用替换为 Pr.3.4.4。

命题 3.5.2。 设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半 $\mathcal{Q}$-半加性 T 范畴，使得$f^*\colon \mathcal{C}(B) \to \mathcal{C}(A)$ 对所有映射 $f\colon A \to B$（其中 $A \to B$ 属于 $\mathscr{P}$）都存在右伴随 f_*。那么存在一个对象 $\Gamma_{\mathcal{C}}\mathbb{1} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{CMon}_{\mathcal{Q}}\,\mathcal{C}(*))$，使得 $\Gamma_{\mathcal{C}}\mathbb{1}(A) \simeq \pi_*\mathbb{1}_{\mathcal{C}_A}$，其中 $\pi\colon A \to *$ 是到点的唯一映射。

回想一下，给定 C 中的一个 Q-双伴随 $\mathbf{E}_\infty$-环 E 以及 $Y \in$Q，我们在 Df.2.3.4 中关联了一个松对称幺半函子

$$\mathsf{D}E\colon \mathscr{P}_{/Y} \to \mathrm{Mod}_{E(Y)}\,\mathcal{C}$$

它是我们为 E-同调所选的候选对象。正如我们现在将要证明的，当 E 是从一个 Q-半加性 ab-全局范畴 C 经过去范畴化得到时，它确实值得称为同调理论。

命题 3.5.3。 设$\mathcal{C}$是一个$\mathcal{Q}$-半可加的 T-范畴，使得 $f^*\colon \mathcal{C}(Y) \to \mathcal{C}(X)$对所有阿贝尔全局空间之间的映射都存在右伴随，并设 $Y \in \mathcal{Q}$。那么函子

$$\mathsf{D}\Gamma_{\mathcal{C}}\mathbb{1}\colon \mathscr{P}_{/Y} \to \mathrm{Mod}_{E(Y)}\,\mathcal{C}(*)$$

由 *Df.2.3.4* 与 $\Gamma_{\mathcal{C}}\mathbb{1}$ 相关联的函子是保余极限的。

证明。 应用 Pr.2.3.5，只需证明该复合

$$\mathcal{Q} \to \mathrm{Span}_{\mathcal{Q}}(\mathscr{P}) \xrightarrow{\Gamma_{\mathcal{C}}\mathbb{1}} \mathcal{C}(*)$$

是从 T 左 Kan 延拓而来。因此，考虑 $Y \in \mathsf{Q}$，并回顾 $\mathsf{C}_Y \simeq \lim^{A \in T^{\mathrm{op}}_{/Y}} \mathsf{C}_A$。然后，应用 [HY17 的对偶版本、Th.B] 以及 C 的 Q-半加性，我们得到以下自然等价

$$\mathrm{colim}_{A \in T_{/Y}} (\pi_A)_! \xrightarrow{\sim} \pi_! \xrightarrow{\sim} \pi_*.$$

将此应用于 C_Y 的单位元，我们得到一个等价

$$\mathrm{colim}_{A \in T_{/Y}} \pi_! \mathbb{1}_{\mathcal{C}_A} \simeq \mathsf{D}\Gamma_{\mathcal{C}} \mathbb{1}(A).$$

然而，左侧图表的函子性与 $\mathsf{D}\Gamma_{\mathcal{C}} \mathbb{1}$ 的函子性一致，依据 [CLL24, Pr.5.26], ，因此我们得到所需的等价

$$\mathsf{D}\Gamma_{\mathcal{C}} \mathbb{1}(Y) \simeq \mathrm{colim}_{A \in T_{/Y}} \mathsf{D}\Gamma_{\mathcal{C}} \mathbb{1}(\mathbf{B}G). \qquad \square$$

注 3.5.4。在 [BM24], 中，Ben-Moshe 还应用了 [CLL24]的结果，以连贯地为一个 π-半可加对称幺半结构 ab-全局范畴 C 的去范畴化赋予转移。在这种情形下，我们的构造与他的构造一致。遗憾的是，当 Q 是某个不包含对所有 $G \in \mathsf{Glo}_{\mathrm{ab}}$而言的映射 $\mathbf{B}G \to *$的转移族时，他的构造便不再适用，例如 $S \perp \pi$。由于我们至关重要地关注温和上同调中沿 $\mathbf{P}$-可除群的一般映射的转移所具有部分函子性，因此必须采用上述更为精细的构造。

4 温和局部系统与参数化稳定性

π-稳定 ab-全局范畴的典型例子是一个定向 $\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}$的温和局部系统 ab-全局范畴 $\mathsf{LocSys}_{\mathbf{G}}$，由 Lurie 在 [Lur19] 中引入。本节的目标是回顾这些概念，然后考察 $\mathsf{LocSys}_{\mathbf{G}}$ 关于底层定向 $\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}$的自然性。

更具体地说，我们用适合本文的语言，在 §4.1 中回顾 [Lur19] 中的基本概念。在 §4.2 中，我们证明 $\mathsf{LocSys}_{(-)}$ 是从定向 $\mathbf{P}$-可除群范畴到对称幺半 ab-全局范畴范畴的函子，但不涉及 Q-稳定性。在 §4.3 中，我们定义一个归纳子范畴 $S \perp \pi \subset \pi \subset \mathsf{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$，其对象为 π- 有限空间之间与素数集 S 垂直的态射。在 §4.4 中，我们用经典同伦论刻画这些态射。在 §4.5 中，我们定义定向 $\mathbf{P}$-可除群态射的一个类似类别，要求其充分远离 S，并证明 $\mathsf{LocSys}_{(-)}$ 给出一个函子，将这类态射映为对称幺半$S \perp \pi$-稳定 ab-全局范畴之间的态射；参见 Th.4.5.5。最后，在 §4.6 中，我们说明，借助 [BDL25] 中对代数栈的表述，以上讨论如何形式上推广到代数栈上的定向 $\mathbf{P}$-可除群。

4.1 关于P-可除群和温和局部系统的回顾

我们先回顾一些 [Lur19] 中的定义，并采用我们将使用的形式。使用几何语言会很方便，因此我们记作

$$\mathrm{Aff} := \mathrm{CAlg}^{\mathrm{op}}$$

表示仿射代数栈范畴，按本节的需要，将其定义为 $\mathbf{E}_\infty$ 环范畴的对偶范畴。给定 $\mathsf{A} \in$ 交换代数，记对应的仿射代数栈为 $\mathrm{Spec}\,\mathsf{A} \in \mathbf{Aff}$，并记 $\mathbf{Aff}_{\mathsf{A}} = \mathbf{Aff}_{/\mathrm{Spec}\mathsf{A}} =$ 交换代数$^{\mathrm{op}}{}_{\mathsf{A}}$。我们将在 §4.6 中把本节的构造推广到非仿射代数栈。

定义 4.1.1 ([Lur19，定义 3.5.1])。 一个仿射 $\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}$ 是一个函子

$$\mathbf{G}[-]\colon \mathrm{Ab}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Aff}$$

满足以下条件：

1. $\mathbf{G}$ 将双笛卡尔方形映为笛卡尔方形；
2. $\mathbf{G}$ 将单射映为正次数的有限平坦态射 [Lur18c，定义 5.2.3.1] 。

（仿射）$\mathbf{P}$-可除群构成一个全子范畴

$$\mathbf{P}\mathrm{Div}_{\mathrm{aff}} \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Ab}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Aff}).$$

Df.4.1.1 中的条件 (1) 保证求值

$$\mathbf{P}\mathrm{Div}_{\mathrm{aff}} \to \mathrm{Aff}, \qquad \mathbf{G} \mapsto \mathbf{G}[0]$$

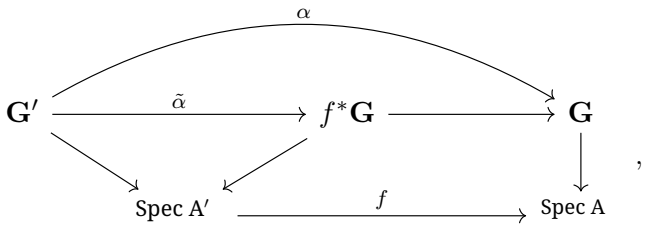
是一个笛卡尔纤维化。对于固定的$\mathbf{E}_\infty$ 环 A，我们可以将其识别为

$$\mathbf{BT}(\mathsf{A}) \coloneqq \{\mathrm{Spec}\,\mathsf{A}\} \times_{\mathrm{Aff}} \mathbf{P}\mathrm{Div}_{\mathrm{aff}} \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Ab}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Aff}_{\mathsf{A}})$$

作为$\mathbf{P}$-除群 *over* A 的范畴，因此$\mathbf{P}\mathrm{Div}_{\mathrm{aff}}$ 是函子

$$\mathbf{BT}\colon \mathrm{CAlg} = \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}; \qquad \mathsf{A} \mapsto \mathbf{BT}(\mathsf{A}).$$

注 4.1.2。 设$\mathbf{G}'$ 和$\mathbf{G}$ 是$\mathbf{P}$-除群，分别定义在$\mathbf{E}_\infty$ 环 A' 和 A 上。一个$\mathbf{P}$-除群的态射α: $\mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 构成如下图表



其中 f 与 $\alpha[0]$ 同构：$\mathbf{G}'[0] \to \mathbf{G}[0]$ ，且最右侧的方块是笛卡尔的，也就是说，

$$(f^*\mathbf{G})[H] \simeq \mathrm{Spec}\,\mathsf{A}' \times_{\mathrm{Spec}\,\mathsf{A}} \mathbf{G}[H]$$

对所有 $H \in$阿贝尔群$^{\mathrm{op}}$ 有限。态射 α 是笛卡尔 的（相对于笛卡尔纤维化$\mathbf{P}\mathrm{Div}_{\mathrm{aff}} \to \mathbf{Aff}$）当且仅当外方块是笛卡尔的，也就是说，当且仅当 $\tilde{\alpha}$: $\mathbf{G}' \to f^*\mathbf{G}$ 是一个同构，它将$\mathbf{G}'$识别为沿 f 对$\mathbf{G}$ 作基变换所得。

Not命题 4.1.3。设$\mathbf{G}$ 是环 A 上的一个$\mathbf{P}$-可除群，其中 A 是$\mathbf{E}_\infty$ 环。那么$\mathbf{G}$ 分解为一个 su m

$$\mathbf{G} \simeq \bigoplus_p \mathbf{G}_{(p)}$$

对每个素数 p [， p-可除群，见 Lur19，注 2.6.7]。对于固定的素数 p，记

$$\mathbf{G}_p \coloneqq \mathrm{Spec}(\mathsf{A}_p^\wedge) \times_{\mathrm{Spec}\,\mathsf{A}} \mathbf{G}_{(p)}$$

f或者将底层的 p-可除群基变换到 A 的 p-完备化上，并且

$$\mathbf{G}_p^\circ \subset \mathbf{G}_p$$

对于其单位分支，即一个形式群。详情参见 [Lur18b，第 2] 节。

定义 4.1.4。回忆一下，$\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}} \subset \mathsf{S}$ 是由具有阿贝尔基本群的连通有限群胚构成的全子范畴。移位庞特里亚金对偶函子是以下复合

$$\mathrm{Ab}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{(\widehat{-})} \mathrm{Ab}_{\mathrm{fin}} \xrightarrow{\mathbf{B}(-)} \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}},$$

庞特里亚金对偶 $(\widehat{-}) = \mathsf{Hom}(-, \mathbf{Q}/\mathbb{Z})$ 与函子 $\mathbf{B}(-)$ 的复合；后者将阿贝尔群映射到其解迭代。

定义 4.1.5（[Lur19，定义 2.6.12]）。设 $\mathbf{G}$ 是一个仿射 $\mathbf{P}$-可除群，并令 $\mathsf{SpecA} = \mathbf{G}[0]$。$G$ 的预定向是通过移位庞特里亚金对偶对 $\mathbf{G}$ 作出的延拓：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ab}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\mathbf{G}[-]} & \mathrm{Aff} \\ {\scriptstyle \mathbf{B}(\widehat{-})}\downarrow & \nearrow_{\mathbf{G}(-)} & \\ \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}} & & \end{array} .$$

这称为一个定向，如果对每个素数 p，Bott映射

$$\omega_{\mathbf{G}_p^\circ} \to \Sigma^{-2}\mathsf{A}_p^\wedge$$

与$\mathbf{G}_p^\circ$ 相关联的是一个同构。详情参见 [Lur18b, §4.3] 。

与$\mathbf{P}$-可除群一样，（预）定向仿射$\mathbf{P}$-可除群的范畴构成满子范畴

$$\mathbf{P}\mathrm{Div}_{\mathrm{aff}}^{\mathrm{or}} \subset \mathbf{P}\mathrm{Div}_{\mathrm{aff}}^{\mathrm{pre}} \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}, \mathrm{Aff}),$$

且在终对象 $* \in \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$ 上的求值定义了笛卡尔纤维化

$$\mathbf{P}\mathrm{Div}_{\mathrm{aff}}^{\mathrm{pre}} \to \mathrm{Aff}, \qquad \mathbf{P}\mathrm{Div}_{\mathrm{aff}}^{\mathrm{or}} \to \mathrm{Aff}\,.$$

对于一个$\mathbf{E}_\infty$ 环 A，我们记

$$\mathbf{BT}^{\mathrm{or}}(\mathsf{A}) \subset \mathbf{BT}^{\mathrm{pre}}(\mathsf{A}) \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}, \mathrm{Aff}_{\mathsf{A}})$$

对于 Spec A 上方的纤维。

记号 4.1.6。 设 $\mathbf{G}$ 是一个预定向的 $\mathbf{P}$-可除群。在这种情况下，我们记作

- $\mathbf{G}[-]$: 阿贝尔群$_{\mathrm{op\ fin}} \to$ Aff 表示其底层$\mathbf{P}$-可除群$\mathbf{G}$;
- $\mathbf{G}(-)$: $\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}} \to$ Aff 表示定义函子$\mathbf{G}$的函子;
- $\Gamma\mathcal{O}_{(-)\ \mathbf{G}}$: $\mathrm{Glo}_{\mathrm{op\ ab}} \to$交换代数，表示与$\mathbf{G}(-)$形式对偶的函子。

当$\mathbf{G}$ 是固定$\mathbf{E}_\infty$ 环 A 上的预定向$\mathbf{P}$-可除群时，我们记作 $\mathsf{A}^{(-)}_{\ \mathbf{G}} = \Gamma\mathcal{O}^{(-)}_{\ \mathbf{G}}$ ，正如 [Lur19, Con.4.0.3] 中所述。

现在我们回顾温和局部系统的构造。固定一个函子$\mathbf{G}$: $\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}} \to$ Aff，并令 Spec A $= \mathbf{G}[0]$。

定义 4.1.7 ([Lur19, Not.5.1.2])。 给定一个全局空间 $\mathsf{X} \in \mathsf{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群，复合

$$\mathsf{A}_{\mathbf{G},\mathsf{X}} \colon (\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{X}} \to \mathrm{Glo}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\mathsf{A}^{(-)}_{\mathbf{G}}} \mathrm{CAlg}$$

在配备逐点对称幺半结构的 $\mathrm{Fun}((\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{X}}, \mathrm{Sp})$ 中定义了一个交换代数。我们记

$$\mathrm{Mod}_{\mathsf{A}_{\mathbf{G},\mathsf{X}}} \coloneqq \mathrm{Mod}_{\mathsf{A}_{\mathbf{G},\mathsf{X}}}(\mathrm{Fun}((\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{X}}, \mathrm{Sp}))$$

为 $\mathsf{A}_{\mathbf{G},\mathsf{X}}$-模的范畴。

注 4.1.8. 我们的记号不同于 Lurie：Lurie 在我们写作 $\mathsf{A}_{\mathbf{G},\mathsf{X}}$ 的地方写作 $\mathsf{A}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}}$ ；这样做是为了腾出记号 $\mathsf{A}_{\mathbf{G}}$ ，以便稍后将其用于表示当 $\mathbf{G}$ 被定向时与 $\mathbf{G}$ 相关联的 π-双向谱。

从现在起，我们进一步假设 $\mathbf{G}$ 是定义在 A 上的一个预定向 $\mathbf{P}$-可除群 .

定义 4.1.9 ([Lur19, Df.5.2.4]). 给定一个全局空间 $\mathsf{X} \in \mathsf{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$，X 上的一个 $\mathbf{G}$-温和局部系统是一个满足以下条件的 $\mathsf{A}_{\mathbf{G},\mathsf{X}}$-模 F:

1. 设 α: $T \to T'$ 是 $(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})_{/\mathsf{X}}$ 中一个具有连通纤维的态射。则 F(α) 诱导一个等价
$$\mathsf{A}^{T'}_{\mathbf{G}} \otimes_{\mathsf{A}^{T}_{\mathbf{G}}} \mathcal{F}(T) \to \mathcal{F}(T')$$
$\mathsf{A}^{T'}{}_{\mathbf{G}}$-模的
2. 设 $T \in (\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})_{/\mathsf{X}}$，并设 $T_0 \to T$ 为一个连通覆盖空间。定义相对的 ive 增广理想
$$I_{\mathbf{G}}(T_0/T) = \ker\left(\pi_0\mathsf{A}^{T}_{\mathbf{G}} \to \pi_0\mathsf{A}^{T_0}_{\mathbf{G}}\right).$$
那么典范映射 $\mathsf{F}(T) \to \mathsf{F}(T_0)^{\mathrm{h}\,\mathrm{Aut}(T_0/T)}$ 表明，$\mathsf{F}(T_0)^{\mathrm{h}T_0/T}$是关于 $I_{\mathbf{G}}(T_0/T)$ 对 F(T) 作出的完备化。

记作
$$\mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}(\mathsf{X}) \subset \mathrm{Mod}_{\mathsf{A}_{\mathbf{G},\mathsf{X}}}$$
对于 X 上 $\mathbf{G}$-温和局部系统的全子范畴。

4.2 温和局部系统的函子性

本小节的目标是证明以下结论。

定理 4.2.1. 温和局部系统的构造汇集成一个函子 r

$$\mathrm{LocSys}_{(-)}\colon (\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{aff}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}, \qquad \mathbf{G} \mapsto (\mathsf{X} \mapsto \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}(\mathsf{X}))$$

限制到由笛卡尔态射张成的宽子范畴 $\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{aff},\ \mathrm{cart}} \subset \mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{aff}}$ 时，Th.4.2.1 已由 Ben-Moshe [BM24, §4.1] 证明。我们的定理对此作了推广，允许定向$\mathbf{P}$-可除群之间存在非笛卡尔态射，例如不可逆的同源。基本策略相同，并用到了以下一般范畴论输入。

引理 4.2.2 (Ben-Moshe)**.** $\Gamma\mathcal{O}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}}$-模的构造可精化为一个函子

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}, \mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}((\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}}, \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat})), \qquad \mathbf{G} \mapsto (\mathsf{X} \mapsto \mathrm{Mod}_{\Gamma\underline{\mathcal{O}}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}}}).$$

证明。 这一构造见于 [BM24, Con.4.3, Steps 1–3]。确切地说，Ben-Moshe 写出了一个函子

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}, \mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \times (\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}, \qquad (\mathbf{G}, \mathsf{X}) \mapsto \mathrm{Mod}_{\Gamma\underline{\mathcal{O}}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}}}$$

它没有纳入 $\mathrm{Mod}^{\Gamma\mathcal{O}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}}}$ 上的对称幺半结构。不过，这只是由于在 [BM24, Con.4.3, Step 2], 中使用了遗忘函子 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}) \to \mathrm{Cat}$ 所造成的表象；省略这一步即可得到如上所述的引理。 □

我们将通过验证以下事实，从 Lm.4.2.2 推出 Th.4.2.1：若 $\alpha\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 是定向$\mathbf{P}$-可除群之间的一个映射，则 $\alpha^*\colon$ 模$_{\Gamma\mathcal{O}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}}} \to$ 模$_{\Gamma\mathcal{O}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}'}}$ 会限制为温和局部系统范畴之间的一个函子。对于笛卡尔态射，这恰好是 [Lur19, Pr.6.2.1(d)]。对于一般态射，证明则需要更加谨慎。

引理 4.2.3. 设A 是一个局部具有有限高度的复周期$\mathbf{E}_\infty$ 环，并考虑如下交换图表

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{A} & \\ {\scriptstyle f}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle g} \\ \mathsf{R} & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \mathsf{S} \end{array} \tag{4.2.4}$$

个$\mathbf{E}_\infty$ 环的态射。若

1. f 和 g 是有限平坦的（按 *[Lur18c, §5.2.3],* 的含义，即有限投射）；
2. α 在基变换到 $L_{K(p,n)}\mathsf{A}$ 后，对于所有素数 p 和高度 n都是有限 *étale*；

于是 α 是有限 *étale*。

证明。只需证明 α 在π_0A 的每个素理想处局部化后都是有限 étale，因此可以假设 A 是局部的，故对于某个固定的素数 p，A 是 L_n-局部的，并且$n < \infty$。对 n使用归纳法，我们可以假设 α 在基变换到 L_{n-1}A 后是有限 étale。令 $I \subset \pi_0$A 表示 n次 Landweber 理想。那么，A 的顶层色度断裂方形可以识别为其 I-进断裂方形：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{A} & \longrightarrow & L_{K(n-1)}\mathsf{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{n-1}\mathsf{A} & \longrightarrow & L_{n-1}L_{K(n-1)}\mathsf{A} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} \mathsf{A} & \longrightarrow & \mathsf{A}_I^\wedge \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_I\mathsf{A} & \longrightarrow & L_I(\mathsf{A}_I^\wedge) \end{array} .$$

由于 R 和 S 在 A 上有限平坦，映射 α 是从连通覆盖进行基变换的，这意味着环 $\mathbf{E}_\infty$ 的自然方形

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{R}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathsf{S}_{\geq 0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{R} & \longrightarrow & \mathsf{S} \end{array}$$

是余笛卡尔的。因此，只需证明 R$_{\geq 0}$ →S$_{\geq 0}$ 是有限 étale 的。由于 R 和 S 是有限平坦的 A-代数，映射 π_0R $\to \pi_0$S 是有限表示的 [Gro64, §1 Pr.1.4.7]。根据 [Lur18c, Lm.B.1.3.3], ，因此只需证明相对余切复形$L_{\mathsf{S}_{\geq 0}/\mathsf{R}_{\geq 0}}$ 消失。为此，只需证明局部化 L_I($L_{\mathsf{S}_{\geq 0}/\mathsf{R}_{\geq 0}}$) 和完备化 $(L_{\mathsf{S}_{\geq 0}/\mathsf{R}_{\geq 0}})_I^\wedge$ 消失。

