arXiv:2603.17913v1 [math.CA] 18 Mar 2026

区间均匀电荷场中的加权平衡

JAMES KESSINGER* 和 ANDREI MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN

Abstract. 我们研究区间 $[-1,\ 1]$ 上的对数平衡问题，其中存在一个由支集位于同一区间上的均匀背景电荷产生的外场。对于实参数 τ，外场取为单位勒贝格测度的对数势的 τ 倍；对于 τ的所有取值，我们显式确定唯一的平衡测度 μ_τ、其支集、柯西变换、对数势（若存在闭式表达式）以及平衡常数。

我们证明，该模型呈现出三个不同的区间，各区间由 τ的临界值分隔。当 τ充分小时，平衡支集是一个严格包含于 $[-1,\ 1]$中的对称子区间。对于中间范围的参数，支集与整个区间重合，且平衡测度是罗宾分布与勒贝格测度的显式线性组合。当 τ足够大时，支集变为非连通，由两个对称的外侧区间组成。在每个区间内，我们运用复解析方法和奇异积分技术，求得平衡测度、其柯西变换、势（若存在闭式表达式）以及平衡常数。这些结果完整展示了支集拓扑以及平衡密度／平衡常数随 τ 变化的情形，包括单切、全支集和双切配置之间的转变。

1. Introduction

势理论中的经典平衡问题，旨在寻找紧集上使对数能量最小的概率测度。这个基础问题与逼近论、随机矩阵理论、正交多项式以及数学和物理学的其他领域有着深刻联系。

对于定义在 $[-1,1]$上的（带符号）博雷尔测度 σ，我们记

$$V^\sigma(z) := \int \log \frac{1}{|x-z|}\, d\sigma(x)$$

其对数势。一个众所周知的事实是

$$d\eta(x) := \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad x \in (-1,1),$$

Date：2026年3月19日。2020 *Mathematics Subject Classification.*主要分类：31A15；次要分类：30C85、30E15、30E20、30F10、33E05、42A50、44A15。*Key words and phrases.* 平衡测度；外场；对数势；柯西变换；黎曼曲面；积分表示。 * 通讯作者。

是 $[-1,\ 1]$ 上所有概率（单位且为正）测度中的能量极小化者

$$\mathcal{I}[\sigma] := \int V^\sigma \, d\sigma.$$

测度 η 称为 $[-1,\ 1]$ 的平衡（或罗宾）分布，其特征是它的势在区间上取常数值。

在存在外场（或背景势） $\varphi:\ [-1,\ 1] \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 的情况下，平衡测度 μ 是 $[-1,\ 1]$ 上使总能量最小的概率测度

$$\mathcal{I}_\varphi[\sigma] := \int \left(V^\sigma + 2\varphi\right) \, d\sigma = \mathcal{I}[\sigma] + 2\int \varphi \, d\sigma$$

在 $[-1,\ 1]$ 上所有概率测度中，参见例如 [4]。若 φ 在 $(-1,\ 1)$ 上光滑，则测度 μ 由以下平衡条件刻画：存在常数 $\omega \in \mathbb{R}$，使得

$$V^\mu(x) + \varphi(x) \begin{cases} = \omega, & x \in \operatorname{supp}(\mu), \\ \geqslant \omega, & x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

确定 $\operatorname{supp}(\mu)$（它可能是 $[-1,\ 1]$ 的真子集）是核心难题。

本文考虑外场 φ 本身为对数势的情形，具体而言，它是由区间 $[-1,\ 1]$ 上的勒贝格测度所生成的势的倍数。更确切地说，设 λ 为 $[-1,\ 1]$ 上的绝对连续测度 $\frac{1}{2}dx$。给定参数 $\tau \in \mathbb{R}$，我们关注 $[-1,\ 1]$ 上满足平衡条件的（唯一）概率测度 μ_τ

$$V^{\mu_\tau}(x) + \tau V^\lambda(x) \begin{cases} = \omega_\tau, & x \in \operatorname{supp}(\mu_\tau), \\ \geqslant \omega_\tau, & x \in [-1, 1]. \end{cases} \tag{1.1}$$

该模型有一种自然的物理解释：平衡测度可以看作是在沿 $[-1, 1]$分布的均匀背景电荷作用下，使能量最小化的电荷分布，其中 τ 控制相互作用的强度和符号。

我们的主要贡献是完整描述所有 τ取值下的 μ_τ、其势 V^{μ_τ}（存在闭解析表达式时）以及平衡常数 ω_τ。分析中的核心工具是 μ_τ的柯西变换，

$$C^{\mu_\tau}(z) := \int \frac{1}{z - x} \, d\mu_\tau(x), \quad z \in \mathbb{C} \backslash \operatorname{supp}(\mu_\tau),$$

它通过索科茨基—普莱梅尔公式刻画平衡密度，也是我们在每个区间中确定的主要对象。

我们证明存在三个不同的区间：

吸引区间（$\tau < -1$）： 支集收缩为一个对称的真子区间，$\operatorname{supp}(\mu_\tau) = [-\beta_\tau, \beta_\tau]$，其中 $0 < \beta_\tau < 1$由 τ显式确定。该测度相对于勒贝格测度绝对连续，其密度包含反三角函数。外场严格凸，使平衡测度集中在远离端点的位置。

中间区间（$-1 \leqslant \tau \leqslant 2/(\pi - 2)$）： 支集是整个区间 $\operatorname{supp}(\mu_\tau) = [-1,\ 1]$，而平衡测度具有非常简洁的形式 $\mu_\tau = (1 + \tau)\eta - \tau\lambda$，即罗宾分布与勒贝格测度的一个显式线性组合。此

区间包括经典情形（$\tau = 0$，其中 $\mu_0 = \eta$），以及同时具有吸引分量和排斥分量的情形。

排斥区间（$\tau > 2/(\pi - 2)$）： 支集变得不连通：现在 $\operatorname{supp}(\mu_\tau) = [-1, -\beta_\tau] \cup [\beta_\tau, 1]$，其中 $\beta_\tau \in (0, 1)$ 被刻画为一个涉及第二类完全椭圆积分的方程的解。外场是凹的，将平衡测度推向 $[-1, 1]$的端点。

由外场 φ 的凸性（参见图1）可立即推出 $\tau < 0$ 的支集是连通的，这是对数势理论中一个一般定理的结果（例如参见 [4,定理 IV.1.10]）。临界值 $\tau = 2/(\pi - 2) \approx 1.753$ 标志着支集从连通到不连通的转变。

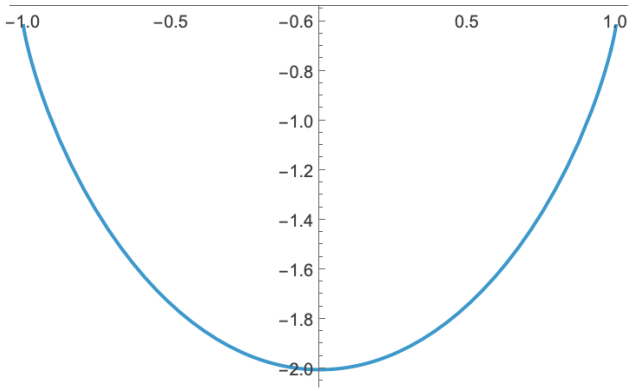


FIGURE 1. $\tau = -2$的外场。

该模型的一个主要动机来自正交多项式理论。考虑关于变权 $e^{-2n\tau V^\lambda(x)}dx$ 在 $[-1, 1]$ 上正交的多项式 $p_n(x) = \kappa_n x^n + \cdots$，即，

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)e^{-2n\tau V^\lambda(x)}dx = \delta_{nm}.$$

根据加权逼近的一般理论（例如参见 [4]），p_n 的归一化零点计数测度在弱-*意义下收敛到平衡测度 μ_τ，当 $n \to \infty$时。因此，本文所识别的三个区域对应着性质迥异的渐近零点分布：当 $\tau < -1$ 时，零点聚集于一个真子区间内，并远离 ± 1；对于中间的 τ，零点填满 $[-1, 1]$，其密度介于反正弦律与均匀分布之间；而当 $\tau > 2/(\pi - 2)$ 时，零点分裂成两组对称的点列，向端点迁移。支集的这种分岔体现了一种相变，这类相变在随机矩阵理论中已有深入研究 [1, 2]，：当矩阵势中的参数越过临界值时，会出现类似的转变——称为“新割线的诞生”或“间隙闭合”——极限谱测度的拓扑也随之改变。临界值 $\tau = 2/(\pi - 2)$ 正是本模型发生此类拓扑变化的精确阈值。在特殊值 $\tau = 0$ 处，外场为零，平衡测度为经典的反正弦分布，从而恢复切比雪夫多项式的零点分布；在 $\tau = -1$ 处，它则化为均匀测度 λ 本身。

