arXiv:2603.17870v1 [math.RA] 18 Mar 2026

关于二次左 Bol 代数的评述

A.Nourou Issa*D´epartement de Math´ematiques*
Universit´e d'Abomey-Calavi 01 BP 4521 Cotonou 01,
贝宁 *woraniss@yahoo.fr*

摘要

本文探讨二次（左）Bol 代数的概念，并给出若干二次 Bol 代数的例子。我们指出，唯一的二维实二次 Bol 代数是二次李三系。本文还研究 Bol 代数的对偶表示，特别关注二次 Bol 代数的余伴随表示，并引入二次 Bol 代数的 T^*-扩张概念。

关键词：二次代数；对偶表示； T^*-扩张。

美国数学学会数学主题分类：17B05, 17B30, 17D99

1 引言

众所周知，光滑（或解析）环路是李群的一种非结合推广，其切结构为李代数。因此，许多数学家都在探讨某些局部光滑环路适用的切代数问题（即建立一种一般的非结合李理论）。解决这一问题的首次尝试似乎是由 M. A. Akivis 作出的 [3]，他引入了 W-代数（现称为 Akivis 代数 [9]）这一概念，将其作为局部三网的切代数。十年后，L. V. Sabinin 和 P. O. Mikheev [30] 引入了超代数这一类（现称为 Sabinin 代数），作为 Akivis 代数的一种广义推广，最终解决了将李理论扩展到光滑环路的问题。关于 Sabinin 代数的现代论述，可参阅[22, 23, 26, 34, 35]。

应当指出，推广李理论的最初探索与某些类型的光滑环路有关，例如 Moufang 环路。A. I. Maltsev 的开创性论文 [20] 引入了 Moufang-李代数这一类（现称 Maltsev 代数 [31]），并将其视为局部光滑 Moufang 环路的切代数。L. V. Sabinin 和 P. O. Mikheev 推广了 E. Cartan 对李群微分几何的研究，考察了光滑Bol环路的微分几何，由此提出了 Bol 代数的概念，将其视为局部光滑Bol环路的切代数（[29, 21]）。自 Bol 代数问世以来，与李-山口代数（即广义李三系 [38] 或李三代数 [12]）相比，专门研究 Bol 代数的论文相对较少。Bol 代数的可解性、半单性以及二次结构由 E. N. Kuzmin 和 O. Zaidi 提出并

进行了研究，见 [17]。关于迄今为止对 Bol 代数的其他研究课题，可参见 [1, 4, 6, 8, 10, 25, 42]。

对于给定的左 Bol 代数，文献 [10] 中定义了表示。本文为二次左 Bol 代数定义余伴随表示，并进一步利用其余伴随表示构造二次左Bol代数链。本文还尝试研究（不一定是二次的）左 Bol 代数的对偶表示。我们引入二次左 Bol 代数的 T^*-扩张这一概念。

本文的组织结构如下。第2节回顾 Bol 代数的一些基本概念和重要结果，给出二次左 Bol 代数的例子，并考察由 Bol 代数上的二次结构诱导的对称双线性形式。第3节研究 Bol 代数（无论是否为二次）的对偶表示。对于二次 Bol 代数，文献 [10] 中定义的表示自然会诱导出余伴随表示；而对于一般 Bol 代数 T （即不一定是二次的），对偶表示的概念则须满足一些条件（我们仍不清楚，是否可以通过对对偶表示映射另行作出某种特定定义，从而避免诉诸这些条件）。第4节针对给定的二次 Bol 代数，定义其 T^*-扩张，将其作为李三系中相应概念的推广 [18]。

本文中，除非另有说明，所有向量空间和代数都是 $\mathbb{R}$上的有限维空间。

2 定义、例子与诱导的双线性形式

本节回顾 Bol 代数的一些基本概念和构造，包括 [17] 中右 Bol 代数的不变双线性形式概念。接下来，根据李三系中左不变条件与右不变条件的等价性，给出二次（左）Bol 代数的定义。文中给出了若干二次 Bol 代数的例子。我们证明，除二维李三系外，不存在任何二维二次实 Bol 代数。最后，研究由给定 Bol 代数上的二次结构所诱导的对称双线性形式。

定义 2.1. ([21, 29])。左 Bol 代数是一个三元组 $(T, *, [\![,,]\!])$，由一个向量空间 T、一个二元运算 $*\colon T\times T\to T$和一个三元运算 $[\![,,]\!]\colon T\times T\times T\to T$组成，并满足以下恒等式：

(T01) $x*y=-y*x$、(T02) $[\![x,y,z]\!]=-[\![y,x,z]\!]$、(T1) $[\![x,y,z]\!]+[\![y,z,x]\!]+[\![z,x,y]\!]=0$、(T2) $[\![u,v,[\![x,y,z]\!]]\!]=[\![[\![u,v,x]\!],y,z]\!]+[\![x,[\![u,v,y]\!],z]\!]+[\![x,y,[\![u,v,z]\!]]\!]$、(T3) $[\![u,v,x*y]\!]=[\![u,v,x]\!]*y+x*[\![u,v,y]\!]+[\![x,y,u*v]\!]-xy*uv$对所有 u、v、 x、 y、 $z\in T$均成立，其中 $xy*uv:=(x*y)*(u*v)$。

上面给出的定义是左 Bol 代数的定义。令 $x\cdot y:=-x*y$ and$\langle z,\ x,\ y\rangle:=-[\![x,y,z]\!]$，便得到一个右 Bol 代数（$T$，$\cdot$，$\langle,\ \rangle$）。在 [17] 中只考虑了右Bol代数。本文中，Bol 代数始终指左 Bol 代数。

注 2.2。 恒等式 (T02)、(T1) 和 (T2) 定义了一个李三系 $(T,\ [\![,,]\!])$。因此，Bol 代数可视为带有一个额外二元运算的李三系

满足 (T01) 和 (T3) 的运算。

例 2.3。 在 [17] 实二维右 Bol 代数的分类中，给出了相应的分类结果。由此分类可得下表

$e_1 * e_2 = -e_2$, $[\![e_1, e_2, e_1]\!] = e_2$, $[\![e_1, e_2, e_2]\!] = -e_1$定义了一个实二维左 Bol 代数（$T$， $*$， $[\![,,]\!]$），其基为 $\{e_1, e_2\}$。

事实上， [17] 中的分类可改写为以下关于实二维左 Bol 代数的形式。

定理 2.1. *([17]).* 每个定义在 $\mathbb{R}$ 上的二维左 *Bol* 代数（$T, *, [\![,,]\!]$）都有一个典范基 $\{e_1, e_2\}$，使得（$T, *, [\![,,]\!]$）属于以下类型之一：

I. $e_1 * e_2 = 0$， $[\![e_1, e_2, e_1]\!] = \varepsilon_2 e_2$， $[\![e_1, e_2, e_2]\!] = -\varepsilon_1 e_1$，

其中 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0), (\pm 1, 0), (1, \pm 1)$ 或 $(-1, -1)$；

II.(i) $e_1 * e_2 = -e_2$, $[\![e_1, e_2, e_1]\!] = \beta e_2$, $[\![e_1, e_2, e_2]\!] = -\varepsilon e_1$，

其中 $\varepsilon = 0$ 或 ± 1；

(ii) $e_1 * e_2 = -e_2$, $[\![e_1, e_2, e_1]\!] = e_1$, $[\![e_1, e_2, e_2]\!] = -e_2$.

