arXiv:2603.17949v1 [math.LO] 18 Mar 2026

齐次强迫 1257

Saharon Shelah

Abstract. 假设 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ （通常是 $\aleph_0$ 或不可达基数）。

我们将讨论沿线性序 L进行的迭代强迫，它们保留 ${}^{\kappa}$>Ord，且不会塌缩基数。我们将重点关注一个充分条件：这些强迫具有支集 $< \kappa$ 和 κ^+-链条件，并且在策略意义上是 $< \kappa$-完备的。目标是得到齐次强迫，使得该迭代拥有许多自同构。

除了其本身的研究价值外，这类迭代还有助于考察 ${}^{\kappa}2$上的一些自然理想，以便得到一个 ZF+可数选择$_{\kappa}$ + 的模型，其中“模这个理想，每个集合都等价于一个 κ-Borel 集。”

但在这里，我们只有指标集 L 的许多自同构，因而也有迭代因子 $\mathbb{Q}$构成的迭代的许多自同构；我们不一定拥有 $\mathbb{Q}$的齐性，也没有将其他名称对应的 $\mathbb{Q}$-实数互相映射的自同构。不过，对于某些合理的强迫概念，并不存在其他 $\mathbb{Q}$-实数！这正是早期与 Jakob Kellner 及 Haim Horowitz 合作的研究中引入并考察糖性的原因。

带注释的内容

§0 引言 (labelz) p.3

§0(A) 目标§0(B) 背景§0(C) 预备知识
我们在 0.7 中定义一个主干控制器 TR。

§1 框架 (labelf) p.9

我们处理各个 $\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}$-s（对于$\mathbf{o} \in \mathbf{O}_{\rm TR}$）以及$\mathbf{m} \in \mathbf{M}$。它们将构成我们抽象迭代的组合学基础。

§2 调查 $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ (标签 f23+) p.16

我们定义$\mathbf{P}$，即抽象迭代的一类（但递增序列的极限只有在纯版本中才有明确定义）。

版本：2026年3月12日。请参见 https://shelah.logic.at/papers/1257/ 以获取可能的更新。*Date*：2026年3月10日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 03E35；次要分类号 03E25、03E15。*Key words and phrases.* 集合论、强迫、迭代强迫、齐性、可定义性、选择公理、ZF+可数选择。首次录入于2022年3月25日。作者感谢 Craig Falls 慷慨资助录入服务，并感谢 Matt Grimes 细致而精美的录入工作。作者谨此感谢以色列科学基金会通过资助项目2320/23（2023—2027年）为本研究提供部分支持。诸如（例如） [Sh:950, Th0.2$_{=\text{Ly5}}$] 这样的引用，表示 Sh:950 中定理0.2的内部标签为“y5”。读者请注意，我个人网站上的版本通常比 arXiv 上的版本更新。此文是 Saharon Shelah 名录中的出版物编号1257。

§3 从 M 和 P 到 N 和 Q (labeld) p.22

现在我们有 $W_{\mathbf{q}} \subseteq L_{\mathbf{q}}$ （对于迭代$\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$），使得对于 $t \in W_{\mathbf{q}}$，记忆 $\mathcal{A}_t = \mathcal{B}_t$ 的行为如$\mathbf{P}$中所述。（它甚至限定了基数，并且对于 $\leq_{\mathbf{Q}}$-更大的迭代，这些基数不会改变。）

但对于 $t \in L_{\mathbf{q}} \setminus W_{\mathbf{q}}$，我们有两类记忆 $\mathcal{B}_t \subseteq \mathcal{A}_t$，其中 $\mathcal{B}_t$-s 在 L 上的序下按上述方式运作（并用于证明 $\mathbf{q}_1 <_{\mathbf{Q}} \mathbf{q}_2 \Rightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{q}_1} \lessdot \mathbb{P}_{\mathbf{q}_2}$）。

§4 齐性 (labelg) p.25

§5 变体与定理 (labeli) p.30

该定理表明，$\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}$ 的糖性足以证明第 §0A-B 节中所承诺的一致性。

§ 0. 引言

§ 0(A)。目标。 我们固定 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$，并考虑具有 $(<\kappa)$-完备强迫概念的齐次 $(<\kappa)$-支撑集迭代，其中带有 κ^+-cc 的一个版本，并保持这些性质。不过，在本节中，我们将集中讨论经典情形 $\kappa := \aleph_0$。

为了获得齐性，我们打算沿着一个相当齐性的线性序进行迭代（因此它绝非良序）。

自 Solovay 的著名工作 [Sol70], 以来，我们便知道以下两个问题之间的联系：

- $\bullet_1$ 具有大量自同构的强迫概念 $\mathbb{P}$。例如，对于较小的 $\mathbb{P}' \lessdot \mathbb{P}$，以及两个相关的 $\mathbb{P}$-名称 η_1，η_2 它们是实数，在同一个相关强迫 $\mathbb{Q}$ 上相对于 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}'}$ 都是泛型，则存在一个 $\mathbb{P}$ 在 $\mathbb{P}'$ 上的自同构，将 η_1 映射到 η_2。
- $\bullet_2$ ZF + DC+ 模型，其中“每个实数集都等价于某个博雷尔集模零测理想（或其他合理理想）”。（最核心的强迫是针对零测理想的随机实数迫使。第二个重要情形是针对瘦集理想的科恩迫使。）

关于勒贝格可测性的经典情形，另一种表述是“没有非可测集能够被轻易定义”，这里的“定义”指[1] “可在$\mathbf{L}[\mathbb{R}]$中定义”。历史沿革及更多内容见 [RS04], [RS06]。

这也适用于其他理想 $\mathrm{id}(\mathbb{Q}, \eta)$，其中涉及一个可定义的强迫概念 $\mathbb{Q}$（主要是可数链条件）以及一个实数的 $\mathbb{Q}$-名 η。一般来说，构造这类强迫概念并不容易：必须证明相关强迫类中存在 amalgamation。Kellner-Shelah [KS11] 提出考察所谓的糖精对（$\mathbb{Q}, \eta$），其中 $\mathbb{Q}$ 非齐次性很强。（例如，用 $\mathbb{Q}$ 强迫只会添加一个（$\mathbb{Q}, \eta$）-泛型，因此需要构造自同构的情形很少。这里的强迫概念是适当的，但不是 可数链条件。）

这里我们证明存在足够齐次的 κ^+-cc、$(<\kappa)$-完备的迭代强迫（即沿着一个带有 $(<\kappa)$-支撑集的线性序）。

记号0.1. 1)

- κ，λ，μ，∂，θ，σ 是基数（除非明确另有说明，否则均为无限基数）。$\lambda^+ = \lambda(+)$表示 λ 的后继。
- α，β，γ，δ，ε，ζ 表示序数；除非另有说明，δ 为极限序数。
- k，ℓ，m，n 最初是自然数，但现在只是序数 $< \kappa$。
- i 和 j 一直用作指标 $< \kappa$。

2) $S^\lambda_\kappa := \{\delta < \lambda : \text{共尾性}(\delta) = \kappa\}$。

3) 回忆一下，$\mathbb{L}_{\kappa,\sigma}$ 的定义与一阶逻辑类似，但允许 $\bigwedge \varphi_i$ 用于 $\alpha < \kappa i<\alpha$和$(\exists \ldots x_i \ldots)_{i\in I}$，其基数为 $I < \sigma$。

4) $\mathbb{P}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ 表示强迫概念。

[1]也就是说，对于带有$\mathbf{L}[\mathcal{P}(\kappa)]^{\mathbf{V}}$ 且$\mathbf{V} \models$ 满足 ZFC 的内模型，$\bullet_2$ 成立；因此在$\mathbf{V}$ 中，所有“合理”的集合相对于这个理想都是“可测的”。

定义 0.2。 0) 对于基数 κ， 2^κ 上的 κ-博雷尔集族是包含所有形如 $\{\nu \in {}^\kappa 2 : \nu(\alpha) = i\}$ 的基本集，且对补集以及 $\leq \kappa$ 个集合的并集封闭的最小子集族。

1) 对于 $\mathbb{Q}$ 一个强迫概念、 η 一个 2^κ中元素的 $\mathbb{Q}$-名称以及 ∂ 一个基数，令$\tilde{}$$\mathrm{id}_{<\partial}(\mathbb{Q}, \eta)$表示由 $<\partial$-多个 κ-博雷尔集$\mathbf{B}$ 的并集组成的理想，其中$\tilde{}$满足 $\Vdash_{\mathbb{Q}}$ “$\eta \notin \mathbf{B}$”。

2) 我们称$\mathrm{id}_{<\partial}(\mathbb{Q}, \eta)$具有可测性，如果对于每个 $Y \subseteq {}^\kappa 2$，都存在一个 κ-博雷尔$\tilde{}$集$\mathbf{B}$，使得 $Y \triangle \mathbf{B} \in \mathrm{id}_{<\partial}(\mathbb{Q}, \eta)$。$\tilde{}$

3) 令$\mathrm{id}_{\leq\partial}(\mathbb{Q}, \eta)$为$\mathrm{id}_{<\partial^+}(\mathbb{Q}, \eta)$。

§0(B)。 背景。

讨论 0.3。 1) 将 $\mathbb{Q}$ 来自 [KS11] 的强迫与较早的结果（例如 Solovay [Sol70]）进行比较，这些强迫是博雷尔可定义的、适当的，并且基数为 $2^{\aleph_0}$。此外：

- $\bullet_{1.1}$ 该强迫 $\mathbb{Q}$ 没有压缩任何基数（前提是连续统假设成立），但不满足可数链条件；[2] 我们认为这是一个缺点。
- $\bullet_{1.2}$ 与那些较早的结果一样，该模型满足 ZF + 可数选择。
- $\bullet_{1.3}$ 该迭代沿着一个齐次线性序进行。
- $\bullet_{1.4}$ 我们只能得到稍弱一些的可测性版本，其理想是 $\mathrm{id}_{\leq\aleph_1}(\mathbb{Q}, \eta)$，而非 $\mathrm{id}_{<\aleph_1}(\mathbb{Q}, \eta)$。

或者（例如从宇宙 $\mathbf{L}$ 开始），

- $\bullet'_{1.4}$ 使用 $\mathrm{id}_{<\aleph_1}(\mathbb{Q}, \eta) + X$，其中 X 是集合 $\{\eta[\mathbf{G}] : \mathbf{G} \subseteq \mathbb{Q}_{\mathbf{L}}$ 在 $\mathbf{L}\}$ 上是泛型。

$\tilde{}$ $\tilde{}$

2) 下一步是 Horowitz-Shelah [HS], , 其中：

- $\bullet_{2.1}$ 强迫满足可数链条件，这一点我们认为是个优点。
- $\bullet_{2.2}$ 该模型只满足 ZF；我们得不到可数选择，甚至得不到选择公理$\aleph_0$ ——这不太理想。
- $\bullet_{2.3}$ 同样，迭代沿着一个齐次线性序进行。
- $\bullet_{2.4}$ 理想仍然是 $\mathrm{id}_{\leq\aleph_1}(\mathbb{Q}, \eta)$（或者如 $\bullet'_{1.4}$ 上文所述）。

我们的目标是同时恢复可数链条件（如 $\bullet_{2.1}$中所述）和可数选择（如 $\bullet_{1.2}$中所述），使得理想 $\mathrm{id}_{\leq\aleph_1}(\mathbb{Q}, \eta)$具有这些性质。此外，我们还可以要求可数选择$\aleph_1$ （甚至更多；见 §1），这是一项显著的优点。

* * *

我们继续 [She04], [She], , 但不依赖它们。我们不定义迭代，而是以公理化方式引入它们，并允许 $\kappa > \aleph_0$ （在完备性和支集的表述中有所引用）。不同于 [She04], , 本文不讨论强迫 $\mathfrak{a} > \mathfrak{d}$。 [She04]和 [She] 较早的后续版本是正在准备中的平行论文，初步编号为 F2009 和 F2029（后来发展为它们的后继版本 F2330 和 F2329）。在 [She04] 中，集合 $\mathscr{P}^{\mathbf{m}}_s$（见定义 1.9）可能是整个幂集，我们使用更一般的可定义的强迫概念。

[2] 请注意，Solovay 使用不可达基数的 Levy塌缩，而后来的版本则使用可数链条件的塌缩（主要针对瘦集理想）。

在我们的迭代中，可以将 $\aleph_0$ 替换为某个 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$，因此这些强迫概念是（$<\kappa$）-完备的 κ^+-cc。对于 $\kappa = \aleph_0$ 情形，我们打算使用来自 [HS]的强迫概念 $\mathbb{Q}^2_{\mathbf{n}}$ 。但我们仍然需要一种适用于任意 κ的类似物。

所选路径的说明

（读者目前可以跳过本小节，因为只有读完 §1-2 后才能理解。）

考虑一个由 κ^+-链条件（$<\kappa$）完备的强迫概念组成的族 $\mathbf{K}$ ，并按某种$\leq_{\mathbf{K}}$排序。对此有两种自然的做法。

The first way:

我们构造一个有向族 $\langle \mathbb{P}_t : \ t \in I \rangle$ 使得 $s <_I t \Rightarrow \mathbb{P}_s \lessdot \mathbb{P}_t$ 且 $\mathbb{P}_{..} = \bigcup \mathbb{P}_t t \in I$