我们的分析依赖于复分析技术，包括对柯西变换、边值关系和奇异积分表示的研究。在每个区域中，我们都推导出平衡密度的显式公式或积分表示，并给出相应柯西变换的闭式表达。综合这些结果，我们得以在整个参数范围内统一描述平衡结构，并展示外部强迫如何引起支集的拓扑变化。

本文按三个区域组织。首先讨论全支集情形（第 2 节），其中显式公式由已知平衡测度的线性组合得到。接着，我们利用适当黎曼曲面上的解析延拓和边值方法，分析单切割区域（第 3 节）。最后，在第 4 节中，我们通过奇异积分技术和椭圆型表示研究非连通区域。在这种情形下，平衡常数 ω_τ 可由一个收敛级数求得，其系数满足三项递推关系。每一节最后都会给出平衡测度及其解析变换的显式表达式。

记号约定：全文中，我们用 $\sqrt{\cdot}$ 表示非负实数的正平方根，而 $(\cdot)^{1/2}$ 表示复平方根的主值分支；当自变量为正数时，它与 $\sqrt{\cdot}$一致。此外，除非另有说明，$\arg(z)$ 表示函数在 $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$上的主值分支，使得 $\arg(z)=0$ 对于 $z>0$成立。因此，$\log(z)$ 表示在 $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$上的主值分支，$\log(z)=\ln|z|+i\arg(z)$。

2. Case of the full support: $-1 \leqslant \tau \leqslant 2/(\pi-2)$

我们先考虑 $\operatorname{supp}(\mu_\tau)=[-1,\ 1]$的情形。注意，对于 $\tau=0$, $\mu_0=\eta$，罗宾分布为，因此

$$d\mu_0(x) := \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad x\in(-1,1);$$

众所周知（且易于计算），在这种情况下，

$$V^{\mu_0}(x)=\omega_0=\log(2), \quad x\in[-1,1],$$

and

$$V^{\mu_0}(z)=-\operatorname{Re}\log\left(\frac{\Phi(z)}{2}\right),$$

其中

$$\Phi(z) := z+\left(z^2-1\right)^{1/2}, \quad \Phi:\mathbb{C}\backslash[-1,1]\longrightarrow\{w\in\mathbb{C}:\ |w|>1\}, \tag{2.1}$$

是儒科夫斯基映射的逆映射。

定理 2.1。 对于 $-1\leqslant\tau\leqslant\frac{2}{\pi-2}$, μ_τ, $[-1,1]$ 上的绝对连续测度由下式给出

$$d\mu_\tau(x)=\left(\frac{1+\tau}{\pi\sqrt{1-x^2}}-\frac{\tau}{2}\right)\,dx, \tag{2.2}$$

因此

$$C^{\mu_\tau}(z)=\frac{1+\tau}{\left(z^2-1\right)^{1/2}}-\frac{\tau}{2}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right). \tag{2.3}$$

此外，对于 $z \in \mathbb{C}\backslash[-1、\ 1]$,

$$V^{\mu_\tau}(z) = -(1+\tau)\log\left|\frac{z+\left(z^2-1\right)^{1/2}}{2}\right| - \tau \\ -\frac{\tau}{2}\left(\mathrm{Re}(z)\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + \mathrm{Im}(z)\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - \log|z^2-1|\right),$$

and

$$V^{\mu_\tau}(x) = \frac{\tau}{2}\left[(1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x) - 2\right] + \omega_\tau, \quad x \in [-1,1], \tag{2.4}$$

其中，(1.1) 中的平衡常数为 ω_τ

$$\omega_\tau = (1+\tau)\log(2). \tag{2.5}$$

证明。(2.2)中的测度 μ_τ 为

$$\mu_\tau = (1+\tau)\eta - \tau\lambda.$$

由于 η 和 λ 是概率测度，因此(2.2)是一个单位测度。根据假设，$\tau+1>0$，所以(2.2)右侧密度在 $x=0$ 处取得最小值，为

$$\frac{1+\tau}{\pi} - \frac{\tau}{2},$$

由于 τ的上界，该值非负。因此，(2.2)是 $[-1,1]$上的正测度（因而也是概率测度）。

此外，对于 $x \in [-1,1]$,

$$V^{\mu_\tau}(x) + \varphi(x) = V^{(1+\tau)\eta-\tau\lambda}(x) + \tau V^{\lambda}(x) = (1+\tau)V^{\eta}(x) = (1+\tau)\log(2).$$

这证明了 (2.2) 是平衡测度，并得到了 (2.5) 中的表达式。

最后，(2.3)–(2. 4) 可由已知的关于 λ的柯西变换显式表达式推出,

$$C^{\lambda}(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2}{z-1}\right),$$

其原函数,

$$\begin{aligned} g^{\lambda}(z) &= \int^{z} C^{\lambda}(y)\,dy = \frac{1}{2}(z+1)\log(z+1) - \frac{1}{2}(z-1)\log(z-1) - 1 \\ &= z\,C^{\lambda}(z) + \frac{1}{2}\log(z^2-1) - 1, \end{aligned} \tag{2.6}$$

归一化后使其具有如下展开式

$$g^{\lambda}(z) = \log(z) + \mathcal{O}(z^{-1}), \quad z \to \infty,$$

以及 λ的对数势,

$$V^{\lambda}(z) = -\,\mathrm{Re}\, g^{\lambda}(z),$$

以及 η 的类似函数。 □

3. Connected support (one-cut case): $\tau < -1$

定理 3.1。 对于 $\tau < -1$， μ_τ 是一个绝对连续测度，满足

$$\operatorname{supp}(\mu_\tau) = [-\beta_\tau, \beta_\tau], \quad \beta_\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)^2} \in (0,1), \tag{3.1}$$

由下式给出

$$d\mu_\tau(x) = -\frac{\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\beta_\tau^2}{\beta_\tau^2 - x^2}}\right)\right) dx, \tag{3.2}$$

因此，

$$C^{\mu_\tau}(z) = \tau \log\left(\frac{(z^2-\beta_\tau^2)^{1/2} + \sqrt{1-\beta_\tau^2}}{z+1}\right), \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-\beta_\tau, \beta_\tau]. \tag{3.3}$$

此外，对于 $z \in \mathbb{C}\backslash[-\beta_\tau, \beta_\tau]$,

$$V^{\mu_\tau}(z) = -\operatorname{Re} g^{\mu_\tau}(z),$$

其中

$$g^{\mu_\tau}(z) = zC^{\mu_\tau}(z) + (1+\tau)\log\left(\frac{\beta_\tau}{2}\Phi\left(\frac{z}{\beta_\tau}\right)\right) - \tau\log\left(\frac{(z^2-\beta_\tau^2)^{1/2} + z\sqrt{1-\beta_\tau^2}}{1+\sqrt{1-\beta_\tau^2}}\right) - 1 \tag{3.4}$$

且 Φ 的定义与(2.1)中相同。特别地，对于 $z \in \mathbb{C}\backslash[-\beta_\tau, \beta_\tau]$,

$$V^{\mu_\tau}(z) = -\operatorname{Re}(zC^{\mu_\tau}(z)) - (1+\tau)\log\left|\frac{\beta_\tau}{2}\Phi\left(\frac{z}{\beta_\tau}\right)\right| + \tau\log\left|\frac{(z^2-\beta_\tau^2)^{1/2} + z\sqrt{1-\beta_\tau^2}}{1+\sqrt{1-\beta_\tau^2}}\right| + 1. \tag{3.5}$$

在支集$\operatorname{supp}(\mu_\tau) = [-\beta_\tau$上， $\beta_\tau]$, V^{μ_τ}由同一表达式(2.4)给出，但此时平衡常数 ω_τ 为

$$\omega_\tau = (1+\tau)\log(2) - \log(\beta_\tau) + 1 + \tau - \tau\log\left(1+\sqrt{1-\beta_\tau^2}\right). \tag{3.6}$$

For 平衡测度 μ_τ 的密度在 $\tau = -2$时的图像，见图 2 .