显然，I 型代数是实二维李三系。文献 [37] 对 $\mathbb{C}$ 上的二维李三系进行了分类。

例 2.4. 一个 *Maltsev* 代数 [20] 是一个有序对 $(M, *)$，由向量空间 M和二元运算 $*$：$M \times M \to M$ 构成，满足

$x * y = -y * x$,

$xy * xz = (xy * z) * x + (yz * x) * x + (zx * x) * y$

对所有 $x, y, z \in M$ 均成立。关于 Maltsev 代数代数理论的早期论文见 [20, 15, 31, 39, 40, 19, 16]，而半单 Maltsev 代数则在 [5, 19, 27] 中进行了研究。Maltsev 代数与三元代数（分别为二元-三元代数）之间的联系最早见于 [19] （分别为 [39, 40]）。

若在 $(M, *)$ 上定义三元运算

$$\langle x, y, z\rangle = 2xy * z - yz * x - zx * y \tag{2.1}$$

$\forall x, y, z \in M$，则 $(M, \langle,,\rangle)$ 是一个李三系 ([19])，并且根据 [21] 可知，$(M, *, [\![,,]\!])$ 是一个左 Bol 代数（与 $(M, *)$ 相关联的 Bol 代数），其中$[\![x, y, z]\!] := \frac{1}{3}\langle x, y, z\rangle$。

给定一个 Bol 代数 $(T, *, [\![,,]\!])$，设 $b\colon T \times T \to \mathbb{R}$ 是一个对称双线性型。对于三元组 $(T, *, [\![,,]\!])$，我们将考虑以下条件：

$$b(x * y, z) = b(x, y * z), \tag{2.2}$$

$$b([\![x, y, z]\!], u) = b([\![z, u, x]\!], y), \tag{2.3}$$

$$b([\![x, y, z]\!], u) = -b(z, [\![x, y, u]\!]) \tag{2.4}$$

对所有 u、 x、 y、 $z \in T$。通常，条件（2.2）称为关于（T、 $*$）的结合条件，而条件（2.3）（分别为（2.4））称为关于（右（分别为左）不变条件，即关于（T、 $[\![,,]\!]$）的不变条件。

在 [36] 中，二次李三系最初被定义为一个李三系（T、$[\![,,]\!]$）以及一个满足条件（2.3）和（2.4）的对称双线性型 b。后来，二次（即可度量化）李三系在 [41] 中被定义为满足右不变条件（2.3）的李三系（另见 [18]）。由 [12] 和 [14] 可知，条件（2.3）和（2.4）实际上等价（（2.3）推出（2.4）这一点最早见于 [12]；关于李三系上 Killing 型的情形，另见 [28] ）。为求完整，并鉴于这一结果在本文研究框架中的重要性，我们给出如下详细证明。

引理 2.2. 在李三系 $(T,\ [\![,,]\!])$ 中，条件 *(2.3)* 与 *(2.4*等价。

证明。 首先假设 (2.3)。我们有

$$\begin{aligned} b([\![x,y,z]\!],u) &= b([\![z,u,x]\!],y) \text{ (see (2.3))} \\ &= -b([\![u,z,x]\!],y) \\ &= -b([\![x,y,u]\!],z) \text{ (by (2.3))} \end{aligned}$$

因此得到 (2.4)（另见 [41] 以及 3.3) 于 [12]）。

反过来，假设 (2.4)，并令 $K(x,\ y,\ z,\ u) := b([\![x,y,z]\!],\ u)$。那么

$$K(x,y,z,u) = -K(y,x,z,u) \tag{2.5}$$

于是，根据 (2.4) 以及 b 的对称性，

$$K(x,y,z,u) = -K(x,y,u,z). \tag{2.6}$$

另一方面，(T1) 蕴含

$$K(x,y,z,u) + K(y,z,x,u) + K(z,x,y,u) = 0. \tag{2.7}$$

根据（2.5）-（2.7），引理 12.4（第一章）给出

$$K(x,y,z,u) = K(z,u,x,y). \tag{2.8}$$

因此

$$\begin{aligned} 0 &= b([\![x,y,z]\!],u) + b(z,[\![x,y,u]\!]) \text{ (see (2.4))} \\ &= b([\![z,u,x]\!],y) + b(z,[\![x,y,u]\!]) \text{ (by (2.8))} \\ &= -b([\![u,z,x]\!],u) + b([\![x,y,u]\!],z) \end{aligned}$$

于是我们得到（2.3）（另见命题 1）。 □

注意，这里我们对（，，，）的表达式与不同，因为我们研究的是李三系，而不是中所研究的李-山口代数。（2.4）条件在中用于处理伪欧几里得（即二次）李三系，并在中用于二次李-山口代数的定义，而（2.3）则用于和。

一个 Maltsev 代数（M，$*$）连同一个满足（2.2）的对称双线性型 b 被称为二次 Maltsev 代数。回顾一下，二次 Maltsev 代数过去在 [24]中被称为“拟经典” Maltsev 代数。

引理 2.3。 设 $(M、*、b)$ 是一个二次 *Maltsev* 代数，设 $(M、\langle、\ 、\ \rangle、b)$ 是与 $(M、*)$ 相关联的李三系。那么，$(M、\langle、\ \rangle、b)$ 是一个二次李三系。

证明。 见 [2]。 □

鉴于上文的引理 2.2 ，下面我们给出二次左 Bol 代数一个更精确（在某种意义上）的定义。

定义 2.5。 二次 Bol 代数是一个二元组 $(T,\ b)$，由一个左 Bol 代数 $(T,\ *,\ [\![,,]\!])$ 及其上的非退化对称双线性形式组成，并满足 (2.2) 以及等价条件 (2.3) 或 (2.4) 之一；此时，b 称为在 T上不变。

在 $(T,*,[\![,,]\!])$ 上满足 (2.2) 和 (2.3) 的一个对称双线性型的例子，是在 [17] 中以类似于 [12] 中李 - 山口代数的方式定义的 $(T,*,[\![,,]\!])$ 上的 Killing 形式 κ。接下来，我们将引入右 Bol 代数上的不变（即结合）双线性形式的概念 ([17])，作为 κ 的推广。在 [17] 中，标准包络李代数 $\mathfrak{g}$ （见 [21]）的可解性和半单性根据 κ 加以刻画；此外，还定义了 T 的 Killing 根基（K-根基），并证明了 T 是 K-可解的当且仅当 $\mathfrak{g}$ 可解，而 T 是 κ-半单的当且仅当 κ 非退化。