在前一种情形下，由于局部化是正合的，它与连通覆盖交换，因此我们可以将其识别为

$$L_I(L_{\mathsf{S}_{\geq 0}/\mathsf{R}_{\geq 0}}) \simeq L_{L_I\mathsf{S}_{\geq 0}/L_I\mathsf{R}_{\geq 0}} \simeq L_{(L_I\mathsf{A}\otimes_{\mathsf{A}}\mathsf{S})_{\geq 0}/(L_I\mathsf{A}\otimes_{\mathsf{A}}\mathsf{R})_{\geq 0}}.$$

由于有限 étale 态射在连通覆盖下保持不变，根据归纳假设，该对象消失；归纳假设是 R $\to$ S 在 I-局部化之后，即在 L_{n-1}-局部化之后，为有限 étale 的。

在后一种情形中，只需证明对于任意 I-挠 A$_{\geq 0}$-模F，都有 $F \otimes L_{\mathsf{S}_{\geq 0}/\mathsf{R}_{\geq 0}} \simeq 0$。一般地，若 L 是任意的 A$_{\geq 0}$-模，则

$$((L_{\geq 0})_I^\wedge)_{\geq 0} \simeq (L_I^\wedge)_{\geq 0}.$$

特别地，存在一个自然映射 $(\mathsf{A}_I^\wedge)_{\geq 0} \to (\mathsf{A}_{\geq 0})_I^\wedge$，使后者成为前者上的一个代数，因此

$$F \otimes L \simeq F \otimes (\mathsf{A}_{\geq 0})_I^\wedge \otimes_{\mathsf{A}_{\geq 0}} L \simeq F \otimes (\mathsf{A}_{\geq 0})_I^\wedge \otimes_{(A_I^\wedge)_{\geq 0}} (\mathsf{A}_I^\wedge)_{\geq 0} \otimes_{\mathsf{A}_{\geq 0}} L,$$

因此，要证明 $F \otimes L \simeq 0$，只需证明 $(\mathsf{A}_I^\wedge)_{\geq 0} \otimes_{\mathsf{A}_{\geq 0}} L \simeq 0$。由于 R 在 A 上是有限平坦的，我们可将其识别为

$$(\mathsf{A}_I^\wedge)_{\geq 0} \otimes_{\mathsf{A}_{\geq 0}} R_{\geq 0} \simeq (\mathsf{A}_I^\wedge \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{R})_{\geq 0},$$

S 的情形也类似，因此

$$(\mathsf{A}_I^\wedge)_{\geq 0} \otimes_{\mathsf{A}_{\geq 0}} L_{\mathsf{S}_{\geq 0}/\mathsf{R}_{\geq 0}} \simeq L_{(\mathsf{A}_I^\wedge\otimes_{\mathsf{A}}\mathsf{S})_{\geq 0}/(\mathsf{A}_I^\wedge\otimes_{\mathsf{A}}\mathsf{R})_{\geq 0}}.$$

假设 α 在基变换到 $\mathrm{A}_I^\wedge$ 后是有限 étale 的，也就是说，在 $K(n-1)$-局部化后是有限 étale 的，这意味着该项消失，结论由此得证。 □

命题 4.2.5。 设 $\alpha\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 是环$\mathbf{E}_\infty$A上的定向P-可除群之间的同态。那么，对所有 $T \in \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$，$\alpha(T)\colon \mathbf{G}'(T) \to \mathbf{G}(T)$ 都是有限 *étale* 的。

证明。 由引理 4.2.3，只需证明对每个素数 p 和高度 n，将 $\alpha(T)$ 基变换到 $L_{K(p,n)}$A 后是有限 étale 的。因此，我们可以归约到如下情形：对于固定的（隐含的）素数 p 和高度 n，A 是 $K(n)$-局部的。若 $n=0$，则 A 是有理的。在此情形下，$\mathbf{G}'[H]$ 和$\mathbf{G}[H]$ 本身都是 A 上的有限 étale 群，因此它们之间的任意映射都是有限 étale 的。于是设 A 对某个 $0 < n < \infty$是 $K(n)$-局部的，从而 Quillen $\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}_{\mathsf{A}}^{\mathbb{Q}}$ 存在 [Lur18b, §4.6]。我们可以如下重新诠释 α 是定向$\mathbf{P}$-可除群之间映射这一事实： [Lur19, Pr.2.4.1] 给出了$\mathbf{P}$-可除群交换图表中的左方交换方块

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{G}_{\mathsf{A}}^{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{e'} & \mathbf{G}' & \dashrightarrow & \mathbf{G}'^{\text{ét}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{=} & & \downarrow{\alpha} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{G}_{\mathsf{A}}^{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{e} & \mathbf{G} & \dashrightarrow & \mathbf{G}^{\text{ét}} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中，水平映射分别编码$\mathbf{G}'$ 和$\mathbf{G}$的定向，而该方块的交换性源于 α 保持定向这一事实。根据 [Lur19，命题 2.5，6], 映射 e 和 e' 是$\mathbf{P}$-可除群的单态射，因此根据[Lur18b，命题 2.4，8] 它们的余核$\mathbf{G}'^{\text{ét}}$ 和$\mathbf{G}^{\text{ét}}$ 均作为$\mathbf{P}$-可除群存在，从而给出所述正合行。特别地，右侧的方块存在且为笛卡尔方块。进而，在 $T \in$Glo$_{\mathrm{ab}}$ 上取值会诱导出如下形式的笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}'(T) & \longrightarrow & \mathbf{G}'^{\text{ét}}(T) \\ \downarrow{\alpha(T)} & & \downarrow \\ \mathbf{G}(T) & \longrightarrow & \mathbf{G}^{\text{ét}}(T), \end{array}$$

因此，只需证明右侧的竖直映射是有限 étale。由于$\mathbf{G}_{\mathsf{A}}^{\mathbb{Q}}$ 是$\mathbf{G}$ 的连通分支，并且$\mathbf{G}'$ [Lur18b，定理 4.6，16], 可知余核$\mathbf{G}^{\text{ét}}$ 和$\mathbf{G}'^{\text{ét}}$ 是 étale 的。特别地，$\mathbf{G}'^{\text{ét}}(T)$和$\mathbf{G}^{\text{ét}}(T)$都在 Spec A 上有限 étale，因此它们之间的任意映射也都是有限 étale。 □

引理 4.2.6. 设 $\alpha\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 是定向 $\mathbf{P}$-可除群之间的一个态射，并设 X 是一个全局空间。那么限制

$$\alpha^*\colon \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathbf{G},\mathsf{X}}} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathbf{G}',\mathsf{X}}}$$

保持温和局部系统的满子范畴。

证明。若 α 是一个笛卡尔态射，则这由 [Lur19, Pr.6.2.1] 得证。由于定向 $\mathbf{P}$-可除群的态射可分解为一个笛卡尔映射，后接一个位于固定 $\mathbf{E}_\infty$环上的映射，因此我们归结为以下情形： α 是位于固定 $\mathbf{E}_\infty$ 环 A 上的定向 $\mathbf{P}$-可除群态射。我们必须证明，若 F ∈局部系统$_G$(X)，则 α^*F ∈局部系统$_{G'}$(X) 满足 Df.4.1.9 的两个条件。根据定义，

$$\alpha^*\mathcal{F} \in \mathrm{Mod}_{\mathsf{A}_{\mathbf{G}',\mathsf{X}}}(\mathrm{Fun}((\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{X}}, \mathrm{Sp}))$$

定义为

$$(\alpha^*\mathcal{F})(T) = \mathsf{A}^T_{\mathbf{G}'} \otimes_{\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}}} \mathcal{F}(T)$$

对于 $T \in (\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{X}}$。现在按如下方式验证这两个条件。

(1) 假设 $T' \to T$ 是 $(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{X}}$ 中的一个具有连通纤维的态射，那么由于 F 满足 (1)，可得

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}^{T'}_{\mathbf{G}'} \otimes_{\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}'}} \alpha^*\mathcal{F}(T) &\simeq \mathsf{A}^{T'}_{\mathbf{G}} \otimes_{\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}'}} \mathsf{A}^T_{\mathbf{G}'} \otimes_{\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}}} \mathcal{F}(T) \\
&\simeq \mathsf{A}^{T'}_{\mathbf{G}'} \otimes_{\mathsf{A}^{T'}_{\mathbf{G}}} \mathsf{A}^{T'}_{\mathbf{G}} \otimes_{\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}}} \mathcal{F}(T) \\
&\simeq \mathsf{A}^{T'}_{\mathbf{G}'} \otimes_{\mathsf{A}^{T'}_{\mathbf{G}}} \mathcal{F}(T') \simeq \alpha^*\mathcal{F}(T'),
\end{aligned}$$

因此 α^*F 满足 (1)。

(2) 根据 Pr.4.2.5，态射 $\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}} \to \mathsf{A}^T_{\mathbf{G}'}$ 是有限 étale 的。特别地，$\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}'}$ 作为 $\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}}$-模是可对偶化的，这意味着

$$\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}'} \otimes_{\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}}} (-) \colon \mathrm{Mod}_{\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}}} \to \mathrm{Mod}_{\mathsf{A}^{T'}_{\mathbf{G}}}$$

保极限。由于 $\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}} \to \mathsf{A}^T_{\mathbf{G}'}$ 是平坦的，与覆盖映射 $T_0 \to T$ 相关的相对增广理想 $I_{\mathbf{G}}(T_0/T) \subset \pi_0\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}}$ 满足

$$\pi_0\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}'} \otimes_{\pi_0\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}}} I_{\mathbf{G}}(T_0/T) \simeq I_{\mathbf{G}'}(T_0/T).$$

结合这两个观察，我们发现，如果 F 是一个$\mathbf{G}$-温和局部系统，那么

$$\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}'} \otimes_{\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}}} \mathcal{F}(T) \to (\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}'} \otimes_{\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}}} \mathcal{F}(T_0))^{\mathrm{h}\,\mathrm{Aut}(T_0/T)} \simeq \mathsf{A}^T_{\mathbf{G}'} \otimes_{\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}}} \mathcal{F}(T_0)^{\mathrm{h}\,\mathrm{Aut}(T_0/T)}$$

将目标呈现为源的 $I_{\mathbf{G}'}(T_0/T)$-完备化。 □

现在可以给出如下结论。

Th.4.2.1 的证明。由 Lm.4.2.2 可知，我们有一个函子

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}, \mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}((\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}}, \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat})), \qquad \mathbf{G} \mapsto \left(\mathsf{X} \mapsto \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathbf{G},\mathsf{X}}}\right).$$

由 Lm.4.2.6 可知，若 $\mathbf{G}$ 是 $\mathbf{P}$-可除群，则我们可以沿子范畴作限制

$$\mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}(\mathsf{X}) \subset \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathbf{G},\mathsf{X}}}$$

从而得到一个函子

$$(\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{aff}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}((\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}}, \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat})), \qquad \mathbf{G} \mapsto (\mathsf{X} \mapsto \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}(\mathsf{X}))\,.$$

根据 [Lur19, Pr.5.1.9, Rmk.5.2.11]，这落在保极限函子的全子范畴中

$$\mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes} \subset \mathrm{Fun}((\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}}, \mathrm{CAlg}(\mathrm{Cat}))$$

之中。 □

这证明了 $\mathrm{LocSys}^{(-)}$ 作为从定向 $\mathbf{P}$-可除群到对称幺半 ab-全局范畴的函子的基本函子性。

4.3 远离某个素数集的相对 π-有限态射

给定定向 $\mathbf{P}$-可除群的同态 $\alpha\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$，函子

$$\alpha^*\colon \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}} \to \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}'}$$

Th.4.2.1 的函子在阿贝尔群全局范畴之间通常不保持由相对 π-有限空间映射所指标化的参数化余极限。非正式地说，若 $\alpha_{(p)}\colon \mathbf{G}'_{(p)} \to \mathbf{G}_{(p)}$ 不是同构，那么温和局部系统上的诱导映射通常无法与沿着涉及素数 p 处有趣等变性的映射所作的余极限交换。因此，所得映射 $\mathsf{A}^{(-)}{}_{\mathbf{G}} \to \mathsf{A}^{(-)}{}_{\mathbf{G}'}$ 也无法与沿此类映射的转移交换。本小节将确定一类轨形空间映射，它们“远离”某个素数集，从而使我们能够妥善表述并解决这一问题。

定义 4.3.1. 余格 是一个挠阿贝尔群 Λ，具有如下性质：对于所有正整数 n，映射 $n\colon \Lambda \to \Lambda$ 是一个核有限的满射。在这种情况下，我们记作

$$\widehat{\Lambda} \coloneqq \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

为与 Λ 对偶的格 。

注 4.3.2。 若 Λ 是一个余格，则存在一个（非典范的）等价

$$\Lambda \simeq \mathbf{Q}^{n_1}_{p_1}/\mathbf{Z}^{n_1}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Q}^{n_k}_{p_k}/\mathbf{Z}^{n_k}_{p_k}$$

其中素数 $p_1, \ldots, p_k$ 构成一个有限列表，且非负整数为 $n_1, \ldots, n_k$。 在这种情况下，

$$\widehat{\Lambda} \simeq \mathbf{Z}^{n_1}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}^{n_k}_{p_k}.$$

给定一个 π-有限空间 F，我们将滥用记号，将 $F = \mathbf{R}(F)$ 写作 F 在 Df.2.1.14 的受限 Yoneda 嵌入 $\mathbf{R}\colon \mathsf{S} \to \mathsf{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$ 下的像。特别地，在本节中，我们有时会作如下隐式认同

$$\mathbf{B}H = BH.$$

定义 4.3.3。 设 Λ 是一个余格。相对于 Λ 的形式环空间函子 是唯一的保余极限函子

$$\mathcal{L}^{\Lambda}\colon \mathcal{S}_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{gl}} \to \mathcal{S}_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{gl}}$$

扩展这一赋值

$$\mathcal{L}^{\Lambda}(T) \coloneqq \mathrm{map}(B\widehat{\Lambda}, T) \simeq \operatorname*{colim}_{H\subset\Lambda \text{ finite}} \mathrm{map}(B\widehat{H}, T) \in \mathcal{S}_{\pi} \subset \mathcal{S}_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{gl}} \tag{4.3.4}$$

对于 $T \in \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$。这一构造显然关于 Λ 是自然的。我们还将其简记为

$$\mathcal{L}_p \coloneqq \mathcal{L}^{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}.$$

注 4.3.5。 Df.4.3.3 与 Lurie 在 [Lur19, Con.3.4.3], 中给出的定义一致，即

$$\mathcal{L}^{\Lambda}(\mathsf{X}) \simeq \operatorname*{colim}_{H\subset\Lambda \text{ finite}} \left(\underline{\mathrm{Map}}(\mathbf{B}\widehat{H}, \mathsf{X})\right),$$

其中 Map 是 S^{gl} 阿贝尔群中的内部映射对象。要看出这一点，注意到 Lurie 的定义根据 [Lur19, Rmk.3.4.6], 与余极限交换，因此由其在 $\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$上的取值决定；根据 [Lur19, Pr.3.4.7], 它在此处与 Df.4.3.3 一致。特别地，从后一个构造很容易看出，$\mathsf{L}^{\Lambda}(-)$ 保持有限极限。

例 4.3.6。 设 F是一个 π-有限空间。那么空间映射 $\mathrm{map}(B\Lambda,\ F)$ 仍然是 π-有限的，并且根据 [Lur19, Pr.3.4.7]，自然映射

$$\mathcal{L}^{\Lambda}(F) \to \mathrm{map}(B\widehat{\Lambda}, F)$$

是全局空间的等价。特别地，$\mathsf{L}^{\Lambda}(F)$ 又是一个 π-有限空间。

定义 4.3.7。 函子范畴 L^{Λ} 配备了两个自然变换

$$\mathsf{X} \xrightarrow{c} \mathcal{L}^{\Lambda}(\mathsf{X}) \xrightarrow{\epsilon} \mathsf{X}.$$

它们由沿余格的唯一同态 $0 \leftarrow \Lambda \leftarrow 0$ 的限制诱导而来。显然，复合 $\epsilon \circ c\colon \mathsf{X} \to \mathsf{L}^{\Lambda}(\mathsf{X}) \to \mathsf{X}$ 是恒等态射。

定义 4.3.8。 设 S 为一个素数集合。全局空间的相对 π-有限映射 $f\colon \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ 称为远离 S，如果方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_p\mathsf{X} & \xrightarrow{\mathcal{L}_p f} & \mathcal{L}_p\mathsf{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{X} & \xrightarrow{f} & \mathsf{Y} \end{array}$$

对所有 $p \in S$都是笛卡尔的。

在本小节的其余部分，固定一个素数集合 S。

例 4.3.9。 设 α: $F \to F'$ 是 π-有限空间之间的映射。那么，例 4.3.6 蕴含： α 远离 S 当且仅当方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{map}(B\mathbf{Z}^p, F) & \longrightarrow & \text{映射}(B\mathbf{Z}^p, F') \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \longrightarrow & F' \end{array}$$

普通空间的映射对所有 $p \in S$ 都是笛卡尔的。

我们的下一个目标是证明，远离 S 的态射类由一个可归纳子范畴生成。这将用到下面的结果。

引理 4.3.10。 设 f: $\mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ 是全局空间的一个映射。

1. 如果 f 具有 $f = (f_i)$： $\coprod_{i\in I}\mathsf{Y}_i \to \mathsf{X}$ 的形式，其中 f_i： $\mathsf{Y}_i \to \mathsf{X}$ 是一个映射族；或者具有 $f = (f_i)$： $\coprod_{i\in I}\mathsf{Y}_i \to \coprod_{i\in I}\mathsf{X}_i$ 的形式，其中 f_i： $\mathsf{Y}_i \to \mathsf{X}_i$ 是一个映射族，那么当且仅当每个 f_i 都远离 S 时， f 远离 S 。

2. 假设

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Y}' & \longrightarrow & \mathsf{Y} \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathsf{X}' & \longrightarrow & \mathsf{X} \end{array}$$

是一个$\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$中的笛卡尔方块。

(a) 如果 f 远离 S，那么 f' 远离 S。*(b)* 如果 f' 远离 S，并且对于所有 $p \in S$，$\mathcal{L}^p\mathsf{X}' \to \mathcal{L}^p\mathsf{X}$ 都是有效满态射，那么 f 远离 S。

3. 设给定另一个全局空间之间的映射 g: $\mathsf{Z} \to \mathsf{Y}$ 。

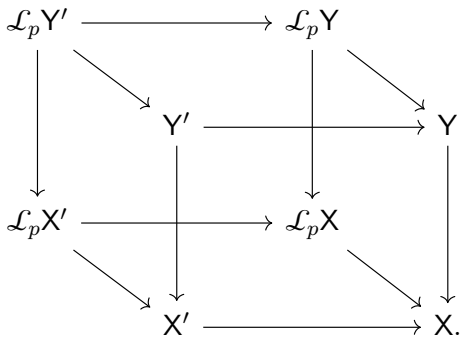
(a) 如果 g 远离 S，那么 f 远离 S 当且仅当 $g \circ f$ 远离 S。*(b)* 如果 f 远离 S 一个有效满态射，那么 g 远离 S 当且仅当 $g \circ f$ 远离 S。

4. 如果 f 远离 S，那么对角映射$\mathsf{Y} \to \mathsf{Y} \times_{\mathsf{X}} \mathsf{Y}$ 远离 S。

5. 如果 f 与 S 不相交，那么对于任意余格 Λ，$\mathcal{L}^\Lambda f$ 与 S 不相交。

证明。 (1) 这是因为 L^p 保持余积，而余积在预层范畴 S^{gl} 阿贝尔群 中互不相交。

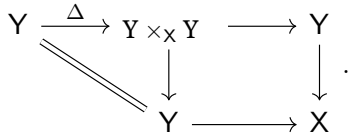
(2) 对于 $p \in S$，考虑这个立方体



前面和后面都是笛卡尔的。因此，如果右面是笛卡尔的，那么左面也是笛卡尔的；反过来，只要 $\mathrm{L}^p\mathsf{X}' \to \mathrm{L}^p\mathsf{X}$ 是所需的有效满态射，这一结论也成立。

(3) 证明与 (2) 类似，使用拉回的粘贴律。

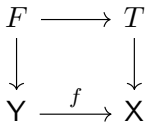
(4) 考虑图表



由 (1a)，既然 $\mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ 远离 S，那么 $\mathsf{Y} \times_{\mathsf{X}} \mathsf{Y} \to \mathsf{Y}$ 也远离 S。由于复合 $\mathsf{Y} \to \mathsf{Y} \times_{\mathsf{X}} \mathsf{Y} \to \mathsf{Y}$ 是恒等态射，它显然远离 S。因此，由 (3a)，$\mathsf{Y} \to \mathsf{Y} \times_{\mathsf{X}} \mathsf{Y}$ 远离 S。

(5) 这是因为 $\mathrm{L}^p\mathrm{L}^\Lambda \simeq \mathrm{L}^\Lambda\mathrm{L}^p$，且由注记 4.3.5，$\mathrm{L}^\Lambda$ 保持有限极限。 □

命题 4.3.11。设 $f\colon \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ 是全局空间之间的相对 π-有限映射。那么，当且仅当对于每个 $T \in \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$ 和笛卡尔方块，f 远离 S。



在 $\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群 中，映射 $F \to T$ 远离 S。

证明。我们断言，若 X 是一个全局空间且 Λ 是一个余格，则存在一个有效的 $\coprod_{i\in I} T_i \to \mathsf{X}$，满足 $T_i \in \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$，使得 $\coprod_{i\in I} \mathrm{L}^\Lambda T_i \to \mathrm{L}^\Lambda\mathsf{X}$ 再次成为一个有效满态射。由 Lm.4.3.10(1,2) 即得该命题。

事实上，这样的覆盖由以 $I = \coprod_{T\in\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}} \pi_0\mathsf{X}(T)$ 为指标的典范有效满态射 $\coprod_{i\in I} T_i \to \mathsf{X}$ 给出。为此，固定 $T \in \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$ 和 $x \in \mathrm{L}^\Lambda\mathsf{X}(T)$。于是 x 可表示为某个映射 $f_x\colon\ T \times \mathbf{B}H \to \mathsf{X}$，其中 $H \subset \Lambda$ 为有限子群；而该映射属于 $\mathrm{L}^\Lambda f_x\colon\ \mathrm{L}^\Lambda(T \times \mathbf{B}H) \to \mathrm{L}^\Lambda\mathsf{X}$ 的像。

□

前一个结果表明，远离 S 的映射类，在局部上由那些远离 S 的 π-有限空间的映射生成。将 $\mathrm{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$ 的这个子范畴记为 $S\perp\pi$。