注 3.2. *(i)* 比较表达式 (2.5) 和 (3.6)，我们看到平衡常数ω_τ 在 $\tau = -1$处连续:

$$\lim_{\tau\to -1^-} \omega_\tau = \lim_{\tau \to -1^+} \omega_\tau = 0.$$

这与以下事实一致:

$$\mu_\tau\big|_{\tau=-1^-} = \mu_\tau\big|_{\tau=-1^+} = \lambda.$$

*(ii)*密度 μ_τ' 在支集端点处呈现平方根渐近，对应于标准的“软边缘”行为:

$$\mu_\tau'(x) = \frac{\tau}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{\beta_\tau^2 - x^2}{1-\beta_\tau^2}\right)^{\frac{2n-1}{2}} = \frac{\tau}{\pi}\sqrt{\frac{\beta_\tau^2-x^2}{1-\beta_\tau^2}}\left(1 + \mathcal{O}(|x \mp \beta_\tau|)\right), \quad x \to \pm\beta_\tau.$$

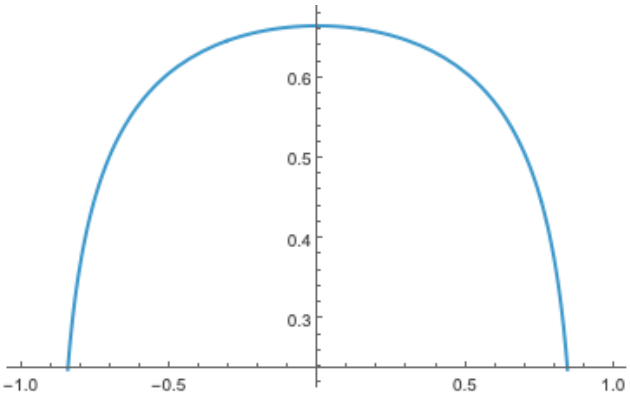


FIGURE 2. 对于 $\tau = -2$，密度为 μ'_τ，其中 $\beta_{-2} = \sqrt{3}/2$。

证明。对于 $\tau < 0$，τV^λ 在 $[-1,1]$ 上向下凸，见图1。根据 $[4,$ 定理 IV.1.10 的 (b)$]$，，supp (μ_τ) 是 $[-1,1]$ 上的一个子区间。由于 φ 是偶函数，supp(μ_τ) 关于原点对称，因此 supp $(\mu_\tau) = [-\beta_\tau, \beta_\tau]$，其中 $\beta_\tau \in [0,1]$ 的值有待确定。

函数 f： $\mathbb{C}\backslash[-1,\ 1] \to \mathbb{C}$ 定义为

$$f(z) := C^{\mu_\tau}(z) + \tau C^\lambda(z) = \int \frac{d\mu_\tau(x)}{z-x} + \tau \int \frac{d\lambda(x)}{z-x}$$

在其定义域上是全纯的（解析且单值），并且

$$f(z) = \frac{1+\tau}{z} + \mathcal{O}(z^{-2}), \quad z \to \infty. \tag{3.7}$$

由于 根据定义， f 在 $\mathbb{R}\backslash[-1,\ 1]$上取实值，对称性原理表明 t

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]. \tag{3.8}$$

我们的目标是利用下文列出的性质，得到 f 的显式表达式，并以此求出 μ_τ。

根据第 IV 章，特别是定理 IV.2.2 和 IV.3.1$]$，， μ_τ 的密度在其支集上局部 Lipschitz 连续，因此， f 从上半平面／下半平面在 $(-1,\ 1)$ 上具有连续的非切向边界值 $f_\pm$。由于 C^{μ_τ} 在 $\mathbb{C}\backslash[-\beta_\tau,\ \beta_\tau]$ 上解析，根据 Sokhotski—Plemelj 公式，

$$f_+(x) - f_-(x) = -\tau\pi i, \quad x \in (-1,-\beta_\tau) \cup (\beta_\tau, 1). \tag{3.9}$$

总势

$$V^{\mu_\tau}(x) + \tau V^\lambda(x) = -\operatorname{Re}\int^z f(s)ds \tag{3.10}$$

在 $(-1,1)$ 上连续（见 $[4,$ 第四节2$]$），而平衡条件 (1.1) 表明它在 $[-\beta_\tau, \beta_\tau]$ 上为常数。结合 (3.8)，我们得出

$$f_+(x) + f_-(x) = 2\operatorname{Re} f_\pm(x) = 0, \quad x \in (-\beta_\tau, \beta_\tau). \tag{3.11}$$

受 (1.1) 中不等式的启发，我们作出如下试探假设：总势在 $(\beta_\tau, 1)$ 上严格递增（相应地，在 $(-1, -\beta_\tau)$ 上严格递减）。根据公式 (3.10)，这意味着

$$\operatorname{Re} f_\pm(x) \geqslant 0 \text{ on } (-1, -\beta_\tau), \quad \text{and} \quad \operatorname{Re} f_\pm(x) \leqslant 0 \text{ on } (\beta_\tau, 1). \tag{3.12}$$

为了求出 f 的显式表达式，我们通过取两份沿 $[-\beta_\tau, \beta_\tau]$ 切开的黎曼球面副本（$\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$），并沿切口以相反的定向将它们粘合，构造一个亏格为 0 的二层黎曼曲面 $\mathcal{R}$，见图 3。我们将用 ζ 表示 $\mathcal{R}$ 上的局部坐标。记 $L = [-1, 1]\backslash[-\beta_\tau, \beta_\tau]$，并用 $\ell_1 \subset \mathcal{R}_1$ 和 $\ell_2 \subset \mathcal{R}_2$ 分别表示该集合在层 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$ 上的提升，其中 $\ell := \ell_1 \cup \ell_2$。

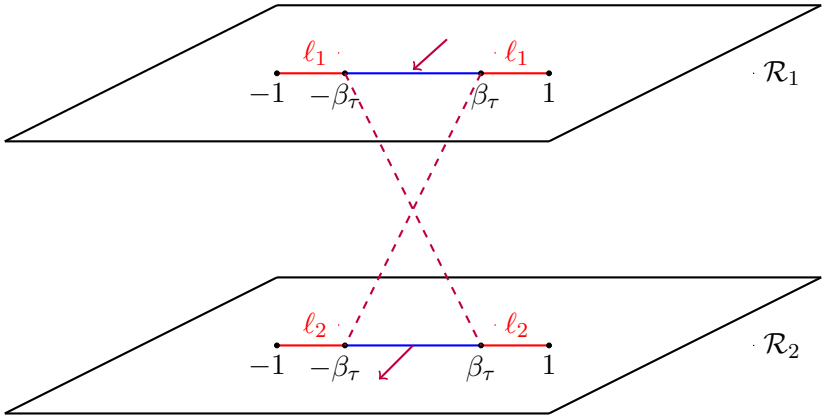


FIGURE 3. 黎曼曲面 $\mathcal{R}$.

我们在 $\mathcal{R}\backslash\ell$ 上定义复值函数

$$\mathcal{F}(\zeta) = \begin{cases} f(\zeta), & \zeta \in \mathcal{R}_1\backslash\ell_1, \\ -f(\zeta), & \zeta \in \mathcal{R}_2\backslash\ell_2. \end{cases}$$

条件 (3.11) 保证 $\mathcal{F}$ 在 $(-\beta_\tau, \beta_\tau)$ 上也解析；因此，它在 $\mathcal{R}\backslash\ell$ 上解析。此外，条件 (3.9) 提升到 $\mathcal{R}$ 上后为

$$(\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_-)(\zeta) = -\tau\pi i, \quad \zeta \in \ell_1, \qquad (\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_-)(\zeta) = \tau\pi i, \quad \zeta \in \ell_2. \tag{3.13}$$

采用记号 (2.1)，定义

$$\phi(\zeta) := \begin{cases} \Phi(\zeta/\beta_\tau), & \zeta \in \mathcal{R}_1, \\ 1/\Phi(\zeta/\beta_\tau), & \zeta \in \mathcal{R}_2. \end{cases}$$