例 2.6. 设 $(M,*,b)$ 是一个二次 Maltsev 代数。由上面的引理 2.3 可知，b 在 $(M,*)$ 中的不变性会导出相关李三系 $(M,\langle,,\rangle)$ 中 b 的不变性，其中 $\langle,,\rangle$ 定义如 (2.1)。因此，注 2.2 和例 2.4 表明，$(M,*,b)$ 会在相关 Bol 代数 $(M,*,[\![,,]\!])$ 上导出一个二次结构。

作为一个应用，可以考虑特征为零的域上的所谓“约化” Maltsev 代数（参见 [24]）。众所周知，这些代数是二次的（即准经典的），因此根据前面的讨论，它们相关的 Bol 代数也是二次的。

另一个应用是考虑一个半单 Maltsev 代数 M_0 ([27, 5]) 及其 Killing 形式 β。于是 β 是不变且非退化的（ [31]），因此 $(M_0,\ \beta)$ 导出一个二次 Bol 代数。

例 2.7。 设 A 是一个替代代数，A^- 是它的交换子代数。则 A^- 是一个 Maltsev 代数（[20]）。若 A 在特征为 $\neq 2$ 的域上是半单的，则根据其 Killing 形式 κ （[32]），A 是二次的；而 [2] 中的一个结果表明，$(A^-,\ \kappa)$ 也是一个二次 Maltsev 代数。因此，上面的例 2.6 表明，与 A^- 相关联的 Bol 代数是二次的。

下面的例子和结果表明，在 $\mathbb{R}$ 上，唯一的二维二次 Bol 代数是二次 Lie 三重系统。

例 2.8。 设 $(T,[\![,,]\!])$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的二维李三系，其基为 $\{e_1,e_2\}$ ，乘法表为 $[\![e_1,e_2,e_1]\!]=e_1$, $[\![e_1,e_2,e_2]\!]=-e_2$。在 T 上定义双线性对称型 b，令 $b(e_1,e_1)=0=b(e_2,e_2)$，$b(e_1,e_2)=\alpha\neq 0$。则 (T,b) 是二次的。

定理 2.4。 不存在任何带有非零二元运算的实二维 *Bol* 代数 $(T, *, [\![,,]\!])$ 上的二次结构。

证明。 我们必须考虑定理2.1中的 II 型代数。我们有

$$b(e_2,\ e_1) = b(-e_1 * e_2,\ e_1) = -b(e_1,\ e_2 * e_1) = -b(e_1,\ e_2) = -b(e_2,\ e_1)$$

使得 $b(e_2,\ e_1) = 0$，并且 $b(e_2,\ e_2) = b(-e_1 * e_2,\ e_2) = -b(e_1,\ e_2 * e_2) = 0$。

因此 $b(e_2,\ T) = 0$，我们得出结论： b 是退化的。 □

定义 2.9。 ([21, 29])。设 $(T,\ *,\ [\![,,]\!])$ 是一个 Bol 代数。称线性映射 $\Pi\colon T \to T$为伴随元为 $\chi \in T$的伪导子，若对所有 $x,\ y,\ z \in T$，

$$\Pi(x * y) = \Pi(x) * y + x * \Pi(y) + [\![x, y, \chi]\!] - (x * y) * \chi,$$
$$\Pi([\![x, y, z]\!]) = [\![\Pi(x)\ y, z]\!] + [\![x, \Pi(y)\ z]\!] + [\![x, y, \Pi(z)]\!].$$

在 [21] 中证明了，由定义中所有 Π 组成的集合 $pder(T)$是一个向量空间，而且还是一个李代数。数对（$\Pi,\ \chi$）的集合 $pder(T)$同样构成一个李代数。若考虑映射 $L(u,\ v),\ u,\ v \in T$，其定义为 $L(u,\ v)(w) := [\![u, v, w]\!],\ \forall w \in T$，那么根据（T2）和（T3），$L(u,\ v)$是一个伴随元为 $u * v$的伪导子。若记 $\mathfrak{h}$ 为所有 $u,\ v \in T$对应的数对（$L(u,\ v)\ u * v$）的集合，那么 $\mathfrak{h}$ 是 $pder(T)$的一个李子代数。另一方面，直和 $T \dotplus pder(T)$是一个李代数（[21]），因此 $\mathfrak{g} := T \dotplus \mathfrak{h}$ 是 $T \dotplus pder(T)$的一个李子代数，称为 T的标准包络李代数。

对于 [13]中的李-山口代数以及 [41], 中的李三系，可以证明， T 上的非退化不变对称双线性型 b 唯一地扩张为 $\mathfrak{g}$ 上的形式 β，其中 $\mathfrak{g}$ 是 T的标准包络李代数。事实上，在 $\mathfrak{g}$ 上定义形式 β 如下：

$$\beta|_T := b, \beta(T,\ \mathfrak{h}) = 0 = \beta(\mathfrak{h},\ T), \beta(L(u,\ v)\ L(x,\ y)) := b(L(u,\ v)(x)\ y),$$

对所有 $u,\ v,\ x,\ y \in T$以及 β，由 b的双线性可将其扩张到整个 $\mathfrak{h}$。我们有

$$\begin{aligned}
\beta(L(u,v), L(x,y)) &= b([\![u, v, x]\!], y) \\
&= b(u, [\![y, x, v]\!]) \text{ (by (2.3))} \\
&= -b(\alpha(x,y)(v), u) \\
&= -\beta(L(x,y), L(v,u)) \\
&= \beta(L(x,y), L(u,v))
\end{aligned}$$

因此， β 是对称的。接下来，如 [13]（定理的证明）或 [41]（引理 3.2、引理 3.3 和定理 3.4）中所示，可以证明 β 在 $\mathfrak{g}$ 上定义良好且不变，并且 β 非退化当且仅当 b非退化。

定义2.10。 设 (T, b) 是一个二次 Bol 代数。若元素 $f \in End(T)$ 满足：对所有 $x, y \in T$，有 $b(f(x)\ y) = b(x, f(y))$（分别有 $b(f(x)\ y) = -b(x, f(y))$），则称其为 b-对称（分别称为 b-斜对称）。

命题 2.5。 设 (T, b) 是一个二次 *Bol* 代数。对于一个$(\Pi, \chi) \in pder(T)$，定义映射 $\phi(\Pi): T \times T \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\phi(\Pi)(x, y) = b(\Pi(x), y) + b(x, \Pi(y)) \tag{2.9}$$