属于$\mathbf{K}$ ，并且具有足够多的自同构。

目前，这需要

(A) 从 $(\mathbf{P} \ \leq_{\mathbf{P}})$ 开始，其中包含整个偏序 $<^{\rm pr}_{\mathbf{P}}$ ，如 §2 的当前版本所示。（因此没有 $\mathcal{B}_{\mathbf{q}}$! ）(B) 我们将 $\mathbf{Q}$ 定义为由以下元素构成的 $\mathbf{q}$ 的集合：(a) $W_{\mathbf{q}} \subseteq L_{\mathbf{q}}$ ，使得对每个 $s \in L_{\mathbf{q}}$ ，都有 $\mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{q},s} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{q},s}$ ，其中包含 $\lambda_{\mathbf{o}_s}$ 个成员；这些成员是两两不交集，每个集合的基数均为 $\leq \lambda_{\mathbf{o}_s}$，并且在某种适当意义下是稠密的。（或者，允许有 2^{λ_s} 多个这样的集合，使所有可能的同构类型都出现。）

(b) 对每个 $s \in L_{\mathbf{q}} \setminus W_{\mathbf{q}}$ ，我们在 $\mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{q},s}$ 上有一个理想 $\mathcal{I}_s$ ，使得

$$A \in \mathcal{A}_{\mathbf{q},s} \Rightarrow \{B \in \mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{q},s} : A \cap B \neq \varnothing\} \in \mathcal{I}_s.$$

(c) 若 $s \in W_{\mathbf{q}}$ ，则 $\bigcup \mathcal{A}_{\mathbf{q},s} \subseteq W_{\mathbf{q}}$。(d) 若 $\mathbf{q}_1 \leq_{\mathbf{Q}} \mathbf{q}_2$ 且 $s \in W_{\mathbf{q}_1}$，则 $\mathcal{A}_{\mathbf{q}_1,s} = \mathcal{A}_{\mathbf{q}_2,s}$。

The wrong way:

令 $\chi = \chi^{<\chi} > \theta = \mathrm{cf}(\theta) > \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$，使得 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 且 $\alpha < \theta \Rightarrow |\alpha|^{\kappa} < \theta$。我们通过 $(\mathbf{K}_{<\theta} \cap \mathcal{H}(\chi) \ <_{\mathbf{K}})$ 进行强迫，其中 $\mathbf{K}_{..} = \mathbf{P}$ 且 $\mathbf{K}_{<\theta} {}_{..} = \{\mathbb{P} \in \mathbf{K} : \ \|\mathbb{P}\| < \theta\}$。

为处理 $\mathbb{L}[\mathbb{R}^{<\theta}]$，只需证明在 $(\mathbf{K}_{<\theta}, \leq_{\mathbf{K}})$ 中存在足够多的 amalgamation 基，这并不难。（只需对某个 $\partial \in [\kappa, \theta)$，满足“长度为 ∂ 的 a$\leq_{\mathbf{K}}$-递增链的并是一个最小上界”即可。） ∩ Reg.)

一个可疑之处在于：如何定义 $(\mathbf{P} \ \leq_{\mathbf{P}})$ 中一个（长度不过长的）递增序列何时具有上界，即使在 $\kappa_{..} = \aleph_0$ 的情形下也是如此。然而，对于 $(\mathbf{P} \ \leq^M_{\mathbf{P}})$，这并不是问题。

好得令人难以置信？不，只是因为为了满足齐性，我们需要回到第一种方法。

* * *

感谢 Shimon Garti、Miguel Cardona、Martin Goldstern 和 Jakob Kellner 为改进本文所做的诸多贡献。

§0(C). 预备知识。

假设 0.4. 1) $\kappa = \kappa^{<\kappa}$（主要是 $\aleph_0$ 或不可达基数）。

2) ∂ 是正则基数 $> \kappa$。

3) D 是定义在 κ^+ 上的正规滤子，满足 $S^{\kappa^+}_{\kappa} =: \{\delta < \kappa^+ : \mathrm{cf}(\delta) = \kappa\} \in D$。

关于下面定义的条件，更多内容请参见 [She22]。

定义 0.5. 1) 对于 D 上包含 $S^{\kappa^+}_{\kappa}$ 的正规滤子 κ^+，若强迫概念 $\mathbb{Q}$ 满足$*^0_{\kappa,D}$，则称：

$*^0_{\kappa,\ D}$ 给定一个由 $\mathbb{Q}$ 中元素构成的序列 $\bar{p} = \langle p_i : i < \kappa^+\rangle$，存在一个集合[3] $C \in D$、一个满足 $(\forall i)[p_i \le p^+_i]$ 的序列 $\bar{p}^+ = \langle p^+_i : i < \kappa^+\rangle$，以及一个定义在 C 上的回归函数 $\mathbf{h}$，使得

$$\alpha, \beta \in C \wedge \mathbf{h}(\alpha) = \mathbf{h}(\beta) \Rightarrow \text{`}p^+_\alpha \text{ and } p^+_\beta \text{ have a lub.'}$$

2) 对于如上所述的 κ 和 D，当 $*^0_{\kappa,\ D}$ 在 $\bar{p}^+ := \bar{p}$ 下成立时，我们称 $\mathbb{Q}$ 满足 $*^1_{\kappa,\ D}$。

3) 若强迫概念 $\mathbb{Q}$ 满足以下条件，我们称其为 $Knaster^+$：

若对于 $i < \omega_1$ 有 $p_i \in \mathbb{Q}$，则存在 $A \in [\omega_1]^{\aleph_1}$ 和 $\langle p^+_i : i \in A\rangle \subseteq \mathbb{Q}$，且每个 $p^+_i \ge_{\mathbb{Q}} p_i$ 都满足这一条件，使得对于每个 $i, j \in A$，条件 p^+_i 与 p^+_j 相容，且有一个最小上界。

记号 0.6. 1)$\mathbf{p}$将是定义 2.2 中的 $\mathbf{P}$ 的一个成员。

2) $\mathbf{q}$,$\mathbf{r}$ 表示 ATI（抽象模板迭代）；即 $\mathbf{Q}^{\rm pre}$ 的成员（最弱版本——见定义 3.4、4.1）。

3) L 是一个线性序（通常为 $L \subseteq L_{\mathbf{m}}$），并且 $r, s, t \in L$。

L_+ 由 L导出，其中 ∞ 和 $t, t\,(+)\ \in L_+$ 对每个 $t \in L$ 都成立。（见下文 1.9(2)。）

4) $L_{\mathbf{m}}$ 或 $L_{\mathbf{q}}$ 将是与 $\mathbf{m}$ 或 $\mathbf{q}$ 等相关的线性序。

5) $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 表示定义 0.5 中的强迫概念（即拟序）。

定义 0.7。 1) 如果 TR 由以下部分组成，我们就称其为 κ-主干控制器：

（A）集合 $|\mathrm{TR}|$ 的基数为 $\|\mathrm{TR}\|$ 的偏序 $\le_{\mathrm{TR}}$。（稍微滥用一下记号，我们可以用“$s \in \mathrm{TR}$”代替 $s \in |\mathrm{TR}|$。）（B）一个偏函数 $\mathrm{plus}_{\mathrm{TR}} : {}^{\kappa>}|\mathrm{TR}| \to |\mathrm{TR}|$，给出一个最小上界。（C）任何长度为 $< \kappa$ 的递增序列都属于 $\mathrm{dom}(\mathrm{plus}_{\mathrm{TR}})$（因此都有最小上界）。（D）如果 $\zeta < \kappa$ 且 $\mathbf{x}_{\alpha,\ \varepsilon} \in \mathrm{TR}$ 对于 $\alpha < \kappa^+$ 和 $\varepsilon < \zeta$ 成立，那么对于某个 $\alpha < \beta$，我们有

$$\bigwedge_{\varepsilon<\zeta} \big[\langle \mathbf{x}_{\alpha,\varepsilon}, \mathbf{x}_{\beta,\varepsilon}\rangle \in \mathrm{dom}(\mathrm{plus}_{\mathrm{TR}})\big].$$

[3] 是的！不只是“$C \in D^+$”；请参阅 [She22]。

（E） $\varnothing \in$TR，且（$\forall \mathbf{x} \in$ TR）$\left[\varnothing \leq_{\mathrm{TR}} \mathbf{x}\right]$。

(F) $S_{\mathrm{TR}} \subseteq \mathcal{H}_{<\kappa}$(序数) 且

$$\mathrm{val}_{\mathrm{TR}} : |TR| \times S_{\mathrm{TR}} \to 2$$

是一个偏函数。

具体而言，对于每个 $\mathbf{x} \in$ |TR|，val(x) = val(x, –) 是一个从 S_{TR} 到 $\{0,1\}$的偏函数，并随 x递增。

1A) 当满足以下条件时，我们称 TR 为一个简单 κ-主干控制器:

(A) TR 是一个 κ-主干控制器。(B) $(\forall \mathbf{x} \in \mathrm{TR})\left[|\mathbf{x}| \leq \kappa\right]$ (通常有 |TR| $\subseteq \mathcal{H}(\kappa)$, 或者至少对某个 λ有 $\mathcal{H}_{<\kappa}(\lambda)$。)(C) $\leq_{\mathrm{TR}} := \subseteq$(D) 如果 $\delta < \kappa$ 是极限且 $\langle \mathbf{x}_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ 是 $\leq_{\mathrm{TR}}$-递增的，那么

$$\mathrm{plus}_{\mathrm{TR}}(\langle \mathbf{x}_\alpha : \alpha < \delta \rangle) := \bigcup_{\alpha < \delta} \mathbf{x}_\alpha.$$

(E) $S_{\mathrm{TR}} := |\mathrm{TR}|$，对于每个$\mathbf{x} \in$ TR，我们定义函数 $\mathrm{val}_{\mathrm{TR}}(\mathbf{x})$，规定当$\mathbf{y} \leq_{\mathrm{TR}} \mathbf{x}$ 时，$\mathrm{val}_{\mathrm{TR}}(\mathbf{x})(\mathbf{y}) = 1$；当$\mathbf{x}$ 与$\mathbf{y}$ 不相容时，$\mathrm{val}_{\mathrm{TR}}(\mathbf{x})(\mathbf{y}) = 0$（其他情况下未定义）。

2) 当满足以下条件时，我们称 TR 为一个 $(\kappa, \Theta, \Upsilon)$-主干控制器:

- $\bullet_1$ Θ 是正则基数 $< \kappa$的集合。
- $\bullet_2$ $\kappa > \aleph_0 \Leftrightarrow \Theta \neq \varnothing$
- $\bullet_3$ $\Upsilon \in [2, \kappa]$。
- $\bullet_4$ 若 $\Theta = \mathrm{Reg} \cap \kappa$，则可以省略它；同样，若 $\Upsilon = 2$。

(A)、(B)、(C)、(E) 同上。(D)′ 任何满足 $j < \kappa$ 的 $\leq_{\mathrm{TR}}$-递增序列 $\langle \mathbf{x}_i : i < j \rangle$ 都有一个上界；但若 $j \in \Theta$，则它有一个最小上界，且满足 $\mathrm{TR}(\langle \mathbf{x}_i : i < j \rangle)$。
(F) 若$j < 1 + \Upsilon$、$\zeta < \kappa$，且对于 $\alpha < \kappa^+$ 和 $\varepsilon < \zeta$，$\mathbf{x}_{\alpha,\varepsilon} \in$ TR，则存在某个递增的序数序列 $\langle \alpha_i : i < j \rangle$，其以上界为 κ^+，并且对每个$\varepsilon < \zeta$，都有

$$\langle \mathbf{x}_{\alpha_i,\varepsilon} : i < j \rangle \in \mathrm{dom}(\mathrm{plus}_{\mathrm{TR}}).$$

$<\kappa$3) 对于 $\langle \mathrm{TR}_s : s \in I \rangle$，其中每个 TR_s 均如 (1A) 或 (2) 所示，我们如下定义 TR $= \prod \mathrm{TR}_s$，即$_{s \in I}$(< κ)-支集积。

(A) $f \in$ TR 当且仅当 $f \in \prod \mathrm{TR}_s$ 对于某个 $J \in [I]^{<\kappa}$.$_{s \in J}$(B) $f \leq_{\mathrm{TR}} g$ 当且仅当 ($f, g \in$ TR 且) (a) dom(f) $\subseteq$ dom(g) (b) 对所有 $s \in$ dom(f), $f(s) \leq_{\mathrm{TR}_s} g(s)$。(C) 设 $f = \langle f_\varepsilon : \varepsilon < \zeta \rangle$，其中 $\zeta < \kappa$.当 (a) 对所有 $\varepsilon < \zeta$, $f_\varepsilon \in$ TR；(b) dom(g) = $\bigcup$ dom(f_ε)$_{\varepsilon < \zeta}$ 时，我们有 plus$_{\mathrm{TR}}$(f) = g。

(c) For all $s \in \mathrm{dom}(g)$, if $u = u_{\bar{f},s} := \{\varepsilon < \zeta : s \in \mathrm{dom}(f_\varepsilon)\}$, then
$g(s) = \mathsf{plus}_{\mathrm{TR}_s}(\langle f_\varepsilon(s) : \varepsilon \in u\rangle)$.