由于 $\Phi_-(x)\Phi_+(x) = 1$ 在 $(-1, 1)$ 上，我们看到 ϕ 在整个黎曼曲面 $\mathcal{R}$ 上全局定义且全纯。变换 $z = \phi(\zeta)$ 是 $\mathcal{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 之间的保角双射，使得 $\mathcal{R}_1$（分别为 $\mathcal{R}_2$）的像是单位圆的外部（分别为内部）。值得注意的是

$$\phi(\ell) = \left[-A, -\frac{1}{A}\right] \cup \left[\frac{1}{A}, A\right], \quad A = A(\tau) := \Phi(1/\beta_\tau) = \frac{1}{\beta_\tau} + \frac{1}{\beta_\tau}\sqrt{1-\beta_\tau^2} \geqslant 1. \tag{3.14}$$

ϕ 的逆变换 ϕ^{-1} 是一个在原点处有唯一极点的有理函数:

$$\zeta = \phi^{-1}(z) = \frac{\beta_\tau}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

我们在 $\mathbb{C}$ 上定义 F

$$F(z) = \left(\mathcal{F} \circ \phi^{-1}\right)(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

考虑到 (3.7) 以及

$$\phi^{-1}(z) = \frac{\beta_\tau}{2} z\left(1 + o(1)\right), \quad z \to \infty; \qquad \phi^{-1}(z) = \frac{\beta_\tau}{2z}\left(1 + o(1)\right), \quad z \to 0,$$

我们有

$$F(z) = \frac{1+\tau}{z} \cdot \frac{2}{\beta_\tau}\left(1 + \mathcal{O}(z^{-1})\right), \quad z \to \infty,$$

and

$$F(z) = -(1+\tau) \cdot \frac{2z}{\beta_\tau}\left(1 + \mathcal{O}(z)\right), \quad z \to 0.$$

因此， F 在 $\mathbb{C}\backslash\phi(\ell)$ 上解析，并且由 (3.13) 及 F 的定义可得，

$$F_+(z) - F_-(z) = -\tau\pi i, \quad z \in \phi(\ell).$$

因此，我们 可以利用索科茨基—普列梅利公式，根据其边界条件恢复 F a:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\phi(\ell)} \frac{\left(F_+ - F_-\right)(t)}{t - z}\, dt = -\frac{\tau}{2}\int_{\phi(\ell)} \frac{1}{t - z}\, dt.$$

我们可以显式地对其积分，并通过观察 $F(x) < 0$ （当 $x > A$ 时）来选取适当的对数分支，其中 A 由（3.14）给出。因此,

$$F(z) = -\frac{\tau}{2}\log\left(\frac{(z + 1/A)(z - A)}{(z - 1/A)(z + A)}\right).$$

I通过为 $0 < |a| \leqslant 1$ 引入布拉施克因子，将 F 改写会更方便

$$b(z; a) := \frac{|a|}{a}\frac{a - z}{1 - \bar{a}z},$$

从而

$$F(z) = -\frac{\tau}{2}\log\left(\frac{b(z; -1/A)}{b(z; 1/A)}\right).$$

根据定义,

$$\mathcal{F}(\zeta) = F(\phi(\zeta)) = -\frac{\tau}{2}\log\left(\frac{b\left(\phi(\zeta); -1/A\right)}{b\left(\phi(\zeta); 1/A\right)}\right), \quad \zeta \in \mathcal{R}\backslash\ell.$$

将 ζ 特化为 $\mathcal{R}_1$ ，并利用其中的 $\mathcal{F} = f$ ，可得

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{\tau}{2}\log\left(\frac{(\Phi(z/\beta_\tau) + 1/\Phi(1/\beta_\tau))(\Phi(z/\beta_\tau) - \Phi(1/\beta_\tau))}{(\Phi(z/\beta_\tau) - 1/\Phi(1/\beta_\tau))(\Phi(z/\beta_\tau) + \Phi(1/\beta_\tau))}\right) \\ &= -\frac{\tau}{2}\log\left(\frac{b\left(\Phi(z/\beta_\tau); -1/\Phi(1/\beta_\tau)\right)}{b\left(\Phi(z/\beta_\tau); 1/\Phi(1/\beta_\tau)\right)}\right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

利用式 (3.14) 中 A 的表达式，可将其明确写成 β_τ的形式：

$$f(z) = \frac{\tau}{2}\log\left(\frac{(z^2-\beta_\tau^2)^{1/2}+\sqrt{1-\beta_\tau^2}}{(z^2-\beta_\tau^2)^{1/2}-\sqrt{1-\beta_\tau^2}}\right) = \frac{\tau}{2}\log\left(1+\frac{2\sqrt{1-\beta_\tau^2}}{(z^2-\beta_\tau^2)^{1/2}-\sqrt{1-\beta_\tau^2}}\right), \tag{3.16}$$

这表明，当 $z\to\infty$ 时，

$$f(z) = \frac{\tau\sqrt{1-\beta_\tau^2}}{z} + \mathcal{O}(z^{-2}).$$

Matc将其与所需的行为 (3.7) 相结合，便得到 (3.1) 中 β_τ 的表达式。

注意，根据 (3.15) 中的第一个表达式，对于 $x\in(\beta_\tau,\ 1)$,

$$f_+(x) - f_-(x) = -\frac{\tau}{2}\left(\log_+\left(\Phi(x/\beta_\tau)-\Phi(1/\beta_\tau)\right) - \log_-\left(\Phi(x/\beta_\tau)-\Phi(1/\beta_\tau)\right)\right) = -\tau\pi i,$$

这就是 $(\beta_\tau,\ 1)$ 上的跳跃条件 (3.9)。以类似方式可以证明，在$(-1,\ -\beta_\tau)$ 上也成立相同的跳跃条件。

利用 (3.15) 中的第二个表达式，以及布拉施克乘积 $b(z;a)$ 满足$|b(z;\ a)|=1$（对于 $|z|=1$）这一性质，我们得出，对于 $x\in[-\beta_\tau,\ \beta_\tau]$,

$$f_+(x)+f_-(x) = 2\operatorname{Re} f_\pm(x) = -\tau\log\left|\frac{b\left(\Phi(x/\beta_\tau);-1/\Phi(1/\beta_\tau)\right)}{b\left(\Phi(x/\beta_\tau);1/\Phi(1/\beta_\tau)\right)}\right| = 0,$$

这就得到了（3.11）。

现在我们验证（3.16）满足（3.12）。根据公式（3.16），

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{\tau}{2}\log\left|\frac{(z^2-\beta_\tau^2)^{1/2}+\sqrt{1-\beta_\tau^2}}{(z^2-\beta_\tau^2)^{1/2}-\sqrt{1-\beta_\tau^2}}\right|$$

满足

$$\operatorname{Re} f(z) = -\operatorname{Re} f(-z),$$

因此只需考虑情形ent to consider the case $x\in[\beta_\tau,1]$。注意，对于 $0<a<1$ and $1<z<1/a$,

$$|b(z;-a)| - |b(z;a)| = -2a\,\frac{z^2-1}{1-a^2z^2} < 0,$$

根据（3.15），这证明了

$$\operatorname{Re} f_\pm(x) = -\frac{\tau}{2}\log\left|\frac{b\left(\Phi(x/\beta_\tau);-1/A\right)}{b\left(\Phi(x/\beta_\tau);1/A\right)}\right| < 0, \quad x\in(\beta_\tau,1).$$

根据索科茨基—普列梅利公式，并利用 (3.8) 和 (3.16)，我们得出，对于$x\in(-\beta_\tau,$ $\beta_\tau)$,

$$\begin{aligned}
\mu_\tau'(x) &= -\frac{1}{2\pi i}(C_+^{\mu_\tau}(x) - C_-^{\mu_\tau}(x)) = -\frac{1}{2\pi i}(f_+(x)-f_-(x)) - \tau\left(-\frac{1}{2\pi i}(C_+^{\lambda}(x)-C_-^{\lambda}(x))\right)\\
&= -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im} f_+(x) - \tau\lambda'(x) = -\frac{\tau}{2\pi}\arg\left(\frac{i\sqrt{\beta_\tau^2-x^2}+\sqrt{1-\beta_\tau^2}}{i\sqrt{\beta_\tau^2-x^2}-\sqrt{1-\beta_\tau^2}}\right) - \frac{\tau}{2}\\
&= -\frac{\tau}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\beta_\tau^2}{\beta_\tau^2-x^2}}\right)\right),
\end{aligned}$$

并得到表达式 (3.2)。由于 $\tau < 0$ 和反正切$(\mathbb{R}_+) = (0, \frac{\pi}{2})$，我们可知 μ_τ 是一个正测度。