推论 4.3.12. 宽子范畴 $S\perp\pi \subset \mathcal{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔 构成一个可归纳子范畴。此外，由 $S\perp\pi$ （见 *Df.2.1.2*）生成的局部类 $\overline{S\perp\pi}$ 恰好是由相对 π-有限且远离 S 的映射张成的宽子范畴。

证明. 由 Lm.4.3.10 和 Pr.4.3.11 立即得到。 □

4.4 远离素数的态射的刻画

本小节的目标是更明确地描述远离 S 的相对 π-有限映射。根据 Pr.4.3.11，要理解这类映射的局部结构，只需弄清形如 $F \to \mathbf{B}H$ 的映射何时远离 S，其中 H 是有限阿贝尔群，F 是一个 π-有限空间。根据 Ex.4.3.9，这可化归为普通同伦论中的一个问题。根据 Lm.4.3.10(1)，不妨假设 F 连通。由于一个映射远离 S 当且仅当它对所有 $p \in S$ 都远离 p，我们可以集中讨论 $S = \{p\}$ 的情形。最后，由于容易看出 $\mathbf{B}H \to \mathbf{B}H_{(p)}$ 远离 p，根据 Lm.4.3.10(3a)，不妨假设 H 是一个有限 p-群。作出这些化简后，我们现在从以下内容开始分析。

引理 4.4.1. 设 $f\colon G \to H$ 是有限群的同态，并假设诱导映射 $f\colon \mathbf{B}G \to \mathbf{B}H$ 远离 p。那么 f 在 G 和 H 中 p-幂阶元素之间诱导一个双射。

证明. 给定有限群 G，p-幂阶元素在 G 中可识别为集合 $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, G)$。若 f 远离 p，则对笛卡尔方块取竖直纤维

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(B\mathbf{Z}_p, BG) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(B\mathbf{Z}_p, BH) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG & \longrightarrow & BH \end{array}$$

便得到同构 $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, G) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, H)$，引理得证。 □

引理 4.4.2. 设 $f\colon G \to H$ 是有限群的同态。假设 H 是阿贝尔 p-群，且诱导映射 $\mathbf{B}G \to \mathbf{B}H$ 远离 p。那么 f 是一个分裂中的投影

$$G \cong K \times H$$

与 $p \nmid |K|$。

证明。 由于 f 与 p互素，根据 Lm.4.4.1，它在 p-幂阶元素之间诱导一个双射。我们断言， G 中所有 p-幂阶的元素都是中心的。由于 H 是一个阿贝尔 p-群，这就意味着所声称的分裂 $G \cong K \times H$。为证明这一断言，我们将

$$\mathrm{Map}(B\mathbf{Z}_p, BG) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, G)_{\mathrm{h}G} \simeq \coprod_{g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, G)/G} BC_G(g),$$

其中， G 通过共轭作用于 $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, G)$，而 $C_G(g) = \{x \in G : gx = xg\} \subset G$ 是 g的中心化子。因此，若 f 远离 p，则方块

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, G)/G} BC_G(g) & \longrightarrow & H \times BH \simeq \text{映射}(\mathbf{Z}_p, BH) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG & \longrightarrow & BH \end{array}$$

是笛卡尔的。这只有在左侧的垂直映射对所有 $g \in G$ 阶为 p-次幂的 g诱导同构 $C_G(g) \cong G$时才可能，这意味着如所声称的， g 是中心的。 □

这个引理可以推广如下。

命题 4.4.3. 设 F 是一个带基点的连通 π-有限空间，且 H 是一个有限阿贝尔p-群。给定一个映射 $f\colon F \to \mathbf{B}H$，以下条件等价：

1. f 远离 p*2.* 对所有 $n \geq 1$， p中所有 $\pi_1 F$ 的 p-幂阶元素都在 $\pi_n F$ 上平凡作用；*3.* f 是分裂 $F \simeq f^{-1}(e) \times BH$中的投影，并且$f^{-1}(e)$ 的同伦群的阶与 p互素。

证明。(1)⇒(2). 一般而言，映射 $F \to \mathbf{B}H$ 远离 p 当且仅当

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(B\mathbf{Z}_p, F) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(B\mathbf{Z}_p, BH) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \longrightarrow & BH \end{array}$$

是笛卡尔的。假设 F 是连通的，则这成立当且仅当竖直纤维上的诱导映射给出一个等价

$$\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}_p, F) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, H).$$

特别地，若这成立，则 $\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}_p, F)$ 是 0-截断的。

现在假设 f 不属于 p。我们将对 n 向下归纳，以证明以下结论对所有 $n \geq 2$均成立：

(a$_n$) $F_{\leq n-1} \to BH$ 不属于 p;

(b$_n$) $\pi_n F$ 的阶与 p互素;

(c$_n$) $\pi_1 F$ 中所有阶为 p的幂的元素都平凡作用于 $\pi_n F$。

条目 (a$_2$) 与 Lm.4.4.2 结合，在 $n = 1$ 的情况下确立了 (2)。再与所有其他 n 的 (c$_n$) 结合，即可确立 (2)。

向下归纳的基础由某个 n 提供，其中 $F \simeq F_{\leq n-1}$，此时全部三个条件都显然满足。对于归纳步骤，我们固定某个 $n \geq 2$，并假设 (a$_{n+1}$–c$_{n+1}$) 成立。为证明 (a$_n$–c$_n$) 成立，我们分析 $F_{\leq n}$ 的顶层 Postnikov 方块。给定一个作用于阿贝尔群 M 上的群 G，定义

$$B^n_G M = (B^n M)_{\mathrm{h}G}.$$

简写为 $G = \pi_1 F$。于是， $F_{\leq n}$ 的顶层 Postnikov 方块形式为

$$\begin{array}{ccc} F_{\leq n} & \longrightarrow & BG \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_{\leq n-1} & \longrightarrow & B^{n+1}_G \pi_n F \end{array} .$$

将 $B\mathbf{Z}_p$ 映射到其中，得到一个笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, H) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, G) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}_p, F_{\leq n}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}_p, BG) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}_p, F_{\leq n-1}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}_p, B^{n+1}_G \pi_n F) \end{array} , \tag{4.4.4}$$

其中，左上角的等价使用了证明开头处的识别。注意，$\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}^p, F_{\leq n-1})$ 是 $(n-1)$-截断的，而且该方块的顶行由离散空间组成。由 $n \geq 2$ 可知，$\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}^p, B^{n+1}_G \pi_n F)$ 是 $(n-1)$-截断的。我们将利用这一点证明， G 中所有 p-幂挠元都在 $\pi_n F$ 上平凡作用。

对于每个映射 $f\colon \mathbf{Z}_p \to G$，我们都可以构造纤维序列

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{*//BG}(B\mathbf{Z}_p, B^{n+1}_G \pi_n F) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}_p, B^{n+1}_G \pi_n F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{f\} & \longrightarrow & \mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}_p, BG) \end{array} .$$

利用底角是离散的这一点，我们发现左上角再次是 $(n-1)$-截断的。现在请注意，存在一个伴随

$$\mathrm{Map}_{*//BG}(B\mathbf{Z}_p, B_G^{n+1}\pi_n F) \simeq \mathrm{Map}_{*//B\mathbf{Z}_p}(B\mathbf{Z}_p, B_{\mathbf{Z}_p}^{n+1}\pi_n F)$$

并且，后一个空间按定义可纳入一个笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{*//B\mathbf{Z}_p}(B\mathbf{Z}_p, B_{\mathbf{Z}_p}^{n+1}\pi_n F) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{/B\mathbf{Z}_p}(B\mathbf{Z}_p, B_{\mathbf{Z}_p}^{n+1}\pi_n F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & B^{n+1}\pi_n F \end{array} .$$

由于 $\mathrm{Map}_{*//\mathbf{Z}_p}(B\mathbf{Z}_p,\ B^{n+1}\mathbf{z}_p\ \pi_n F)$ 是 $(n-1)$-截断的，因此我们由长正合列得出

$$\pi_{n+1}\,\mathrm{Map}_{/B\mathbf{Z}_p}(B\mathbf{Z}_p, B_{\mathbf{Z}_p}^{n+1}\pi_n F) \cong \pi_{n+1}B^{n+1}\pi_n F \cong \pi_n F$$

and

$$\pi_n\,\mathrm{Map}_{/B\mathbf{Z}_p}(B\mathbf{Z}_p, B_{\mathbf{Z}_p}^{n+1}\pi_n F) \cong 0.$$

如果 G 是一个作用于 M 上的群，那么

$$\pi_k\,\mathrm{Map}_{/BG}(BG, B_G^n M) \cong H^{n-k}(G; M)$$

同构于以 G 为系数的群上同调。这使我们能够将上面的第一个同构重新解释为

$$\pi_n F \cong \pi_{n+1}\,\mathrm{Map}_{/B\mathbf{Z}_p}(B\mathbf{Z}_p, B_{\mathbf{Z}_p}^{n+1}\pi_n) \cong H^0(\mathbf{Z}_p; \pi_n F) \cong (\pi_n F)^{\mathbf{Z}_p}.$$

因此我们已经证明，对于任意映射 $f\colon \mathbf{Z}_p \to G$，都有 $(\pi_n F)^{\mathbf{Z}_p} \cong \pi_n F$。换言之， G 中阶为 p 的幂的所有元素都平凡地作用于 $\pi_n F$。这就证明了 (c_n)。

既然已经确定 $\mathbf{Z}^p$ 在 $\pi_n F$ 上的诱导作用是平凡的，我们便可将其识别为

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, \pi_n F) = H^1(\mathbf{Z}_p; \pi_n F) \cong \pi_n\,\mathrm{Map}_{/B\mathbf{Z}_p}(B\mathbf{Z}_p, B_{\mathbf{Z}_p}^{n+1}\pi_n F) \cong 0.$$

这只有在 $\pi_n F$ 的阶与 p互素时才有可能，从而证明 (b_n)。

由于 $\pi_n F$ 的阶与 p 互素，且 G 中每个具有 p-幂阶的元素都在$\pi_n F$上作用平凡，我们得到 Postnikov 截断 $B_G^{n+1}\pi_n F \to BG$ 诱导出一个等价

$$\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}_p, B_G^{n+1}\pi_n F) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, G).$$

结合等式 (4.4.4) 以及假设 $F_{\leq n} \to \mathbf{B}H$ 远离 p，我们推得

$$\mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}_p, F_{\leq n-1}) \simeq \mathrm{Map}_*(B\mathbf{Z}_p, F_{\leq n}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, H),$$

这意味着 $F_{\leq n-1} \to H$ 再次避开了 p，从而证明了 (a_n)。

(2)⇒(3)。假设 p 中所有具有 $\pi_1 F$-幂阶的元素都对 $\pi_n F$ 上的 $n \geq 1$ 平凡作用。特别地，$\pi_1 F \cong K \times H$ 中具有 p-幂阶的元素构成子集 $H \subset \pi_1 F$，并且H对 F 的高阶同伦群平凡作用。此外，假设 $f^{-1}(e)$ 是一个连通空间，其同伦群的阶与 p 互素。我们对 n 进行归纳，以证明对于所有 $n \geq 1$， $F_{\leq n} \cong f^{-1}(e)_{\leq n} \times BH$；基例 $n = 1$ 刚刚已经建立。对于归纳步骤，考虑 $F_{\leq n}$ 的顶层 Postnikov 方块，其形式为

$$\begin{array}{ccc} F_{\leq n} & \longrightarrow & BK \times BH \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^{-1}(e)_{\leq n-1} \times BH & \longrightarrow & B^{n+1}_{K\times H}\pi_n F \end{array}.$$

由于 H 在 $\pi_n F$上的作用是平凡的，这可以进一步细化为一个笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} F_{\leq n} & \longrightarrow & BK \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^{-1}(e)_{\leq n-1} \times BH & \xrightarrow{k} & B^{n+1}_{K}\pi_n F \end{array}.$$

我们的假设蕴含，$\mathrm{Map}(\phi^{-1}(e)_{\leq n-1},\ B^{n+1}_K \pi_n F)$ 是一个 π-有限空间，且在所有基点处的同伦群都与 p 互素。由于 H 是一个 p-群，基本障碍理论蕴含，对角映射

$$\begin{aligned} \mathrm{map}(\phi^{-1}(e)_{\leq n-1}, B^{n+1}_K \pi_n F) &\to \mathrm{map}(\phi^{-1}(e)_{\leq n-1}, B^{n+1}_K \pi_n F)^{BH} \\ &\simeq \mathrm{map}(\phi^{-1}(e)_{\leq n-1} \times BH, B^{n+1}_K \pi_n F) \end{aligned}$$

是一个等价。换言之， k-不变的 $f^{-1}(e)_{\leq n-1} \times BH \to B^{n+1}_K \pi_n F$经由投影 $f^{-1}(e)_{\leq n-1} \times BH \to f^{-1}(e)_{\leq n-1}$分解，这意味着

$$F_{\leq n} \simeq \phi^{-1}(e)_{\leq n} \times BH$$

如所声称的。

(3)⇒(1)。令 $F' = \phi^{-1}(e)$。我们必须证明，若 F'的同伦群都与 p互素，则投影 $F' \times BH \to BH$ 远离 p。由于远离 p的映射在基变换下稳定，只需证明 $F' \to *$ 远离 p，也就是说，

$$\mathrm{Map}(B\mathbf{Z}_p, F') \simeq F'.$$

这可由使用上述 F' 的 Postnikov 塔的基本障碍理论得出 . □

给定一个阿贝尔群 H，我们用 $H_{(S)} \subset H$ 表示由 H 中阶的素因子仅被 S 整除的所有元素生成的子群。

推论 4.4.5. 设 F 是一个 π-有限空间， H 是一个有限阿贝尔群。那么，映射f: $F \to \mathbf{B}H$ 远离 S，当且仅当存在一个分解

$$F \simeq \coprod_{i \in I} F_i \times \mathbf{B}H_{(S)},$$

其中 I 是一个有限集， F_i 是一个连通的 π-有限空间，其同伦群对于 $p \in S$均与 p互素，而 f 是以下形式的映射之和

$$f_i \times \mathrm{id}_{\mathbf{B}H_{(S)}} \colon F_i \times \mathbf{B}H_{(S)} \to \mathbf{B}H[1/S] \times \mathbf{B}H_{(S)} \simeq \mathbf{B}H.$$

Lm.4.4.2 也有如下整体化。

命题 4.4.6。 设 f: $K \to G$ 是有限群的同态。那么诱导映射 f: $BK \to BG$ 远离 p，当且仅当满足以下条件:

1. $f(K)$ 包含 G 中所有阶为 p的幂的元素; *2.* 给定 x、 $y \in K$，其中 x 的阶为 p的幂，若 $f(xy) = f(yx)$，则；3. 核 f|。

证明。 首先，假设 f 远离 p。那么 Lm.4.4.1 立即推出 (1) 和 (3)。对于 (2)，注意到一般而言

$$\mathrm{Map}(B\mathbf{Z}_p, BG) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, G)_{\mathrm{h}G} \simeq \coprod_{x \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_p, G)/G} BC_G(x).$$

由此可知，若 $x \in K$ 是 p-挠的，则这个交换图

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{y \in K : (\exists g \in G)(gf(y)g^{-1} = f(x))} BC_K(y) & \longrightarrow & BC_G(f(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BK & \xrightarrow{\quad f \quad} & BG \end{array}$$

是笛卡尔的。特别是，方块

$$\begin{array}{ccc} C_K(x) & \longrightarrow & C_G(f(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

是笛卡尔的，也就是说，如果 $x \in K$ 是 p-挠的，那么 $C_K(x) = f^{-1}(C_G(f(x)))$。这是对 (2) 的另一种表述。

反之，设 f 满足 (1–3)。固定一个映射 q: $H \to G$，其中 H 为有限阿贝尔p-群，并考虑如下笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & BH \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ BK & \xrightarrow{f} & BG \end{array}.$$

根据 Lm.4.4.1 之前的讨论，只需证明映射 $F \to BH$ 远离 p。由 Pr.4.4.3，这等价于它是一个投影 $F' \times BH \to BH$，其中 F'的同伦群与 p互素。由双陪集公式，F 的路径连通分支具有如下形式：对某个 $g \in G$，为 BL_g，其中

$$L_g = \{(k,h) \in K \times H : f(k) = gq(h)g^{-1}\}.$$

将 q 替换为一个共轭映射后，不妨考虑 $g = e$ 的情形，于是

$$L_g = K \times_G H = \{(k,h) \in K \times H : f(k) = q(h)\}.$$

条件 (1) 确保 $K \times_G H \to H$ 是满射。此映射的核与 f 的核同构，也就是说，存在一个正合列

$$1 \to \ker f \to K \times_G H \to H \to 1.$$

条件 (3) 表明 $\ker f$ 的阶与 p 互素，因此只需证明 $K \times_G H$ 中的所有p-挠元都是中心的。事实上，设 $(k,h) \in K \times_G H$ 的阶是 p 的幂，并任取 $(k',h') \in K \times_G H$。由于 (k,h) 的阶是 p 的幂，k 也如此。由于 H 是阿贝尔群，我们可以将其识别为

$$f(kk') = f(k)f(k') = q(h)q(h') = q(hh') = q(h'h) = q(h')q(h) = f(k')f(k) = f(k'k).$$

于是，条件 (2) 蕴含 $kk' = k'k$，因此 (k,h) 如所述是中心的。 □

推论 4.4.7。设 $f\colon K \to G$ 是有限群同态。那么，诱导映射 $f\colon BK \to BG$远离 S，当且仅当 $K \to \mathrm{im}(f)$和 $\mathrm{im}(f) \to G$都远离 S。

□

例 4.4.8。与之相关的分类空间映射

1. 包含映射 $C_3 \subset \Sigma_3$ 不涉及 3；2. 满射 $D_{30} \to D_6$ 不涉及 3；3. 映射 $C_2 \to \Sigma_3$ 和 $\Sigma_3 \to C_2$ 不涉及 2；4. 映射 $e \to G$ 和 $G \to e$ 涉及 p 当且仅当 $p \nmid |G|$。

4.5 参数化正合性：温和局部系统

Lurie 的*tempered* 全能性定理 [Lur19，定理 7.2。10] 可以用参数化高阶范畴论的语言重新表述如下。

定理 4.5.1 (Lurie)。 设 $\mathbf{G}$ 是一个 $\mathbf{E}_\infty$ 环上的定向$\mathbf{P}$-可除群。则局部系统$_{\mathbf{G}}$ $\in \mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}$ 是一个对称幺半结构的 π-稳定阿贝尔群-全局范畴，也就是说，它可提升为

$$\mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}} \in \mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}_{\pi\text{-st}}.$$

证明。 由 [Lur19，命题 5.2.12，], 局部系统$_{\mathbf{G}}$ 逐纤维稳定。由同上的命题 7.2.2，局部系统$_{\mathbf{G}}$是 π-余完备的，而定理 7.2.10 表明它是 π-半可加的。张量积显然与逐纤维有限余极限交换，且由同上的定理 7.3.1 可知投影公式成立。 □

注 4.5.2。 我们注意到，Lurie 的工作甚至表明，局部系统$_{\mathbf{G}}$ 是一个可呈示的对称幺半结构的 π-稳定 ab-全局范畴，也就是说，它存在所有参数化极限和余极限，且张量积在每个变量上都与参数化余极限交换。我们不会实质性地用到这一点。

一般而言，给定一个定向$\mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 的$\mathbf{P}$-可除群态射，所诱导的函子 α^*：局部系统$_{\mathbf{G}'} \to$ 局部系统$_{\mathbf{G}}$ （取值于 ab-全局范畴）不保所有 π-极限，因此 Th.4.2.1 与 Th.4.5.1不能结合起来，将局部系统$(-)$ 提升为一个取值于 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}_{\pi\text{-st}}$的函子。在陈述本节的主定理之前，我们先引入一些记号。

定义 4.5.3. 设 S 为素数集合。若映射 α：$\mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 是$\mathbf{P}$-可除群的映射，则称其在之外是笛卡尔的，如果对所有素数 $p \notin S$，态射$\alpha_{(p)}$：$\mathbf{G}'_{(p)} \to \mathbf{G}_{(p)}$ 是 p-可除群的笛卡尔态射。记

$$\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{S^\dagger,\mathrm{aff}} \subset \mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{aff}}$$

f或由在.....之外是笛卡尔的态射张成的宽子范畴 S.