(D) (a) $S_{\mathrm{TR}} := \{(s,\mathbf{x}) : s \in I,\ \mathbf{x} \in S_{\mathrm{TR}_s}\}$(b) 对于 $f \in \mathrm{TR}$，将 $\mathrm{val}(f)$ 定义为定义域为$\{(s,\ \mathbf{x}) : s \in \mathrm{dom}(f),\ \mathbf{x} \in \mathrm{dom}(\mathrm{val}(f(s)))\}$的函数，该函数将 $(s,\ \mathbf{x}) \mapsto$映射为 $\mathrm{val}^{\mathrm{TR}_s}(f(\mathbf{x}))$。

注记 0.8. 1）对于 TR a $(\kappa, \Theta, \Upsilon)$-主干控制器，函数 $\mathrm{plus}_{\mathrm{TR}}$ 不会真正用于长度为 $j \in \kappa \cap \mathrm{Reg} \setminus \Theta$ 的序列；只需存在这样一个值即可。（§5 中有更多说明。）

$<\kappa$2）如果 TR_s 是 $s \in I$ 的一个 κ-主干控制器，那么 $\prod \mathrm{TR}_s$ 不一定保证 是一个$_{s\in I}\kappa$-主干控制器，因为 0.7(1)(D) 可能不成立。

例 0.9. 我们如下定义一个显式的 κ-主干控制器 $\mathrm{TR} = \mathrm{TR}_\kappa$。

(A) 元素集合为 $\{f \in \mathcal{H}(\kappa)$: f 是一个函数$\}$。(B) $\leq_{\mathrm{TR}} := \subseteq$
(C) $\mathrm{plus}_{\mathrm{TR}}(\langle f_i :\ i < j\rangle) = g$ 当且仅当 $\bigwedge_{i<j}[f_i = g \in \mathrm{TR}]$。
(D) $S_{\mathrm{TR}} := \{f \in |\mathrm{TR}|$ 且 $\mathrm{dom}(\mathrm{val}_{\mathrm{TR}}(f)) = \{g \in |\mathrm{TR}| : g \leq_{\mathrm{TR}} f,\ \mathrm{dom}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)\}$，其中 $\mathrm{val}_{\mathrm{TR}}(f)(g) := \begin{cases} 1 & \text{若 } 0 \\ & \text{，否则。} \end{cases}$

断言 0.10. 1) 假设 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$。若 I 是一个集合，且对每个 $s \in I$，TR_s 都是一个 κ-主干控制器，那么$\mathrm{TR} := \prod^{<\kappa} \mathrm{TR}_s$ 是一个 κ-主干控制器，当且仅当对所有 $J \in [I]^{<\kappa}$，$\prod^{<\kappa} \mathrm{TR}_s$ 都是一个 κ-主干$_{s\in I}$ $_{s\in J}$控制器。

2) 在上述情形中，若TR_s 在 s 中为常值，则其积也是一个 κ-主干控制器。

3) TR_κ （例0.9 中的）确实是一个 κ-主干控制器。

4) 每个 κ-主干控制器都是一个$(\kappa$,$\mathrm{Reg} \cap \kappa$,$2)$-主干控制器。

证明。 显而易见。 $\square_{0.10}$

§1. The frame

为了解释我们的框架，我们先聚焦于最简单的版本：$\mathbf{TR}$ 的每个成员都是简单的（见 0.7(1A)），并且每个 $\mathcal{A}_t$ 都是由两两不交集组成的族。

假设 1.1. 在本文余下部分，我们将作如下假设：

1) $\kappa = \kappa^{<\kappa}$

2) $\mathbf{TR}$ 是由 κ-主干控制器的定义构成的非空集合（或类），使得其中任意 $< \kappa$ 个的积都是一个 κ-主干控制器。

3) $\mathbf{TR}$ 是简单的；也就是说，$\mathbf{TR}$ 的每个成员都是一个简单的 κ-主干控制器（见 0.7(1A)）。

但我们可在下文使用 $S_{\rm TR}$ （或 $S_{\mathbf{o}}$）和 $\mathrm{val}_{\mathbf{o}}$ （见 2.5）。

4) $\mathbf{TR}^+ = \mathbf{TR}(+)$ 是 $\mathbf{TR}$ 在长度为 $< \kappa$ 的积下的闭包。

$<\kappa$5) 如果 $(\forall s \in I)[\mathrm{TR}_s \in \mathbf{TR}]$ ，那么 $\prod \mathrm{TR}_s$ 是一个 κ-主干控制器。（注意，这是上述第（2）部分的一个简单推论。）

6) $\mathbf{O}$ 是 $\mathbf{O}_{\mathbf{TR}}$ 的一个子集（或子类）——参见定义 1.2。

定义 1.2. $\mathbf{O}_{\mathbf{TR}}$ 是由以下对象 $\mathbf{o}$ 构成的对象类：[4]

(A) $\mathrm{TR}_{\mathbf{o}} = \mathrm{TR}[\mathbf{o}] = (|\mathrm{TR}_{\mathbf{o}}|, \leq_{\mathbf{o}}$，加上$\mathbf{o}$) 是一个来自 TR 的 κ-主干控制器（因此，根据我们的假设，它是简单的）。**(B)** 原子迫使 $\mathbb{Q}^{\rm at}_{\mathbf{o}} = (Q^{\rm at}_{\mathbf{o}}, \leq^{\rm at}_{\mathbf{o}})$，它是一个强迫概念（即拟序）的定义。**(C) (a)** 函数 $\mathrm{tr}_{\mathbf{o}} : Q^{\rm at}_{\mathbf{o}} \to |\mathrm{TR}_{\mathbf{o}}|$。**(b)** 一个非递减函数 $\sigma_{\mathbf{o}} : |\mathrm{TR}_{\mathbf{o}}| \to [2, \kappa]_{\rm Card}$。**(c)** 一个定义域为 $\mathbb{Q}^{\rm at}_{\mathbf{o}}$、值域为 $\subseteq \mathcal{P}(\mathrm{TR}_{\mathbf{o}})$ 的函数 $A = A_{\mathbf{o}}$。我们可以用 $A_{\mathbf{o},p}$ 代替 $A_{\mathbf{o}}(p)$。（所以，这些同样是函数的定义。）**(D)** [记号：] **(a)** 令 $\sigma_{\mathbf{o}}(p) =: \sigma_{\mathbf{o}}(\mathrm{tr}_{\mathbf{o}}(p))$，其中 $p \in Q^{\rm at}_{\mathbf{o}}$。**(b)** $\lambda_{\mathbf{o}} =: \left(|Q^{\rm at}_{\mathbf{o}}| + \|\mathrm{TR}_{\mathbf{o}}\| + \kappa\right)^{\kappa}$ **(c)** 对于 $\mathbf{O} \subseteq \mathbf{O}_{\mathbf{TR}}$，令 $\lambda_{\mathbf{O}} =: \left(\sum_{\mathbf{o} \in \mathbf{O}} \lambda_{\mathbf{o}}\right)^{\kappa}$。

此外，我们还提出以下要求：$\mathbf{o}$ 的组成部分必须满足这些要求。

(E) (a) 每个 $p \in Q^{\rm at}_{\mathbf{o}}$都是 $\mathcal{H}(\kappa)$ 的子集（或简写为 $\subseteq \mathcal{H}_{<\kappa}(\lambda_{\mathbf{o}})$）。(b) 如果 $p \leq_{\mathbf{o}} q$，那么 $\mathrm{tr}(p) \leq_{\mathrm{TR}[\mathbf{o}]} \mathrm{tr}(q)$。(F) (a) 我们称序列 $\bar{p}$ 为 $\sigma_{\mathbf{o}}$-真正递增，当

$$i < j < \ell g(\bar{p}) \Rightarrow \left[\sigma_{\mathbf{o}}(p_i) < \sigma_{\mathbf{o}}(p_j) \vee \sigma_{\mathbf{o}}(p_i) = \sigma_{\mathbf{o}}(p_j) = \kappa\right].$$

[4] 今后，我们可能会要求 $\mathbf{o}$ 从参数 $v \in W(\mathbf{o})$2 出发具有一个足够绝对的定义——但目前，$W(\mathbf{o}) =: \varnothing$ 就足够了。

(b) 如果 $\delta<\kappa$ 是极限序数，并且 $\bar p=\langle p_\varepsilon:\varepsilon<\delta\rangle$ 是 $\sigma_{\mathbf o}$-真正递增的，那么 $\bar p$有一个 $\le_{\mathbf o}$-最小上界

$$\bigcup\bar p:=\big(\mathsf{plus}_{\mathbf o}(\langle \mathrm{tr}(p_\varepsilon):\varepsilon<\delta\rangle),\bigcup_{\varepsilon<\delta}p_\varepsilon\big).$$

(c) $A_{\mathbf o,p}\subseteq\{\mathrm{tr}(q):q\ge_{\mathbf o}p\}$

(G) Case 1: [$\mathrm{TR}_{\mathbf o}\subseteq\mathcal H(\kappa)$ 对所有 $\mathbf o\in\mathbf O$ 均成立。]

若对所有 $i<i_*<\sigma_{\mathbf o}(\mathbf x)$，$\mathbf x\in\mathrm{TR}_{\mathbf o}$，且 $\mathrm{tr}_{\mathbf o}(p_i)=\mathbf x$，则 $\{p_i:i<i_*\}$ 有一个公共上界 q，满足 $\mathrm{tr}(q)\in\bigcap_{i<i_*}E_{\mathbf o,\,p_i}$。

Case 2: [一般情况下成立。]

若 $\mathbf x_i\in\mathrm{TR}_{\mathbf o}$，$\langle\sigma_{\mathbf o}(\mathbf x_i):i<i_*\rangle$ 为常数，对所有 $i<i_*<\sigma_{\mathbf o}(\mathbf x_0)$，$\mathrm{tr}_{\mathbf o}(p_i)=\mathbf x_i$，且 $\langle\mathbf x_i:i<i_*\rangle\in\mathrm{dom}(\mathrm{plus}_{\mathbf o})$，则 $\{p_i:i<i_*\}$ 有一个公共上界 q（同样满足 $\mathrm{tr}(q)\in\bigcap_{i<i_*}E_{\mathbf o,\,p_i}$）。

(H) [**绝对性：**] 若 $\mathbb R_1\lessdot\mathbb R_2$ 使得 $\mathbb R_1$ 和 $\mathbb R_2/\mathbb R_1$ 是策略性（$<\kappa$）完备的 κ^+-链条件强迫，则

(a) 在$\mathbf V^{\mathbb R_2}$, 定义$\mathbf o$ 满足子句 (A)-(G)。

(b) 在 $\mathbf V^{\mathbb R_2}$ 中，我们有 $\mathbb Q^{\mathbf V[\mathbb R_1]}_{\mathbf o}\subseteq\mathbb Q^{\mathbf V[\mathbb R_2]}_{\mathbf o}$，$\mathrm{tr}^{\mathbf V[\mathbb R_1]}_{\mathbf o}=\mathrm{tr}^{\mathbf V[\mathbb R_2]}_{\mathbf o}$，$\sigma^{\mathbf V[\mathbb R_1]}_{\mathbf o}\subseteq\sigma^{\mathbf V[\mathbb R_2]}_{\mathbf o}$，和 $A^{\mathbf V[\mathbb R_1]}_{\mathbf o}\subseteq A^{\mathbf V[\mathbb R_2]}_{\mathbf o}$。

(c) 如果 $p_1\in\mathbb Q^{\mathbf V[\mathbb R_1]}_{\mathbf o}$，$p_2\in\mathbb Q^{\mathbf V[\mathbb R_2]}_{\mathbf o}$，$\mathbb Q^{\mathbf V[\mathbb R_2]}_{\mathbf o}\models$‘$p_1\le p_2$’，且 $\mathbf y:=\mathrm{tr}(p_2)$，那么存在 $p_3\in\mathbb Q^{\mathbf V[\mathbb R_1]}_{\mathbf o}$，使得 $\mathrm{tr}(p_3)=\mathbf y$ 且 $\mathbb Q^{\mathbf V[\mathbb R_1]}_{\mathbf o}\models$‘$p_1\le p_3$’。

(A) $\eta_{\mathbf o}$ 是函数的 $\mathbb Q^{\rm at}_{\mathbf o}$-名称

$$\big\{(s,\iota)\in S_{\mathbf o}\times 2:(\exists p\in\mathbf G_{\mathbb Q_{\mathbf o}})[\mathrm{val}(\mathrm{tr}(p),s)=\iota]\big\}.$$

以下定义在用于我们的迭代时会更加容易理解。

定义 1.3. 对于 $\mathbf o\in\mathbf O_{\mathbf{TR}}$，我们按如下方式定义 $\mathbb Q_{\mathbf o}=(Q_{\mathbf o},\le_{\mathbf o})$。