$C^{\mu_\tau}(z) = f(z) - \tau C^{\lambda}(z)$的解析表达式也可由（3.16）推出:

$$\begin{aligned} C^{\mu_\tau}(z) &= \frac{\tau}{2}\log\left(\frac{(z^2-\beta_\tau^2)^{1/2}+\sqrt{1-\beta_\tau^2}}{(z^2-\beta_\tau^2)^{1/2}-\sqrt{1-\beta_\tau^2}}\right) - \frac{\tau}{2}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \\ &= \tau\log\left(\frac{(z^2-\beta_\tau^2)^{1/2}+\sqrt{1-\beta_\tau^2}}{z+1}\right), \end{aligned}$$

这就是（3.3）的右端。

我们需要求出原函数（“g-函数”），

$$g^{\mu_\tau}(z) = \int^z C^{\mu_\tau}(y)\, dy$$

f的原函数，并将其归一化，使得当 $z \to \infty$时， $g^{\mu_\tau}(z) = \log(z) + \mathcal{O}(z^{-1})$。由于（2.6）已计算出 λ 的此类原函数，我们需要重点求 f的原函数，它可以显式求得:

$$\begin{aligned} \int^z f(y)\, dy = zf(z) + \frac{\tau}{2}\Bigg(&2\sqrt{1-\beta_\tau^2}\log\left(\beta_\tau\Phi\left(\frac{z}{\beta_\tau}\right)\right) \\ &-2\log\left(\frac{(z^2-\beta_\tau^2)^{1/2}+z\sqrt{1-\beta_\tau^2}}{\beta_\tau}\right) + \log\left(z^2-1\right)\Bigg). \end{aligned}$$

将其与（2.6）结合，我们得出

$$g^{\mu_\tau}(z) = zC^{\mu_\tau}(z) + (1+\tau)\log\left(\beta_\tau\Phi\left(\frac{z}{\beta_\tau}\right)\right) - \tau\log\left(\frac{(z^2-\beta_\tau^2)^{1/2}+z\sqrt{1-\beta_\tau^2}}{\beta_\tau}\right) - \alpha,$$

with

$$\alpha = 1 + (1+\tau)\log(2) - \tau\log\left(\frac{1+\sqrt{1-\beta_\tau^2}}{\beta_\tau}\right),$$

于是得到表达式 (3.4)。取 (3.4) 的负实部即可证明 (3.5)，并将其特化为 $x \in [-\beta_\tau, \beta_\tau]$ 后得到 (2.4)。由于 $0 \in \mathrm{supp}(\mu_\tau)$，通过计算 $V^{\mu_\tau}(0) + \tau V^{\lambda}(0)$ 可得到 (3.6)。□

4. Disconnected support: $\tau > 2/(\pi - 2)$

对于 $0 \leqslant k \leqslant 1$ 和 $a > 0$，考虑椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\, dx$$

and

$$I(a,k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a+\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\, d\theta = \int_0^1 \frac{1}{a+\sqrt{1-k^2x^2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} > 0. \tag{4.1}$$

众所周知， $E(\cdot)$ 在 $[0,1]$ 上严格递减，且 $E\colon [0,1] \to [1,\pi/2]$ 是双射。

定理 4.1。 对于 $\tau > \frac{2}{\pi-2}$，μ_τ 是定义在 支撑$(\mu_\tau) = [-1$ 上的绝对连续测度，$-\beta_\tau] \cup [\beta_\tau, 1]$，其中 $\beta_\tau \in (0,1)$ 是方程的唯一解

$$E(\beta_\tau) = \frac{1}{\tau} + 1 \in (1, \pi/2). \tag{4.2}$$

采用记号(4.1)，

$$\mu_\tau'(x) = \frac{\tau}{\pi}|x|\sqrt{\frac{x^2-\beta_\tau^2}{1-x^2}}\, I\left(\sqrt{1-x^2}, \beta_\tau\right). \tag{4.3}$$

此外，对于 $z \in \mathbb{C}\backslash$ 支集(μ_τ)，

$$C^{\mu_\tau}(z) = \frac{\tau}{2}\left(\frac{z^2-\beta_\tau^2}{z^2-1}\right)^{1/2} \int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau} \sqrt{\frac{1-x^2}{\beta_\tau^2-x^2}}\frac{dx}{z-x} - \frac{\tau}{2}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right). \tag{4.4}$$

关于 μ_τ 在 $\tau = 2$时平衡测度的密度图，请参见图 4。

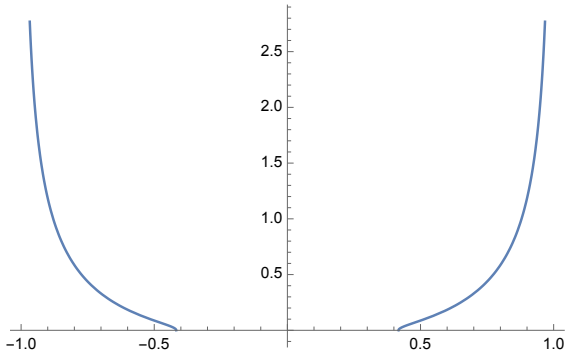


FIGURE 4.在 $\tau = 2$时的密度 μ_τ'，其中 $\beta_2 \approx 0.417299$。

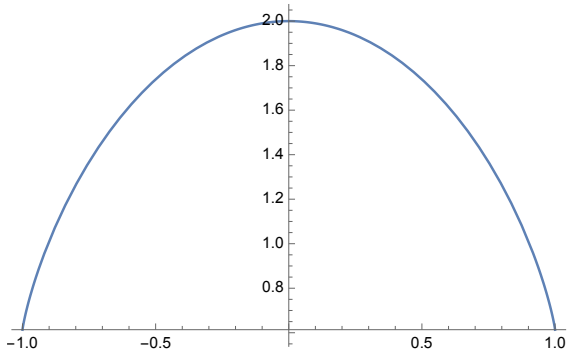


FIGURE 5. $\tau = 2$的外场。

注记 4.2。 (*i*) 我们可以通过对 E 的知名级数展开求逆来计算端点 β_τ 的近似值，

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}\right) = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2, -1/2\\ 1\end{matrix}; k^2\right),$$

从而

$$\beta_\tau = 2\sqrt{\alpha_\tau}\left(1 - \frac{3}{8}\alpha_\tau - \frac{17}{128}\alpha_\tau^2 + \dots\right), \quad \alpha_\tau := \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi-2}{2} - \frac{1}{\tau}\right).$$

(*ii*) 我们可以用完全椭圆积分表示 μ_τ 和 C^{μ_τ}。令

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\, d\theta = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{4.5}$$

表示第一类完全椭圆积分，并令

$$\Pi(n,k)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\left(1-n\sin^2\theta\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta=\int_0^1\frac{1}{1-nx^2}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

表示第三类完全椭圆积分，我们得到

$$d\mu_\tau(x)=\frac{\tau}{2\pi}\left[2|x|\sqrt{\frac{x^2-\beta_\tau^2}{1-x^2}}\left(K(\beta_\tau)+\frac{1-x^2}{x^2}\Pi\left(\frac{\beta_\tau^2}{x^2},\beta_\tau\right)\right)-\pi\right]dx$$

and

$$C^{\mu_\tau}(z)=\tau z\left(\frac{z^2-\beta_\tau^2}{z^2-1}\right)^{1/2}\left(K(\beta_\tau)+\frac{1-z^2}{z^2}\Pi\left(\frac{\beta_\tau^2}{z^2},\beta_\tau\right)\right)-\frac{\tau}{2}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

*(iii)*密度 μ_τ' 在支集端点处呈现平方根渐近，对应于标准的“软”边缘（在 $\pm\beta_\tau$ 处）和“硬边缘”（在 ±1 处）行为：

$$\mu_\tau'(x)=\frac{\tau}{\pi}|x|K(\beta_\tau)\sqrt{\frac{x^2-\beta_\tau^2}{1-x^2}}\left(1+\mathcal{O}\left(1\right)\right),\quad x\to\pm1$$

and

$$\mu_\tau'(x)=\frac{\tau\gamma_\tau(x)}{2\pi}\sqrt{|x\mp\beta_\tau|}\left(1+\mathcal{O}(x\mp\beta_\tau)\right),\quad x\to\pm\beta_\tau,$$