对所有 $x, y \in T$ 均成立。因此，$\phi(\Pi)$ 是对称双线性形式，且 $\phi(\Pi)$ 在 T 上不变（具体而言，$\phi(\Pi)$ 满足 *(2.2)*），当且仅当映射 $\mathcal{R}_\chi(w) := R(w, \chi) - r(\chi)r(w)$ 对所有 $w \in T$ 均为 b-斜对称，其中 $r(x)(y) := y * x$，且对所有 $x, y, z \in T$，$R(x, y)(z) := [\![z, x, y]\!]$。

证明。由于 Π 是线性的，且 b 是对称双线性的，因此 $\phi(\Pi)$ 是对称双线性形式。

对于任意 x，y，z，$u \in T$，有

$$\begin{aligned}\phi(\Pi)([\![x, y, z]\!], u) &= b(\Pi([\![x, y, z]\!]), u) + b([\![x, y, z]\!], \Pi(u)) \\ &= b([\![\Pi(x), y, z]\!], u) + b([\![x, \Pi(y), z]\!], u) \\ &\quad + b([\![x, y, \Pi(z)]\!], u) - b(z, [\![x, y, \Pi(u)]\!])\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}-\phi(\Pi)(z, [\![x, y, u]\!]) &:= -b(\Pi(z), [\![x, y, u]\!]) - b(z, \Pi([\![x, y, u]\!])) \\ &= b(u, [\![x, y, \Pi(z)]\!]) - b(z, [\![\Pi(x), y, u]\!]) \\ &\quad - b(z, [\![x, \Pi(y), u]\!]) - b(z, [\![x, y, \Pi(u)]\!]) \\ &\quad \text{(by (2.4) and the fact that } b \text{ is symmetric and } \Pi \text{ is} \\ &\quad \text{a pseudoderivation)} \\ &= b(u, [\![x, y, \Pi(z)]\!]) + b([\![\Pi(x), y, z]\!], u) \\ &\quad + b([\![x, \Pi(y), z]\!], u) - b(z, [\![x, y, \Pi(u)]\!]) \text{ (by (2.4))} \\ &= b([\![\Pi(x), y, z]\!], u) + b([\![x, \Pi(y), z]\!], u) \\ &\quad + b([\![x, y, \Pi(z)]\!], u) - b(z, [\![x, y, \Pi(u)]\!])\end{aligned}$$

因此，$\phi(\Pi)$ 满足 (2.4)。

对于任意 x，y，$z \in T$，利用 (2.9)、(2.2)、(2.3) 以及 是伪导子这一事实，可得

$$\begin{aligned}\phi(\Pi)(x * y, z) &= b(\Pi(x) * y, z) + b(x * \Pi(y), z) \\ &\quad + b([\![x, y, \chi]\!], z) - b(xy * \chi, z) - b(y, x * \Pi(z))\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}-\phi(\Pi)(y, x * z) &= b(z, x * \Pi(y)) - b(y, \Pi(x) * z) \\ &\quad - b(y, x * \Pi(z)) - b(y, [\![x, z, \chi]\!]) + b(y, xz * \chi)\end{aligned}$$

使得 ϕ Π(满足2.2 当且仅当

$$b([\![x, y, \chi]\!] - xy * \chi, z) = -b(y, [\![x, z, \chi]\!] - xz * \chi)$$

i.e.

$$b(\mathcal{R}_\chi(x)(z), y) = -b(\mathcal{R}_\chi(x)(y), z).$$

证明至此完成。 □

F由前述结果的证明，下面的推论显然成立。

推论 2.6. 设 $(T, [\![,,]\!], b)$ 是一个二次李三系。对于 $(T, [\![,,]\!])$ 的导子 D，定义映射 $\phi(D): T \times T \to \mathbb{R}$，其定义为：对所有 $x, y \in T$，$\phi(D)(x, y) = b(D(x)\ y) + b(x, D(y))$。则 $\phi(D)$ 是一个双线性、对称且不变的形式。□

在 $pder(T)$ 中，用 $pder_a(T)$ 表示由 (T, b) 的所有 b-斜对称伪导子张成的子空间，用 $\mathfrak{B}_s(T)$ 表示由 T 上所有对称双线性形式张成的向量空间。于是，作为向量空间，$pder(T)$ 与 $pder_a(T)$ 和 $\mathfrak{B}_s(T)$ 中的一个子空间的直和同构。具体而言，有如下结果。

命题 2.7。设 (T, b) 是一个二次 *Bol* 代数。则短正合序列 ce

$$0 \longrightarrow pder_a(T) \xrightarrow{i} pder(T) \xrightarrow{\phi} Im\phi \longrightarrow 0$$

是正合的，其中 i 表示包含映射，且 $\phi(\Pi)$ 由 (2.9) 定义，对所有 $(\Pi, \chi) \in pder(T)$。

证明。由 (2.9) 以及 b-斜对称伪导子的定义即可得到证明。□

注 2.11。若（T，b）化为二次李三系（T，$[\![,,]\!]$，b），则命题2.7 推出以下正合列

$$0 \longrightarrow Der_a(T) \xrightarrow{i} Der(T) \xrightarrow{\phi} Im\phi \longrightarrow 0,$$

其中，对所有 $D \in Der(T)$，$\phi(D)(x, y) = b(D(x)\ y) + b(x, D(y))$，因此 $Der(T) \cong Der_a(T) \oplus Im\phi$。注意，在此情形下，根据推论 2.6，$\phi(D)(x, y)$是不变的。

3 对偶表示

本节中，给定 Bol 代数的伴随表示 T，当 T 上定义了二次结构时，我们定义其对偶表示。对于未必是二次的 Bol 代数T，除非满足某些条件，否则这组三个对偶映射一般不构成 [10] 中所定义的表示，尽管它仍是底层李三系的一个表示。

在 [10] 中，Bol 代数（T，$*$，$[\![,,]\!]$）的表示被定义为四元组（V，ρ，θ，D_θ），其中 V是一个向量空间，$\rho: T \to End(V)$ 是一个线性映射，θ，$D_\theta: T \times T \to End(V)$ 是满足以下条件的双线性映射

(R1) $D_\theta(x, y) + \theta(x, y) - \theta(y, x) = 0$, (R21) $[D_\theta(x, y)\ \rho(z)] = \rho([\![x, y, z]\!]) + \rho(x * y)\rho(z) - \theta(z, x * y)$, (R22) $\theta(x, y * z) = \rho(y)\theta(x, z) - \rho(z)\theta(x, y) - (D_\theta(y, z) - \rho(y * z))\rho(x)$, (R31) $[D_\theta(u, v)\ D_\theta(x, y)] = D_\theta([\![u, v, x]\!], y) + D_\theta(x, [\![u, v, y]\!])$, (R32) $[D_\theta(u, v)\ \theta(x, y)] = \theta([\![u, v, x]\!], y) + \theta(x, [\![u, v, y]\!])$, (R33) $\theta(u, [\![x, y, z]\!]) = \theta(y, z)\theta(u, x) - \theta(x, z)\theta(u, y) + D_\theta(x, y)\theta(u, z)$

for 所有 u，v，x，y，$z \in T$。

由 (R1) 可知，我们可以用 (V, ρ, θ) 代替 $(V, \rho, \theta, D_\theta)$。注意，若对所有 $u, v, w \in T$，令 $l(u)(v) := u * v$，$R(u, v)(w) := [\![w, u, v]\!]$，且 $L(u, v)(w) := [\![u, v, w]\!]$，那么映射 $l: T \to End(T)$、$u \mapsto l(u)$、$R: T \times T \to End(T)$、$(u, v) \mapsto R(u, v)$ 以及 $L: T \times T \to End(T)$、$(u, v) \mapsto L(u, v)$ 定义了 $(T, *, [\![,,]\!])$ 的一个表示 (T, l, R, L)，称为 $(T, *, [\![,,]\!])$ 的伴随表示。映射 $r(u)$ 定义为 $r(u)(v) := v * u, u, v \in T$；另见命题 2.5。