注 4.5.4. 根据定义，$\mathbf{P}$-可除群的笛卡尔态射在任意素数集合 S 之外都是笛卡尔的。特别地，复合

$$\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{S^\dagger,\mathrm{aff}} \subset \mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{aff}} \to \mathrm{Aff}$$

是一个笛卡尔纤维化。对于一个$\mathbf{E}_\infty$ 环 A，记$\mathbf{BT}^{\mathrm{or}}_{S^\dagger}$(A)为 A 上的纤维。于是

$$\mathbf{BT}^{\mathrm{or}}_{S^\dagger}(\mathsf{A}) \subset \mathbf{BT}^{\mathrm{or}}(\mathsf{A})$$

是由以下态射 α张成的宽子范畴：A 上的$\mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 群的$\mathbf{P}$-可除群，且对所有 $p \notin S$，$\alpha_{(p)}$ 都是同构。

回顾一下， $S\perp\pi$ 表示由 π-有限空间的映射张成的 S^{gl} 阿贝尔群 的可归纳子范畴，其中这些映射避开素数集合 S 。本节的目标是证明以下结果。

定理 4.5.5。 温和局部系统的构造组装成一个函子

$$(\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{S\dagger,\mathrm{aff}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}_{S\perp\pi\text{-}\mathrm{st}}, \qquad \mathbf{G} \mapsto \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}.$$

在证明之前，先引入一些辅助定义将会很方便。

记号 4.5.6。 设 $\mathbf{G}$ 是一个定向的 $\mathbf{P}$-可除群，且 $p\colon \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ 是全局空间的一个映射。则限制

$$p^*\colon \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}(\mathsf{X}) \to \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}(\mathsf{Y})$$

pres保留所有极限和余极限，因此处于一串记作如下的伴随之中

$$p_! \dashv p^* \dashv p_*;$$

参见 [Lur19，记号 7.0.1]。

定义 4.5.7。 设 $\alpha\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 是定向 $\mathbf{P}$-可除群的一个态射，且$q\colon \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ 是全局空间的一个映射。若 α^* 保留 q-极限 ，则称交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}(\mathsf{X}) & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}(\mathsf{Y}) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} \\ \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}'}(\mathsf{X}) & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}'}(\mathsf{Y}) \end{array}$$

是右伴随可交换的，即自然伴随变换

$$\alpha^* q_* \to q_* \alpha^*$$

是一个等价。

若 $\mathsf{Q} \subset \mathsf{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}}$ 是由 π-有限态射构成的可归纳范畴，且 $\alpha\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 是 $\mathbf{P}$-可除群的一个态射，则根据定义

$$\alpha^*\colon \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}'} \to \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}$$

当且仅当 α^* 对所有 $q \in \mathsf{Q}$ 保持 q-极限时，它是 Q-稳定 ab-全局范畴之间的一个映射。我们先确定 $\mathbf{P}$-可除群中始终满足这一条件的那些态射。

命题 4.5.8. 设 $\alpha\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 是定向 $\mathbf{P}$-可除群之间的笛卡尔态射。那么 α^* 保持所有 π-极限。

证明. 正如 [BM24, 命题 4.6], 所证明的，沿 $\mathbf{P}$-可除群的笛卡尔态射进行基变换会导出一个参数化左伴随

$$\alpha^*\colon \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}} \to \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}'}$$

关于温和局部系统，因此保留所有参数化的余极限。结合引理 3.1.9，即可证明上述命题。□

由于$\mathbf{PDiv}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{aff}}$ 中的映射可分解为一个笛卡尔态射，后接一个位于固定$\mathbf{E}_\infty$ 环上的态射，因此我们已将问题归结为考虑给定固定$\mathbf{E}_\infty$ 环上的态射。

命题 4.5.9. 设 $\alpha\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 是一个$\mathbf{E}_\infty$ 环上的$\mathbf{P}$-可除群态射，并假设对所有 $p \notin S$，$\alpha_{(p)}\colon \mathbf{G}'_{(p)} \to \mathbf{G}_{(p)}$ 都是同构。那么，对所有 $q \in S^\perp\pi$， α^* 与 q-极限可交换。

证明。 设 $q\colon \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ 是一个远离 S 的相对 π-有限轨形空间映射，并考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}(\mathsf{X}) & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}(\mathsf{Y}) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} \\ \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}'}(\mathsf{X}) & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}'}(\mathsf{Y}). \end{array} \tag{4.5.10}$$

注意到

$$\mathsf{X} \simeq \operatorname*{colim}_{T \in (\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})_{/\mathsf{X}}} T, \qquad \mathsf{Y} \simeq \operatorname*{colim}_{T \in (\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})_{/\mathsf{X}}} (\mathsf{Y} \times_{\mathsf{X}} T).$$

由于 $\mathsf{LocSys}_{\mathbf{G}}$ 和 $\mathsf{LocSys}_{\mathbf{G}'}$ 是 ab-全局范畴，因此 (4.5.10) 是相应映射 $\mathsf{Y} \times_{\mathsf{X}} T \to T$的交换图的一个极限。由于伴随化交换图在取极限下封闭 [Lur17，推论 4.7.4.18], ，我们因此将问题归结为 $\mathsf{X} = T \in \mathsf{Glo}_{\mathrm{ab}}$ 的情形。由推论 4.4.5，我们进而将问题归结为 q 具有如下形式的情形

$$(q'_i, \mathrm{id}_T)\colon \coprod_{i \in I} F_i \times T \to T' \times T,$$

其中

1. I 是一个有限集；2. 每个 F_i 都是连通的 π-有限空间，且 T, $T' \in \mathsf{Glo}_{\mathrm{ab}}$；3. $\pi_* F_i$ 和 $\pi_1 T'$ 的阶都与 $\pi_1 T$的阶互素；4. 若素数 p 整除 $\pi_* F_i$ 或 $\pi_1 T'$的阶，则 $p \notin S$。

该映射可分解为以下复合

$$\nabla \circ (q'_i, \mathrm{id}_T)\colon \coprod_{i \in I} F_i \times T \to \coprod_{i \in I} T' \times T \to T' \times T.$$

由于 α^* 是可加的，它保留 ∇-极限。因此，我们可以将问题归约到 I 是单元素集合的情形，并简记 $F = F_i$ 和 $q' = q'_i$。换言之，我们已将问题归约为验证这个方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}(T' \times T) & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}(F \times T) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} \\ \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}'}(T' \times T) & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}'}(F \times T). \end{array} \tag{4.5.11}$$

是右伴随可交换的，其中 $q = q' \times \mathrm{id}_T \colon \ F \times T \to T' \times T$，且这些空间满足上文的 (1–4)。我们将通过直接而简单（尽管记号繁复）的计算来证明这一点，计算对象是比较映射 $\alpha^* q_* \to q_* \alpha^*$。

记 $\mathbf{Glo}^{S\natural}$ 阿贝尔群 和 $\mathbf{Glo}^{S}_{\mathrm{ab}}$ 为 $\mathbf{Glo}_{\mathrm{ab}}$ 的满子范畴，其对象由满足以下条件的 T 所张成：$\pi_1 T$ 的素因子要么不属于 S，要么属于 S。注意到

$$\mathrm{Glo}^{S\natural}_{\mathrm{ab}} \times \mathrm{Glo}^{S}_{\mathrm{ab}} \to \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}, \qquad (T', T) \mapsto T' \times T$$

是一个等价。特别地，假设给定一个映射 $T'' \to T' \times T \in \mathbf{Glo}_{\mathrm{ab}}$。那么该映射可规范地分解为

$$T''[1/S] \times T''_{(S)} \to T' \times T,$$

其中 $T''[1/S] \in \in \mathbf{Glo}^{S\natural}$阿贝尔群 且 $T''_{(S)} \in \in \mathbf{Glo}^{S}_{\mathrm{ab}}$，此时

$$T'' \times_{(T' \times T)} (F \times T) \simeq (T''[1/S] \times_{T'} F) \times T''_{(S)}$$

and

$$(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})_{/T'' \times_{(T' \times T)} (F \times T)} \simeq (\mathrm{Glo}^{S\natural}_{\mathrm{ab}})_{/T''[1/S] \times_{T'} F} \times (\mathrm{Glo}^{S}_{\mathrm{ab}})_{/T''_{(S)}}.$$

特别地，函子

$$\begin{aligned} (\mathrm{Glo}^{S\natural}_{\mathrm{ab}})_{/T''[1/S] \times_{T'} F} &\to (\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})_{/T'' \times_{(T' \times T)} (F \times T)}, \\ (f \colon T''' \to T''[1/S] \times_{T'} F) &\mapsto (f \times T''_{(S)} \colon T''' \times T''_{(S)} \to T''[1/S] \times_{T'} F \times T''_{(S)}) \end{aligned}$$

是共尾的。

现在固定 $\mathbf{F} \in$ 局部系统$\mathbf{G}(F \times T)$。我们可以描述该映射

$$\alpha^* q_* \mathcal{F} \to q_* \alpha^* \mathcal{F}$$

如下。固定一个映射 $T'' \to T' \times T$。于是，沿用上述记号，我们有，

$$\begin{aligned} (\alpha^* q_* \mathcal{F})(T'') &= \mathsf{A}^{T''}_{\mathbf{G}'} \otimes_{\mathsf{A}^{T''}_{\mathbf{G}}} \lim_{T''' \in (\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})_{/T'' \times_{T' \times T} F \times T}} \mathcal{F}(T''') \\ &\simeq \mathsf{A}^{T''}_{\mathbf{G}'} \otimes_{\mathsf{A}^{T''}_{\mathbf{G}}} \lim_{T''' \in (\mathrm{Glo}^{S\natural}_{\mathrm{ab}})_{/T''[1/S] \times_{T'} F}} \mathcal{F}(T''' \times T''_{(S)}). \end{aligned}$$

根据**P**-可除群的定义，我们有

$$\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{T''} \simeq \mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{T''[1/S]} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{T''_{(S)}}, \qquad \mathsf{A}_{\mathbf{G}'}^{T''} \simeq \mathsf{A}_{\mathbf{G}'}^{T''[1/S]} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{A}_{\mathbf{G}'}^{T''_{(S)}}.$$

根据假设，映射 $\mathrm{A}^{T''[1/S]}{}_{\mathbf{G}} \to \mathrm{A}^{T''[1/S]}{}_{\mathbf{G}'}$ 是一个同构。因此

$$(\alpha^* q_* \mathcal{F})(T'') \simeq \mathsf{A}_{\mathbf{G}'}^{T''_{(S)}} \otimes_{\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{T''_{(S)}}} \lim_{T'''\in(\mathrm{Glo}^S_{\mathrm{ab}})_{/T''[1/S]\times_{T'}F}} \mathcal{F}(T''' \times T''_{(S)}).$$

类似地，我们计算得

$$\begin{aligned}
(q_* \alpha^* \mathcal{F})(T'') &= \lim_{T'''\in(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})_{/T''\times_{(T'\times T)}(F\times T)}} \mathsf{A}_{\mathbf{G}'}^{T'''} \otimes_{\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{T'''}} \mathcal{F}(T''') \\
&\simeq \lim_{T'''\in(\mathrm{Glo}^S_{\mathrm{ab}})_{/T''[1/S]\times_{T'}F}} \mathsf{A}_{\mathbf{G}'}^{T'''\times T''_{(S)}} \otimes_{\mathsf{A}_{\mathbf{G}'}^{T'''\times T''_{(S)}}} \mathcal{F}(T''' \times T''_{(S)}) \\
&\simeq \lim_{T'''\in(\mathrm{Glo}^S_{\mathrm{ab}})_{/T''[1/S]\times_{T'}F}} \mathsf{A}_{\mathbf{G}'}^{T''_{(S)}} \otimes_{\mathsf{A}_{\mathbf{G}'}^{T''_{(S)}}} \mathcal{F}(T''' \times T''_{(S)}),
\end{aligned}$$

因此 $(\alpha^* q_* \mathrm{F})(T'') \to (q_* \alpha^* \mathrm{F})(T'')$ 是比较映射

$$\begin{aligned}
&\mathsf{A}_{\mathbf{G}'}^{T''_{(S)}} \otimes_{\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{T''_{(S)}}} \lim_{T'''\in(\mathrm{Glo}^S_{\mathrm{ab}})_{/T''[1/S]\times_{T'}F}} \mathcal{F}(T''' \times T''_{(S)}) \\
&\qquad \to \lim_{T'''\in(\mathrm{Glo}^S_{\mathrm{ab}})_{/T''[1/S]\times_{T'}F}} \mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{T''_{(S)}} \otimes_{\mathsf{A}_{\mathbf{G}'}^{T''_{(S)}}} \mathcal{F}(T''' \times T''_{(S)}).
\end{aligned}$$

这是一个等价，因为 $\mathrm{A}^{T''_{(S)}}{}_{\mathbf{G}} \to \mathrm{A}^{T''_{(S)}}{}_{\mathbf{G}'}$ 是有限 étale 的，因此根据 Pr.4.2.5 可对偶化。□

综上所述，我们得到如下结论。

Th.4.5.5 的证明。 我们必须证明，若 $\alpha\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 是定向 **P**-可除群的一个态射，且在 S 之外是笛卡尔的，则对于所有 $q \in S\perp\pi$， α^* 与 q-极限可交换。态射 α 可分解为复合

$$\alpha = \alpha' \circ \alpha''\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{G}'' \to \mathbf{G},$$

其中 $\alpha'\colon \mathbf{G}'' \to \mathbf{G}$ 是一个笛卡尔态射，而 $\alpha''\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{G}''$ 是固定底上定向**P**-可除群之间的态射，并且对所有 $p \notin S$， $\alpha''_{(p)}$ 都是同构。根据 Pr.4.5.9 和 Pr.4.5.8，α'^* 和 α''^* 分别保留 q-极限，因此 α^*也保留。

□

在每个固定的$\mathbf{E}_\infty$ 环上，Th.4.5.5 的某个逆命题也成立。

引理 4.5.12. 设$\mathbf{G}_0$是定义在$\mathbf{E}_\infty$环A上的一个定向$\mathbf{P}$-可除群。设 $\tilde{\alpha}\colon\ \Lambda' \to \Lambda$是余格的一个映射，并考虑诱导映射 $\alpha\colon \mathbf{G}_0 \oplus \Lambda' \to \mathbf{G}_0 \oplus \Lambda$，它是定义在A上的定向$\mathbf{P}$-可除群之间的映射。记 $q\colon \mathsf{B}C_p \to *$ 为投影。若 α^* 保 q-极限，则 $^{\alpha_{(p)}}$ 是一个同构。

证明。 一般而言，设给定映射 $q\colon\ T' \to T$in $\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}\infty}$ Beck–Chevalley 映射

$$\alpha^* q_* \to q_* \alpha^*$$

函子 $\mathsf{LocSys}_{\mathbf{G}}(T')\ \to\ \mathsf{LocSys}_{\mathbf{G}'}(T)$，在幺半群单位处取值，并在 $(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})_{/T}$ 的终对象处取值后，给出的自然映射为

$$\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}'} \otimes_{\mathsf{A}^T_{\mathbf{G}}} \mathsf{A}^{T'}_{\mathbf{G}} \to \mathsf{A}^{T'}_{\mathbf{G}'}.$$

因此，若 α 保持 q-极限，则方形

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}'(T') & \longrightarrow & \mathbf{G}(T') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{G}'(T) & \longrightarrow & \mathbf{G}(T) \end{array}$$

是笛卡尔的。选取 T' 的一个基点后，我们可以将 q 写成 $\mathbf{B}H' \to \mathbf{B}H$ 的形式，其中群同态为 $H' \to H$。若 α 具有 $\mathbf{G}_0 \oplus \Lambda' \to \mathbf{G}_0 \oplus \Lambda$ 的形式，其中映射 $\tilde{\alpha}\colon\ \Lambda' \to \Lambda$ 是余格之间的映射，且 A 非零，则该方形是笛卡尔的，当且仅当方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\widehat{H}', \Lambda') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\widehat{H}', \Lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(\widehat{H}, \Lambda') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\widehat{H}, \Lambda) \end{array}$$

是笛卡尔的集合方形。若 $H' \to H$ 具有 $C_p \to e$ 的形式，则这成立当且仅当 $\Lambda'[p] \to \Lambda[p]$ 在 p-挠部分上诱导的映射是同构；而这又成立当且仅当 $\tilde{\alpha}_{(p)}\colon\ \Lambda'_{(p)} \to \Lambda_{(p)}$，因此 $^{\alpha_{(p)}}\colon \mathbf{G}'_{(p)} \to \mathbf{G}^{(p)}$ 是同构。 □

命题 4.5.13。 设 $\alpha\colon \mathbf{G}' \to \mathbf{G}$ 是环$\mathbf{E}_\infty$ A上的定向$\mathbf{P}$可除群之间的态射，并设 α^*: 局部系统$_{\mathbf{G}} \to$ 局部系统$_{\mathbf{G}'}$ 是 $S\perp\pi$-稳定阿贝尔群全局范畴之间的映射。那么，对所有 $p \notin S$，$^{\alpha_{(p)}}$ 都是同构。

证明。 对于任意的环映射 A $\to$B，其中 A、B 是 $\mathbf{E}_\infty$ 环，我们有如下交换图表

$$\begin{array}{ccc} \text{局部系统}_{\mathbf{G}} & \longrightarrow & \text{局部系统}_{f^*\mathbf{G}} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} \\ \text{局部系统}_{\mathbf{G}'} & \longrightarrow & \text{局部系统}_{f^*\mathbf{G}'} \end{array}$$

其中水平函子是阿贝尔群全局范畴的函子范畴，并且根据 Pr.4.5.8，它们保持所有 π-极限。随着 B 遍历 A$_\mathfrak{p}$对素理想 $\mathfrak{p} \subset \pi_0$A 的局部化，水平函子是保守的，因此不妨设 π_0A 是局部的，从而 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{G}'$ 具有常高度。由于 A 支持一个定向的 $\mathbf{P}$-可除群，可知对于某个 $n < \infty$ [，A 是 L_n-局部的（见 Lur19，推论 2.5.7]）。因此，当 B 遍历 A 对 $i \leq n$ 的 $K(i)$-局部化时，水平函子仍是保守的，所以我们可以归约到 A 对某个 n 是 $K(n)$-局部的情形。特别地，根据 [Lur18b，§4.6]，A 存在一个 Quillen$\mathbf{P}$-可除群。应用 [Lur19，命题 2.7.15]，并令 $\mathbf{G}_0$ 为 A 的 Quillen$\mathbf{P}$-可除群，则经过可能进一步的忠实平坦扩张后，我们可以归约到如下情形：α 具有形式 $\mathbf{G}_0 \oplus \Lambda' \to \mathbf{G}_0 \oplus \Lambda$，其中 $\tilde{\alpha}\colon \Lambda' \to \Lambda$ 是余格之间的映射。由于 $\mathbf{B}C_p \to *$ 属于 $S^{\perp}\pi$ 当且仅当 $p \notin S$，故该命题由引理 4.5.12 得证。

□

4.6 向栈的扩张

在椭圆上同调等应用中，我们希望能够处理定义在非仿射基底栈上的定向$\mathbf{P}$-可除群。现在我们说明，本节的构造如何扩展到非仿射基底栈上。这基本上是以下命题的形式推论。

命题 4.6.1. 这些函子

$$\mathbf{BT}, \mathbf{BT}^{\mathrm{pre}}, \mathbf{BT}^{\mathrm{or}}_{S^\dagger}\colon \mathrm{CAlg} \to \mathrm{Cat},$$

以及

$$\mathrm{LocSys}_{(-)}\colon (\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{S^\dagger,\mathrm{aff}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}_{S^\perp\pi\text{-st}},$$

都满足平坦下降。

证明。对于$\mathbf{BT}$、$\mathbf{BT}^{\mathrm{pre}}$和$\mathbf{BT}^{\mathrm{or}}$，证明与 [Lur18b, Pr.3.2.2]，类似，细节从略。对于 $\mathbf{G} \mapsto \mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}$，这是 [Lur19, Pr.6.2.6]，与以下事实的结合：遗忘函子 $\mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}_{S^\dagger\pi\text{-st}} \to \mathrm{Fun}((\mathrm{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat})$ 由 Pr.3.1.12 可保持极限。 □

在 [BDL25, §2.1, §3.1-3.2]，中，我们引入了一个代数栈范畴 Stk，其特征由以下性质给出：

1. 存在一个全忠实嵌入 Aff $\subset$Stk；
2. 沿 Aff $\subset$Stk 的限制，在从 Stk$^{\mathrm{op}}$ 出发的保极限函子与从交换代数出发且满足平坦下降的函子之间诱导出一个等价。

注 4.6.2。根据 [BDL25, 命题 3.2.2.2]，，存在一个函子 $h_{(-)}$: SpDM$^{\mathrm{nc}} \to$ Stk，它从谱 Deligne–Mumford 层叠范畴出发，并具有如下性质：任何满足平坦下降的 SpDM$^{\mathrm{nc}}$ 上的构造，都唯一地通过 $h_{(-)}$ 分解。特别是，在

下文中，读者也可以将“栈”理解为“非连通谱 Deligne–Mumford 栈”，前提是将“保极限函子”理解为“étale 层”。

命题 4.6.1 现在形式上蕴含了存在唯一的保极限函子

$$\mathbf{BT}, \mathbf{BT}^{\mathrm{pre}}, \mathbf{BT}^{\mathrm{or}}_{S\dagger} \colon \mathrm{Stk}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}$$

它们自然地满足

$$\mathbf{BT}(\operatorname{Spec} \mathsf{A}) = \mathbf{BT}(\mathsf{A}).$$

这些函子的笛卡尔解直化定义了如下范畴

$$\mathbf{P}\mathrm{Div}, \qquad \mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{pre}}, \qquad \mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{S\dagger}$$

of $\mathbf{P}$-可除群，以及任意基底叠上的（预）定向 $\mathbf{P}$-可除群。

注 4.6.3。叠上的（预）定向 $\mathbf{P}$-可除群范畴也可以直接定义。叠上的 $\mathbf{P}$-可除群是一个函子 $\mathbf{G}[-]$: 阿贝尔群$^{\mathrm{op}}$ $_{\text{有限}}\to$ Stk，满足与定义 4.1.1 相同的条件；其上的预定向是一个经由$\wr B(-)$: 阿贝尔群$^{\mathrm{op}}$ $_{\text{有限}}\to$ $\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$的扩张。最后，若预定向限制到每个映射 Spec A $\to \mathbf{G}[0]$上都是定向，则它就是定向。

例 4.6.4。非仿射叠上的 $\mathbf{P}$-可除群的一个重要例子，来自与普遍定向椭圆曲线 E^{or} 相关联的挠对象，该曲线定义在定向椭圆曲线模叠 $\mathrm{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell}}$上。我们将在例 5.1.7 和 [BDL26] 中重新讨论这一点。

范畴 $\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{S\dagger}$ 的存在使我们能够陈述如下结果。

定理 4.6.5。 设 S 为一个素数集合。那么存在唯一的函子

$$\mathrm{LocSys}_{(-)} \colon (\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{S\dagger})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}_{S\perp\pi\text{-st}}$$

它扩张定理 *4.5.5*，且其在笛卡尔态射构成的宽子范畴上的限制保持极限。

证明。 由命题 4.6.1 可知，这由 [BDL25，命题 2.1.2.10] 得出。 □

5 温和上同调的等变同伦理论

通过将第 §3 节的去范畴化过程应用于第 §4 节的温和局部系统的 π-稳定范畴，我们可以为每个定向的 $\mathbf{P}$-可除群关联一个 π-双可的全局谱，以表示其相应的温和上同调理论；参见定理 5.1.2。本节旨在更详细地描述这一过程，并研究由此得到的全局谱。

首先，在 §5.1 中，我们将相关结果融会贯通，并把 Lurie 的温和上同调理论细化为 π-自对偶的全局 $\mathbf{E}_\infty$ 环，同时给出一些典范例子。

在 §5.2 中，我们说明，定理 1.1.1 中的函子 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}$可以看作底层栈 M 上的 π-自对偶全局 $\mathbf{E}_\infty$ 环的拟凝聚层。在 §5.3 中，我们定义温和同调 并证明一个一般的基变换定理。上一小节关于层的讨论使我们能够通过相对谱构造，为某些（π-紧的）全局空间 X 定义与之关联的几何对象$\mathbf{G}(X)$。这将进一步导出几何不动点 $\Phi^H\mathbf{G}$的几何实现，我们在 §5.4 中对其进行定义。随后我们证明，当 H 为非阿贝尔时， $\Phi^H\mathbf{G} = \emptyset$。最后，在 §5.5 中，我们将$\Phi^H\mathbf{G}$ 对阿贝尔 H 的模空间解释为一个单射栈，并证明该栈满足可计算的蓝移性质。

5.1 温和上同调作为 a π-双向谱

在 [Lur19, Lurie 中研究了以下构造。

定义 5.1.1 ([Lur19, §4])。 设 $\mathbf{G}$ 是一个环 A 上的预定向 $\mathbf{P}$-可除群，其中 A 是一个$\mathbf{E}_\infty$ 环。与 $\mathbf{G}$ 相关联的温和上同调理论 是唯一的保极限函子

$$\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{(-)} \colon (\mathcal{S}_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{gl}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}$$