其中

$$\gamma_\tau(x)=2|x|K(\beta_\tau)\sqrt{\frac{|x\pm\beta_\tau|}{1-x^2}}-\frac{\pi\beta_\tau^{3/2}\sqrt{1-\beta_\tau^2}}{\sqrt{2}}{}_2F_1\left(\begin{matrix}3/2,3/2\\2\end{matrix};\beta_\tau\right)=\mathcal{O}(1),\quad x\to\pm\beta_\tau.$$

证明。当 $\tau>\frac{2}{\pi-2}$ 时，外场变为向下凹且为偶函数，见图 5。因此，我们作出试探形式 $\operatorname{supp}(\mu_\tau)=[-1,-\beta_\tau]\cup[\beta_\tau,1]$，其中 $\beta_\tau\in[0,1]$ 的值有待确定。如第 3 节所示，定义 $f\colon\mathbb{C}\backslash[-1,1]\to\mathbb{C}$，如下：

$$f(z):=C^{\mu_\tau}(z)+\tau C^{\lambda}(z)=\int\frac{d\mu_\tau(x)}{z-x}+\tau\int\frac{d\lambda(x)}{z-x}.$$

我们的目标是利用下文给出的性质，得到 f 的显式表达式，并以此恢复 μ_τ。同样，f 是定义域上的全纯函数，满足

$$\begin{aligned}
&f(z)=\frac{1+\tau}{z}+\mathcal{O}(z^{-2}), && z\to\infty;\\
&\operatorname{Re}f_\pm(x)=0, && x\in[-1,-\beta_\tau]\cup[\beta_\tau,1];\\
&f_+(x)+f_-(x)=0, && x\in(-1,-\beta_\tau)\cup(\beta_\tau,1);\quad\text{and}\\
&f_+(x)-f_-(x)=-\tau\pi i, && x\in(-\beta_\tau,\beta_\tau),
\end{aligned}$$

并且我们作出如下试探形式

$$\operatorname{Re}f_\pm(x)\geqslant0\text{ on }(0,\beta_\tau),\quad\text{and}\quad\operatorname{Re}f_\pm(x)\leqslant0\text{ on }(-\beta_\tau,0).$$

由于 $V^{\mu_\tau}(x)+\tau V^{\lambda}(x)$ 在 $[-\beta_\tau,\beta_\tau]$ 上为偶函数，Re $f_\pm(x)$ 在 $[-\beta_\tau,\beta_\tau]$ 上为奇函数，因此

$$\operatorname{Re}\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau} f_\pm(x)\,dx=0.$$

函数 $h\colon\ \mathbb{C}\backslash([-1,\ -\beta_\tau]\cup[\beta_\tau,\ 1])\to\mathbb{C}$，定义为

$$h(z)=\left(\frac{z^2-1}{z^2-\beta_\tau^2}\right)^{1/2},$$

在其定义域上是全纯且为偶函数，并满足以下性质 :

$$\begin{aligned}
&h_-(x)=-h_+(x), && x\in(-1,-\beta_\tau)\cup(\beta_\tau,1);\\
&h_\pm(x)\in\pm i\mathbb{R}_+, && x\in(\beta_\tau,1);\\
&h_\pm(x)\in\mp i\mathbb{R}_+, && x\in(-1,-\beta_\tau);\\
&\lim_{z\to\infty}h(z)=1; && \text{and}\\
&h(x)>0, && x\in(-\beta_\tau,\beta_\tau).
\end{aligned}\tag{4.6}$$

定义 $F\colon\ \mathbb{C}\backslash([-1,\ -\beta_\tau]\cup[\beta_\tau,\ 1])\to\mathbb{C}$ 为

$$F(z)=h(z)f(z).$$

那么 F 在其定义域上全纯，并且根据 f 和 h的上述性质，它满足

$$F_+(x)-F_-(x)=-\tau\pi i h(x),\quad x\in(-\beta_\tau,\beta_\tau);\tag{4.7}$$

$$F_+(x)-F_-(x)=0,\quad x\in(-1,-\beta_\tau)\cup(\beta_\tau,1);\tag{4.8}$$

$$F_\pm(x)\in\mathbb{R},\quad x\in[-1,-\beta_\tau]\cup[\beta_\tau,1];\tag{4.9}$$

$$F(z)=\frac{1+\tau}{z}+\mathcal{O}(z^{-2}),\quad z\to\infty;\tag{4.10}$$

$$\operatorname{Re}\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{F_\pm(x)}{h(x)}\,dx=0;\tag{4.11}$$

$$\operatorname{Re}F_\pm(x)\geqslant 0\text{ on }(0,\beta_\tau);\quad\text{and}\quad\operatorname{Re}F_\pm(x)\leqslant 0\text{ on }x\in(-\beta_\tau,0).\tag{4.12}$$

Sokhotski—Plemelj公式表明，如果 g 是 $(-\beta_\tau,\beta_\tau)$ 上的光滑函数，那么

$$\text{p.v.}\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{g(y)}{x-y}\,dy=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{g(y)}{x\pm i\varepsilon-y}\,dy\right)\pm\pi i g(x),\quad x\in(-\beta_\tau,\beta_\tau).\tag{4.13}$$

由 (4.7)、(4.8) 和 (4.13)，我们得到

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{-\tau\pi i h(x)}{x-z}\,dx=-\frac{\tau}{2}\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{h(x)}{x-z}\,dx.\tag{4.14}$$

现在我们验证 (4.14) 满足性质 (4.9)–(4.12)。(4.9) 由 (4.6) 得到满足。我们得到

$$F(z)=\frac{\tau E(\beta_\tau)}{z}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right),\quad z\to\infty.$$

将其与所需的行为 (4.10) 相匹配，可得 (4.2) 中 β_τ 的表达式。根据 (4.13)，对于 $x \in (-\beta_\tau,\ \beta_\tau)$，我们有

$$F_\pm(x) = \mp\frac{\tau\pi i}{2}h(x) + \text{p.v. } \frac{\tau}{2}\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{h(y)}{x-y}\,dy.$$

因此，(4.6) 对所有 $x \in (-\beta_\tau,\ \beta_\tau)$ 均意味着

$$\operatorname{Re} F_\pm(x) = \text{p. v. } \frac{\tau}{2}\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{h(y)}{x-y}\,dy. \tag{4.15}$$

注意到 (4.15) 在 $(-\beta_\tau,\ \beta_\tau)$ 上是奇函数，而 h 在 $(-\beta_\tau,\ \beta_\tau)$，上是偶函数，我们得到 (4.11)。为证明 (4.14) 满足 (4.12)，只需证明

$$\text{p. v. }\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{h(y)}{x-y}\,dy$$

对于 $x \in (-\beta_\tau,\ 0)$，其为 $\leqslant 0$；对于 $x \in (0,\ \beta_\tau)$，其为 $\geqslant 0$。这直接由下列恒等式得到：

引理 4.3。对于 $x \in (-\beta_\tau,\ \beta_\tau)$，

$$\text{p. v. }\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\sqrt{\frac{1-y^2}{\beta_\tau^2-y^2}}\,\frac{dy}{x-y} = x\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{dy}{\sqrt{\beta_\tau^2-y^2}\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\right)} = 2xI\left(\sqrt{1-x^2},\beta_\tau\right).$$

事实上，由于

$$\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{dy}{\sqrt{\beta_\tau^2-y^2}(z-y)}\,dy = \frac{\pi}{\sqrt{z^2-\beta_\tau^2}},\quad z\in\mathbb{C}\backslash[-\beta_\tau,\beta_\tau], \tag{4.16}$$

利用（4.13），我们得出

$$\text{p.v. }\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{1}{\sqrt{\beta_\tau^2-y^2}}\frac{dy}{x-y} = 0.$$

因此，

$$\begin{aligned}\text{p. v. }\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\sqrt{\frac{1-y^2}{\beta_\tau^2-y^2}}\,\frac{dy}{x-y} &= \text{p. v. }\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{\sqrt{1-y^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\beta_\tau^2-y^2}}\,\frac{dy}{x-y}\\ &= \int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{x+y}{\sqrt{\beta_\tau^2-y^2}\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\right)}\,dy\\ &= x\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{dy}{\sqrt{\beta_\tau^2-y^2}\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\right)},\end{aligned}$$