现在令 V^* 为 V 的对偶空间，并定义线性映射 $\rho^*: T \to End(V^*)$ 和双线性映射 θ^*, $D_\theta^*: T \times T \to End(V^*)$，如下：

$$\rho^*(x)(f) := -f\rho(x), \tag{3.1}$$

$$\theta^*(x,y)(f) := -f\theta(x,y), \tag{3.2}$$

$$D_\theta^*(x,y)(f) := -fD_\theta(x,y). \tag{3.3}$$

接下来，如 [33], 定义交换算子 $\iota: \otimes^2 T \to T$ 为 $\iota(x \otimes y) := y \otimes x, \ \forall x \otimes y \in \otimes^2 T$。于是可以观察到 $D_\theta^*(x, y) = D_{-\theta^*\iota}(x, y), \ \forall x, y \in T$。

引理 3.1。 设(V, θ, D_θ)是李三系$(T, [\![,,]\!])$的一个表示。则$(V^*, -\theta^*\iota)$是$(T, [\![,,]\!])$的一个表示。

证明。 利用 (R1)、(R31)-(R33) 进行直接计算即可证明，因为 (V, θ, D_θ) 是 $(T, [\![,,]\!])$ 的一个表示。另见 [18] 第3节，或 [33]中关于李-山口代数的命题 2.12。□

定理 3.2. 设(T, l, R, L)是二次 *Bol* 代数(T, b)的伴随表示。则$(T^*, l^*, -R^*\iota, L_{-R^*\iota})$是$(T, b)$的一个表示（即$(T, l, R, L)$的对偶表示，其中$(T, b)$的伴随表示称为$(T, b)$的余伴随表示）。

证明。 由引理 3.1 可知，$(-R^*\iota, L_{-R^*\iota})$ 满足 (R1)、(R31)-(R33)（注意，此处不需要 T 的二次结构）。接下来只需验证三元组 $(l^*, -R^*\iota, L_{-R^*\iota})$ 满足 (R21) 和 (R22)。

我们有

$0 = b(([L(x,y)\ l(z)] - l([\![x,y,z]\!]) - l(x*y)l(z) + R(z,x*y))(v)\ u)$ （由 (R21)）$= b$
$([\![x,y,z*v]\!] - z*[\![x,y,v]\!] - [\![x,y,z]\!]*v - (x*y)*(z*v) + [\![v,z,x*y]\!], u) = -b($
$z*v, [\![x,y,u]\!]) + b([\![x,y,v]\!], z*u) + b(v, [\![x,y,z]\!]*u) - b(v*z, (x*y)*u) + b(v,$
$[\![u,x*y,z]\!]$ （由 (2.2)、(2.3) 和 (2.4)）$= b(v, z*[\![x,y,u]\!]) - b(v, [\![x,y,z*u]\!]) + b$
$(v, [\![x,y,z]\!]*u) - b(v, z*((x*y)*u)) + b(v, [\![u,x*y,z]\!]$ （由 (2.2) 和 (2.4)）$= b(v, l$
$(z)L(x,y)(u) - L(x,y)l(z)(u) + l([\![x,y,z]\!])(u) - l(z)l(x*y)(u) + R(x*y,z)(u))$

因此，b 的非退化性蕴含

$fl(z)L(x,y) - fL(x,y)l(z) + fl([\![x,y,z]\!]) - fl(z)l(x*y) + fR(x*y,z)$
$= 0, \forall x, y, z \in T$且 $f \in T^*$即由 (3.1)-(3.3)，$[L_{-R^*\iota}(x,y)\ l^*(z)] - l^*($
$[\![x,y,z]\!]) - l^*(x*y)l^*(z) + (-R^*\iota)(z, x*y) = 0$。因此，$(T^*, l^*, -R^*\iota,$
$L_{-R^*\iota})$ 验证了 (2.1)。

同样，由等式

$0 = b(R(x,\ y*z)(v) - l(y)R(x,\ z)(v) + l(z)R(x,\ y)(v)$
$+L(y,z)l(x)(v) - l(y*z)l(x)(v)\ u)$ （由 (R22) 得），

在适用时使用 (2.2)、(2.3) 或 (2.4))，接着利用 b 的非退化性，可得$fR(y*z, x) + fR(z, x)$
$l(y) - fR(y,x)l(z) + fl(x)L(y,z) - fl(x)l(y*z) = 0, \forall x, y, z \in T$和 $f \in T^*$即

$(-R^*\iota)(x,\ y*z) - l^*(y)(-R^*\iota)(x,\ z) + l^*(z)(-R^*\iota)(x,\ y) + L_{-R^*\iota}(y,\ z)l^*($
$x) - l^*(y*z)l^*(x) = 0$

对于 $(l^*,\ -R^*\iota,\ L_{-R^*\iota})$，它是 (R22)。证明至此完成。 □

定义 3.1. 设 T 为一个 Bol 代数，(V_1,ρ_1,θ_1) 和 (V_2,ρ_2,θ_2) 是 T 的两个表示。从 (V_1,ρ_1,θ_1) 到 (V_2,ρ_2,θ_2) 的同态是一个线性映射 $\psi\colon V_1\to V_2$，满足 $\psi(\rho_1(x)(v))=\rho_2(x)(\psi(v))$，$\psi(\theta_1(x,y)(v))=\theta_2(x,y)(\psi(v))$

对所有 $x,\ y\in T$、$v\in V_1$ 均成立。若此外 ψ 是一个双射，则称 $(V_1,\ \rho_1,\ \theta_1)$ 和 $(V_2,\ \rho_2,\ \theta_2)$ 同构。

命题 3.3. 设 (T,b) 是一个二次 *Bol* 代数。则伴随表示(T,l,R,L) 与 $(T^*,l^*,-R^*\iota,L_{-R^*\iota})$ 的余伴随表示同构，其中 (T,b)。

证明。 令 $b^\sharp\colon T\to T^*,\ x\mapsto b^\sharp(x)$ 为由 $b^\sharp(x)(y):=b(x,y)$ 对所有$x,y\in T$定义的线性映射。那么，$\forall u,z\in T$,