它延拓了预定向 $\mathbf{P}$-可除群 $\mathsf{A}^{(-)}{}_{\mathbf{G}} : \mathrm{Glo}^{\mathrm{op}}$ 阿贝尔群 $\to$交换代数$_{\mathsf{A}}$ $\to$交换代数。

取极限并利用栈范畴 Stk 的泛性质，这一构造可延拓到 §4.6 意义下任意基底叠上的预定向 $\mathbf{P}$-可除群，从而导出温和上同调理论的定义

$$\Gamma\mathcal{O}_{\mathbf{G}}^{(-)} \colon (\mathcal{S}_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{gl}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}$$

它与任意基叠 M 上的预定向$\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}$ 相关联。我们将在下文考虑这一构造的精化，使其取值于 M 上的层范畴。

与预定向的$\mathbf{P}$-可除群$\mathbf{G}$ 相关联的温和上同调理论是一种朴素的全局等变上同调理论：它不附带任何形式的转移。例如，对于固定的群 G，将其限制到 G-空间范畴后，不一定能由真正的 G-谱表示。本文的工作使我们能够将 Lurie 的双向性结果准确地解释为：与一个定向的$\mathbf{P}$-可除群相关联的温和上同调理论具有丰富得多的结构。

定理 5.1.2. 设$\mathbf{G}$ 是一个定向的$\mathbf{P}$-可除群。那么温和上同调理论

$$\Gamma\mathcal{O}_{\mathbf{G}}^{(-)} \colon (\mathcal{S}_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{gl}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}$$

由一个 π-自伴的全局谱表示

$$\Gamma\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_{\pi}^{\mathrm{gl}}).$$

对于任意素数集 S，此赋值可细化为一个函子

$$(\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{S^\dagger})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_{S^\perp\pi}), \qquad \mathbf{G} \mapsto \Gamma\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}$$

其对笛卡尔态射宽子范畴的限制保持极限。

证明。 定理 4.6.5 对任意素数集 S 给出了一个函子

$$\mathrm{LocSys}_{(-)} \colon (\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{S^\dagger})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}_{S^\perp\pi\text{-st}}$$

其对笛卡尔态射宽子范畴的限制保持极限，而定理 3.5.1 给出了一个保持极限的函子

$$\Gamma \colon \mathrm{Cat}(\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})^{\otimes}_{S^\perp\pi\text{-st}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_{S^\perp\pi}).$$

根据构造，我们可以将其识别为

$$(\Gamma(\mathrm{LocSys}_{\mathbf{G}}))^T \simeq \Gamma\mathcal{O}^T_{\mathbf{G}}$$

对于任意 $T \in \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$，另见 [Lur19, Ex.7.1.5], ，因此复合 $\Gamma \circ$LocSys 给出了所需的精化。 □

我们可以将定理 5.1.2 理解为：在栈 M 上选取一个定向的 $\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}$ ，便可将 M 的整体截面 $\Gamma(\mathsf{O}_{\mathsf{M}}) \in$交换代数从一个 $\mathbf{E}_\infty$ 环提升为一个π-双侧谱 $\mathbf{E}_\infty$ 环 $\Gamma(\mathsf{O}_{\mathsf{G}}) \in$ 交换代数(谱$^{\mathrm{gl}}_\pi$)。

—

现在让我们进一步展开引言中的例子。

例 5.1.3。 设 A 是一个复周期的 $K(n)$-局部$\mathbf{E}_\infty$ 环。Quillen$\mathbf{P}$-可除群$\mathbf{G}^{\mathbb{Q}}_{\mathsf{A}}$ 在 A 上是定向的，从而将 A 提升为一个 π-双手性的全局$\mathbf{E}_\infty$ 环

$$\underline{\mathsf{A}} \coloneqq \underline{\mathsf{A}}_{\mathbf{G}^{\mathbb{Q}}_{\mathsf{A}}} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_\pi).$$

根据 [Lur19, Th.4.2.5], ，该理论在如下意义下是 Borel 的：Atiyah–Segal 比较映射

$$\underline{\mathsf{A}}^{\mathsf{X}} \to \mathsf{A}^{|\mathsf{X}|}$$

对任意全局空间 X 都是等价，其中 $|\mathsf{X}| = \mathsf{X}(*)$ 是 X 的底层空间。因此，A 的 π-双手性全局结构编码了这样一种对应：对于任意具有 π-有限纤维的空间映射$f \colon Y \to X$，它关联到转移 $f_!\colon \mathsf{A}^Y \to \mathsf{A}^X$，该转移最初由 Hopkins 和 Lurie [HL13]构造。

例 5.1.4。 在 [Lur18b 定理 6.5.1],中，Lurie 证明复 K-理论自然地源自乘法$\mathbf{P}$-可除群 $\mu_{\mathbf{P}^\infty}$。乘法$\mathbf{P}$-可除群 $\mu_{\mathbf{P}^\infty}$在 KU 上有典范定向，并且在 [Lur19, §3.6] 中，Lurie 说明如何将相关的温和上同调理论识别为等变复 K-理论。应用定理 5.1.2，可得复 K-理论可精化为一个 π-双向全局$\mathbf{E}_\infty$ 环

$$\mathbf{KU} \coloneqq \underline{\mathrm{KU}}_{\mu_{\mathbf{P}^\infty}} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_\pi).$$

对于任意 π-有限空间 F，截断 $F \to \tau_{\leq 1}F$ 诱导出一个等价

$$\mathbf{KU}^{\tau_{\leq 1}F} \simeq \mathbf{KU}^{F}.$$

这意味着，$\mathbf{KU}$ 在 π-有限空间上的取值由其在有限群上的取值决定，而后者又由 $\mathbf{KU}$ 的底层全局谱决定。我们将$\mathbf{KU}$ 构造为 π-全局谱，通过引入亏格映射（即沿满射的转移）这一额外结构，对此进行了细化。若 $f\colon K \to H$ 是任意有限群同态，则利用特征标理论，可以证明转移

$$f_!\colon \mathbf{KU}^{\mathbf{B}K} \to \mathbf{KU}^{\mathbf{B}H},$$

在 π_0上的转移可识别为诱导映射

$$\mathbf{C}[H] \otimes_{\mathbf{C}[K]} (-)\colon RU(K) \to RU(H)$$

在复表示环上；对于单射同态，这一点已在 [Lur19, Pr.7.6.7], 中证明，而同样的证明对一般情形也适用。换言之，等变 K-理论提升为 π-全局谱这一事实，是表示环沿任意群同态都具有转移映射这一事实的范畴化。

我们将温和上同调扩展到非仿射基底层叠上的定向$\mathbf{P}$-可除群，从而能够将这一例子扩展到实拓扑 K-理论。

例 5.1.5。 令 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori}}$ 为定向环面的模栈；在 [BDL26, §A], 中，我们将证明它可以写成商 Spec KU $/C_2$，其中 C_2 通过通常的复共轭作用作用于 KU。万有定向环面$\mathbf{G}m$ 在 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori}}$ 上的伴随定向$\mathbf{P}$-可除群为 $\mu_{\mathbf{P}^\infty}$。应用定理 5.1.2，我们得到一个 π-双侧全局$\mathbf{E}_\infty$ 环谱

$$\mathbf{KO} \coloneqq \Gamma(\underline{\mathcal{O}}_{\mu_{\mathbf{P}^\infty}/\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori}}}) \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_\pi).$$

KU 上的定向环面 $\mathbf{G}m$ 定义了一个从 $\mathbf{KO} \to \mathbf{KU}$ 到 π-双侧全局谱的映射；根据构造以及上述作为商栈的刻画，它给出一个等价

$$\mathbf{KO} \simeq \mathbf{KU}^{\mathrm{h}C_2}$$

从 π-双侧全局 $\mathbf{E}_\infty$ 环谱到

由*Katz–Mazur* 群概形构造的等变椭圆上同调理论也同样如此。

例 5.1.6。 令 T_{KM} 为 SpecKU$[q^{\pm}]$上的定向 *Katz–Mazur* $\mathbf{P}$-可除群，定义见 [DL25, 定理 4.1]; 这里 q 位于次数 0。现在应用定理 5.1.2，得到一个 π-双侧全局$\mathbf{E}_\infty$ 环

$$\mathbf{KU}_{\mathrm{KM}} \coloneqq \Gamma(\underline{\mathcal{O}}_{\mathsf{T}_{\mathrm{KM}}}) \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_\pi),$$

一个 π双向对称的拟椭圆上同调类比 [Hua18]; 根据 [DL25，定理 4.1], 这些理论在取同伦群后，对有限阿贝尔 H 上的$\mathbf{B}H$ 具有相同的取值。

将定理 5.1.2 应用于与 [DL25 的 KU$(\!(q)\!)$ 上的定向 Tate 曲线$oriented\ Tate\ curve$ T相关联的 $\mathbf{P}$-可除群，定理 5.1]给出一个 π双向对称的全局$\mathbf{E}_\infty$ 环

$$\mathbf{KU}_{\mathrm{Tate}} \coloneqq \Gamma(\underline{\mathcal{O}}_{\mathrm{T}[\mathbf{P}^\infty]}) \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_\pi).$$

仿照$loc.\ cit.$ 中定理 7.14 的论证可得，自然映射

$$\mathrm{KU}(\!(q)\!) \otimes_{\mathrm{KU}[q^{\pm}]} \mathbf{KU}_{\mathrm{KM}} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{KU}_{\mathrm{Tate}}$$

是一个等价。$\mathbf{KU}_{\mathrm{Tate}}$ 的真正优势在于它可以推广到紧李群；参见$loc.\ cit$中的定义 7.5。不过请注意，自然映射

$$\mathrm{KU}[q^{\pm}] \otimes_{\mathrm{KU}} \mathbf{KU} \to \mathbf{KU}_{\mathrm{KM}}$$

在任何意义下都不是等价；只有在平凡群处取值时，它才成为等价，参见$loc.\ cit$中的警告 7.6。还可以进一步对 KU$[q^{\pm}]$ 和 KU$(\!(q)\!)$ 关于自然复共轭作用取 C_2- 商，从而得到上述 π-双侧的全局$\mathbf{E}_\infty$ 环$\mathbf{KO}_{\mathrm{KM}}$ 和$\mathbf{KO}_{\mathrm{Tate}}$的实 版本，参见$loc.\ cit$中的第 6 节。

最后，我们有以下由普遍定向椭圆曲线得到的例子。

例 5.1.7。 设 E 是定义在定向椭圆曲线模栈 $\mathrm{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell}}$ 上的普遍定向椭圆曲线，如例 4.6.4 中所定义。根据 [Lur19, Con.2.9.6] （另见 [Dav23, Pr.6.1]），挠子群 $\mathrm{E}[\mathbf{P}^\infty] \subset \mathrm{E}$ 定义了 $\mathrm{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell}}$ 上的一个定向$\mathbf{P}$-可除群。应用定理 5.1.2，我们得到一个 π-双侧的全局$\mathbf{E}_\infty$ 环

$$\mathbf{TMF} \coloneqq \Gamma\underline{\mathcal{O}}_{\mathcal{E}[\mathbf{P}^\infty]} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_\pi)$$

细化拓扑模形式的底层谱 TMF。由 [Dav23], 可知，与 $\mathbf{TMF}$ 相关联的 $\mathbb{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群 上的底层朴素全局上同调理论，与 Gepner–Meier [GM23]所构造的等变拓扑模形式的底层上同调理论一致。可以合理地预期，$\mathbf{TMF}$ 与 [GLP24], 中构造的拓扑模形式全局谱具有相同的底层 ab-全局谱，但这两种构造有很大差异，我们目前还没有这样的比较。

例 5.1.8。 根据定义，定义定向 Tate 曲线的映射 $\mathrm{T} : \mathrm{Spec}\ \mathrm{KU}(\!(q)\!)/C_2 \to \mathrm{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell}}$ 在与 T 和 E 相关联的定向 $\mathbf{P}$-可除群之间诱导一个笛卡尔映射。特别地，我们有一个 π-双向全局 q-展开映射

$$\mathbf{TMF} \to \mathbf{KO}(\!(q)\!)$$

在 CAlg(谱$^{\mathrm{gl}}_\pi$) 中，并且与沿全局空间之间相对 π-有限态射的所有转移相容。

现在让我们进一步展开例 1.2.4 中的亚当斯运算示例。

例 5.1.9。 固定一个整数 ℓ，并记 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori},\,\mathbf{S}[1/\ell]} = \mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori}} \times \mathsf{Spec}\mathbf{S}[1/\ell]$。回忆一下，栈 M 上的环面是一个相对仿射且平坦的群概形 $\mathbf{G}$，它在 fpqc 局部同构于乘法群概形 $\mathbf{G}_m$。根据 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori}}$ 作为定向环面的模叠的定义，我们有

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Stk}}(\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori},\mathbf{S}[1/\ell]}, \mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori}}) \simeq \mathrm{Tori}^{\mathrm{or}}(\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori},\mathbf{S}[1/\ell]}).$$

环面$\mathbf{G}_m, e$与其典范定向 e 构成的配对（$\mathbf{G}_m$ 在 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori},\mathbf{S}[1/\ell]}$ 上），通过求逆 ℓ给出开浸入 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori},\mathbf{S}[1/\ell]} \to \mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori}}$。配对（$\mathbf{G}_m, [\ell](e)$）中，$[\ell]$ 是 $\mathbf{G}_m$ 上的 ℓ 乘法，因此也是其形式群$\mathbf{G}_m$上的乘法；它对应于一个栈映射

$$\psi^{\ell}\colon \mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori},\mathbf{S}[1/\ell]} \to \mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori}}$$

我们称之为 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori},\mathbf{S}[1/\ell]}$上的第 ℓ 次亚当斯运算。根据斯奈思定理 [Lur18b, §6.5], ，在覆盖 $\mathsf{Spec}\mathbf{KU}[1/\ell]$ 上，该名称是恰当的：它与映射$[\ell]\colon \Sigma^{\infty}_{+}BU(1)[\beta^{-1}] \to \Sigma^{\infty}_{+}BU(1)[\ell^{-1}, \beta^{-1}]$一致。此映射由阿贝尔群 $BU(1)$上的 ℓ乘法诱导，而该阿贝尔群是亚当斯运算 $\psi^{\ell}\colon \mathbf{KU} \to \mathbf{KU}[1/\ell]$的一个模型。

根据构造，这一对

$$(\psi^{\ell}, [\ell])\colon (\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori},\mathbf{S}[1/\ell]}, \mu_{\mathbf{P}^{\infty}}) \to (\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori}}, \mu_{\mathbf{P}^{\infty}}), \tag{5.1.10}$$

其中 $\mu_{\mathbf{P}^{\infty}} \subset \mathbf{G}_m$ 是万有定向环面$\mathbf{G}_m$的$\mathbf{P}$-挠部分，是定向$\mathbf{P}$-可除群的一个映射。事实上，这等价于

$$[\ell]\colon (\mu_{\mathbf{P}^{\infty}}, e) \to (\mu_{\mathbf{P}^{\infty}}, [\ell](e)) \simeq (\psi^{\ell})^{*}(\mu_{\mathbf{P}^{\infty}}, e)$$

是 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Tori},\mathbf{S}[1/\ell]}$ 上定向$\mathbf{P}$-可除群的一个映射，这由 ψ^{ℓ} 的定义可知。特别地，将定理 5.1.2 应用于 (5.1.10)，可得到映射：对所有 $S \perp \pi$-双侧的全局$\mathbf{E}_{\infty}$ 环

$$\psi^{\ell}\colon \mathbf{KO}_{S\perp\pi} \to \mathbf{KO}_{S\perp\pi}[1/\ell]$$

对所有包含 ℓ 的因子的素数集合 S，这些映射细化了 KO 上通常的亚当斯运算。

例 5.1.9 中使用的类似论证也适用于 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell}}$ 和拓扑模形式。

例 5.1.11。 记作 $\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell},\mathbf{S}[1/\ell]} = \mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell}} \times \mathsf{Spec}\mathbf{S}[1/\ell]$，我们还有

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Stk}}(\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell},\mathbf{S}[1/\ell]}, \mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell}}) \simeq \mathrm{Ell}^{\mathrm{or}}(\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell},\mathbf{S}[1/\ell]}).$$

$\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell}}$ 上 E 的万有定向 E $[\ell](e)$ 的扭曲，$\mathbf{S}[1/\ell]$ 由 $[\ell]$ 给出，对应于代数栈之间的一个映射

$$\psi^{\ell}\colon \mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell},\mathbf{S}[1/\ell]} \to \mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell}},$$

由此我们得到一个定向 $\mathbf{P}$-可除群的映射

$$(\psi^{\ell}, [\ell])\colon (\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell},\mathbf{S}[1/\ell]}, \mathcal{E}[\mathbf{P}^{\infty}]) \to (\mathsf{M}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{Ell}}, \mathcal{E}[\mathbf{P}^{\infty}]).$$

将定理 5.1.2 应用于此映射，得到一个 $S\perp\pi$-双向的全局 $\mathbf{E}_\infty$ 环的映射 s

$$\psi^\ell\colon \mathbf{TMF}_{S\perp\pi}\to \mathbf{TMF}_{S\perp\pi}[1/\ell]$$

对每个包含 ℓ 的所有因子的 S。

注 5.1.12。 我们不会直接比较例 5.1.11 中考虑的亚当斯运算 ψ^ℓ: TMF $\to$ TMF$[1/\ell]$ 与 [Dav24, Dav25b], 中考虑的运算，尽管我们预计它们是一致的。由于这两种构造在 h Sp 中，对 $\mathsf{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{or}}$ 的所有偶周期仿射覆盖都一致，因此从下降谱序列的角度来看，它们在计算上无法区分，正如 [Dav25a] 中所用。特别是，两种构造都可用于 [CD24, CD25] 中的应用。

更多关于定向**P**-可除群及其对应的双可伴全局谱映射的例子将见于 [BDL26]。不过，在下文中，我们主要关注与单个定向**P**-可除群相关的 π-全局理论的性质，因此只会用到笛卡尔态射下的自然性，即函子 $(\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{cart}})^{\mathrm{op}}\to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_\pi)$。

5.2 定向 P-可除群的结构层

固定一个栈 M 以及 M 上的一个定向 **P**-可除群 **G** 。定理 5.1.2 根据这些数据给出一个 π-双向环 $\Gamma\mathsf{O}_{\mathbf{G}}\in$ 交换代数$(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_\pi)$，它精化了与**G**相关联的温和上同调理论。本节的目标是在取整体截面之前，描述“ M 上的层 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}$ ”存在的含义。我们首先回顾一些关于层的基本概念。

定义 5.2.1. 设 D 是一个完备的 ∞-范畴。取值于 D 的 M上的层是一个函子

$$\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}}\to\mathscr{D}$$

它满足平坦下降。这些对象组成全子范畴

$$\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathscr{D})\subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}},\mathscr{D}).$$

注 5.2.2. 根据 [BDL25，命题 2.1.2，10], Kan 延拓确定了 M 上的层与 $\mathsf{Stk}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}}$ 上保持极限的预层之间的等价，也就是说，将

$$\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathscr{D})\subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Stk}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}},\mathscr{D})$$

与保持极限的函子全子范畴相对应。我们将不加区分地在 Shv(M;D) 的这两种刻画之间转换。

例 5.2.3. 栈 M 的结构层 是由遗忘函子给出的$\mathbf{E}_\infty$ 环层

$$\mathcal{O}_{\mathsf{M}}\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}}\to\mathrm{CAlg},\qquad \mathcal{O}_{\mathsf{M}}(\mathrm{Spec}\,\mathsf{A}\to\mathsf{M})=\mathsf{A}.$$

根据构造，它向 M 上代数栈的推广就是该函子

$$\Gamma(\mathcal{O}_{(-)})\colon \mathrm{Stk}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}} \to \mathrm{CAlg}$$

将 M 上的一个栈映至其全局截面环。

例 5.2.4. 复合

$$\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}} \to \mathrm{CAlg} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}}), \qquad (\mathrm{Spec}\,\mathsf{A} \to \mathsf{M}) \mapsto \mathrm{Mod}_{\mathsf{A}}$$

将 M 的结构层与 $\mathrm{Mod}_{(-)}\colon \mathrm{CAlg} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})$ 复合后，根据 [Lur18c, Cor.D.6.3.3]，满足平坦下降，因此确定了一个取值于 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})$ 的 M 上的层。按构造，它向 M 上代数栈的推广是函子

$$\mathrm{QCoh}(-)\colon \mathrm{Stk}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}})$$

将 M 上的一个栈映至其拟凝聚层范畴；参见 [BDL25, Df.3.1.2.2]。

按构造，结构层 O_{M} 可提升为

$$\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{CAlg}) \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}}, \mathrm{CAlg}) \simeq \mathrm{CAlg}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}}, \mathrm{Sp})),$$

其中，$\mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}},\mathrm{Sp})$ 配备了逐点对称幺半结构。出于大小方面的原因，$\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}},\mathrm{Sp})$ 可能不是 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}},\mathrm{Sp})$ 的局部化，因此可能无法继承对称幺半范畴的结构。就我们的目的而言，可以通过将 $\mathrm{Shv}(\mathrm{Aff}_{/\mathsf{M}},\mathrm{Sp})$ 视为满子运算子 $\mathrm{Shv}(\mathsf{M},\mathrm{Sp})^{\otimes} \subset \mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}},\mathrm{Sp})^{\otimes}$ 所生成的底层范畴来避开这一问题。按照这一约定，我们有

$$\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{CAlg}) \simeq \mathrm{CAlg}(\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{Sp})),$$

并可识别

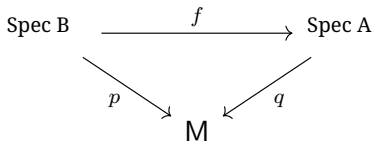
$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{Sp})) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}},\mathrm{Sp})) \times_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}},\mathrm{Sp})} \mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{Sp})$$

为 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}},\mathrm{Sp}))$ 的全子范畴，其对象由底层预层满足平坦下降的 O_{M}-模构成。

引理 5.2.5。 存在一个全忠实且保余极限的函子

$$\mathrm{QCoh}(\mathsf{M}) \subset \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{Sp}))$$

将$\mathrm{QCoh}(\mathsf{M})$ 视为$\mathcal{O}_{\mathsf{M}}$-模$\mathcal{F}$ 的全子范畴，并要求其进一步满足以下性质：对于任意态射