这就证明了该恒等式。

因此， F 的性质 (4.7)–(4.12) 已得到证明。还原前述变换后，我们得到

$$f(z) = \frac{F(z)}{h(z)} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{z^2-\beta_\tau^2}{z^2-1}\right)^{1/2} \int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau} \sqrt{\frac{1-x^2}{\beta_\tau^2-x^2}}\frac{dx}{z-x}, \tag{4.17}$$

这意味着

$$C^{\mu_\tau}(z) = f(z) - \tau C^{\lambda}(z) = \frac{\tau}{2}\left(\frac{z^2-\beta_\tau^2}{z^2-1}\right)^{1/2} \int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau} \sqrt{\frac{1-x^2}{\beta_\tau^2-x^2}}\frac{dx}{z-x} - \frac{\tau}{2}\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right),$$

见 (4.4)。

应用斯蒂尔切斯–佩龙反演公式，然后利用 (4.16)，可得对于$x \in [-1,\ -\beta_\tau] \cup [\beta_\tau,\ 1]$

$$\begin{aligned}
\mu_\tau'(x) &= -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im} C_+^{\mu_\tau}(x) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left(f_+(x) - \tau C_+^{\lambda}(x)\right) \\
&= \frac{\tau}{2\pi}\left[\operatorname{sgn}(x)\sqrt{\frac{x^2-\beta_\tau^2}{1-x^2}}\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\sqrt{\frac{1-y^2}{\beta_\tau^2-y^2}}\frac{dy}{x-y} - \pi\right] \\
&= \frac{\tau}{2\pi}\left[\operatorname{sgn}(x)\sqrt{\frac{x^2-\beta_\tau^2}{1-x^2}}\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\sqrt{\frac{1-y^2}{\beta_\tau^2-y^2}}\frac{dy}{x-y} - \int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{\sqrt{x^2-\beta_\tau^2}}{\sqrt{\beta_\tau^2-y^2}}\frac{dy}{x-y}\right] \\
&= \frac{\tau}{2\pi}|x|\sqrt{\frac{x^2-\beta_\tau^2}{1-x^2}}\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{\beta_\tau^2-y^2}} \\
&= \frac{\tau}{\pi}|x|\sqrt{\frac{x^2-\beta_\tau^2}{1-x^2}}\, I\left(\sqrt{1-x^2},\beta_\tau\right) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

这就证明了 (4.3)。 □

推论 4.4。 对于 $\tau > \frac{2}{\pi-2}$，(1.1) 中的平衡常数 ω_τ 为

$$\omega_\tau = \int_1^{+\infty}\left(\frac{\tau}{2}\sqrt{\frac{x^2-\beta_\tau^2}{x^2-1}}\left(\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\sqrt{\frac{1-s^2}{\beta_\tau^2-s^2}}\frac{ds}{x-s}\right) - \frac{1+\tau}{x}\right)dx. \tag{4.18}$$

它可以表示为一个收敛级数

$$\omega_\tau = \frac{1+\tau}{2}\log\left(\frac{4}{1-\beta_\tau^2}\left(\frac{1-\beta_\tau}{1+\beta_\tau}\right)^{\beta_\tau}\right) + \tau\sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k-1}\, c_{2k}\, \beta_\tau^{2k}, \tag{4.19}$$

其中

$$c_0 = E(\beta_\tau) = \frac{1+\tau}{\tau} \tag{4.20}$$

对于 $k \in \mathbb{N}$,

$$c_k := \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\beta_\tau^2 s^2}{1-s^2}}s^k ds = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}\,{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{k}{2}+1;\beta_\tau^2\right). \tag{4.21}$$

系数 c_k 也可以通过三项递推关系计算得出

$$\begin{aligned} &4\beta_\tau^2\, c_3 - \left(1+3\beta_\tau^2\right) c_1 + 1 = 0, \\ &\beta_\tau^2(k+3)c_{k+2} - \left[k+\beta_\tau^2(k+2)\right] c_k + (k-1)c_{k-2} = 0, \quad k \geqslant 2, \end{aligned} \tag{4.22}$$

取初值 c_0 ， 见(4.20)，

$$c_1 = \frac{1}{2} + \frac{1-\beta_\tau^2}{2\beta_\tau}\log\left(\frac{1+\beta_\tau}{1-\beta_\tau}\right), \quad \textit{and} \quad c_2 = \frac{(2\beta_\tau^2-1)(1+\tau)}{3\beta_\tau^2\tau} + \frac{1-\beta_\tau^2}{3\beta_\tau^2}K\left(\beta_\tau\right),$$

其中 K 定义见(4.5)。

注 4.5. *(i)* 我们将在下文证明，平衡常数 ω_τ 在$\tau = 2/(\pi-2)$处也是连续的:

$$\lim_{\tau\to(2/(\pi-2))^-}\omega_\tau = \lim_{\tau\to(2/(\pi-2))^+}\omega_\tau = \frac{\pi}{\pi-2}\log(2).$$

(ii) 三项递推关系 **(4.22)** 可由 **(4.21)** 中 ${}_2F_1$的邻接关系在 $k \to k \pm 2$下得到。

证明。取 $f(z) = C^{\mu+\tau\lambda}(z)$,

$$V^\mu(z) + \tau V\lambda(z) = V^{\mu+\tau\lambda}(z) = V^{\mu+\tau\lambda}(1) - \operatorname{Re}\int_1^z f(x)\,dx.$$

由于 $1 \in \operatorname{supp}(\mu_\tau)$，我们有 $V^{\mu+\tau\lambda}(1) = \omega_\tau$。此外， $V^{\mu+\tau\lambda}$ 具有如下性质:

$$V^{\mu+\tau\lambda}(z) = -(1+\tau)\log|z| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \to \infty.$$

因此,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{z\to\infty}\left(V^{\mu+\tau\lambda}(z) + (1+\tau)\log|z|\right) = \lim_{z\to\infty}\left(\omega_\tau - \operatorname{Re}\int_1^z f(x)\,dx + (1+\tau)\log|z|\right) \\ &= \lim_{z\to\infty}\left(\omega_\tau - \operatorname{Re}\int_1^z\left(f(x) - \frac{1+\tau}{x}\right)dx\right), \end{aligned}$$

这给出了恒等式

$$\omega_\tau = \int_1^{+\infty}\left(f(x) - \frac{1+\tau}{x}\right)dx.$$

最后，利用（4.17）中的 f 表达式即可得到（4.18）。

为证明这是一个收敛的反常积分，我们使用（4.2）：

$$\frac{\tau}{2}\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\sqrt{\frac{1-s^2}{\beta_\tau^2-s^2}}\,ds = \tau E(\beta_\tau) = 1+\tau.$$

因此,

$$\frac{\tau}{2}\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\sqrt{\frac{1-s^2}{\beta_\tau^2-s^2}}\frac{ds}{x-s} - \frac{1+\tau}{x} = \frac{\tau}{2x}\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\sqrt{\frac{1-s^2}{\beta_\tau^2-s^2}}\frac{s\,ds}{x-s},$$

我们可以写成

$$\omega_\tau = W_1 + W_2,$$

其中

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\tau}{2}\int_1^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-\beta_\tau^2}{x^2-1}}-1\right)\left(\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\sqrt{\frac{1-s^2}{\beta_\tau^2-s^2}}\frac{ds}{x-s}\right)dx \\ &= \frac{\tau(1-\beta_\tau^2)}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-\beta_\tau^2}\right)}\left(\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\sqrt{\frac{1-s^2}{\beta_\tau^2-s^2}}\frac{ds}{x-s}\right)dx \end{aligned}$$

and

$$W_2 = \int_1^{+\infty}\left(\frac{\tau}{2}\left(\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\sqrt{\frac{1-s^2}{\beta_\tau^2-s^2}}\frac{ds}{x-s}\right)-\frac{1+\tau}{x}\right)dx = \frac{\tau}{2}\int_1^{+\infty}\left(\int_{-\beta_\tau}^{\beta_\tau}\sqrt{\frac{1-s^2}{\beta_\tau^2-s^2}}\frac{s\,ds}{x-s}\right)\frac{dx}{x}.$$