(A) 令 $\mathrm{tr}_{\mathbf o}(p):=\mathrm{tr}(p)$，且 $\sigma_{\mathbf o}(p)=\sigma_{\mathbf o}(\mathrm{tr}^p)$。(B) 每个 $p\in Q_{\mathbf o}$ 均具有形式 $(\mathrm{tr}^p,\mathcal F_p)$，其中 $\mathrm{tr}^p=\mathrm{tr}(p)\in\mathrm{TR}_{\mathbf o}$，并且 $\mathcal F_p$是 $Q^{\rm at}_{\mathbf o}$ 的一个成员集合，其基数为 $<\sigma_{\mathbf o}(\mathrm{tr}^p)$，满足（回顾 1.2(F)(c)）$q\in\mathcal F_p\Rightarrow\mathrm{tr}_{\mathbf o}(q)\le_{\mathrm{TR}[\mathbf o]}\mathrm{tr}_{\mathbf o}(p)\in A_{\mathbf o,q}$. (C) 对于 $p,q\in Q_{\mathbf o}$，我们称 $p\le_{\mathbf o}q$ 当且仅当 $\mathrm{tr}(p)\le_{\mathrm{TR}}\mathrm{tr}(q)$ 且[5] $\mathcal F_p\subseteq\mathcal F_q$。(D) 当我们说‘$\langle p_i:i<\delta\rangle$ 在 $\mathbb Q_{\mathbf o}$中是 $\le_{\mathbf o}$-真正递增的’时，意思是它在 $\mathbb Q_{\mathbf o}$ 中递增，并且按照 1.2(F)(a) 中的定义是 $\sigma_{\mathbf o}$-真正递增的。(E) 我们按照定义 1.2 定义 $\eta_{\mathbf o}$。（稍微滥用一下记号，我们将~不区分这两种用法。）

断言 1.4. 假设 $\mathbf o\in\mathbf O_{\mathbf{TR}}$。

1） $\mathbb Q_{\mathbf o}$ 是一个策略性（$<\kappa$）-完备的 κ^+-*cc* 强迫。

2）假设 $(\forall\mathbf o\in\mathbf{TR})\big[\mathrm{TR}_{\mathbf o}\subseteq\mathcal H(\kappa)\big]$（或者 只需假设对每个 $\mu<\kappa$，集合$\{s\in\mathrm{TR}_{\mathbf o}:\sigma_{\mathbf o}(s)\ge\mu\}$ 等于 $\bigcup_{\varepsilon<\kappa}Y_\varepsilon$，使得[6] $\bar t\in{}^{\mu>}Y_\varepsilon\Rightarrow\bar t\in\mathrm{dom}(\mathrm{plus}_{\mathbf o})$）。

[5]为什么不直接说“对每个 $r_1\in\mathcal F_p$，都存在 $r_2\in\mathcal F_q$，使得 $r_1\le_{\mathbf o}r_2$? ”这样我们只能得到（$<\kappa$）-策略完备性。[6]一个典型情形是，$\mathrm{tr}(\sigma_{\mathbf o}\ s=\{\sigma_{\mathbf o}\ s\restriction\{\alpha\}\ \ \alpha\in s\})$ 是从某个集合到（）的函数，并且TR（）min（）：dom（）。

对每个 $\mu<\kappa$，都存在 $\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}$ 的一个稠密开子集，它是由κ 个集合的并组成，并且任意一个集合中的任意 $<\mu$ 个元素都有一个公共上界。

3) 如果 $\delta<\kappa$ 是一个极限序数，并且 $\bar{p}=\langle p_i:\ i<\delta\rangle$ 在 $\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}$中确实是 $\leq_{\mathbf{o}}$-递增的，那么$\bar{p}$ 有一个 $\leq_{\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}}$-最小上界（记为 p_δ），使得

- $\mathrm{tr}(p_\delta)=\mathsf{plus}_{\mathrm{TR}_{\mathbf{o}}}(\langle \mathrm{tr}_{\mathbf{o}}(p_i):i<\delta\rangle)$
- $\mathcal{F}_{p_\delta}=\bigcup\limits_{i<\delta}\mathcal{F}_{p_i}$.

4) 如果 $p_i\in Q_{\mathbf{o}}$、$\mathrm{tr}_{\mathbf{o}}(p_i)=\mathbf{x}_i$ 对于 $i<i_*$、$\langle \mathbf{x}_i:\ i<i_*\rangle\in$ 定义域(plus$_{\mathbf{o}}$)，并且 ~~$i_*\leq$~~ $\sigma_{\mathbf{o}}(\mathbf{x}_0)$，那么存在一个 $\mathbf{y}\in \mathrm{TR}_{\mathbf{o}}$，使得 $\big(\mathbf{y}\ \bigcup\ \mathcal{F}_{p_i}\big)\in Q_{\mathbf{o}}$ 是$i<i_*$的公共上界 $\{p_i:\ i<i_*\}$ 在 $\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}$中。

5) 集合 $\{p\in Q_{\mathbf{o}}:\ |\mathcal{F}_p|\leq 1\}$ 在 $\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}$中是稠密的。

证明。 显然。例如，对于第 (1) 部分，

1) [**($<\kappa$)-完备：**] 显然。

[κ^+-**链条件：**]

对每个 $p\in\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}$ $\nu=\nu_p\in\langle p_\alpha\ \alpha<\kappa^+\rangle$ $p\ \leq_{\mathrm{TR}_{\mathbf{o}}}\ p_{\mu\cdot|\mathcal{F}_p|}$ $\sigma_{\mathbf{o}}\ p\ >_{\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}}\ p_\alpha\ \alpha=$，选取 TR，使得 tr( ) x且 (x)。假设 : 是 的成员序列，并且 x..x对于$\alpha<\kappa^+$。

由 TR$_{\mathbf{o}}$ 的要求，存在 $\alpha_0<\ldots<\alpha_{n-1}$(对于 $n\geq 2$)，使得 plus$_{\mathbf{o}}$($\langle \mathbf{x}^{\alpha_\ell}:\ell<n\rangle$) 定义良好，因此显然 $\{p_{\alpha_\ell}:\ \ell<n\}$ 有一个公共上界 q，使得 tr(q) 是 $\langle \mathbf{x}^{\alpha_\ell}:\ell<n\rangle$ 的最小上界。$\square_{1.4}$

断言 1.5。1) 如果 $\mathbf{o}\in\mathbf{O}$，那么任何长度为 $<\kappa$ 的 $\sigma_{\mathbf{o}}$-严格递增序列都有一个最小上界。（见1.2(G)(c),(d)。）

2）若对 $s\in I$ 有 $\mathbf{o}_s\in\mathbf{O}$ （或仅有 $\mathbf{o}_s\in\mathbf{O}^+$），则自然定义的 $\mathbf{o}:=\prod\limits^{<\kappa}_{s\in I}\mathbf{o}_s$ $<\kappa$属于 $\mathbf{O}^{\mathbf{TR}}(+)$，且 $\mathrm{TR}_{\mathbf{o}}=\prod\limits_{s\in I}\mathrm{TR}_s$。

3）假设 $\mathbf{o}\in\mathbf{O}$。

(A) （x $\mathcal{F}$） $\in\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}$当且仅当（$a$）x $\in$TR$_{\mathbf{o}}$ （b） $|\mathcal{F}|<\sigma_{\mathbf{o}}$（x） （$c$） $f\in\mathcal{F}\Rightarrow$ (x $\{f\}$) $\in\mathbb{Q}^{\mathrm{at}}_{\mathbf{o}}$。 ($B$) （x1, $\mathcal{F}_1$） $\leq_{\mathbf{o}}$ （x2, $\mathcal{F}_2$）当且仅当（a）（x1, $\mathcal{F}_1$），（x2, $\mathcal{F}_2$） $\in\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}$（$b$） $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2$（$c$） $f\in\mathcal{F}_1\Rightarrow$ (x1, $\{f\}$) $\leq_{\mathbf{o}}$ (x2, $\{f\}$)。

证明。很简单。 $\square_{1.5}$

例1.6. 1) 令$\mathbf{n}$ 和$\mathbb{Q}^2_{\mathbf{n}}$ 如 [HS，定义2.5]中所述。

(A) 我们如下定义一个 $\aleph_0$-主干控制器 TR $=\mathrm{TR}_{\mathbf{n}} = \mathrm{TR}[\mathbf{n}]$。(a) $\kappa_{\mathrm{TR}} = \kappa$ (b) $\mathrm{TR}_{\mathbf{n}}$ 的元素集为 $T_{\mathbf{n}}$（如 [HS]中所述）。(c) $\sigma_{\mathrm{TR}_{\mathbf{n}}}$ 将是函数 $\eta \mapsto \mu_\eta$（同样，参见该处）。

(B) 我们定义 $\mathbf{O}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{o}} = \{\mathbf{o} : \mathbb{Q}_{\mathbf{o}} = \mathbb{Q}^2_{\mathbf{n}}\}$（因此它是一个单元素集），而 $\mathbf{O}_{1067}$ 将是所有$\mathbf{O}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{o}}$-s 的并集，其中$\mathbf{n}$ 如 [HS，定义 2.5] 所述。

2）设 κ 为不可达基数，并令 $\mathbb{Q}_{\bar\lambda}$ 按照 [She23，0.2$_{=\mathrm{Lz23}}$] 中的方式定义（但那里是 $\lambda_\eta := \theta_{\ell g(\eta)}$）。它将具有 $\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}$ 的形式，其中 $\mathbf{o} = \mathbf{o}_{\bar\lambda} \in \mathbf{O}^{\mathbf{TR}}_{\mathbf{o}}$。
更完整地说，

- $\bullet_1$ $\bar\lambda = \langle \lambda_\eta, \lambda^0_\eta, D_\eta : \eta \in \mathcal{T}\rangle$
- $\bullet_2$ $\mathcal{T} := \{\eta \in {}^{\kappa>}\kappa : \varepsilon < \ell g(\eta) \Rightarrow \eta(\varepsilon) < \lambda_{\eta\restriction\varepsilon}\}$
- $\bullet_3$ 若 $\eta \neq \nu \in \mathcal{T}$，则 $\lambda_\eta \neq \lambda_\nu$。
- $\bullet_4$ 若 $\ell g(\eta) < \ell g(\nu)$，则 $\lambda_\eta < \lambda^0_\eta \le \lambda_\nu < \kappa$。
- $\bullet_5$ 若 $\eta \in \mathcal{T}$，则共尾性$(\lambda_\eta) \ge \lambda^0_\eta =$ 共尾性$(\lambda^0_\eta) > \prod_{\nu} \lambda_\nu$。
- $\bullet_6$ D_η 是 λ^0_η-完备一致滤子，定义在 λ_η上（自然也定义在 $A \in [\lambda_\eta]^{<\lambda_\eta} \Rightarrow \lambda_\eta \setminus A \in D_\eta$上）。

现在我们来着手定义 $\mathbf{o} = \mathbf{o}_{\bar\lambda}$。

(A) TR $= \mathrm{TR}_{\bar\lambda} = \mathrm{TR}[\lambda]$ 定义如下。(a) $\kappa_{\mathrm{TR}} := \kappa$ (b) $|\mathrm{TR}| := \{\eta \in {}^{\kappa>}\kappa : \varepsilon < \ell g(\eta) \Rightarrow \eta(\varepsilon) < \lambda_{\eta\restriction\varepsilon}\}$ (c) $\sigma_{\mathrm{TR}}(\eta) := \lambda^0_\eta$。 (B) $p \in \mathbb{Q}^{\mathrm{at}}_{\bar\lambda}$ 当且仅当 (a) p 是 TR 的一个 $(<\kappa)$-完备子树。(b) $\mathrm{tr}(p)$ 是 p的树干。(c) 若 $\mathrm{tr}(p) \trianglelefteq \eta \in p$，则 $\{\alpha < \lambda_\eta : \eta^\frown\langle\alpha\rangle \in p\} \in D_\eta$。 (C) $p \le_{\mathbb{Q}_{\bar\lambda}} q$ 当且仅当 $p \supseteq q$。

—

3) 假设 κ 是不可达基数，并设 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\bar\lambda}$ 是 $({}^{\kappa>}\kappa, \lhd)$ 的一棵子树（因此它对初始段封闭，且包含 $\langle\rangle$）。进一步假设 $\mathcal{T}$没有极大节点，并且对长度为 $<\kappa$ 的 $\lhd$-递增链的并集封闭。

设 $\bar\lambda = \langle \lambda_\eta, \lambda^0_\eta, D_\eta : \eta \in \mathcal{T}\rangle$ 满足‘$\eta \in \mathcal{T} \Rightarrow (A)_\eta \vee (B)_\eta$’，其中

$(A)_\eta$ $\lambda_\eta = \lambda^0_\eta = 1$ 且 $D_\eta = \{0\}$。$(B)_\eta$ λ^0_η 是一个无限正则基数 $\le \lambda_\eta < \kappa$，而 D_η 是 λ_η 上的一个 λ^0_η-完备滤子。

此外，我们要求条件 (2) $\bullet_2$ 成立。

现在按条件 (2) 定义 $\mathbf{o}_{\bar\lambda}$。

当其如上所述时，我们称 λ（或 $\mathcal{T}_{\bar\lambda}$，或 $\mathbf{o}_{\bar\lambda}$）为一个 κ-候选对象。

4) 当除上述条件外还满足以下条件时，我们称 λ（以及 $\mathbf{o}_{\bar\lambda}$）是 κ-活跃的：

- For every $\eta \in \lim(\mathcal{T})$, the set
$\{\delta < \kappa : \lambda_{\eta\restriction\delta} > 1$ and $(\forall \nu \in \mathcal{T} \cap {}^{\delta}\kappa)[\nu \neq \eta \restriction \delta \Rightarrow \lambda_{\eta\restriction\delta} < \lambda_\nu \vee \lambda_\nu = 1]\}$
is stationary.
- If $\eta, \nu \in \mathcal{T}$ with $\ell g(\eta) < \ell g(\nu)$, then $\lambda_\nu \neq 1 \Rightarrow \lambda_\eta < \lambda^0_\nu$.