在$\mathrm{Aff}_{/\mathsf{M}}$中，基变换映射$\mathsf{B} \otimes_{\mathsf{A}} \mathcal{F}(q) \to \mathcal{F}(p)$是一个等价。

证明。 记 Mod 为由函子 QCoh: Aff $\to$交换代数($\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}}$) 所关联的笛卡尔纤维化的全空间。由 [LNP25，定理 5.10], $\mathrm{Mod}^{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}$(函子范畴($\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}}$,谱)) 可识别为 Mod 在 $\mathrm{Aff}_{/\mathsf{M}}$ 上的截面范畴：

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}}, \mathrm{Sp})) \simeq \left\{ \begin{array}{ccc} & & \mathrm{Mod} \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{Aff}_{/\mathsf{M}} & \longrightarrow & \mathrm{Aff} \end{array} \right\}.$$

另一方面，根据定义，QCoh(M) 是以下函子的极限

$$\mathrm{QCoh}(-)\colon \mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}}),$$

它可识别为笛卡尔 截面的全子范畴。由此，QCoh(M) $\subset$ $\mathrm{Mod}^{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}$(函子范畴($\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}}$,谱)) 可实现为满足给定基变换条件的 O_{M}-模的全子范畴。若 F $\in$ QCoh(M)，且 Spec(B) $\to$ Spec(A) 是 M 上的忠实平坦覆盖，则拟凝聚性意味着

$$\mathrm{Tot}\, \mathcal{F}(\mathrm{Spec}(\mathsf{B}^{\otimes_{\mathsf{A}}\bullet+1})) \simeq \mathrm{Tot}\left(\mathsf{B}^{\otimes_{\mathsf{A}}\bullet+1} \otimes_{\mathsf{A}} \mathcal{F}(\mathrm{Spec}\, \mathsf{A})\right) \simeq \mathcal{F}(\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}),$$

从而保证 F 如所述为一个层。 □

现在我们转而讨论温和上同调。

命题 5.2.6。 *M 上的定向 $\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}$* 将M 的结构层M 提升为一个层 $\mathcal{O}_{\mathbf{G}} \in \mathrm{Shv}(\mathsf{M};$ 交换代数($\mathrm{谱}^{\mathrm{gl}}_{\pi}$)) ，其取值为 π-双向全局 $\mathbf{E}_\infty$ 环。

证明。 若 S 是所有素数的集合，则 $\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{S^\dagger} \simeq \mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{cart}} \subset \mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}$ 是由 $\mathbf{P}$-可除群及笛卡尔态射构成的子范畴。特别地，存在一个等价

$$\mathrm{Stk}_{/\mathsf{M}} \simeq (\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{cart}})_{/\mathbf{G}}.$$

现在，复合

$$\mathrm{Stk}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}} \simeq (\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{cart}})^{\mathrm{op}}_{/\mathbf{G}} \to (\mathbf{P}\mathrm{Div}^{\mathrm{or}}_{\mathrm{cart}})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\Gamma\underline{\mathcal{O}}^{(-)}} \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_{\pi})$$

便是所需的 M 上 π-双向的全局$\mathbf{E}_\infty$ 环层。 □

回忆 Pr.2.2.10，在对称幺半范畴 C 中，一个 π-交换的全局 $\mathbf{E}_\infty$ 环等价于一个宽松对称幺半函子 $\mathsf{Span}_\pi(\mathsf{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群) $\to$ C，其

对逆向映射的限制保持极限。当允许 C 为任意运算子时，这一定义更一般地仍然有意义。根据伴随关系，我们可以将其识别为

$$\begin{aligned}\mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}}, \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_{\pi})) &\simeq \mathrm{CAlg}^{\mathrm{gl}}_{\pi}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}}, \mathrm{Sp}^{\mathrm{gl}}_{\pi})) \\ &\subset \mathrm{Fun}^{\otimes\text{-lax}}(\mathrm{Span}_{\pi}(\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}}), \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Fun}(\mathrm{Aff}^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}}, \mathrm{Sp}))).\end{aligned}$$

由于 Shv(M; Sp) $\subset$ Fun(Aff$^{\mathrm{op}}_{/\mathsf{M}}$,Sp) 在极限下封闭，这限制为一个等价

Shv(M; 交换代数(谱$^{\mathrm{gl}}_{\pi}$)) $\simeq$ 交换代数$^{\mathrm{gl}}_{\pi}$(Shv(M; 谱)) $\subset$ 函子范畴$^{\otimes\text{-lax}}$(Span$_{\pi}$(S$^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群) ,模$_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}$(Shv(M; 谱)))。

记号 5.2.7。给定栈 M 上一个 $\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}$ ，我们记

$$\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}} \in \mathrm{CAlg}^{\mathrm{gl}}_{\pi}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{Sp}))) \subset \mathrm{Fun}^{\otimes\text{-lax}}(\mathrm{Span}_{\pi}(\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}}), \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{Sp}))).$$

表示通过 Pr.5.2.6 和 Pr.2.2.12 提升 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}$ 所得的 π-交换全局 O_{M}-代数层。

5.3 温和（上）同调与基变换

设 $\mathbf{G}$ 为栈 M 上一个定向的 $\mathbf{P}$-可除群。给定 X $\in$S$^{\mathrm{gl}}$ $_{\mathrm{ab}}$，可在 X 上取值 π-交换环 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}$ ，从而得到一个 O_{M}-代数层_

$$\underline{\mathcal{O}}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{Sp}))), \qquad \underline{\mathcal{O}}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}}(f\colon \mathrm{Spec}\,\mathsf{A} \to \mathsf{M}) = \mathsf{A}^{\mathsf{X}}_{f^*\mathbf{G}}.$$

本小节的目标是说明 Lurie 的基变换定理 [Lur19, Th.4.7.1]如何刻画使该层成为拟凝聚层的条件，并以此定义性质良好的温和同调理论。

定义 5.3.1。 若全局空间 X 属于由 π-有限空间经有限余极限和收缩生成的 S$^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群的全子范畴，则称 X 为 π-紧致的 。

例 5.3.2。 设 G 是一个有限群， X 是一个紧致的 G-空间。则与 X 关联的全局空间$X//G$ 属于由 $\mathbf{B}H$ （其中 $H \subset G$）经有限余极限和收缩生成的 S$^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群 的全子范畴。特别地， $X//G$ 是 π-紧致的。

命题 5.3.3。 设X 是一个 π-紧致的全局空间。则$\mathcal{O}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}}$ 是一个拟凝聚$\mathcal{O}_{\mathsf{M}}$-模。

证明。 在 X 上局部地进行讨论即可，因此只需证明：若 f: A $\to$ B 是$\mathbf{E}_{\infty}$ -环之间的一个映射，且$\mathbf{G}$ 是 A 上一个定向的$\mathbf{P}$-可除群，则比较映射

$$\mathsf{B} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{A}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}} \to \mathsf{B}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}}$$

是一个等价。使该映射成为等价的 X 类在有限余极限和收缩下封闭，因此我们可以归约到 X $= F$ 是一个 π-有限空间的情形，这正是 Lurie 的基变换定理 [Lur19, Th.4.7.1]。 □

因此，一个 π-紧空间 X 确定了

$$\underline{\mathcal{O}}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(\mathsf{M})) \subset \mathrm{CAlg}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{Sp}))).$$

根据 [BDL25, Th.2.2.3，1],取相对谱给出一个等价

$$\mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(\mathsf{M}))^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Stk}^{\mathrm{aff}}_{/\mathsf{M}},$$

其中 $\mathrm{Stk}^{\mathrm{aff}}_{/\mathsf{M}} \subset \mathrm{Stk}_{/\mathsf{M}}$ 是由仿射态射张成的全子范畴。因此，Pr.5.3.3 提供了对以下几何对象的访问。

定义 5.3.4。令 X 为一个 π-紧全局空间。记

$$\mathbf{G}(\mathsf{X}) \in \mathrm{Stk}_{/\mathsf{M}}$$

为与 $\mathsf{O}^{\mathsf{X}}_{\mathbf{G}} \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(\mathsf{M})) \simeq (\mathrm{Stk}^{\mathrm{aff}}_{/\mathsf{M}})^{\mathrm{op}}$ 相关联的、定义在 M 上的相对仿射栈。

例 5.3.5。当 T 遍历 $\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}} \subset \mathsf{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群 时，M 上的栈 $\mathbf{G}(T)$ 恰好是构成定向 $\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}$ 的那些栈；也就是说，Df.5.3.4 在包含映射 $\mathrm{Aff} \subset \mathrm{Stk}$ 下与 Nt.4.1.6 兼容。

这些栈是与定向 $\mathbf{P}$-可除群相关联的等变同调理论的自然承载对象。

构造 5.3.6. 给定一个 π-有限空间 F，我们构造一个宽松对称幺半且保余极限的 F-全局 $\mathbf{G}$-温和同调 函子

$$\mathcal{O}^{F}_{\mathbf{G}}[-]\colon (\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}})_{/F} \to \mathrm{QCoh}(\mathbf{G}(F))$$

如下。根据 Df.2.3.4，与 π-双向的 $\mathbf{E}_\infty$ 环 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}$ 相关联的是一个宽松对称幺半同调函子

$$\mathcal{O}^{F}_{\mathbf{G}}[-]\colon (\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{ab}})_{/F} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}^{F}_{\mathbf{G}}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{Sp}))),$$

满足：对于任意满足 $T \in \mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}}$ 的映射 $T \to F$，都有 $\mathsf{O}^{F}_{\mathbf{G}}[T] \simeq \mathsf{O}^{T}_{\mathbf{G}}$。特别地，我们有 $\mathsf{O}^{F}_{\mathbf{G}}[T] \in$ 模$_{\mathcal{O}^{F}_{\mathbf{G}}}$(QCoh(M))。根据 Pr.3.5.3，此函子保余极限，因此根据 Lm.5.2.5 及上述观察，其值落在全子范畴

$$\mathrm{QCoh}(\mathbf{G}(F)) \simeq \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}^{F}_{\mathbf{G}}}(\mathrm{QCoh}(\mathsf{M})) \subset \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}^{F}_{\mathbf{G}}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{Sp})))$$

$\mathbf{G}(F)$ 上的拟凝聚层范畴。

这个名称 F-全局同调是类比于有限群G的 G-全局同伦论而来的，因为按照 [Len25a], 的定义， G-全局空间恰好是切片 $(\mathsf{S}^{\mathrm{gl}})_{/\mathbf{B}G}$中的对象。

例5.3.7。设 $K \to F$ 是有限空间之间的一个映射。限制定义了 CAlg(QCoh(M)) 中的一个映射 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}^{F} \to \mathsf{O}_{\mathbf{G}}^{K}$。这使 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}^{K}$ 成为 $\mathrm{Mod}^{\mathcal{O}_{\mathbf{G}}^{F}}$(QCoh(M)) $\simeq$ QCoh($\mathbf{G}(F)$) 的一个对象，并且根据构造，我们有

$$\mathcal{O}_{\mathbf{G}}^{F}[K] \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{G}}^{K} \in \mathrm{QCoh}(\mathbf{G}(F)).$$

$\mathsf{O}_{\mathbf{G}}^{F}[-]$ 的函子性将任意映射 $f\colon K \to K'$ 关联到 F 上的 π-有限空间之间的 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}^{F}$-线性转移映射 $f_!\colon \mathsf{O}_{\mathbf{G}}^{K} \to \mathsf{O}^{K'}{}_{\mathbf{G}}$。当 $K' = F$ 时，这种线性性恰好就是弗罗贝尼乌斯互反律。

注 5.3.8。改为将 Df.2.3.4 应用于 π-双可定向谱 $\Gamma(\mathsf{O}_{\mathbf{G}})$（即 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}$ 的整体截面），可得到一个宽松对称幺半的 F-整体同调函子

$$\Gamma(\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}^{F}) = \mathrm{D}\Gamma(\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}})\colon (\mathcal{S}_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{gl}})_{/F} \to \mathrm{Mod}_{\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbf{G}}^{F})}.$$

根据构造，对于 $\underline{T} \in (\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})_{/F}$，它满足 $\Gamma(\mathsf{O}_{\mathbf{G}}^{F})[T] \simeq \Gamma(\mathsf{O}_{\mathbf{G}}^{F}[T])$，因此存在一个自然的余组装映射

$$\Gamma(\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}^{F})[\mathsf{X}] \to \Gamma(\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}^{F}[\mathsf{X}])$$

对于 $\mathsf{X} \in (\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群$)_{/F}$，若 QCoh(M) $\to$ Sp 保持余极限，则该映射是等价；也就是说，若按照 BDL25, Df.2.2.1.5] 的定义，M 是 0-半仿射的，则该映射是等价。例子见 [BDL25, §4.2.3 和 4.4] 。特别地，Exs.5.1.5 和 5.1.7 中的主要例子 $\mathsf{M} = \mathsf{M}_{\mathrm{Tori}}^{\mathrm{or}}$ 和 $\mathsf{M} = \mathsf{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{or}}$ 均满足这一条件。

例 5.3.9。设 H 是一个有限群。从 QCoh(M) 中 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}$ 的底层 H-谱对象 $\mathsf{O}_{\mathbf{G},H}$（如约定 2.3.9 中所定义）可提取一个 H-等变同调理论

$$\mathcal{S}_H \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{Sp})), \qquad X \mapsto (\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G},H} \otimes \Sigma^{\infty} X)^{H}.$$

这是一个宽松对称幺半函子，将点映至 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{B}H}$，因此可提升为一个函子

$$\mathcal{O}_{\mathbf{G},H}[-//H]\colon \mathcal{S}_H \to \mathrm{QCoh}(\mathbf{G}(\mathbf{B}H)).$$

经检查，这等价于沿函子对约定 5.3.6 作限制

$$\mathcal{S}_H \to (\mathcal{S}_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{gl}})_{/\mathbf{B}H}$$

该函子将轨道 H/K 映至映射 $\mathbf{B}K \to \mathbf{B}H$。由于 QCoh($\mathbf{G}(\mathbf{B}H)$) 是带基点的，它也会经由带基点的 H-空间分解，从而定义一个宽松对称幺半函子

$$\widetilde{\mathcal{O}}_{\mathbf{G},H}[-//H]\colon \mathcal{S}_{H,*} \to \mathrm{QCoh}(\mathbf{G}(\mathbf{B}H)).$$

正如 Lurie 在 [Lur09a，注 3.14], 中最初所暗示的那样，在层的层面上工作时，温和同调在许多方面比温和上同调具有更好的性质。例如，它满足以下一般的基变换定理。

定理 5.3.10。 设 $f\colon \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ 为一个叠的态射，$\mathbf{G}$ 为 M 上的一个定向 $\mathbf{P}$-可除群，且 F 为一个 π-有限空间。我们将略带滥用地仍用 f 表示由 f诱导的态射 $f^*\mathbf{G}(F) \to \mathbf{G}(F)$。于是存在一个自然等价：

$$f^*\mathcal{O}^F_{\mathbf{G}}[\mathsf{X}] \to \mathcal{O}^F_{f^*\mathbf{G}}[\mathsf{X}]$$

对于任意的 拟凝聚层($f^*\mathbf{G}(F)$)，在 $\mathsf{X} \in (\mathcal{S}^{\mathrm{gl}}{}_{\mathrm{ab}})_{/F}$ 中。

证明。 由于两边都在 X 中保持余极限，只需在 $\mathsf{X} = T \in (\mathrm{Glo}_{\mathrm{ab}})_{/F}$ 的情形下构造此自然等价即可。此时我们有

$$f^*\mathcal{O}^F_{\mathbf{G}}[T] \simeq f^*\mathcal{O}^T_{\mathbf{G}} \simeq \mathcal{O}^T_{f^*\mathbf{G}} \simeq \mathcal{O}^F_{f^*\mathbf{G}}[T]$$

由构造可知。 □

5.4 几何固定点

在栈 M 上固定一个定向的 $\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}$ 。按照约定 2.3.9，对于每个有限群 H，我们可以将 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}$ 限制为一个层 $_$

$$\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G},H} \in \mathrm{CAlg}_H(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{Sp})))$$

，它是在 M 上由 H-等变的 $\mathbf{E}_\infty$ 环构成的。特别地，我们可以形成 H-几何不动点

$$\underline{\mathcal{O}}^{\Phi H}_{\mathbf{G}} \in \mathrm{CAlg}_{\mathcal{O}^{\mathbf{B}H}_{\mathbf{G}}}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{\mathsf{M}}}(\mathrm{Shv}(\mathsf{M};\mathrm{Sp}))) \simeq \mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(\mathbf{G}(\mathbf{B}H))) \tag{5.4.1}$$

$_^{\sim}$的 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}$。明确地说，如果记 $E\mathcal{P}$ 为这样一个 H-空间：对所有 $^{\sim}$真子群 $K \subset H$，其 K- 不动点均可缩，而 H- 不动点为空，那么由于 $E\mathcal{P} \in \mathsf{S}_{H,\,*}$ 在楔积下是幂等的，且 $\widetilde{\mathsf{O}^{\mathbf{B}H}{}_{\mathbf{G}}}\ [-//H]$ 是宽松对称幺半的（见例 5.3.9），我们可以构造

$$\underline{\mathcal{O}}^{\Phi H}_{\mathbf{G}} = \widetilde{\underline{\mathcal{O}}}^{\mathbf{B}H}_{\mathbf{G}}[\widetilde{E\mathcal{P}}//H] \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(\mathbf{G}(\mathbf{B}H))).$$

记

$$\Phi^H\mathbf{G} \in \mathrm{Stk}^{\mathrm{aff}}_{/\mathbf{G}(\mathbf{B}H)}$$

为 G 的相关几何不动点叠，定义为 (5.4.1) 的相对谱。

注5.4.2。 回忆一下，与任意 H-表示 V 相关联的有一个表示球面 $S^V \in \mathsf{S}_{H,\,*}$，它由 V 的一点紧化得到。V 的欧拉类是带基点映射 $a_V\colon\ S^0 \to S^V$，由包含映射 $_0 \subset V$诱导。记 ρ_H 为 H 的约化正则表示，则存在一个等价

$$\widetilde{E\mathcal{P}} \simeq \mathrm{colim}(S^{\overline{\rho}_H} \xrightarrow{a_{\overline{\rho}_H}} S^{\cdot 2\overline{\rho}_H} \xrightarrow{\cdot a_{\overline{\rho}_H}} S^{3\overline{\rho}_H} \xrightarrow{\cdot a_{\overline{\rho}_H}} \dots) \simeq S^{\infty\overline{\rho}_H},$$

例如参见 [MNN19, 命题2.7]。特别地，$\widetilde{E\mathcal{P}} \simeq \mathbf{S}_H[a_{\rho_H}^{-1}]$ 属于谱 Sp_H。

注 5.4.3. 由于 $\Phi^H\mathbf{G}$ 被定义为 M 上的一个栈，因此可以将定向的 $\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}$拉回到 $\Phi^H\mathbf{G}$，从而将 $\Phi^H\mathbf{G}$自身的结构层提升为一个由 π-交换全局 $\mathsf{O}_{\Phi^H\mathbf{G}}$-代数组成的层。特别地，若 M =Spec(A) 是仿射的，则这会将 $\mathbf{E}_\infty$ 环 $\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Phi H}$细化为一个 π-交换全局环

$$\underline{\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Phi H}} \in \mathrm{CAlg}_{\underline{\mathsf{A}}}(\mathrm{Sp}_\pi^{\mathrm{gl}})$$

在 $\mathsf{A}_{\mathbf{G}}$ 下，满足

$$(\underline{\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Phi H}})^F[\mathsf{X}] \simeq \mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Phi H} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{A}_{\mathbf{G}}^F[\mathsf{X}]$$

对于任意 π-有限空间 F 和 $\mathsf{X} \in (\mathsf{S}^{\mathrm{gl}}$ 阿贝尔群$)\ /\mathsf{X}$。例如，取 $A_{\underline{\mathbf{G}}} = \mathbf{KU}$ 为等变 K-理论的全局谱，我们可以将其识别为

$$\mathbf{KU}^{\Phi C_n} \simeq KU[1/n](\zeta_n)$$

其中 ζ_n 是一个本原 n次单位根 [tD79, §7.7]，因此

$$(\underline{\mathbf{KU}^{\Phi C_n}})^{\Phi C_n} \simeq \mathbf{KU}^{\Phi C_n} \otimes_{\mathrm{KU}} \mathbf{KU}^{\Phi C_n} \simeq \mathrm{KU}[1/n](\zeta_n)^{\times|\mathrm{Aut}(C_n)|};$$

请注意，这与 $n \neq 0$的 $\mathbf{KU}^{\Phi C_n^2}$ 和 $\mathbf{KU}^{\Phi C_{n^2}}$ 均不同。

本小节和下一小节的目标是更具体地描述几何不动点层叠$\Phi^H\mathbf{G}$，并推导一些结论。本小节先考虑 H 是非阿贝尔群的情形。

命题 5.4.4. 设 H 是一个非阿贝尔群。那么 $\Phi^H\mathbf{G} \simeq \emptyset$。

证明。 根据定理 5.3.10，几何不动点层叠的形成与基变换相容，即

$$\Phi^H f^*\mathbf{G} \simeq f^*\Phi^H\mathbf{G}$$

对于任意栈之间的映射 f: N $\to$ M。因此，我们可以在 M 上局部工作，从而将问题归结为如下情形：$\mathbf{G}$ 是环 A 上的一个定向$\mathbf{P}$-可除群，其中 A_∞ 满足 π_0A 是局部的。由于$\mathbf{G}$ 是定向的，可知对某个隐含的素数 p 和某个有限高度$n < \infty$，A 是 L_n-局部的，因此 A-代数 $\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Phi H}$也如此。根据 [Hah16], ，我们发现 $\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Phi H} \simeq 0$ 当且仅当$\mathbf{Q} \otimes \mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Phi G} \simeq 0$。再次应用定理 5.3.10，我们便可将问题归结为A 是有理的情形。根据 [Lur19，定理 7.6.3，注 7.6.4], ， $\pi_0^H\mathsf{A}_{\mathbf{G}}$ 的每个元素都等于从 H的阿贝尔子群转移而来的类之和。由于几何不动点会消去转移的像，因此可知 $1 \in \pi_0^H\mathsf{A}_{\mathbf{G}}$ 被映射 $\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{B}H} \to \mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Phi H}$湮灭，从而 $\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Phi H} \simeq 0$，如所述。 □

推论 5.4.5。 对于任意有限群 H，存在一个自然的比较映射

$$\mathcal{O}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{B}H} \to \prod_{\substack{(L)\leq H \\ L\ abelian}} (\mathcal{O}_{\mathbf{G}}^{\Phi L})^{\mathrm{h}W_H L}$$