两个反常积分显然都收敛。

为了研究 W_j, $j=1,2$ 在 $\tau\to 2/(\pi-2)^+$, $\beta_\tau\to 0^+$, 时的行为，我们可以对内部积分作变量替换，得到另一种表达式：

$$W_1 = \frac{\tau(1-\beta_\tau^2)}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-\beta_\tau^2}\right)}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\beta_\tau^2 s^2}{1-s^2}}\frac{ds}{x-\beta_\tau s}\right)dx \tag{4.23}$$

and

$$W_2 = \frac{\tau\beta_\tau}{2}\int_1^{+\infty}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\beta_\tau^2 s^2}{1-s^2}}\frac{s\,ds}{x-\beta_\tau s}\right)\frac{dx}{x}. \tag{4.24}$$

由于 $\tau\to 2/(\pi-2)^+$, $\beta_\tau\to 0^+$, 且

$$\begin{aligned} \lim_{\tau\to 2/(\pi-2)^+} W_1 &= \frac{2}{2(\pi-2)}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\left(\int_{-1}^{1}\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}\right)dx \\ &= \frac{\pi}{\pi-2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\,dx = \frac{\pi}{\pi-2}\,\log(2), \end{aligned}$$

而根据 (4.24)，$\lim_{\tau\to 2/(\pi-2)^+} W_2 = 0$。结合 (2.5)，我们得出 ω_τ 在 $\tau = 2/(\pi-2)$ 处连续。

最后，我们讨论 ω_τ 在 $\tau > 2/(\pi-2)$情况下的级数表示。由于对于 $x\geqslant 1$, $|\beta_\tau s|\leqslant\beta_\tau<1$，我们可以将 $1/(x-\beta_\tau s)$ 展开为几何级数，而定义（4.21）给出

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\beta_\tau^2 s^2}{1-s^2}}\frac{ds}{x-\beta_\tau s} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\beta_\tau^k}{x^{k+1}}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\beta_\tau^2 s^2}{1-s^2}}s^k\,ds = 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{c_{2k}\beta_\tau^{2k}}{x^{2k+1}} \tag{4.25}$$

and

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\beta_\tau^2 s^2}{1-s^2}}\frac{s\,ds}{x-\beta_\tau s} = \frac{1}{\beta_\tau^k}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\beta_\tau^2 s^2}{1-s^2}}\frac{x\,ds}{x-\beta_\tau s}-2c_0\right) = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{c_{2k}\beta_\tau^{2k-1}}{x^{2k}}. \tag{4.26}$$

将（4.25）代入（4.23），得到

$$W_1 = \tau(1-\beta_\tau^2)\sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k}\beta_\tau^{2k}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2k+1}\left(x^2-1+\sqrt{(x^2-1)(x^2-\beta_\tau^2)}\right)}\,dx.$$

注意，对于 $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
&\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2k+1}\left(x^2-1+\sqrt{(x^2-1)(x^2-\beta_\tau^2)}\right)}\,dx\\
&= \frac{1}{1-\beta_\tau^2}\left(\int_1^{+\infty}\sqrt{\frac{x^2-\beta_\tau^2}{x^2-1}}\frac{dx}{x^{2k+1}}\,dx - \frac{1}{2k}\right)\\
&= \frac{1}{1-\beta_\tau^2}\left(\int_0^1\sqrt{\frac{1-\beta_\tau^2 s^2}{1-s^2}}s^{2k-1}ds - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{1-\beta_\tau^2}\left(c_{2k-1}-\frac{1}{2k}\right),
\end{aligned}$$

而

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\left(x^2-1+\sqrt{(x^2-1)(x^2-\beta_\tau^2)}\right)}\,dx = \frac{1}{2\,(1-\beta_\tau^2)}\log\left(\frac{4}{1-\beta_\tau^2}\left(\frac{1-\beta_\tau}{1+\beta_\tau}\right)^{\beta_\tau}\right).$$

因此，

$$W_1 = \frac{1+\tau}{2}\log\left(\frac{4}{1-\beta_\tau^2}\left(\frac{1-\beta_\tau}{1+\beta_\tau}\right)^{\beta_\tau}\right) + \tau\sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k}\beta_\tau^{2k}\left(c_{2k-1}-\frac{1}{2k}\right).$$

同样，将 (4.26) 代入 (4.24)，可得

$$W_2 = \tau\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{c_{2k}}{2k}\,\beta_\tau^{2k}.$$

结合这两个表达式可得

$$\omega_\tau = \frac{1+\tau}{2}\log\left(\frac{4}{1-\beta_\tau^2}\left(\frac{1-\beta_\tau}{1+\beta_\tau}\right)^{\beta_\tau}\right) + \tau\sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k}\beta_\tau^{2k}\left(c_{2k-1}-\frac{1}{2k}\right) + \tau\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{c_{2k}}{2k}\,\beta_\tau^{2k},$$

也就是说，(4.19)。

最后，定义

$$d_k := \int_0^1\frac{s^k\,ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-\beta_\tau^2 s^2)}}\,d\theta.$$

Then

$$c_k = d_k - \beta_\tau^2 d_{k+2}. \tag{4.27}$$

此外，对于

$$h_k(s) := s^{k-1}(1-s^2)^{1/2}(1-\beta_\tau^2 s^2)^{1/2}$$

我们有

$$h_k'(s) = \sqrt{\frac{1-\beta_\tau^2 s^2}{1-s^2}}\left[(k-1)s^{k-2} - ks^k\right] - \frac{\beta_\tau^2 s^k(1-s^2)}{\sqrt{(1-s^2)(1-\beta_\tau^2 s^2)}}.$$

由于对于 $k \geqslant 2$、$h_k(0) = h_k(1) = 0$，将 h_k' 在 $[0,1]$ 上积分，$k \geqslant 2$ 时可得

$$0 = (k-1)\, c_{k-2} - k\, c_k - \beta_\tau^2 d_k + \beta_\tau^2 d_{k+2}.$$

我们可以利用 (4.27) 替换 $\beta_\tau^2 d_{k+2} = d_k - c_k$：

$$0 = (k-1)\, c_{k-2} - (k+1)\, c_k + (1-\beta_\tau^2) d_k.$$

特别是，

$$(1-\beta_\tau^2) d_k = -(k-1)\, c_{k-2} + (k+1)\, c_k.$$

将这个等式代入 (4.27)，并用 k 和 $k+2$，可得

$$(1-\beta_\tau^2) c_k = -(k-1)\, c_{k-2} + (k+1)\, c_k - \beta_\tau^2 \left(-(k+1)\, c_k + (k+3)\, c_{k+2}\right),$$

这等价于关于 $k \geqslant 2$ 的递推关系 (4.22)。

另一方面，对于 $k = 1$，边界项 $h_1(0) = 1 \neq 0$ 会改变方程，积分后可得

$$4\beta_\tau^2\, c_3 = \left(1 + 3\beta_\tau^2\right) c_1 - 1,$$

如（4.22）所示。

最后，直接计算可得 c_1 和 c_2 的表达式，而（4.21）中的第二个表达式则源于超几何函数的欧拉（或高斯）积分表示，参见 [3, 公式（15.6.1）]。□

Acknowledgments

第二作者获得了西班牙项目 PID2021-124472NB-I00 的部分资助，该项目由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和“欧洲区域发展基金‘建设欧洲之路’”资助。他还感谢安达卢西亚自治区政府的支持（研究组 FQM-229，以及卡洛斯一世理论与计算物理跨大学研究所）。

我们还受益于与 Guilherme Silva 的富有成果的讨论。

References

[1] P. Bleher 和 A. Its。《正交多项式的半经典渐近、黎曼–希尔伯特问题及矩阵模型中的普适性》，*Ann. of Math.* **150**（1999），第 1 期，185–266。[2] P. Deift、T. Kriecherbauer、K. T-R. McLaughlin、S. Venakides 和 X. Zhou。《关于变化指数权下正交多项式的一致渐近及其在随机矩阵理论普适性问题中的应用》，*Comm. Pure Appl. Math.* **52**（1999），第 11 期，1335–1425。[3] F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain（编）。*NIST Digital Library of Mathematical Functions*，2025-03-15 发布的 1.2.4 版，https://dlmf.nist.gov/。[4] E. B. Saff 和 V. Totik。《》，第二版，Grundlehren der mathematischen Wissenschaften，第 316 卷，Springer，Cham，2024。

（JK）Department of Mathematics, Baylor University, Waco, TX 76706, USA*Email address*: James Kessinger1@baylor.edu（AMF）Department of Mathematics, Baylor University, Waco, TX 76706, USA, and Department of Mathematics, University of Almería, Almería, Spain*Email address*: A Martinez-Finkelshtein@baylor.edu