观察 1.7。 如果 κ 是不可达基数（或弱不可达基数）且 $\diamondsuit_\kappa$ 成立，那么存在一个 κ-活跃的 λ。

注记 1.8。 我们将在§3中回到这个例子。

定义 1.9。 0) 令$\mathbf{M}$为组合模板（下文定义）的类。

1) 一个组合模板（或 CT）$\mathbf{m}$ 由以下部分组成:

(a) 一个线性序 $L_{\mathbf{m}}$ （我们也可以使用"偏序"；这对我们的目的而言其实无关紧要）。我们可以用 $s \in \mathbf{m}$ 代替 $s \in L_{\mathbf{m}}$，或用 $s <_{\mathbf{m}} t$ 代替 $s <_{L_{\mathbf{m}}} t$。(b) $\bullet_1$ $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}_t : t \in L_{\mathbf{m}} \rangle$ （称为记忆），其中 $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{P}(L_{\mathbf{m},t})$ 对每个 $t \in L_{\mathbf{m}}$ 和 $L_{\mathbf{m},t} := \{s \in L_{\mathbf{m}} : s <_{L_{\mathbf{m}}} t\}$ 都成立。

$\bullet_2$ 我们记 $\mathcal{A}_{\mathbf{m}} := \bigcup_{t \in L_{\mathbf{m}}} \mathcal{A}_t$。

(c) 每个 $\mathcal{A}_t$ 都是 $L_{\mathbf{m}}$ 的子集族，t 满足 $\varnothing \in \mathcal{A}_t$。我们令 $\mathcal{A}^+_t := \mathcal{A}_t \setminus \{\varnothing\}$。

2) 对于$\mathbf{m} \in \mathbf{M}$，我们添加新对象 $t(+)$，其中所有 $t \in L_{\mathbf{m}}$ 都如此，并添加 ∞，并如下定义$L^+_{\mathbf{m}}$,$L_{\mathbf{m},x}$,$L^+_{\mathbf{m},x}$ 等。

(a) $L^+_{\mathbf{m}} := \{t, t(+) : t \in L_{\mathbf{m}}\} \cup \{\infty\}$(b) 自然地，$\langle t : t \in L_{\mathbf{m}} \rangle^\frown \langle t(+) : t \in L_{\mathbf{m}} \rangle^\frown \langle \infty \rangle$ 没有重复。(c) $<_{L^+_{\mathbf{m}}}$ 是集合$\{t < t(+) : t \in L_{\mathbf{m}}\} \cup \{s(+) < t : s <_{L_{\mathbf{m}}} t\} \cup \{t(+) < \infty : t \in L_{\mathbf{m}}\}$.在序意义下的闭包。(d) 对于 $t \in L^+_{\mathbf{m}}$，令 $L_{\mathbf{m},t} := \{s \in L_{\mathbf{m}} : s <_{L^+_{\mathbf{m}}} t\}$ 并

$$L^+_{\mathbf{m},t} := \{s \in L^+_{\mathbf{m}} : s <_{L^+_{\mathbf{m}}} t\}.$$

3) 对于 $L \subseteq L_{\mathbf{m}}$，我们定义 $\mathbf{m} \restriction L \in \mathbf{M}$ 如下。

- $\bullet_1$ $L_{\mathbf{m}\restriction L} := L$
- $\bullet_2$ $\mathcal{A}^{\mathbf{m}\restriction L}_t := \mathcal{A}^{\mathbf{m}}_t \cap \mathcal{P}(L)$.

4) 对于 $t \in L^+_{\mathbf{m}}$，令 $\mathbf{m} \restriction t := \mathbf{m} \restriction L^+_{\mathbf{m},t}$。

5) 当满足以下条件时，我们称 π 是一个从 $\mathbf{m}_1$ 到 $\mathbf{m}_2$ 的同构（对于 $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathbf{M}$）：

$$\pi : L_{\mathbf{m}_1} \to L_{\mathbf{m}_2}$$

对于每个 $t \in L_{\mathbf{m}_1}$，它都是一个将 $\mathcal{A}^{\mathbf{m}_1}_t$ 映射到 $\mathcal{A}^{\mathbf{m}_2}_{\pi(t)}$ 的保序满射。

注记 1.10。 若 $t \in L_{\mathbf{m}}$ 且 $L \subseteq L_{\mathbf{m}}$，我们可以滥用记号，用 L_t 代替 $L \cap L_{\mathbf{m},t}$。

定义 1.11。 我们在组合模板类上定义一个二元关系 $\leq_{\mathbf{M}}$ （显然是一个偏序）：

$$\mathbf{m}_1 \leq_{\mathbf{M}} \mathbf{m}_2 \text{ iff}$$

(a) $L_{\mathbf{m}_1} \subseteq L_{\mathbf{m}_2}$ 作为线性序。(b) $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 使用相同的 ∞ 以及相同的 $t(+)$，对所有 $t \in L_{\mathbf{m}_1}$。(c) $t \in L_{\mathbf{m}_1} \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{m}_1,t} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{m}_2,t}$

断言 1.12。 1) $\leq_{\mathbf{M}}$ 确实是 $\mathbf{M}$ 上的一个偏序。
2) 如果 $\langle \mathbf{m}_\varepsilon : \varepsilon < \delta \rangle$ 是 $\leq_{\mathbf{M}}$-递增的，那么$\mathbf{m} := \bigcup \mathbf{m}_\varepsilon$ （按自然方式定义的）存在，是$\varepsilon<\delta$一个 $\leq_{\mathbf{M}}$-最小上界，并且是唯一的。特别地，

$\boxplus_2$ (a) $t \in L_{\mathbf{m}}$ 当且仅当 $(\exists \varepsilon < \delta)[t \in L_{\mathbf{m}_\varepsilon}]$。 (b) $s <_{\mathbf{m}} t$ 当且仅当 $(\exists \varepsilon < \delta)[s,t \in L_{\mathbf{m}_\varepsilon} \wedge s <_{\mathbf{m}_\varepsilon} t]$。 (c) $\zeta < \delta \wedge t \in L_{\mathbf{m}_\zeta} \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{m},\,t} = \bigcup \mathcal{A}_{\mathbf{m}_\varepsilon,\,t}$。 $\varepsilon \in [\zeta,\delta)$

3) 存在一个 $\leq_{\mathbf{M}}$-极小元素 $\mathbf{M}$。（具体而言，它是一个 $\mathbf{m}$，满足 $L_{\mathbf{m}} = \varnothing$。）

4) $(\mathbf{M} \leq_{\mathbf{M}})$ 具有 *amalgamation*，因而具有联合嵌入性质。此外，如果 $\mathbf{m}_0 \leq \mathbf{m}_\ell$ 对于 $\ell = 1$、2 以及（为清晰起见） $L_{\mathbf{m}_0} = L_{\mathbf{m}_1} \cap L_{\mathbf{m}_2}$成立，那么 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 在 $\mathbf{m}_0$ 之上具有一个典范 amalgamation ——将其记为$\mathbf{m}_*$。
我们的意思是

$\boxplus_4$ (a) $\mathbf{m}_* \in \mathbf{M} \wedge \mathbf{m}_1 \leq_{\mathbf{M}} \mathbf{m}_* \wedge \mathbf{m}_2 \leq_{\mathbf{M}} \mathbf{m}_*$
(b) $s \in L^+_{\mathbf{m}_*}$ *iff* $s \in L^+_{\mathbf{m}_1} \cup L^+_{\mathbf{m}_2}$
(c) $L^+_{\mathbf{m}_*} \models$ '$r <_{\mathbf{m}} s$' *iff* '$\bullet_0 \vee \bullet_1 \vee \bullet_2$,' *where*
$\bullet_0$ $L_{\mathbf{m}_\ell} \models$ '$s < t$' *for some* $\ell \in \{0,1\}$.
$\bullet_1$ $\big(\exists t \in L_{\mathbf{m}_0}\big)\big(\exists k, \ell \in \{1,2\}\big)\big[r \leq_{\mathbf{m}_\ell} t \wedge t \leq_{\mathbf{m}_k} s \wedge r \neq s\big]$
$\bullet_2$ $r \in L^+_{\mathbf{m}_1} \setminus L^+_{\mathbf{m}_0}$, $s \in L^+_{\mathbf{m}_2} \setminus L^+_{\mathbf{m}_0}$, *and*
$(\forall t \in L^+_{\mathbf{m}_0})[t <_{\mathbf{m}_1} r \wedge t <_{\mathbf{m}_2} s]$.

(d) $\mathcal{A}_{\mathbf{m},s} = \begin{cases} \mathcal{A}_{\mathbf{m}_\ell,s} & \text{if } \ell \in \{1,2\} \wedge s \in L_{\mathbf{m}_\ell} \setminus L_{\mathbf{m}_0} \\ \mathcal{A}_{\mathbf{m}_1,s} \cup \mathcal{A}_{\mathbf{m}_2,s} & \text{if } s \in \mathcal{A}_{\mathbf{m}_0} \end{cases}$

证明。 1）显然。

2）直接可得。

3）平凡。

4) 我们必须检查定义1.9(1)中的所有条款，以验证'$\mathbf{m}_* \in \mathbf{M}$'，以及1.12中的所有条款，以验证$\mathbf{m}_\ell \leq_{\mathbf{M}} \mathbf{m}_*$。

$\mathbf{m}_* \in \mathbf{M}$:

第1.9(1)(a)、(b)条： 显然：这些只是定义和记号。

第(c)条： 也是一个定义；显而易见。

$\underline{\mathbf{m}_\ell \leq_{\mathbf{M}} \mathbf{m}_*}$（对于 $\ell \leq 2$）。第 1.11(a)-(c) 条都显而易见。$\square_{1.12}$

§2. Investigating $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$

定义 2.1。$\mathbf{P_m}$ 是<m>-ATI（见下文）的类，并且

$$\mathbf{P} := \bigcup_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}} \mathbf{P}_{\mathbf{m}}.$$

（ATI 是抽象模板迭代的缩写。）

定义 2.2。对于$\mathbf{m}$ 组合模板，我们称$\mathbf{p}$ 为$\mathbf{m}$-ATI，当它由以下对象构成时 ____

⊞ (a) $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ （我们可以用 $L_{\mathbf{p}}$ 和 $L_{\mathbf{p},t}$ 代替 $L_{\mathbf{m}}$ 和 $L_{\mathbf{m},t}$，等等。）(b) 对于 $s \in L^+_{\mathbf{p}}$ 的强迫概念 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{P}_s$。(c) $\mathbf{o}_t \in \mathbf{O}_{\rm TR}$ （一个对象，而不是一个名称），$\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_t$，以及对于 $t \in L_{\mathbf{p}}$ 的 $\underset{\sim}{\eta}_t$。我们令 $S_t = S[t] := S_{\mathbf{o}_t}$。(d) $\mathrm{TR}_t = (\mathrm{TR}^{\mathbf{o}_t}, \le_{\mathbf{o}_t},$ 加上$\mathbf{o}_t) = (\mathrm{TR}_t, \le_t,$ 加上$t)$ 来自 $\mathbf{V}$。

我们要求满足以下条件：

$<\kappa$(A) $\prod \mathrm{TR}^{\mathbf{o}_t}$ 是一个 κ主干控制器。$_t$(B) (a) $\langle \mathbb{P}_s : s \in L^+_{\mathbf{p}} \rangle$ 关于 s 是 $<$-递增的。(b) 此外，我们要求 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\infty}$。(c) $\underset{\sim}{\eta}_t$ 是 $^{S[t]}2$的一个成员的 $\mathbb{P}_{t(+)}$-名称，[7] 并且$\underset{\sim}{\bar{\eta}} := \langle \underset{\sim}{\eta}_t : t \in L_{\mathbf{p}} \rangle$。

(C) 我们要求 $p \in \mathbb{P}$ 当且仅当满足以下条件：(a) p 是一个函数，其定义域为 $\mathrm{dom}(p) \in [L_{\mathbf{p}}]^{<\kappa}$。(b) 对于 $s \in \mathrm{dom}(p)$，$p(s)$是 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_s$ 中形如 $(\mathrm{tr}_{p(s)}, \mathcal{F}_{p(s)})$ 的一个成员的 $\mathbb{P}_s$-名称。(c) $\mathrm{tr}_{p(s)} \in \mathrm{TR}_t$ 是一个对象，而不仅仅是一个 $\mathbb{P}_s$-名称。(d) $\mathcal{F}_{p(s)} := \{p_{s,A} : A \in \mathcal{A}_{p(s)}\}$，其中 $|\mathcal{A}_{p(s)}| < \kappa$ 不过，略微滥用我们的记号，我们允许 $A_1 = A_2$，但$p_{s,A_1} \neq p_{s,A_2}$（不过仍然也要有 $|\mathcal{F}_{p(s)}| < \kappa$）。(e) $\mathfrak{C}_{p(s)} \subseteq [\mathcal{A}_s]^{<\sigma(\mathrm{tr}_{p(s)})}$（见下文条款(G)(b)），并且其中 $t^{p_s}_{j^{A}} = t[j, p_{s,A}] \in {}^{\kappa}A$ 以及 $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{s,A} = \mathrm{B}_{p,s,A}$，我们提出以下要求：

$$p_{s,A} = \mathbf{B}(\ldots, \underset{\sim}{\eta}_{t[j,p_{s,A}]}(\varepsilon_j^{p_{s,A}}), \ldots)_{j < j_{p_{s,A}}}$$

- $t^{p_{s,j}{}^{A}} \in A$，$\varepsilon^{p_s}{}_{,j}{}^{A} \in S_{t_j}$ 以及 $j_{p_{s,A}} \le \kappa$。
- $\mathbf{B}$是一个 κ-博雷尔函数[8]，从 映射到 S_s，且其像的基数为 $\le \kappa$。更具体地说，存在（在$\mathbf{V}$中）一个$S'_{p_{s,A}} \in [S_s]^{\le \kappa}$，它包含$\mathbf{B}$的像。

$$\prod_{j < j_{p_{s,A}}} S_{t[j,p_{s,A}]}$$

- $\mathrm{tr}_{p_{s,A}} \le_{\mathrm{TR}_t} \mathrm{tr}_{p(s)}$.
- 若 $A \in \mathcal{A}_{p(s)}$，则 $p \restriction L_s \Vdash_{\mathbb{P}_s}$ “$\mathrm{tr}_{p(s)} \in \mathcal{E}_{p_{s,A}}$”。

---

[7]因此，在简单情形下（这是我们目前采用的情形），它将等于 $\mathrm{TR}^t 2$。[8]也就是说，这是一个函数，其中 S_s 中每个元素的原像都是一个 $\le \kappa$-博雷尔集。（这里的关键在于绝对性。）

(f) $S = S_{\mathbf{p}} \coloneqq \bigcup_{t \in L_{\mathbf{p}}} S_t$.