$b^\sharp(l(x)(z))(u)=b^\sharp(x*z)(u)=-b(z*x,u)=-b(z,$

$x*u)=-b^\sharp(z)(l(x)(u))=l^*(x)(b^\sharp(z)(u))$

(我们使用了 (2.2))，并且

$b^\sharp(R(x,y)(z))(u)=b^\sharp([\![z,x,y]\!])(u)=b([\![z,x,y]\!],u)=b(z,[\![u,y,x]\!])$

$=b^\sharp(z)(R(y,x)(u))=-R^*\iota(x,y)(b^\sharp(z)(u))$

(我们使用了 2.3)。证明完毕。 f □

对于给定的 Bol 代数 $(T,*,[\![,,]\!])$（不一定是二次的），其表示为 (V,ρ,θ,D_θ)，且映射 ρ^*、θ^* 和 D_θ^* 如 (3.1)-(3.3) 所定义，四元组 $(V^*,\rho^*,-\theta^*\iota,D_{-\theta^*\iota})$ 一般而言不是 $(T,*,[\![,,]\!])$ 的对偶表示（具体来说，$(\rho^*,-\theta^*\iota,D_{-\theta^*\iota})$ 不满足 (R21) 和 (R22)）；这与关于伴随表示的二次 Bol 代数情形形成对比（见上文定理 3.2；我们想知道，是否可以通过对三元组 $(\rho^*,\theta^*,D_\theta^*)$ 采用另一种定义，为 T 构造出对偶表示）。然而，只要对 (ρ,θ) 这一对施加一些附加条件，我们就能得到 $(T,*,[\![,,]\!])$ 的对偶表示。

定理 3.4。 设 T 是一个 *Bol* 代数，且 $(V、\ \rho、\ \theta、\ D_\theta)$ 是其表示。那么，当且仅当以下条件成立时，$(V^*、\ \rho^*、\ -\theta^*\iota、\ D_{-\theta^*\iota})$ 是 T 的一个表示：

$$\rho(u*v)\rho(w)+\rho(w)\rho(u*v)=\theta(u*v,w)+\theta(w,u*v), \tag{3.4}$$

$$\theta(u,v)\rho(w)-\rho(w)\theta(v,u)=0 \tag{3.5}$$

对所有 $u、\ v、\ w\in T$。

证明。 由引理 3.1，(R1)、(R31)-(R33) 对（$-\theta^*\iota,\ D_{-\theta^*\iota}$）自然成立。只需验证，当且仅当（3.4）和（3.5）成立时，(R21) 和 (R22) 对（$\rho^*,\ -\theta^*\iota,\ D_{-\theta^*\iota}$）成立。

对于 (R21)，我们有，$\forall x,y,z\in T$, $([D_{-\theta^*\iota}(x,y)\ \rho^*(z)]-\rho^*([\![x,y,z]\!])-\rho^*(x*y)\rho^*(z)+(-\theta^*\iota)(z,x*y))(f)=f\rho(z)D_\theta(x,y)-fD_\theta(x,y)\rho(z)+f\rho([\![x,y,z]\!])-f\rho(z)\rho(x*y)+f\theta(x*y,z)=f(-[D_\theta(x,y)\ \rho(z)]+\rho([\![x,y,z]\!])-\rho(z)\rho(x*y)+\theta(x*y,z))=f(-[D_\theta(x,y)\ \rho(z)]+\rho([\![x,y,z]\!])+\rho(x*y)\rho(z)+\theta(z,x*y))$（当且仅当 (3.4) 成立时）

$= 0$ (by (R21))
so (R21) holds for $(\rho^*, -\theta^*\iota, D_{-\theta^*\iota})$.
For (R22) we have, $\forall x, y, z \in T$,
$(\rho^*(y)(-\theta^*\iota)(x,z) - \rho^*(z)(-\theta^*\iota)(x,y) - D_{-\theta^*\iota}(y,z)\rho^*(x)$
$+\rho^*(y*z)\rho^*(x) - (-\theta^*\iota)(x, y*z))(f)$
$= -f(\theta(z,x)\rho(y) - \theta(y,x)\rho(z) + \rho(x)D_\theta(y,z) - \rho(x)\rho(y*z) + \theta(y*z,x))$
$= -f(\rho(y)\theta(x,z) - \rho(z)\theta(x,y) + D_\theta(z,y)\rho(x) - \rho(z*y)\rho(x) + \theta(x,z*y))$ (if and o仅当
(3.4)一个d3(5)dn ld)
$= -f(\rho(y)\theta(x,z) - \rho(z)\theta(x,y) - (D_\theta(y,z) - \rho(y*z))\rho(x) - \theta(x,y*z))$
$= 0$ (by (R22))
因此 (R22) 对 $(\rho^*, -\theta^*\iota, D_{-\theta^*\iota})$ 成立，证明完毕。 □

4 T^*-扩张二次 Bol 代数

本节将定义给定二次 Bol 代数的 T^*-扩张，作为李三系 T^*-扩张（[18]）的推广。借助这一概念，从一个二次 Bol 代数出发，可以得到一条二次 Bol 代数链。

给定一个 Bol 代数 $(T, *, [\![,,]\!])$ 及其表示 $(V, \rho, \theta, D_\theta)$，文献 [10] 给出了相对于 $(V, \rho, \theta, D_\theta)$，定义在 $(T, *, [\![,,]\!])$ 上的 $(2,3)$-余循环 (ν, ω) 的概念。特别地，三线性映射 ω 满足

$$\omega(x,y,z) = -\omega(y,x,z), \tag{4.1}$$

$$\circlearrowleft_{x,y,z} \ \omega(x,y,z) = 0. \tag{4.2}$$

定理 4.1。 设 $(T, *, [\![,,]\!], b)$ 是一个二次 *Bol* 代数，且 (ν, ω) 是关于其余伴随表示$(T^*, l^*, -R^*\iota, L_{-R^*\iota})$的$(2,3)$-余循环，定义向量空间 $T \oplus T^*$ 上的二元运算 $*_\nu$ 和三元运算 $[\![,,]\!]_\omega$ 如下

$$(x+f) *_\nu (y+g) = x*y + \nu(x,y) + fl(y) - gl(x), \tag{4.3}$$

$$[\![x+f, y+g, z+h]\!]_\omega = [\![x,y,z]\!] + \omega(x,y,z) + fR(z,y) - gR(z,x) + hL(y,x) \tag{4.4}$$