在$\mathrm{CAlg}(\mathrm{QCoh}(\mathsf{M}))$ 中；当 H 的阶在M中可逆时，这是一个等价。这里，乘积是对 H的阿贝尔子群的共轭类取的。

证明。对于任意子群 $L \subset H$ 和 H-谱 X， L-几何不动点 $\Phi^L X$谱带有韦伊群 $W_H L$的作用，并且可将其细化为一个函子

$$\Phi^L \colon \mathrm{Sp}^H \to \mathrm{Fun}(BW_H L, \mathrm{Sp}).$$

令 L 遍历 H 的子群共轭类，可得到一个函子

$$\Phi \colon \mathrm{Sp}^H \to \prod_{(L)\leq H} \mathrm{Fun}(BW_H L, \mathrm{Sp})$$

已知该函子在远离 H 的阶时是一个等价。由此，对于任意 H-谱对象 X，可得到一个自然映射

$$X^H \to \prod_{(L)\leq H} (\Phi^L X)^{\mathrm{h}W_H L}$$

当 $|H|$ 在 X 上可逆时，该映射是一个等价。将此结果应用于 $X = \mathsf{O}_{\mathbf{G},H}$，并注意到对应于非阿贝尔子群的直和项由 Pr.5.4.4 消失，即可得到推论。

□

例 5.4.6. 若 H 是有限阿贝尔群，则 $W_H L \simeq H/L$ 在 $\mathsf{O}_{\mathbf{G}}^{\Phi L}$ 上的作用是有理平凡的，因此 Cor.5.4.5 给出一个映射

$$\mathcal{O}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{B}H} \to \prod_{L\subset H} \mathcal{O}_{\mathbf{G}}^{\Phi L}$$

which 在将 H 的阶取逆后是一个等价。从几何上说，这给出了一个映 p

$$\coprod_{L\subset H} \Phi^L \mathbf{G} \to \mathbf{G}(\mathbf{B}H)$$

经过基变换到 $\mathbf{S}[1/|H|]$ 后，这是一个等价。我们将在下文 §5.5 中从几何角度描述代数栈 $\Phi^L\mathbf{G}$；例如，可与 [Mei22, §4.2] 中讨论的相应等变 TMF 分裂作比较。

5.5 阿贝尔几何固定点

接下来需要确定当 H 是有限阿贝尔群时的 $\Phi^H\mathbf{G}$ 。根据构造，$\mathbf{G}(\mathbf{B}H)$ ^可视为同态栈 $H \to \mathbf{G}$。我们将证明

$$\Phi^H\mathbf{G} \subset \mathbf{G}(\mathbf{B}H)$$

存在一个代数几何识别，将其识别为对应于^单射 $H \to \mathbf{G}$的开子叠。为定义这一点，我们需要一些预备知识。

构造 5.5.1。给定一个$\mathbf{E}_\infty$环 A，将 $|\operatorname{Spec} \mathsf{A}|$ 记为普通环 $\pi_0\mathsf{A}$ 的扎里斯基谱。这定义了一个函子，映到拓扑空间范畴

$$\mathrm{CAlg}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}, \qquad \mathsf{A} \mapsto |\operatorname{Spec} \mathsf{A}|$$

它满足平坦下降 [Lur18c, Pr.1.6.2.2], ，因此唯一地延拓为一个保余极限函子

$$|-|\colon \mathrm{Stk} \to \mathrm{Top}$$

将栈 X 映射到其 扎里斯基空间 |X|。

注 5.5.2。 根据定义， $|\mathsf{Spec}\ \mathsf{A}| = |\mathsf{Spec}\ \pi_0\mathsf{A}|$，对于表示为仿射对象余极限的栈 M，即 $\mathsf{M} \simeq \mathsf{colim}\ \mathsf{Spec}\ \mathsf{A}$，我们有如下识别

$$|\mathsf{M}| \simeq \mathrm{colim}\,|\,\mathrm{Spec}\,\mathsf{A}| \simeq \mathrm{colim}\,|\,\mathrm{Spec}\,\pi_0\mathsf{A}| \simeq |\mathsf{M}^{\heartsuit}|.$$

换句话说，扎里斯基空间构造仅依赖于底层经典堆栈，这与 [BDL25, Df.3.1.1.7], 中的含义一致，并且保余极限函子 $|-|\colon \mathsf{Stk} \to \mathsf{Top}$ 可分解为

$$\mathrm{Stk} \xrightarrow{(-)^{\heartsuit}} \mathrm{Stk}^{\heartsuit} \xrightarrow{|-|} \mathrm{Top}.$$

定义 5.5.3。 若栈之间的态射 $\mathsf{Z} \to \mathsf{X}$ 是仿射的，且对任意形如以下形式的笛卡尔图，

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Spec\ B} & \longrightarrow & \mathsf{Spec\ A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Z} & \longrightarrow & \mathsf{X} \end{array},$$

映射 $\pi_0\mathsf{A} \to \pi_0\mathsf{B}$ 是满射。

例 5.5.4。 设 $p\colon \mathsf{E} \to \mathsf{X}$ 是一个仿射态射，且有一个截面 $s\colon \mathsf{X} \to \mathsf{E}$。那么 s 是闭浸入。事实上，在 X 上局部处理，可将问题化约为这样的情形：p 的形式为 $\mathsf{Spec\ B} \to \mathsf{Spec\ A}$，其中环映射 $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ 有一个回缩，因此在所有同伦群上都是满射。

引理 5.5.5. 设 $\{\mathsf{Z}_i \to \mathsf{X}\}$ 是有限族闭浸入。则存在一个子堆栈 $\mathsf{X} \setminus \bigcup_i \mathsf{Z}_i \subset \mathsf{X}$，即开补 $\bigcup_i \mathsf{Z}_i$ 在X中，由存在如下空间的自然笛卡尔图而唯一确定

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathrm{Stk}}(\mathsf{Y}, \mathsf{X} \setminus \mathsf{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Top}}(|\mathsf{Y}|, |\mathsf{X}| \setminus \bigcup_i |\mathsf{Z}|) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_{\mathrm{Stk}}(\mathsf{Y}, \mathsf{X}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Top}}(|\mathsf{Y}|, |\mathsf{X}|). \end{array} \tag{5.5.6}$$

对所有 $\mathsf{Y} \in \mathrm{Stk}$均成立。此外，这一构造满足以下性质：

1. $\mathsf{X} \setminus (\mathsf{Z}_1 \cup \cdots \cup \mathsf{Z}_n) \simeq (\mathsf{X} \setminus \mathsf{Z}_1) \times_{\mathsf{X}} \cdots \times_{\mathsf{X}} (\mathsf{X} \setminus \mathsf{Z}_n)$；
2. $|\mathsf{X} \setminus \bigcup_i \mathsf{Z}_i| \simeq |\mathsf{X}| \setminus \bigcup_i |\mathsf{Z}_i|$；
3. 对于任意态射 $\mathsf{Y} \to \mathsf{X}$，存在等价 $\mathsf{Y} \times_{\mathsf{X}} (\mathsf{X} \setminus \mathsf{Z}) \simeq \mathsf{Y} \setminus (\mathsf{Y} \times_{\mathsf{X}} \mathsf{Z})$.

证明。 如果 $\mathsf{Z} \to \mathsf{X}$ 是闭浸入，那么由于拓扑空间的闭浸入在余极限下封闭，因此 $|\mathsf{Z}| \to |\mathsf{X}|$ 是闭浸入。由此可知，所示的笛卡尔图确定了一个保极限函子

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Stk}}(-, \mathsf{X} \setminus \bigcup_i \mathsf{Z}_i) \colon \mathrm{Stk}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}.$$

特别地，该函子由其在 $\mathsf{CAlg} \subset \mathsf{Stk}^{\mathrm{op}}$ 上的限制决定。我们要证明它可表，并满足性质 (1–3)。性质 (1) 直接由以下事实得出：

$$|\mathsf{X}| \setminus (|\mathsf{Z}_1| \cup \cdots \cup |\mathsf{Z}_n|) \simeq (|\mathsf{X}| \setminus |\mathsf{Z}_1|) \times_{|\mathsf{X}|} \cdots \times_{|\mathsf{X}|} (|\mathsf{X}| \setminus |\mathsf{Z}_n|).$$

特别地，接下来我们可以将问题归结为单个闭浸入 $\mathsf{Z} \to \mathsf{X}$ 的情形。

接下来我们验证函子

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Stk}}(\mathrm{Spec}(-), \mathsf{X} \setminus \mathsf{Z}) \colon \mathrm{CAlg} \to \mathcal{S}$$

可由一个栈表示。首先，假设 $\mathsf{X} = \mathrm{Spec}\, \mathsf{A}$ 是仿射的。根据假设，$\mathsf{Z} = \mathrm{Spec}\, \mathsf{B}$，其中 B 配备了一个映射 $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$，该映射诱导出一个满射 $\pi_0\mathsf{A} \to \pi_0\mathsf{B}$，因此得到一个闭浸入 $|\mathrm{Spec}\, \mathsf{B}| \to |\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}|$。令 $\mathrm{SpSch}^{\mathrm{nc}}$ 表示非连通谱概形范畴。根据 [BDL25, Pr.3.2.2.2] 和 [Lur18c, Th.1.6.2.1], , Yoneda 嵌入 $\mathrm{Spec}\colon \mathrm{Aff} \to \mathrm{Stk}$ 可扩张为一个全忠实嵌入

$$h_{(-)} \colon \mathrm{SpSch}^{\mathrm{nc}} \to \mathrm{Stk}.$$

给定一个$\mathbf{E}_\infty$ 环 A，记 $\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}$ 为在 [Lur18c, §1.1.4] 中构造的、底层空间为 $|\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}|$ 的局部环化空间。那么，$\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}$ 的开补 $\mathrm{Spec}\, \mathsf{A} \setminus \mathrm{Spec}\, \mathsf{B}$ 由将局部环化空间 $\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}$ 限制到开子空间$|\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}| \setminus |\mathrm{Spec}\, \mathsf{B}|$后所表示的栈给出。

接下来，设 X 是任意的。取 X 的一个表示 $\mathsf{X} \simeq \mathrm{colim}_j \mathrm{Spec}\, \mathsf{A}_j$，将其表示为仿射对象的余极限，并记 $\mathrm{Spec}\, \mathsf{B}_j = \mathrm{Spec}\, \mathsf{A}_j \times_{\mathsf{X}} \mathsf{Z}$。由上述构造，对于每个 j，我们都有一个开补 $\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}_j \setminus \mathrm{Spec}\, \mathsf{B}_j \subset \mathrm{Spec}\, \mathsf{A}_j$。$\mathsf{X}$ 的定义图表中的每个映射 $\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}_j \to \mathrm{Spec}\, \mathsf{A}_{j'}$都会将 $\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}_j \setminus \mathrm{Spec}\, \mathsf{B}_j$ 映入 $\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}_{j'} \setminus \mathrm{Spec}\, \mathsf{B}_{j'}$，因此我们可以构造 $\mathsf{Y} = \mathrm{colim}_j \mathrm{Spec}\, \mathsf{A}_j \setminus \mathrm{Spec}\, \mathsf{B}_j$。我们断言 $\mathsf{Y} = \mathsf{X} \setminus \mathsf{Z}$。换言之，我们断言对于任意$\mathbf{E}_\infty$ 环 C，存在一个自然笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathrm{Stk}}(\mathrm{Spec}\, C, \mathsf{Y}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Top}}(|\mathrm{Spec}\, C|, |\mathsf{X}| \setminus |\mathsf{Z}|) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_{\mathrm{Stk}}(\mathrm{Spec}\, C, \mathsf{X}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Top}}(|\mathrm{Spec}\, C|, |\mathsf{X}|) \end{array}.$$

这样的图表存在，是因为

$$\begin{aligned} |\mathsf{Y}| \simeq \mathrm{colim}_j |\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}_j \setminus \mathrm{Spec}\, \mathsf{B}_j| &\simeq \mathrm{colim}_j |\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}_j| \setminus |\mathrm{Spec}\, \mathsf{B}_j| \\ &\simeq (\mathrm{colim}_j |\mathrm{Spec}\, \mathsf{A}_j|) \setminus (\mathrm{colim}_j |\mathrm{Spec}\, \mathsf{B}_j|) \simeq |\mathsf{X}| \setminus |\mathsf{Z}| \end{aligned}$$

根据构造，因此我们必须证明它是笛卡尔的。由于垂直态射是单态射，只需证明：若 f: $\mathrm{Spec}\, C \to \mathsf{X}$ 是一个映射，且 $|\mathrm{Spec}\ C| \to |\mathsf{X}|$ 可经由$|\mathsf{X}| \setminus |\mathsf{Z}|$分解，那么 f 可提升到 Y。

固定这样一个态射。根据 X 的给定表示，存在一组联合忠实平坦扩张 $C \to D_j$ 交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\, D_j & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\, \mathsf{A}_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\, C & \longrightarrow & \mathsf{X} \end{array} .$$

由于 $|\mathrm{Spec}\, D_j| \to |\mathrm{Spec}\ \mathsf{A}_j| \to |\mathsf{X}|$ 经过 $|\mathsf{X}| \setminus |\mathsf{Z}|$因子分解，因此 $|\mathrm{Spec}\ D_j| \to |\mathrm{Spec}\ \mathsf{A}_j|$ 经过 $|\mathrm{Spec}\ \mathsf{A}_j| \setminus |\mathrm{Spec}\ \mathsf{B}_j|$因子分解，从而 $\mathrm{Spec}\ D_j \to \mathrm{Spec}\ \mathsf{A}_j$ 经过 $\mathrm{Spec}\ \mathsf{A}_j \setminus \mathrm{Spec}\ \mathsf{B}_j$因子分解。换言之，我们有如下形式的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ D_j & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\ \mathsf{A}_j \setminus \mathrm{Spec}\ \mathsf{B}_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathsf{X} \setminus \mathsf{Z} \\ & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\ C & \longrightarrow & \mathsf{X} \end{array} .$$

由于 $\coprod_j \mathrm{Spec}\ D_j \to \mathrm{Spec}\, C$ 是一个有效满态射，且 $\mathsf{X} \setminus \mathsf{Z} \to \mathsf{X}$ 是单态射，因此 $\mathrm{Spec}\ C \to \mathsf{X}$ 按所述提升到 $\mathsf{X} \setminus \mathsf{Z}$。

性质 (2) 和 (3) 现在可由构造直接看出。 □

推论 5.5.7。 设 $\{\mathsf{Z}_i \to \mathsf{X}\}$ 是基堆栈M上的一个闭浸入有限族。那么，将 $\mathsf{X} \setminus \bigcup_i \mathsf{Z}_i$ 视为通过 $\mathsf{X} \to \mathsf{M}$定义在 M 上的栈时，它由以下空间的自然笛卡尔图唯一刻画

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathrm{Stk}_{/\mathsf{M}}}(\mathsf{Y}, \mathsf{X} \setminus \mathsf{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Top}_{/|\mathsf{M}|}}(|\mathsf{Y}|, |\mathsf{X}| \setminus \bigcup_i |\mathsf{Z}|) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_{\mathrm{Stk}_{/\mathsf{M}}}(\mathsf{Y}, \mathsf{X}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Top}_{/|\mathsf{M}|}}(|\mathsf{Y}|, |\mathsf{X}|). \end{array}$$

对所有的 $\mathsf{Y} \in \mathrm{Stk}_{/\mathsf{M}}$。

证明。 所需的方形是从 (5.5.6) 到.....的方形图映射的纤维

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathrm{Stk}}(\mathsf{Y},\mathsf{M}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Top}}(|\mathsf{Y}|,|\mathsf{M}|) \\ \downarrow{=} & & \downarrow{=} \\ \mathrm{Map}_{\mathrm{Stk}}(\mathsf{Y},\mathsf{M}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathrm{Top}}(|\mathsf{Y}|,|\mathsf{M}|) \end{array}$$

沿着结构映射 $\mathsf{Y} \to \mathsf{M}$ 和 $|\mathsf{Y}| \to |\mathsf{M}|$。 □

要将其应用于我们的情形，我们需要以下引理。

引理 5.5.8. 设 $\mathbf{G}$: 阿贝尔群$^{\mathrm{op}}$ $_{\text{有限}}\to \mathrm{Stk}$ 是一个满足以下条件的函子：

1. $\mathbf{G}$ 将双笛卡尔方形映射为笛卡尔方形；

2. 对所有有限阿贝尔群 H，$\mathbf{G}[H] \to \mathbf{G}[0]$ 均为仿射。

那么，对于任意有限阿贝尔群之间的满射 $H \to K$，诱导映射 $\mathbf{G}[K] \to \mathbf{G}[H]$是闭浸入。

注 5.5.9。 引理 5.5.8 的第一个条件等价于要求$\mathbf{G}$ 在 $\mathrm{Stk}_{/\mathbf{G}[0]}$ 中按照 [Lur18a, 定义 6.4.2] 的意义成为一个挠对象 。

引理 *5.5.8* 的证明。 设 $H \to K$ 为一个核为 L的满射，并考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}[K] & \longrightarrow & \mathbf{G}[H] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{G}[0] & \longrightarrow & \mathbf{G}[L] \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbf{G}[0] \end{array} \cdot$$

该方形是笛卡尔的，因此只需证明$\mathbf{G}[0] \to \mathbf{G}[L]$ 是一个闭浸入。这是因为它是仿射态射 $\mathbf{G}[L] \to \mathbf{G}[0]$的一个截面。 □

定义 5.5.10。 设 $\mathbf{G}$: 阿贝尔群$^{\mathrm{op}}$ $_{\text{有限}}\to$ Stk 是一个满足引理 5.5.8 中两个条件的函子。给定一个有限阿贝尔群 H，记作

$$\mathrm{Inj}(\widehat{H},\mathbf{G}) = \mathbf{G}[\widehat{H}] \setminus \bigcup_{K \subsetneq H} \mathbf{G}[\widehat{K}]$$

$\widehat{\ }$对于单射栈 $H \to \mathbf{G}$。

例 5.5.11。 设 $\mathsf{E} \to \mathsf{M}$ 是栈 M 上的一条椭圆曲线，并记 $\mathsf{E}[\mathbf{P}^\infty] \subset \mathsf{E}$ 为 E 的 **P**-可除群。若 H 的阶在 M 上可逆，则我们可以作如下识别

$$\mathrm{Inj}(\widehat{H}, \mathsf{E}[\mathbf{P}^\infty]) \simeq \mathrm{Level}(\widehat{H}, \mathsf{E})$$

$\widehat{\ }$作为 E 上层级为 H 的结构之栈。

例 5.5.12。 设 $\mathbf{G}$ 是一个**P**-可除群。那么，对于任意有限阿贝尔群 H，直和项 $\mathbf{G}^{(|H|)} \subset \mathbf{G}$ 的包含映射诱导出一个等价

$$\mathrm{Inj}(\widehat{H}, \mathbf{G}_{(|H|)}) \simeq \mathrm{Inj}(\widehat{H}, \mathbf{G}),$$

a并且，如果 H 和 K 是阶互素的有限阿贝尔群，那么比较映射

$$\mathrm{Inj}(\widehat{H \times K}, \mathbf{G}) \to \mathrm{Inj}(\widehat{H}, \mathbf{G}) \times_{\mathsf{M}} \mathrm{Inj}(\widehat{K}, \mathbf{G})$$

是一个等价。

现在我们可以陈述以下定理。

定理 5.5.13。 设 $\mathbf{G}$ 是复周期堆栈M上的一个定向**P**-可除群。那么，包含映射 $\mathrm{Inj}(H, \mathbf{G}) \to \mathbf{G}[H]$ 是仿射的，并且存在一个（必然唯一的）等价

$$\Phi^H \mathbf{G} \simeq \mathrm{Inj}(\widehat{H}, \mathbf{G})$$

$\widehat{\ }$在仿射于 $\mathbf{G}(\mathbf{B}H) = \mathbf{G}[H]$的代数栈中。

注 5.5.14。 定理 5.5.13 中的复周期假设本质上是一个有理的假设，因为每个支持可定向的**P**-可除群的 p-完备$\mathbf{E}_\infty$ 环都必然是复周期的 [Lur19，Warn.2.6.18]。

定理 5.5.13 的证明基于以下简单观察。

引理 5.5.15。 设 G 为一个紧李群， V 为一个核为 K 的1维复 G-表示。固定一个$\mathbf{E}_\infty$ 环 $A \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^G)$ 中的 G-谱，并定义理想

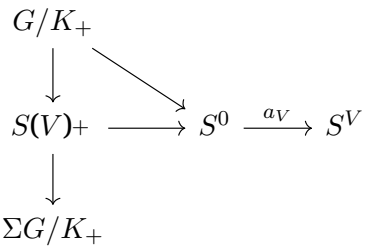
$$I_K = \ker\left(\mathrm{res}^G_K \colon \pi_*\mathsf{A}^G \to \pi_*\mathsf{A}^K\right), \qquad I_V = \mathrm{im}\left(a_V \colon \pi^G_{*+V}\mathsf{A} \to \pi^G_*\mathsf{A} = \pi_*\mathsf{A}^G\right).$$

于是存在包含映射

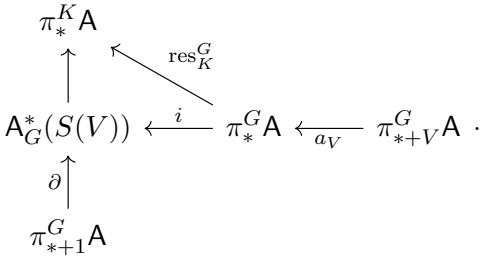
$$I_V \subset I_K \subset \sqrt{I_V}.$$

特别地， $\sqrt{I_K} = \sqrt{I_V}$。

证明。 令 $S(V)$ 和 S^V 分别表示其中的单位球面和 V 的一点紧化，并考虑图表



其中行和列都是余纤维序列。取 A-上同调后，我们得到如下形式的图表



显然， $I_V \subset I_K$。我们断言， $\sqrt{I_K} \subset \overline{I_{V^\circ}}$ 若 $x \in I_K$，则对某个 y， $i(x) = \partial(y)$。我们断言， $\partial(y)$ 是幂零的。只需证明对所有 $H \subset G$， $\Phi^H \partial(y)$是幂零的。若$H = e$ ，则这显然成立，因为 ∂ 是外代数元素的包含映射

$$\mathsf{A}_e^* \operatorname{res}_G^e S(V)_+ \cong \mathsf{A}_e^*(S^1_+) \cong \mathsf{A}_*[\epsilon]/(\epsilon^2).$$