(D) (a) 给定 $p \in \mathbb{P}$ 和 $s \in \mathrm{dom}(p)$，令 $\mathrm{supp}(p(s))$ 表示在博雷尔函数 $p(s)$ 中用到的所有坐标的集合（即 $t^{p_s}{}_{\cdot\, j}{}^{A}$-s）。因此 $|\mathrm{supp}(p(s))| \leq \kappa$。

(b) 对于 $p \in \mathbb{P}$，我们定义 $\mathrm{supp}(p) \coloneqq$ 定义域$(p) \cup \bigcup_{\in [L_{\mathbf{p}}]^{\leq \kappa}.s \in \text{定义域}(p)}$ 支撑集$(p(s))$

(c) 注意，$\mathrm{supp}(p) \subseteq L_{\mathbf{p},\ t}$ 当 $\mathrm{dom}(p) \subseteq L_{\mathbf{p},\ t}$（即当 $p \in \mathbb{P}_t$）。

(d) 对于 $L \subseteq L_{\mathbf{p}}$，我们令 and $\mathbb{P}_s \coloneqq \mathbb{P}_{L_{\mathbf{m},s}}$.(e) 若 $\ell = 1, 2$, $s \in I$, $\mathrm{dom}(p^\ell) = \{s\}$, 且 $p^\ell \left(\mathrm{x}_\ell, \{\mathrm{B}(\ldots \underset{\sim}{\eta}_{t[j_{(p^\ell)_{s,A_\ell}}]}(\varepsilon_{[(p^\ell)_{s,A_\ell}]}) \ldots)^{i<j_{(p^\ell)_{s,A_\ell}}}\}\right)$ 如上文第

$\mathbb{P}_L \coloneqq \mathbb{P} \restriction \{p \in \mathbb{P} : \mathrm{supp}(p) \subseteq L\}$.

(C)(e)条所述，则存在某个 κ-博雷尔函数 $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}2,t}(\ldots, \underset{\sim}{\eta}_{t_{1,i}}(\varepsilon_{1,i}) \ldots; \ldots, \underset{\sim}{\eta}_{2,j}(\varepsilon_{2,j}) \ldots)_{j<\iota_2}^{i<\iota_1}$，它从 $\{t_{\ell,i} : \ell \in \{1,2\}$ 和 $i < \iota_\ell\}$ 到 $\{0,1\}$，给出“$p^1 \leq_{\mathbb{Q}_t} p^2$”的真值。~

(E) 对于 $L \subseteq L_{\mathbf{m}}$ 和 $p \in \mathbb{P}$，我们定义 $p \restriction L$ 表示

(a) 定义域$(p \restriction L) \coloneqq$ 定义域$(p) \cap L$

(b) 对定义域中的所有 s，

$$(p \restriction L)(s) \coloneqq \left(\mathrm{tr}_{p(s)}, \left\{p_{s,A} : A \in \mathcal{A}_{p(s)} \cap \mathcal{P}(L)\right\}\right).$$

(F) 对于 $t \in L_{\mathbf{p}}$,

(a) $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_t$ 是 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_{\mathbf{o}_t}$的 $\mathbb{P}_t$-名称。(b) 若 $p \in \mathbb{P}_t$，则 $\mathrm{dom}(p) \subseteq \mathrm{supp}(p) \in [L_{\mathbf{p},t}]^{\leq \kappa}$。[由此可得。](c) $\mathbb{P}_t$（对于 $A \in \mathcal{A}_{\mathbf{p}}$ 和 $L \subseteq L_{\mathbf{m}}$，$\mathbb{P}_A$ 和 $\mathbb{P}_L$）（$< \kappa$）-完备的κ^+-cc 强迫概念。[9](d) $\underset{\sim}{\eta}_t$ 是 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_t$ 的泛型（我们可以将其视为子集 $\underset{\sim}{\eta}_t^{-1}(\{1\}) \subseteq S_t$）。

(G) (a) 注意，$A \in \mathcal{A}_{\mathbf{m},s}$的 $\mathbb{P}_A$-泛型滤子使我们能够求出 $r \in A$的 $\mathbb{P}_{r(+)}$-名称 η_r 的值，从而得到 κ-博雷尔函数$\underset{\sim}{p}_{s,A}$的值。这样我们就得到该值的一个 $\mathbb{P}_s$-名称，可以将其写作$p_{s,A}[\mathbf{G}_{\mathbb{P}_A}]$，或者写作 $p(s)(\underset{\sim}{\bar{\eta}} \restriction A)$。(b) 我们要求 $\underset{\sim}{\eta}_t^{-1}(\{1\}) = \bigcup\{\mathrm{val}_t(\mathrm{tr}^{p(t)}) : p \in \mathbf{G}_{\sim \mathbb{P}_{t(+)}}\}$（回顾定义 0.7(1)(F)）。(c) 若 $\kappa \coloneqq \aleph_0$，则我们要求对每个 $p \in \mathbb{P}_t$ 和 $m < \kappa$，都存在一个 $q > p$，使得对所有 $s \in \mathrm{dom}(q)$，均有 $|\mathcal{F}_{q(s)}| \cdot m < \sigma_{\mathbf{o}_s}(\mathrm{tr}(q(s)))$。

（H）我们要求 $p < q$ in[10] $\mathbb{P}$ 当且仅当

（a）定义域$(p) \subseteq$ 定义域(q)

(b) 若 $s \in$ 属于p的定义域，则 $\mathrm{tr}_{p(s)} \leq_{\mathbf{o}_s} \mathrm{tr}^{q(s)}$, $\sigma_{\mathbf{o}_s}(\mathrm{tr}^{p(s)}) < \sigma_{\mathbf{o}_s}(\mathrm{tr}^{q(s)})$, 且$\mathcal{F}_{p(s)} \subseteq \mathcal{F}_{q(s)}$。

---

[9] κ^+-cc 可由条款（B）（a）推出。[10]是的！不是“$p \leq q$！”

(注意，对于 $p \in \mathbb{P}$ 和 $s \in L^+_{\mathbf{p}}$，根据条款 (E)，我们有‘$p \restriction L_{\mathbf{p},\ s} \in \mathbb{P}_s$’。)
另请注意，这是一项要求，而不是定义，这不同于经典情形。

（I）处理不同的 ATI 时，我们可以不使用 $\mathbb{P}$、 $\leq$、 $\mathbb{P}_t$、 S_t、 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_t$ 等写法，而写作 $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$、 $\leq_{\mathbf{p}}$、 $\mathbb{P}_{\mathbf{p}、t}$、 $S_{\mathbf{p}、t}$、 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_{\mathbf{p}、t}$ 等，以表示我们指的是相应$\mathbf{p}$的分量。

注记 2.3。 1）回想一下， $L_{\mathbf{p}}$ 只是一个线性序，而不一定是良序。更具体地说，我们甚至不排除这样的可能性：

- There is an infinite sequence $(s_n)_{n\in\omega}$ with $s_{n+1} \in A_n \in \mathcal{A}_{s_n}$.

（不同于 [She04], [She]）。

2）因此：给定 $L_{\mathbf{m}}$ 以及对于 $s \in L_{\mathbf{m}}$ 的一列（ $\mathbb{Q}_s$ 的定义），既不清楚是否存在如上所述的迭代 $\mathbb{P}$ ，也不清楚它是否唯一。

（相比之下，通常的强迫迭代假设指标集是良序的，并且我们总能从迭代因子序列得到定义良好的迭代。）

3）但是，如果$\mathbf{m}$ 不满足第（1）部分项目符号中的要求（因此 $L_{\mathbf{m}}$ 如 [She04，第2] 节中所述），那么它是唯一的。

4）以下断言成立：

⊛ If $A \in \mathcal{A}_t$ then $\Vdash_{\mathbb{P}_{\mathbf{p}}}$ “$\underset{\sim}{\eta}_t$ is generic for $(\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}, \underset{\sim}{\eta}_{\mathbf{o}})$ over $\mathbf{V}[\underset{\sim}{\bar{\eta}} \restriction A]$”.

断言 2.4。 1）如果$\mathbf{p} \in \mathbf{P}$，那么 $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$ 是 κ^+-*cc*的，并且是（$<\kappa$）-完备的。

2）在定义2.2中， $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_t$、 S_t和TR_t 可由其他对象推导得到。

3）任何 $\leq_{\mathbb{P}_{\mathbf{p}}}$-递增的[11] 序列 $\bar{p} = \langle p_\varepsilon : \varepsilon < \delta\rangle$ （其中 $\delta < \kappa$）都有一个 $\leq_{\mathbb{P}_{\mathbf{p}}}$-最小上界lim（$\bar{p}$）。

证明。 1) ($<\kappa$)-完备：

设 $\delta < \kappa$ 是一个极限序数，且 $\bar{p} = \langle p_i : i < \delta\rangle$ 在 $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$中递增。

回顾定义 2.2(H)(b)，我们知道，要么 $\bar{p} \restriction [j, \delta)$对某个$j < \delta$ 是常数，要么 $\bar{p} \restriction u$ 对某个无界的 $u \subseteq \delta$是$<_{\mathbb{P}_{\mathbf{p}}}$-递增的。第一种情况下， p_j 是一个最小上界。后一种情况下，

$\boxplus_1$ 对于每个 $\varepsilon \in u$ 和 $s \in \mathrm{dom}(p_\varepsilon)$,

$$\Vdash_{\mathbb{P}_s} \text{“}\langle p_\zeta(s) : \zeta \in u\rangle \text{ is truly } \leq_{\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_{\mathbf{o}_s}}\text{-increasing”}$$

（如条款 (3) 中脚注所定义）。

将函数 p_δ =lim($\bar{p}$) 定义如下：

$\boxplus_2$ (a) 定义域(p_δ) $:= \bigcup_{i<\delta}$ 定义域(p_i)

[11]如果我们通过从 . (H)(b) 中删除要求“ $\sigma_{\mathbf{o}_s\ \ p(s)} < \sigma_{\mathbf{o}_s\ \ q(s)}$ 2 2 (tr) (tr)”来弱化序，会发生什么？那么我们就必须把它作为这条陈述的一个限定条件加进去——也许可以规定“$\bar{p}$ 是真正的 $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$-递增”，其中 *truly* 表示 $s \in$ 定义域(p_ε) $\wedge\, \varepsilon < \zeta < \delta \Rightarrow \sigma(\mathrm{tr}(p_\varepsilon(s))) < \sigma(\mathrm{tr}(p_\zeta(s)))$.