对所有 $x, y, z \in T$和 $f, g, h \in T^*$均成立。于是 $T_{\nu,\omega} := (T \oplus T^*, *_\nu, [\![,,]\!]_\omega)$ 是一个 *Bol* 代数。此外，由定义的形式 $b : (T \oplus T^*) \times (T \oplus T^*) \to \mathbb{R}$
$\tilde{b}|_T = b$,
$\tilde{b}(x+f, y+g) = f(y) + g(x)$
对所有是不变的$x, y \in T$和当且仅当T^*，均为双线性、对称且非退化。该形式

$$\nu(x,y)(z) = \nu(y,z)(x), \tag{4.5}$$

$$\omega(x,y,z)(u) = \omega(u,z,y)(x). \tag{4.6}$$

证明。 利用（3.1）-（3.3），将（4.3）和（4.4）写为
$(x+f) *_\nu (y+g) = x*y + \nu(x,y) - l^*(y)f + l^*(x)g$
and
$[\![x+f, y+g, z+h]\!]_\omega = [\![x,y,z]\!] + \omega(x,y,z) + (-R^*\iota)(y,z)f$
$-(-R^*\iota)(x,z)g + L_{-R^*\iota}(x,y)h$
分别。于是，由于 $(T^*、\ l^*、\ -R^*\iota、\ L_{-R^*\iota})$ 是 $(T、\ b)$ 的一个表示（见定理3.2），[10] 中的定理 3.4 推出$T_{\nu、\omega}$ 是一个 Bol 代数。

~ ~显然， b 是双线性且对称的。现在设 $y+g \in T \oplus T^*$ 与所有 $x+f \in T \oplus T^*$ 都 b-正交。那么 $0 = b(x+f,\ y+g) = f(y) + g(x)$，这意味着 $f(y) = 0 = g(x)$，因此 $y = 0$ 且 $g = 0$。所以 b 是非退化的。

还需验证其不变性 $\tilde{b}$。我们有

$\tilde{b}((x+f) *_\nu (y+g), z+h) = \nu(x,y)(z) + f(y*z) - g(x*z) + h(x*y)$

and

$\tilde{b}(x+f、(y+g) *_\nu (z+h)) = f(y*z) + \nu(y,\ z)(x) + g(z*x) - h(y*x)$。

~因此， b 满足（2.2）当且仅当 ν 满足（4.5）。同理，~

$b([\![x+f, y+g, z+h]\!]_\omega,\ u+k) = \omega(x,\ y,\ z)(u)$

$+f([\![u,z,y]\!]) - g([\![u,z,x]\!]) + h([\![y,x,u]\!]) + k([\![x,y,z]\!])$

and

$\tilde{b}(x+f, [\![u+k, z+h, y+g]\!]_\omega) = f([\![u,z,y]\!]) + \omega(u,z,y)(x)$

$+k([\![x,y,z]\!]) - h([\![x,y,u]\!]) + g([\![z,u,x]\!])$

使得 b满足（2.3）当且仅当 ω 验证（4.6）。 □

~**定义 4.1.** 定理 4.1 中构造的二次 Bol 代数（$T_\nu,\ \omega,\ b$）称为二次 Bol 代数（$T,\ b$）关于 (2, 3)-余循环（$\nu,\ \omega$）的T^*-扩张。若（$\nu,\ \omega$）$=$（0，0）~，则（$T_{0,\ 0},\ b$）称为（$T,\ b$）的平凡扩张。

~**注 4.2.** 若 $x*y = 0,\ \forall x,\ y \in T$且 $\nu = 0$，则（$T_{0,\ \omega},\ b$）是由 3-余循环 ω按 [18] 定义的李三系（$T,\ [\![,,]\!]$的。定理4.1 还说明，任意二次 Bol 代数都可以得到其维数加倍的平凡扩张，因此可得到一条二次 Bol 代数链。

在上面的定理 4.1的证明中，我们使用了右不变条件（2.3）。若使用左不变条件 2.4 ，则必须计算 $(\ \ )$

$\tilde{b}(z+y, [\![x+f, y+g, u+k]\!]_\omega) = -h([\![x,y,u]\!]) - \omega(x,y,u)(z)$

$+f([\![u,\ z,\ ]\!])y\ \ - g([\![u,z,x]\!]) + k([\![x,y,z]\!])$

~因此 b满足（2.4）当且仅当

$$\omega(x,y,z)(u) = -\omega(x,y,u)(z). \tag{4.7}$$

注意，这个条件（4.7）与李-山口代数的情形相同（见 [11]中的（3.6）。

命题 4.2。 条件（4.6）和（4.7）等价。

证明。 首先假设（4.6）。则

$\omega(x,y,z)(u) = \omega(u,z,y)(x) = -\omega(z,u,y)(x) = -\omega(x,y,u)(z)$（由（4.6））可得（4.7）。

反过来，我们按如下步骤进行。由（4.7），交换 x 和 u，y 和 z，可得

$$\omega(u,z,y)(x) = -\omega(u,z,x)(y). \tag{4.8}$$

将（4.8）逐项从（4.7）中相减，可得

$\omega(x,y,z)(u) - \omega(u,z,y)(x) = -\omega(x,y,u)(z) + \omega(u,z,x)(y) = \omega(y,u,x)(z) - \omega(u,$

$x,z)(y) + \omega(u,z,x)(y)$（由 (4.2) 和 (4.7) 得）$= \omega(y,u,x)(z) - \omega(u,x,z)(y) - \omega$

$(z,x,u)(y) - \omega(x,u,z)(y)$（由 (4.2) 得）

$= \omega(y,u,x)(z) - \omega(z,x,u)(y)$（由 (4.1) 得）$= \omega(u,y,z)(x) - \omega(x,z,y)(u)$（由 (4.1) 和 (4.7) 得）。因此我们得到

$$\omega(x,y,z)(u) - \omega(u,z,y)(x) = \omega(u,y,z)(x) - \omega(x,z,y)(u). \tag{4.9}$$

另一方面，将 (4.2) 应用于 (4.7) 的两边，得到
$-\omega(y,z,x)(u) - \omega(z,x,y)(u) = \omega(y,u,x)(z) + \omega(u,x,y)(z)$ 即，
由 (4.7) 和 (4.1)，
$\omega(y,z,u)(x) + \omega(x,z,y)(u) = \omega(u,y,z)(x) + \omega(u,x,y)(z)$。因此
我们有

$$\begin{aligned}
&\omega(x,z,y)(u) - \omega(u,y,z)(x) = \omega(u,x,y)(z) - \omega(y,z,u)(x)\\
&= -\omega(x,y,u)(z) - \omega(y,u,x)(z) + \omega(z,u,y)(x) + \omega(u,y,z)(x) \text{ (by (4.2))}\\
&= -\omega(x,y,u)(z) - \omega(y,u,x)(z) + \omega(z,u,y)(x) - \omega(u,y,x)(z) \text{ (by (4.7))}\\
&= \omega(x,y,z)(u) - \omega(u,z,y)(x) \text{ (by (4.1) and (4.7))}
\end{aligned}$$

因此

$$-(\omega(u,y,z)(x) - \omega(x,z,y)(u)) = \omega(x,y,z)(u) - \omega(u,z,y)(x). \tag{4.10}$$