若 $H \neq e$，则 $\Phi^H S(V) = \emptyset$，因此 $\Phi^H \partial(y) = 0$。

因此，对某个 $n > 0$，我们有 $i(x^n) = i(x)^n = \partial(y)^n = 0$ 。由此可得，对某个 z， $i(x^n) = a_V z$ 。这就证明了 $\sqrt{I_Z} \subset I_{V^\circ}$ □

定理 *5.5.13* 的证明。 此定理在 M 上是局部的，因此不失一般性，$\mathbf{G}$ 是一个定义在$\mathbf{E}\infty$ 环 A 上的定向$\mathbf{P}$-可除群。在此情形下，我们断言存在一个等价

$$\operatorname{Spec}(\underline{\mathsf{A}}_{\mathbf{G}}^{\Phi H}) \simeq \operatorname{Inj}(\widehat{H}, \mathbf{G})$$

在$\mathbf{G}(\mathbf{B}H)$上的代数栈。为此，只需首先证明映射 $\mathsf{Spec}(\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Phi H}) \to \mathbf{G}(\mathbf{B}H)$ 经由子对象 $\mathsf{Inj}(H,\mathbf{G}) \subset \overline{\mathbf{G}(\mathbf{B}H)}$分解，其次证明所得映射 $\mathsf{Spec}(\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Phi H}) \to \mathsf{Inj}(\widehat{H}, \mathbf{G})$ 是一个等价。这两个陈述成立，当且仅当沿任意映射族 $\{\mathsf{Spec}\ \mathsf{B}_i \to \mathsf{Spec}\ \mathsf{A}\}$ 拉回后仍成立，其中$\coprod_i |\mathsf{Spec}\ \mathsf{B}_i| \to |\mathsf{Spec}\ \mathsf{A}|$是满射，且函子 $\mathsf{B}_i \otimes_{\mathsf{A}} (-)\colon \mathsf{Mod}_{\mathsf{A}} \to \mathsf{Mod}_{\mathsf{B}_i}$联合保守。由于

$$\mathsf{B} \otimes_{\mathsf{A}} \underline{\mathsf{A}}_{\mathbf{G}}^{\Phi H} \simeq \underline{\mathsf{B}}_{\mathbf{G}}^{\Phi H}, \qquad \operatorname{Spec} \mathsf{B} \times_{\operatorname{Spec} \mathsf{A}} \operatorname{Inj}(\widehat{H}, \mathbf{G}) \simeq \operatorname{Inj}(\widehat{H}, \operatorname{Spec} \mathsf{B} \times_{\operatorname{Spec} \mathsf{A}} \mathbf{G})$$

对于任意 A-代数 B，我们因此可将问题归结为 A 是 p-完备或有理的，且 π_0A 是一个局部环的情形。经过可能需要的进一步忠实平坦扩张后，我们可以假设 $\mathbf{G} = \mathbf{G}_p^\circ \oplus \Lambda$，其中某个余格为 Λ（若 A 有理，则$\mathbf{G}_p^\circ = 0$）。

令 V 为一个核为 K的一维复 H-表示。我们声称存在一个可逆元 $\beta_V \in \pi_V^H \mathsf{A}_{\mathbf{G},H}$ 它属于 $\mathsf{A}_{\mathbf{G},H}$ 的 $RU(H)$-分次同伦群。由此，根据引理 5.5.15，若令 $e_V = a_V \beta_V \in \pi_0 \underline{\mathsf{A}}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{B}H}$，则

$$\mathrm{Spec}(e_V^{-1}\underline{\mathsf{A}}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{B}H}) \simeq \mathbf{G}[\widehat{H}] \setminus \mathbf{G}[\widehat{K}].$$

对 $\mathbf{G}[H]$ 取遍 V 的非平凡特征时，将这些子概形取交，我们得到一个等价

$$\mathrm{Spec}(\underline{\mathsf{A}}_{\mathbf{G}}^{\Phi H}) \simeq \mathrm{Spec}(a_{\overline{\rho}_H}^{-1}\underline{\mathsf{A}}_{\mathbf{G}}) \simeq \mathrm{Spec}(\{a_V^{-1}\}\underline{\mathsf{A}}_{\mathbf{G}}) \simeq \mathrm{Spec}(\{e_V^{-1}\}\underline{\mathsf{A}}_{\mathbf{G}}) \simeq \mathrm{Inj}(\widehat{H}, \mathbf{G}), \quad (5.5.16)$$

如所声称。

$\beta_V \in \pi_V^H \mathsf{A}_{\mathbf{G},H}$ 的存在性如下建立。根据上述约化，$\mathbf{G} \simeq \mathbf{G}_p^\circ \oplus \Lambda$。温和理论 $\mathsf{A}^{\mathbf{G}_p^\circ}$ 是与 A 相关的博雷尔理论，因此 Lur19，推论 4.3.4] 中的特征同构具有如下形式

$$\pi_V^H \underline{\mathsf{A}}_{\mathbf{G},H} \cong \prod_{\alpha\colon \widehat{\Lambda} \to H} \mathsf{A}^0(S_{\mathrm{h}H}^{V^{\mathrm{im}(\alpha)}}).$$

根据假设，A 是复周期的。由于 π_0A 是一个局部环，因此我们可以选择 A 的一个周期复定向，从而对空间上的每个复向量丛 ξ，得到一个自然的 Bott 类 $\beta_\xi \in \mathsf{A}^0\mathrm{Th}(\xi)$。特别地，对于每个映射 $\alpha\colon \widehat{\Lambda} \to H$，都有 Bott 类$\beta_{V^{\mathrm{im}(H)}} \in \mathsf{A}^0(S^{V_{\mathrm{im}(\alpha)\,\mathrm{h}H}})$，它们共同给出一个类 $\beta_V \in \pi_V^H \mathsf{A}_{\mathbf{G},H}$。由于 β_V 的构造关于 H是自然的，我们发现乘以 β_V 定义了一个映射

$$\beta_V : \Sigma^{-V} \underline{\mathsf{A}}_{\mathbf{G},H} \to \underline{\mathsf{A}}_{\mathbf{G},H}$$

它在整数分次同伦群上是同构的 π_*^K对所有 $K \subset H$均成立，因此是 H-谱的等价。于是，β_V 是 $\mathsf{A}_{\mathbf{G}中的H}$ $RU(H)$-分次同伦群的单位元，正如所需。

□

以下是定理 5.5.13 的直接推论。

推论 5.5.17。 设 $\mathbf{G}$ 是栈 M上的一个定向 $\mathbf{P}$-可除群。那么，对于任意有限阿贝尔群 H，自然映射

$$\mathrm{Inj}(\widehat{H}, \mathbf{G}) \to \mathsf{M}$$

是仿射的。

证明。 这由等价关系 $\mathrm{Inj}(\widehat{H}, \mathbf{G}) \simeq \Phi^H \mathbf{G}$ as $\Phi^H \mathbf{G} \to \mathsf{M}$ 由构造可知是仿射的。

□

给定高度函数 $\vec{h} \in \{h(p) \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\} : p \in \mathbf{P}\}$，若一个 $\mathbf{P}$-可除群 $\mathbf{G}$具有高度 $\leq \vec{h}$，则称其底层的 p-可除群 $\mathbf{G}_{(p)}$ 对所有素数 p而言，其高度均为 $\leq h(p)$。

推论 5.5.18（蓝移）。设$\mathbf{G}$ 是复$^{\rightarrow}$周期堆栈上一个定向的$\mathbf{P}$-可除群，其高度为 $\leq h$。固定一个有限阿贝尔群 H，并定义 $n(p) = \log_p |H/pH|$。那么复周期堆栈 $\Phi^H\mathbf{G}$ 的高度为 $\leq \vec{h} - \vec{n}$。特别地，若对某个素数 p有 $\Phi^H\mathbf{G} = \emptyset$ *if* $n(p) > h(p)$ 。

证明。此命题在基堆栈上是局部的，因此我们可以将问题化约到$\mathbf{G}$ 是$\mathbf{E}_\infty$ 环 A 上一个定向的$\mathbf{P}$-可除群的情形。由于

$$\operatorname{Spec} \pi_0 \mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Phi H} \simeq \operatorname{Inj}(H^\vee, \mathbf{G}^\heartsuit),$$

其中$\mathbf{G}^\heartsuit$ 是与$\mathbf{G}$相关联的、定义在 $\pi_0\mathsf{A}$ 上的$\mathbf{P}$-可除群，因此推论归结为以下观察：若$\mathbf{G}^\heartsuit$ 是域上的一个常显$\mathbf{P}$-可除群，那么只要对某个素数 p有 $\log_p |H/pH| > \mathrm{ht}(\mathbf{G}^\heartsuit{}_{(p)})^{\text{ét}}$，便有 $\operatorname{Inj}(H^\vee,\mathbf{G}^\heartsuit) = \operatorname{Inj}(H^\vee,(\mathbf{G}^\heartsuit)^{\text{ét}}) = \emptyset$。 □

例 5.5.19。对于固定的素数 p 以及任意 $0 < h < \infty$，任意复周期 $K(h)$-局部$\mathbf{E}_\infty$-环 A 都带有一个典范的定向 Quillen p-可除群 $\mathbf{G}_{\mathsf{A}}^{\mathrm{Q}}$，其高度为$h$；参见 [Lur18b, Ths.4.5.3 & 4.6.16]。由推论 5.5.18 可知，如果 H 是一个有限阿贝尔 p-群，且其 p-秩大于 h，那么 $\Phi^H\mathbf{G}_{\mathsf{A}}^{\mathrm{Q}}$ 为空。特别地，由于整体截面函子

$$\operatorname{QCoh}(\mathbf{G}_{\mathsf{A}}^{\mathrm{Q}}(\mathbf{B}H)) \simeq \operatorname{QCoh}(\operatorname{Spec} \mathsf{A}^{BH}) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Mod}_{\mathsf{A}^{BH}}$$

是一个等价，我们可知

$$\Gamma(\underline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}_{\mathsf{A}}^{\mathrm{Q}}}^{\Phi H}) \simeq \underline{\mathsf{A}}_{\mathbf{G}_{\mathsf{A}}^{\mathrm{Q}}}^{\Phi H} \simeq \mathsf{A}^{\tau H},$$

对于这样的 H，真 *Tate* 构造为零。对于 p-秩至多为 h的有限阿贝尔 p-群，经典结论表明 $\mathsf{A}^{\tau H}$ 非零。结合上述其他消失结果，我们得到由 A 定义的 Borel 等变理论的导出缺陷基。这是对 [MNN19, Pr.5.26] 的一个略微推广，不要求对 A 的系数施加限制；另请参见 [MNN19, Pr.5.36]。

同样的推理也可用于计算$\mathbf{KU}$ 和$\mathbf{KO}$的导出缺陷基。我们的最后一个例子涉及整体拓扑模形式。

例 5.5.20。设 $\mathsf{E} \to \mathsf{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{or}}$ 为普遍定向椭圆曲线，其对应的定向$\mathbf{P}$-可除群为 $\mathsf{E}[\mathbf{P}^\infty]$，如例 5.1.7 所示。定理 5.5.13 随即给出如下同一：

$$\Phi^H \mathcal{E}[\mathbf{P}^\infty] \simeq \operatorname{Inj}(\widehat{H}, \mathcal{E}[\mathbf{P}^\infty])$$

的代数栈；取整体截面后，可得到一个同一性

$$\mathbf{TMF}^{\Phi H} = (\Gamma(\underline{\mathcal{O}}_{\mathcal{E}[\mathbf{P}^\infty]}))^{\Phi H} \simeq \Gamma(\underline{\mathcal{O}}_{\mathcal{E}[\mathbf{P}^\infty]}^{\Phi H}) = \Gamma(\Phi^H \mathcal{E}[\mathbf{P}^\infty]) \simeq \Gamma\operatorname{Inj}(\widehat{H}, \mathcal{E})$$

的 $\mathbf{E}_\infty$ TMF-代数（由注记 5.3.8 得出），因为 $\mathrm{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{or}}$ 是 0-仿射的；参见 [MM15] 或 [BDL25，定理 A]。将 H 的阶求逆后，单射对应于 层结构；以此方式，几何不动点恢复并细化了先前考虑的 TMF 形式。例如，

$$\mathbf{TMF}^{\Phi C_n}[1/n] \simeq \mathrm{TMF}_1(n), \qquad \mathbf{TMF}^{\Phi C_n^2} \simeq \mathrm{TMF}(n), \qquad \mathrm{TMF}^{\Phi C_n^3} \simeq 0.$$

这里，n 在 $\mathbf{TMF}^{\Phi C_n^2}$ 和 $\mathbf{TMF}^{\Phi C_n^3} \simeq 0$ 中已经可逆，见推论 5.5.18。特别地，$\mathbf{TMF}^{\Phi C_n}$ 可视为 $\mathrm{TMF}_1(n)$ 的整数精化；后者在所有整除 n 的素数处高度为 1。与之相反，$\mathrm{TMF}_1(n)$ 在所有整除 n 的素数处高度为 0。要证明这一点，只需证明对每个素数 p，都存在一个映射 $\mathbf{TMF}^{\Phi C_n} \to A$ 到一个 $a K(1)$-局部的 $\mathbf{E}_\infty$ 环 A。事实上，模解释

$$\Phi^{C_n}\mathcal{E}[\mathbf{P}^\infty] = \mathrm{Inj}(\widehat{C_n}, \mathcal{E}[\mathbf{P}^\infty])$$

意味着，对于任何与定向椭圆曲线 E 相关联的椭圆上同调理论 A，只要该曲线 admits a subgroup isomorphic to 常值 $\widehat{\ }$群概形 C_n，就存在一个映射 $\mathbf{TMF}^{\Phi C_n} \to A$。要求 A 是剩余域为 $\kappa = \pi_0 A/\mathfrak{m}$、特征为 p 的完备局部环，并且 E 限制为 κ 上的普通椭圆曲线，即可得到 $K(1)$-局部的例子；例如，对于与超奇异椭圆曲线相关联的 Morava E-理论，可以取$L_{K(1)}E_2$ 的可分闭包 E_2。

参考文献

[AGH25] Fernando Abellán、Andrea Gagna 和 Rune Haugseng。关于（∞,2）-范畴中 Lax 变换与伴随的直化。*Selecta Mathematica,* 新系列，31(4):81，2025年。编号/条目号 85。[AS69] Michael F. Atiyah 和 G. B. Segal。等变 K-理论与完备化。微分几何杂志，3:1–18，1969年。[Bal23] William Balderrama。幂运算的代数理论。拓扑学杂志，16(4):1543–1640，2023年。[BDL25] William Balderrama、Jack Morgan Davies 和 Sil Linskens。复周期几何中的仿射性与重构。预印本，arXiv:2510.26711 [math.AT] (2025)，2025年。[BDL26] William Balderrama、Jack Morgan Davies 和 Sil Linskens。定向椭圆曲线的可分同源与等变椭圆上同调上的几何范数。即将出版，2026年。[BH21] Tom Bachmann 和 Marc Hoyois。动机同伦论中的范数，第425卷。巴黎：法国数学会（SMF），2021年。[BHN+19] Tobias Barthel、Markus Hausmann、Niko Naumann、Thomas Nikolaus、Justin Noel 和 Nathaniel Stapleton。有限阿贝尔群等变同伦范畴的 Balmer 谱。数学发明，216(1):215–240，2019年。

[BM24] Shay Ben-Moshe。跨色同伦论中的高阶半加性。预印本，arXiv:2411.00968 [math.AT](2024)，2024年。[BMS23] Shay Ben-Moshe 和 Tomer M. Schlank。高阶半加性代数 K-理论与红移。《组合数学》，160(2):237–287，2023年。[CD24] Christian Carrick 和 Jack Morgan Davies。素数3处 v_2-周期族中积的非消失性。预印本，arXiv:2410.02564 [math.AT] (2024)，2024年。[CD25] Christian Carrick 和 Jack Morgan Davies。关于高度二稳定茎中的周期族。预印本，arXiv:2506.20507 [math.AT](2025)，2025年。[CHLL25] Bastiaan Cnossen、Rune Haugseng、Tobias Lenz 和 Sil Linskens。同伦交换环与双跨度。《伦敦数学会杂志》，第二辑，111(6):33，2025年。编号/条目号 e70200。[CLL24] Bastiaan Cnossen、Tobias Lenz 和 Sil Linskens。参数化（高阶）半加性与跨度的普适性。预印本，arXiv:2403.07676 [math.AT](2024)，2024年。[CLL25] Bastiaan Cnossen、Tobias Lenz 和 Sil Linskens。部分参数化可呈现性与等变谱的泛性质。《美国数学会汇刊》，378(10):6913–6974，2025年。[Dav23] Jack Morgan Davies。比较温和椭圆上同调与等变椭圆上同调。预印本，arXiv:2311.07958 [math.AT](2023)，2023年。[Dav24] Jack Morgan Davies。拓扑模形式上的 Hecke算子。《高等数学》，452:71，2024年。编号/条目号 109828。[Dav25a] Jack Morgan Davies。在可对偶拓扑模形式上构造并计算 Adams 运算。《文献数学》，30(4):935–979，2025年。[Dav25b] Jack Morgan Davies。关于 Lurie定理及其应用。《数学杂志》，309(2):53，2025年。编号/条目号 24。[DL25] Jack Morgan Davies 和 Sil Linskens。关于导出Tate曲线与全局光滑 Tate K-理论。预印本，arXiv:2503.04494 [math.AT] (2025)，2025年。[GH07] David J. Gepner 和 André Gil Henriques。轨形空间同伦论。预印本，arXiv:math/0701916 [math.AT](2007)，2007年。[GLP24] David Gepner、Sil Linskens 和 Luca Pol。全局2-环与真正精化。预印本，arXiv:2407.05124 [math.AT](2024)，2024年。[GM23] David Gepner 和 Lennart Meier。关于等变拓扑模形式。《组合数学》，159(12):2638–2693，2023年。

[Gro64] A. Grothendieck。《代数几何基础》IV：概形及概形态射的局部研究 I。《高等科学研究所数学出版物》，第 259 页，1964年。[Hah16] Jeremy Hahn。关于 H_∞-环谱的 Bousfield 类。预印本，arXiv:1612.04386 [math.AT](2016)，2016年。[Har20] Yonatan Harpaz。双向性与有限跨度的普适性。《伦敦数学学会会刊》（第 3 辑），121(5):1121–1170，2020年。[HHLN23] Rune Haugseng、Fabian Hebestreit、Sil Linskens 和 Joost Nuiten。双变量纤维化、分解系统与跨度的 ∞-范畴。《Forum Mathematicum Sigma》，11:70，2023年。编号/论文号 e111。[Hin16] Vladimir Hinich。重新审视 Dwyer–Kan 局部化。《同调、同伦及其应用》，18(1):27–48，2016年。[HK82] Koichi Hirata 和 Akira Kono。关于 Bott 同化类。《数学科学研究所出版物》，18:1187–1191，1982年。[HKR00] Michael J. Hopkins、Nicholas J. Kuhn 和 Douglas C. Ravenel。广义群特征与复定向上同调理论。《美国数学会杂志》，13(3):553–594，2000年。[HL13] Michael Hopkins 和 Jacob Lurie。在 $K(n)$-局部稳定同伦范畴中的双向性。可见 https://www.math.ias.edu/~lurie/，2013年。[Hua18] Zhen Huan。拟椭圆上同调 I。《数学进展》，337:107–138，2018年。[HY17] Asaf Horev 和 Lior Yanovski。关于共轭与伴随下降。《拓扑学应用》，232:140–154，2017年。[Len25a] Tobias Lenz。 G-全局同伦论与代数 K-理论。《美国数学会回忆录》第 1545 卷。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2025年。[Len25b] Tobias Lenz。通过谱 Mackey 函子的全局同伦论。预印本，arXiv:2202.07272 [math.AT] (2025)，2025年。[LNP25] Sil Linskens、Denis Nardin 和 Luca Pol。通过部分松弛极限的全局同伦论。《几何与拓扑》，29(3):1345–1440，2025年。[Lur09a] Jacob Lurie。椭圆上同调综述。载于《代数拓扑：2007年 Abel 研讨会》，第四届 Abel 研讨会论文集，挪威奥斯陆，2007年8月5日至10日，第 219–277 页。柏林：施普林格，2009年。[Lur09b] Jacob Lurie。《高阶拓扑斯理论》，第 170 卷。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，2009年。[Lur17] Jacob Lurie。《高阶代数》。可见 https://www.math.ias.edu/~lurie/，2017年9月版本，2017年。

[Lur18a] Jacob Lurie。《椭圆上同调 I：谱阿贝尔簇》。可见 https://www.math.ias.edu/~lurie/，2018年2月版本，2018年。[Lur18b] Jacob Lurie。《椭圆上同调 II：定向》。可见 https://www. math.ias.edu/~lurie/，2018年4月版本，2018年。[Lur18c] Jacob Lurie。《谱代数几何》。可见 https://www.math.ias. edu/~lurie/，2018年2月版本，2018年。[Lur19] Jacob Lurie。《椭圆上同调 III：温和上同调》。可见 https://www.math.ias.edu/~lurie/，2019年7月版本，2019年。[Mei22] Lennart Meier。带层结构的拓扑模形式：分解与对偶。《美国数学会汇刊》，375(2):1305–1355，2022年。[MM15] Akhil Mathew 和 Lennart Meier。仿射性与色同伦论。《拓扑学杂志》，8(2):476–528，2015年。[MNN19] Akhil Mathew、Niko Naumann 和 Justin Noel。导出诱导与限制理论。《几何与拓扑》，23(2):541–636，2019年。[MW22] Louis Martini 和 Sebastian Wolf。内部高阶范畴论中的可表示性与 topos。预印本，arXiv:2209.05103 [math.CT] (2022)，2022年。[Nik16] Thomas Nikolaus。稳定 ∞-运算子与乘法 Yoneda 引理，2016年。可见 arXiv: 1608.02901。[NS18] Thomas Nikolaus 和 Peter Scholze。关于拓扑循环上同调。《数学学报》，221(2):203–409，2018年。[PLL25] Phil Pützstück、Tobias Lenz 和 Sil Linskens。等变同伦论中的范数，2025年。可见 arXiv: 2503.02839。[Sch18] S. Schwede。《全局同伦论》。剑桥大学出版社，2018年。[Sch20] Stefan Schwede。轨形空间、正交空间与泛紧李群。《数学杂志》，294(1-2):71–107，2020年。[Sch22] Stefan Schwede。全局代数 K-理论。《拓扑学杂志》，15(3):1325–1454，2022年。[Seg68] Graeme Segal。等变 K 理论。《高等科学研究所数学出版物》，34:129–151，1968年。[tD79] Tammo tom Dieck。《变换群与表示论》，《数学讲义》第 766 卷。施普林格，柏林，1979年。