(b) 对于 $s\in$定义域(p_δ)，令

$$p_\delta(s) := \Big(\mathsf{plus}_{\mathrm{TR}_s}(\langle \mathrm{tr}_{p_i(s)} : i\in[i_s,\delta)\rangle),\ \bigcup_{i\in[i_s,\delta)} \mathcal{F}_{p_i(s)}\Big),$$

$$\text{where } i_s := \min\{i<\delta : s\in \mathrm{dom}(p_i)\}.$$

现在检查 p_δ 符合要求，回想 1.2(F)(a) 和 2.2(H)。

κ^+-链条件:

设 $\langle p_\alpha : \alpha<\kappa^+\rangle \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{p}}$。不失一般性，每个 p_α 都如 2.2(G)(c) 中的 q（对于 $m=2$）。存在一个平稳的 $S_1\subseteq S^{\kappa^+}_\kappa$，使得$\langle \mathrm{dom}(p_\alpha): \alpha\in S_1\rangle$ 是一个以 W_* 为核的 Δ-系统。回想 $\prod \mathrm{TR}_{\mathbf{o}_s}$ 是一个$_{s\in W_*}$
κ-主干控制器，存在 $\alpha<\beta$ 属于 S_1，使得

$$s\in W_* \Rightarrow \langle \mathrm{tr}_{p_\alpha(s)}, \mathrm{tr}_{p_\beta(s)}\rangle \in \mathrm{dom}(\mathsf{plus}_{\mathrm{TR}_s}).$$

如果 $\kappa>\aleph_0$，那么由 1.2(G) 可知其余部分显然。

[为什么？因为对于某个 $s\in W_*$， $\sigma_{\mathbf{o}_s}(\mathrm{tr}_{p_\varepsilon(s)})$ 是一个正则基数。]

因此假设 $\kappa := \aleph_0$。令 $\langle t_\ell : \ell<n\rangle$ 按 $<_{L_{\mathbf{p}}}$-递增序列列出 W_*，并且 $t_n := \infty \in L^+_{\mathbf{p}}$。现在从 S_1中固定 $\alpha<\beta$，并选择高于它的 $q_\ell\in\mathbb{P}_{t_\ell}$

$$\{p_\alpha \restriction L_{t_\ell}, p_\beta\restriction L_{t_\ell}\}$$

对 $\ell\le n$使用归纳法。在归纳步骤中，我们使用以下假设:

$$\sigma_{\mathbf{o}_s}\big(\mathrm{tr}(q_\ell(s))\big) > 2\big|\mathcal{F}_{q_\ell(s)}\big|.$$

2）简单。

3）在第（1）部分的证明中已涵盖。 $\square_{2.4}$

定义 2.5。1）当 L 满足以下条件时，我们称其为$\mathbf{p}$-闭的:

(A) $L\subseteq L_{\mathbf{p}}$(B) 若对某个 $t\in L$ 有
$A\in\mathcal{A}_t$，则 $A\subseteq L$。

2) 对于 $L\subseteq L_{\mathbf{p}}$，我们定义

(A) $\mathbb{P}_L = \mathbb{P}_{\mathbf{p},\ L} := \mathbb{P}_{\mathbf{p}}\restriction\{p\in\mathbb{P}_{\mathbf{p}} : \mathrm{supp}(p)\subseteq L\}$（如 2.2(G)(d) 中所示）。
(B) $\mathbf{p}' = \mathbf{p}\restriction L$ 按自然方式定义，意在使$\mathbf{p}'\in\mathbf{P}$。也就是说，(a) $\mathbb{P}_{\mathbf{p}'} := \mathbb{P}_{\mathbf{p},\ L}$
(b) $\mathbf{o}_{\mathbf{p}',\ t} := \mathbf{o}_{\mathbf{p},\ t}$ 对所有 $t\in L$ 均成立。(c) $\mathcal{A}_{\mathbf{p}',\ t} := \mathcal{A}_{\mathbf{p},\ t}\cap\mathcal{P}(L)$。

3) 我们以自然的方式定义“π 是从$\mathbf{p}'$ 到$\mathbf{p}$的同构”。也就是说，

(A) $\pi: L_{\mathbf{p}'}\to L_{\mathbf{p}}$ 是一个同构。(B) 若 $t\in L_{\mathbf{p}'}$，
则$\mathbf{o}_{\mathbf{p},\ \pi(t)} = \mathbf{o}_{\mathbf{p}',\ t}$。(C) 若 $t\in L_{\mathbf{p}'}$，则 $\mathcal{A}_{\mathbf{p},\ \pi(t)}$
$= \{\pi[A]: A\in\mathcal{A}_{\mathbf{p}',\ t}\}$。

4）我们将$\mathbf{P}$ 上的偏序定义为：$\mathbf{p}'\le_{\mathbf{P}}\mathbf{p}$ 当且仅当$\mathbf{p}'=_{\mathbf{p}}\mathbf{p}\restriction L_{\mathbf{p}'}$。

5) 若 $p\in\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$ 且 $L\subseteq L_{\mathbf{p}}$，则 $p\restriction L$ 定义如下。

- $\mathrm{dom}(p \restriction L) := \mathrm{dom}(p) \cap L$
- For all s in the domain, $p \restriction L$ sends
$$s \mapsto \big(\mathrm{tr}_{p(s)}, \big\{r \in \mathcal{F}_{p(s)} : \big(\exists A \in \mathcal{A}_s \cap \mathcal{P}(L)\big)\big[\mathrm{supp}(r) \subseteq A\big]\big\}\big).$$

观察 2.6. 1) 若 $p \in \mathbb{P}$ 且 $L \subseteq$ 定义域(p)，则：

(A) $p \restriction L$ 和 $p \restriction L$ 属于 $\mathbb{P}$，且满足 $p \restriction L \leq_{\mathbb{P}} p \restriction L \leq_{\mathbb{P}} p$。

(B) 此外， $p \restriction L \in \mathbb{P}_L$。

2) 如果 $L \subseteq L_{\mathbf{p}}$ 那么

(A) $\mathbf{p} \restriction L \in \mathbf{P}(B)$ 对于 p， q 属于 $\mathbb{P}_L$，我们有 $p \leq q$ 当且仅当

2.2(H) 对 $\mathbb{P}_L$成立；即当且仅当

- 定义域$(p) \subseteq$ 定义域(q) 且 $\overline{\mathcal{F}_p} \subseteq \mathcal{F}_q$。
- 如果 $s \in$ 定义域(p) 且 $r \in \mathcal{F}_{p(s)}$ 满足 支撑集$(r) \subseteq A \in \mathcal{A}_{\mathbf{p}\,s}$ (即 $A \subseteq L$)，则$q \restriction A \Vdash_{\mathbb{P}_A}$ “$\mathbb{Q}_{\mathbf{o}_t} \models (\mathrm{tr}_p,\ \{r\}) \leq (\mathrm{tr}_q,\ \{r\})$”。

证明。显然。 $\square_{2.6}$

断言 2.7。 1) 若 L 是 $L_{\mathbf{p}}$ 的 $\mathbf{p}$-闭子集，则 $\mathbb{P}_{\mathbf{p},L} \lessdot \mathbb{P}_{\mathbf{p}}$。

2) 若 L 是 $L_{\mathbf{p}}$ 的 $\mathbf{p}$-闭子集，则对所有 $p \in \mathbb{P}_{\mathbf{p}}$，令 $r := p \restriction L \in \mathbb{P}_{\mathbf{p},L}$，有

- $\bullet_1$ 定义域$(r) =$ 定义域$(p) \cap L$
- $\bullet_2$ 若 $r \leq q \in \mathbb{P}_{\mathbf{p}\,L}$，则$\big(p \restriction (\mathrm{dom}(p) \setminus L)\big) \cup q$ 是 p 和 q 的最小上界（在 $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$ 中）。

3) 若 $L_1 \subseteq L_2$ 是 $\mathbf{p}$-闭子集，则 $\mathbb{P}_{\mathbf{p},L_2} / \mathbb{P}_{\mathbf{p},L_1}$ 是 $(<\kappa)$-完备且κ^+-cc。

证明。 1）由（2）得出。

2）显然。

3）显然。 $\square_{2.7}$

我们将自由地使用以下断言：

断言 2.8。 假设 $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ 且 $\mathbf{p} \subseteq \mathcal{H}(\chi)$，其中 $\chi > \lambda = \lambda^\kappa$。设 $N \prec (\mathcal{H}(\chi) \in)$ 的基数为 λ 且 $[N]^{\leq\kappa} \subseteq N$。那么 $\mathbf{p}' := \mathbf{p}^N$（自然定义）属于 $\mathbf{P}$，且基数为 λ。

证明。 显然。 $\square_{2.8}$

定义 2.9。 1）现在我们定义二元关系 $\leq_{\mathbf{P}}$ 如下。

令$\mathbf{p}_1 \leq_{\mathbf{P}} \mathbf{p}_2$ 表示：

(a) p_ℓ 是一个关于 $\ell = 1$ 的 m_ℓ-ATI，2（其中 m_ℓ ..= $\mathrm{m}_{\mathrm{p}_\ell}$；回想一下，$\mathrm{p}_\ell$ 确定了 m_ℓ）。(b) $\mathrm{m}_1 \le_{\mathbf{M}} \mathrm{m}_2$(c) 对所有 $t \in L_{\mathbf{m}_1}$，都有 $\mathrm{o}_{\mathrm{p}_1,t} = \mathrm{o}_{\mathrm{p}_2,t}$（因此 $S_{\mathbf{p}_2,t} = S_{\mathbf{p}_1,t}$ 和 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_t^{\mathbf{p}_1} = \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_t^{\mathbf{p}_2}$ 等等）。(d) $\mathbb{P}_{\mathbf{p}_1} \lessdot \mathbb{P}_{\mathbf{p}_2}$，这意味着对于 $t \in L^+_{\mathbf{m}_1}$，有 $\mathbb{P}_{\mathbf{p}_1,t} \lessdot \mathbb{P}_{\mathbf{p}_2,t}$。（由 2.7 可得。）(e) [同样可得：对于 $t \in L_{\mathbf{m}_1}$，“$\underset{\sim}{\eta}_t^{\mathbf{p}_1} = \underset{\sim}{\eta}_t^{\mathbf{p}_2}$”] $\Vdash_{\mathbb{P}_{\mathbf{p}_2}}$。

2) 如果 $\mathbf{r} \le_{\mathbf{P}} \mathbf{p}$ 且 $p \in \mathbb{P}_{\mathbf{p}}$，那么我们将 $p \restriction \mathbf{r}$ 定义为 $p \restriction L_{\mathbf{r}}$。
3) 如果 $\langle \mathbf{p}_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ 是 $\le_{\mathbf{P}}$-递增的，那么“$\mathbf{p} := \bigcup \mathbf{p}_\alpha$”表示如下内容：$\alpha < \delta$

(a) $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$（b）$\mathbf{m}_{\mathbf{p}} := \bigcup \mathbf{m}_{\mathbf{p}_\alpha} \alpha < \delta$（c）$\mathbf{p}$ $_\alpha \le_{\mathbf{P}} \mathbf{p}$ 对所有 $\alpha < \delta$。（d） [**Follows:**] 如果 $s \in L_{\mathbf{p}_\alpha}$，那么 $\mathbf{o}_{\mathbf{p}, s} = \mathbf{o}_{\mathbf{p}_\alpha, s}$。

---

4) 我们称 $\bar{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{p}_\alpha : \alpha < \alpha_* \rangle$ 是 $\le_{\mathbf{P}}$-递增连续的，如果它是 $\le_{\mathbf{P}}$-递增的且 $\mathbf{p}_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathbf{p}_\alpha$ 对每个极限 $\delta < \alpha_*$。

注记 2.10。 1) 请注意，在定义 2.9 的第 (3)、(4) 部分中，对于给定的 $\langle \mathbf{p}_\alpha : \alpha < \delta \rangle$，此类 $\mathbf{p}$ 是否存在并非先验地 显然；即使存在，它是否唯一也不清楚。

2) 关于 2.9(1)(d)，根据定义 1.11，借助 2.2(G)(d)，其余部分是否能推出“$\mathbb{P}_{\mathbf{p}_1} \lessdot \mathbb{P}_{\mathbf{p}_2}$”？这并不清楚。（见 2.3(2)。）

3) 我们只能证明，给定$\mathbf{p}$ 以及一个$\mathbf{p}$-闭的 $L \subseteq L_{\mathbf{p}}$，有 $(\mathbf{p} \restriction L) \le_{\mathbf{P}} \mathbf{p}$。

断言 2.11。 1)条款2.9(1)(d) 确实可由断言2.7推出。

1A) 条款2.9(1)(e)确实可由2.9(1)的其余部分推出。

2) $\le_{\mathbf{P}}$ 确实是$\mathbf{P}$上的偏序。

3) 若 $\langle \mathbf{p}_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ 是一个 $\le_{\mathbf{P}}$-递增连续的(∂, κ)-组合模板序列（注意：此时这并不意味着 $\langle \mathbb{P}_{\mathbf{p}_\alpha} : \alpha < \delta \rangle$ 是 $\subseteq$- 递增连续的！），且 $\mathrm{cf}(\delta) \ge \kappa$，那么 $\bigcup_{\alpha<\delta} \mathbf{p}_\alpha$ 存在且唯一。

4) 若$\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ 且 L 是$\mathbf{p}$-闭的，则$\mathbf{p} \restriction L \in \mathbf{P}$ 且$\mathbf{p} \restriction L \le_{\mathbf{P}} \mathbf{p}$。

证明。 显然。 $\square_{2.11}$

§ 3. From**M** and **P** to**N** and **Q**

对于类**P** 和**M**，我们不知道如何证明足够齐性的成员存在，因为取并集时，不清楚如何定义或证明（例如） κ^+-cc。为了解决这个问题，我们引入类**Q** 和**N**。

定义 3.1. 我们令**N** 为由[12]组成的对象类**n**

(A) $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$(B) (a) $W_{\mathbf{n}} \subseteq L_{\mathbf{n}}$ ($:= L_{\mathbf{m}}$) (b) 若 $t \in W_{\mathbf{n}}$ 则