由 (4.9) 和 (4.10) 可得 $\omega(x,y,z)(u) - \omega(u,z,y)(x) = 0$ 这就是 (4.6)。证明完毕。 □

注 4.3。 (i) (4.6) 与 (4.7) 的等价性在某种意义上印证了 (2.3) 与 (2.4) 的等价性。关于 T^*-扩张的二次 Bol 代数的更多性质，可以参照 [18]对李三系的研究。

（ii）鉴于前面的讨论（见第3节），对 T^*-扩张的研究不一定要限于二次 Bol 代数，但应限于其表示满足（3.4）和（3.5）的情形。

参考文献

[1]H. Abdelwahab、A. J. Calderon 和 A. Fern´andez Ouaridi，幂零 Bol 代数的分类，《代数通信》**53** (2025年) 1330-1343，https://doi.org/10.1080/00927872.2024.2408404.[2] M. Ait Ben Haddou 和 S. Boulmane，伪欧几里得替代代数，《代数通信》**44**(2016) 5199-5222，https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1149187.[3] M. A. Akivis，多维三网的局部代数，《西伯利亚数学杂志》**17**(1976) 3-8.[4] T. B. Bouetou 和 P. O. Mikheev，关于 Bol 代数的同位，载于《网与拟群》，特维尔国立大学，特维尔，(1994) 第47-49页。[5] A. Elduque，关于半单 Malcev 代数，《美国数学会会刊》**107** (1989) 73-82.[6] V. T. Filippov，齐性 Bol 代数，《西伯利亚数学杂志》**35** (1994) 818-825.[7] S. Helgason，《微分几何与对称空间》(学术出版社，1962)。

[8] I. R. Hentzel 和 L. A. Peresi，Bol 代数的特殊恒等式，《线性代数及其应用》436 (2012年) 2315-2330，https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.09.021。[9] K.-H. Hofmann 和 K. Strambach，局部解析环路的李基本定理，《太平洋数学杂志》123 (1986年) 301-327。[10] A. N. Issa，Bol 代数的表示与 (2,3)-上同调及其应用，《李理论杂志》34 (2024年) 171-198。[11] A. N. Issa，关于二次左Leibniz代数及相关的李-山口结构，《数学研究与应用》45 (2025年) 152-162，https://doi.10.3770/j.issn.2095-2651.2025.02.002。[12] M. Kikkawa，关于李三代数的Killing-Ricci形式，《太平洋数学杂志》96 (1981年) 153-161。[13] M. Kikkawa，关于李三代数不变形式的评注，《岛根大学理学部纪要》16 (1982年) 23-27。[14] M. Kikkawa，齐性系统上的自然约化度量，Nederal. Acad. Wetensch. Proc. A 87 (1984年) 203-208。[15] E. Kleinfeld，关于 Moufang-Lie 环的一则注记，《美国数学会会刊》 9 (1958年) 72-74。[16] E. N. Kuzmin，Malcev 代数及其表示，《代数与逻辑》7 (1970年) 233-244。[17] E. N. Kuzmin 和 O. Zaidi，可解 Bol 代数与半单Bol代数，《代数与逻辑》32 (1993年) 361-371。[18] J. Lin、Y. Wang 和 S. Deng，李三系的 T^*-扩张，《线性代数及其应用》431 (2009年) 2071-2083，https://doi.10.1016/j.laa.2009.07.001。.[19] O. Loos，Malcev 代数与李三系之间的一种关系，《太平洋数学杂志》18 (1966年) 553-562。[20] A.. I. Maltsev，解析环路，《数学文集》78 (1955年) 569-578。[21]P. O. Mikheev，光滑Bol环路的几何，博士论文，友谊大学（莫斯科，1986年）。[22]J. Mostovoy 和 J. M. P´erez-Izquierdo，形式乘法、分布双代数与非结合李理论，《变换群》15 (2010年) 625-653，https://doi.org/10.1007/s00031-010-9106-5。[23] J. Mostovoy、J. M. P´erez-Izquierdo 和 I. P. Shestakov，非结合李理论中的 Hopf代数，《数学科学通报》4 (2014年) 129-173，https://doi.org/10.1007/s13373-013-0049-8。[24] H. C. Myung，Malcev容许代数，(Birkh¨auser，1986年)。[25] J. M. P´erez-Izquierdo，Bol 代数的包络代数，《代数杂志》284 (2005年) 480-493，https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2004.09.038。

[26] J. M. P´erez-Izquierdo，《代数、超代数、非结合双代数与环路》，《数学进展》208（2007）834-876，https://doi.org/10.1016/j.aim.2006.004.001.[27] T. S. Ravisankar，论 Malcev代数，《太平洋数学杂志》42（1972）227-234.[28] T. S. Ravisankar，关于李三系的一些评注，《熊本大学理学杂志（数学）》11（1974）1-8.[29] L. V. Sabinin 和 P. O. Mikheev，解析 Bol 环路，载于《网与拟群》，加里宁国立大学，加里宁，（1987）第102-109页.[30] L. V. Sabinin 和 P. O. Mikheev，论局部解析环路的无穷小理论，《苏联科学院通报》297（1987），801-804.[31] A. A. Sagle，Malcev代数，《美国数学会汇刊》101（1961）426-458.[32] R. D. Schafer，《非结合代数导论》，（学术出版社，1966）。[33]Y. Sheng 和 J. Zhao，李-山口代数上的相对 Rota-Baxter 算子与辛结构，《代数通信》50（2022）4056-4073，https://doi.org/10.1080/00927872.2022.2057517.[34] I. P. Shestakov 和 U. U. Umirbaev，自由 Akivis 代数、本原元与超代数，《代数杂志》250（2002）533-548，https://doi.org/10.1006/jabr:2001.9123.[35] G. Weingart，论 Sabinin 代数的公理，《几何进展》16（2016）205-229，https://doi.org/101515/advgeom-2016-0003.[36] J. Wolf，论绝对平行性的几何与分类 II，《微分几何杂志》7（1972/1973）19-44.[37] K. Yamaguti，论全测地空间的代数（李三系），《广岛大学理学杂志 A 辑》21（1957-1958）107-113.[38] K. Yamaguti，论李三系及其推广，《广岛大学理学杂志 A 辑》21（1957-1958）155–160.[39] K. Yamaguti，Malcev代数札记，《熊本大学理学杂志 A 辑》5（1962）203-207.[40] K. Yamaguti，论 Malcev代数理论，《熊本大学理学杂志 A 辑》6（1963）9-45.[41] Z. X. Zhang、Y. Q. Shi 和 L. N. Zhao，李三系上的不变对称双线性型，《代数通信》30（2002）5563-5573，https://doi.org/10.1081/AGB-120015671.[42] J. Zhang 和 T. Zhang，Bol 代数的非阿贝尔扩张与 Wells 正合列，arXiv:2510.*23612 [*math.RA*]*（2025年10月29日）。