- $\bullet_1$ $\lambda_t = \overline{\lambda_t^{\kappa}}$
- $\bullet_2$ $\mathcal{B}_t \,..= \mathcal{A}_t$ 的基数为$\leq \lambda_{\mathbf{o}_t}$。（参见 1.2(D)(b)。）
- $\bullet_3$ 若 $A \in \mathcal{A}_{\mathbf{m}\,t}$，则 A 的基数为$\leq \lambda_{\mathbf{o}_t}$，且是 $W_{\mathbf{n}}$的子集。

（C）对于每个 $t \in L_{\mathbf{n}} \setminus W_{\mathbf{n}}$，它还包含满足以下条件的 $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_{\mathbf{n},\,t}$ 和 $\mathcal{I}_t = \mathcal{I}_{\mathbf{n},\,t}$：

（a） $\mathcal{B}_t \subseteq \mathcal{A}_t$， $W_{\mathbf{n}}$的子集族。（b）若 $A \in \mathcal{B}_t$，则 $|A| \leq \lambda_t$。（c）$|\mathcal{B}_{\mathbf{m},\,t}| \leq 2^{\lambda_{\mathbf{o}_t}}$（实际上， $\leq \lambda_{\mathbf{o}_t}$ 就足够了。）（d）$\mathcal{I}_{\mathbf{n},\,t}$ 是 κ-完备理想，定义在 $\mathcal{B}_{\mathbf{n},\,t}$上。（e）$A \in \mathcal{A}_{\mathbf{m},\,t} \Rightarrow \{B \in \mathcal{B}_{\mathbf{m},t} : A \cap B \neq \varnothing\} \in \mathcal{I}_{\mathbf{n},\,t}$。

定义 3.2。 1）我们在 **N** 上定义如下偏序 $\leq_{\mathbf{N}}$。

$\mathbf{n}_1 \leq_{\mathbf{N}} \mathbf{n}_2$ 当且仅当

（A）$\mathbf{m}_{\mathbf{n}_1} \leq_{\mathbf{M}} \mathbf{m}^{\mathbf{n}_2}$（B）$W_{\mathbf{m}_1,\,s} = W_{\mathbf{m}_2,\,s} \cap L_{\mathbf{m}_1}$（C）若 $s \in L_{\mathbf{m}_1}$，则（a）$\lambda_{\mathbf{m}_1,\,s} = \lambda_{\mathbf{m}_2,\,s}$（b）$\mathcal{B}_{\mathbf{m}_1,\,s} = \mathcal{B}_{\mathbf{m}_2,\,s}$（c）$\mathcal{A}_{\mathbf{m}_1,\,s} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{m}_2,\,s}$（d）$\mathcal{I}_{\mathbf{m}_1,\,s} = \mathcal{I}_{\mathbf{m}_2,\,s} \cap \mathcal{P}(L_{\mathbf{m}_1})$。

2) 对于$\mathbf{n} \in \mathbf{N}$，当 $L \subseteq L_{\mathbf{n}}$ 满足 $A \in \bigcup \mathcal{B}_s \Rightarrow A \subseteq L_{s \in L}$ 时，我们称其为**n**-闭的 $\overline{\qquad}$

3) 若$\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ 且 L 是**q**-闭的，则$\mathbf{n}_\bullet \,..= \mathbf{n} \restriction L$ 自然定义如下：$L_{\mathbf{n}_\bullet} \,..= L$，并且对所有 $t \in L$，都有

- $\mathcal{B}_{\mathbf{n}_\bullet,t} \,..= \mathcal{B}_{\mathbf{n}\,t}$
- $\lambda_{\mathbf{n}_\bullet,\,t} \,..= \lambda_{\mathbf{n}\,t}$
- $\mathcal{A}_{\mathbf{n}_\bullet,t} \,..= \mathcal{A}_{\mathbf{n}\,t} \cap \mathcal{P}(L)$
- $\mathcal{I}_{\mathbf{n}_\bullet,\,t} \,..= \mathcal{I}_{\mathbf{n}\,t}$。

[12]因此$\mathbf{m} = \mathbf{m}_{\mathbf{n}}$， $L_{\mathbf{m}} = L_{\mathbf{n}}$ 等。

断言 3.3。 1) 若$\mathbf{n}_1 \leq_{\mathbf{N}} \mathbf{n}_2$， 则 $L_{\mathbf{n}_1}$ 是$\mathbf{n}_2$-闭的。

2) 如果 L 是$\mathbf{n}$-闭的，那么$\mathbf{n} \restriction L \in \mathbf{N}$ 且$\mathbf{n} \restriction L \leq_{\mathbf{N}} \mathbf{n}$。

3) $\leq_{\mathbf{N}}$ 确实是 $\mathbf{N}$ 上的一个偏序。

4) 若 δ 是一个极限序数，且 $\langle \mathbf{n}_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ 是 $\leq_{\mathbf{N}}$-递增的，则它有一个 $\leq_{\mathbf{N}}$-最小上界$\mathbf{n}$。

也就是说:

(a) $\mathbf{m}_{\mathbf{n}} = \bigcup \mathbf{m}_{\mathbf{n}_\alpha} {}_{\alpha<\delta}(b)$ 对于 $\alpha < \delta$、 $s \in L_{\mathbf{n}_\alpha} \Rightarrow \mathcal{B}_{\mathbf{n},\ s} = \mathcal{B}_{\mathbf{n}_\alpha,\ s}$。$(c)$ 对于 $\alpha < \delta$ 和 $s \in L_{\mathbf{n}_\alpha}$， $\mathcal{I}_{\mathbf{n},\ s}$ 是$\bigcup \mathcal{I}_{\mathbf{n}_\beta,\ s}$ 在$_{\beta\in[\alpha,\delta}$个成员的并集下的闭包$< \kappa$ 。

证明。 显然。 $\square_{3.3}$

定义 3.4。 令$\mathbf{Q}$ 为由以下元素$\mathbf{q}$ 构成的对象类:

(A) $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{\mathbf{q}} \in \mathbf{N}$(B) $\mathcal{A}_{\mathbf{q}} := \bigcup \mathcal{A}_{\mathbf{n},\ t} {}_{t\in L_{\mathbf{n}}}$(C) $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ 使得$\mathbf{m}_{\mathbf{p}} = \mathbf{m}_{\mathbf{n}}$ 且 $\lambda_{\mathbf{o}_{\mathbf{p}},\ t} = \lambda_{\mathbf{n},\ t}$。

我们要求$\mathbf{q}$满足

(D) If $t \in L_{\mathbf{q}} \setminus W_{\mathbf{q}}$ and $\mathbf{p}_\bullet \in \mathbf{P}$ has cardinality $\leq (|\mathbb{P}_{\mathbf{p}}| + \kappa)^\kappa$, then the set

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{p}_\bullet,t} := \{A \subseteq W_{\mathbf{q}} \cap L_{\mathbf{q},t} : \mathbf{p}_{\mathbf{q}} \restriction A \cong \mathbf{p}_\bullet\}$$

belongs to $\mathcal{I}^+_{\mathbf{q},t}$.

(If in (C) we demand only "$\mathcal{B}_{\mathbf{q},t}$ has cardinality $\leq \lambda_{\mathbf{o}_t}$," then we should weaken the demand on $A \in \mathbf{Y}_{\mathbf{p}_\bullet,t}$.)

定义 3.5。 1）我们在$\mathbf{Q}$ 上定义如下偏序 $\leq_{\mathbf{Q}}$。

$\mathbf{q}_1 \leq_{\mathbf{Q}} \mathbf{q}_2$ 当且仅当

(A) $\mathbf{n}_{\mathbf{q}_1} \leq_{\mathbf{N}} \mathbf{n}_{\mathbf{q}_2}$(B) 若 $s \in L_{\mathbf{q}_1}$， 则 $\mathbf{o}_{\mathbf{q}_1,\ s} = \mathbf{o}_{\mathbf{q}_2,s}$。 (C) $\mathbb{P}_{\mathbf{q}_1} \lessdot \mathbb{P}_{\mathbf{q}_2}$。 （这由 3.4(D) 得出。）

2) 对于 L 的$\mathbf{q}$-闭（即$\mathbf{n}_{\mathbf{q}}$-闭）子集，令 $\mathbf{q} \restriction L$ 满足 $\mathbb{P}_{\mathbf{q}\restriction L} = \mathbb{P}_{\mathbf{q},L}$ 且 $W_{\mathbf{q}\restriction L} = W_{\mathbf{q}} \cap L$。

断言 3.6. 设 $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ 和 L 是$\mathbf{q}$-闭的（即$\mathbf{n}_{\mathbf{q}}$-闭）。

1) $\mathbb{P}_{\mathbf{q},L} = \mathbb{P}_{\mathbf{p}_{\mathbf{q}},L} \lessdot \mathbb{P}$ *and* $\mathbf{q} \restriction L \in \mathbf{Q}$.

2) 若 $A \in \mathcal{A}_{\mathbf{q}}$ 和 $q \in \mathbb{P}_{\mathbf{q}}$，则存在 $p \in \mathbb{P}_{\mathbf{q},A}$， 使得若 $\mathbb{P}_{\mathbf{q},A} \models$ '$\underline{p} \leq r$'，则如下定义的 $q_* = r \oplus q \in \mathbb{P}_{\mathbf{q}(+)}$ 是 p 和 q 的公共上界。

- 定义域(q_*) := 定义域(r) ∪定义域(q)

- $q_*(s) := \begin{cases} r(s) & \text{if } s \in \mathrm{dom}(r) \setminus \mathrm{dom}(q) \\ q(s) & \text{if } s \in \mathrm{dom}(q) \setminus \mathrm{dom}(r) \\ \big(tr(s), \mathcal{F}_{p(s)} \cup \mathcal{F}_{q(s)}\big) & \text{if } s \in \mathrm{dom}(q) \cap \mathrm{dom}(r). \end{cases}$

证明。 1）由第（2）部分可得。

2）由 2.8 和定义 3.4(2) 得出。 $\square_{3.6}$

§ 4. Homogeneity

定义 4.1. 1）当 $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}^{\rm pre}$ 由以下部分组成时，我们称其为

(a) $\mathbf{n_q} \in \mathbf{N}$
(Hence $\mathbf{m_q} = \mathbf{m}_{\mathbf{n_q}} \in \mathbf{M}$, $L_{\mathbf{q}} = L_{\mathbf{m}}$, $\mathcal{A}_{\mathbf{q}} = \mathcal{A}_{\mathbf{n_q}}$, etc. — see 3.4(A).)
(b) $\bar{\mathbf{o}}_{\mathbf{q}} = \langle \mathbf{o}_{\mathbf{q},t} : t \in L \rangle$ as in Definition 2.2.

我们要求如下：

(c) 对所有 $A \in \mathcal{A}_{\mathbf{q}}$，存在一个 $\mathbf{q}_A \in \mathbf{Q}$，使得 $\mathbf{nq}_A = \mathbf{n_q} \restriction A$，并且 $\bar{\mathbf{o}}\mathbf{q}_A = \bar{\mathbf{o}}_{\mathbf{q}} \restriction A$。(d) 如果 $A \subseteq B$ 是 $\mathcal{A}_{\mathbf{q}}$ 的成员，那么 $\mathbf{q}_A = \mathbf{q}_B \restriction A$。

($\mathbf{q} \restriction A$ 在 2.5(2)(B) 中定义。)

2) 令 $\leq^{\rm pre}_{\mathbf{Q}}$ 为 $\mathbf{Q}^{\rm pre}$ 上的自然序（见 2.5(2)(B)）。

3) 对于 $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$，令 $\mathrm{pre}(\mathbf{q})$ 表示将 $\mathbf{q}$ 视为 $\mathbf{Q}^{\rm pre}$ 的一个元素。

断言 4.2. 1) 若 $\mathbf{q} = \langle \mathbf{q}_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ 是 $\leq_{\mathbf{Q}}$-递增连续的（见2.9(4)），则 $\mathbf{q}_\delta := \bigcup \mathbf{q}_\alpha$ 存在且唯一，属于 $\mathbf{Q}$，并且 $\mathbf{q}^\frown \langle \mathbf{q}_\delta \rangle$ 是 $\leq_{\mathbf{Q}}$-递增$_{\alpha<\delta}$连续的。

2) 每个 $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}^{\rm pre}$ 都可以扩展为某个 $\mathbf{q}^+ = \mathbf{q}(+) \in \mathbf{Q}$。（这表示 $\mathbf{nq}^+ = \mathbf{nq}$、$\mathbf{oq}^+ = \mathbf{oq}$、$\mathcal{A}_{\mathbf{q}^+} = \mathcal{A}_{\mathbf{q}}$ 以及 $(\forall A \in \bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{q}})[\mathbf{q}^+ \restriction A = \mathbf{q} \restriction A]$。）

3) 若 $\mathbf{r},\mathbf{q} \in \mathbf{Q}^{\rm pre}$ 且 $\mathbf{r} \leq^{\rm pre}_{\mathbf{Q}} \mathbf{q}$，则 $\mathbf{r}^+ \leq_{\mathbf{Q}} \mathbf{q}^+$。

证明。 1) 令 $\mathbf{q}^*_\alpha := \mathrm{pre}(\mathbf{q}_\alpha)$；也就是说，它是 $\mathbf{Q}^{\rm pre}$ 的一个元素。

显然，
$(*)_1$ $\langle \mathbf{q}^*_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ 是 $\leq^{\rm pre}_{\mathbf{Q}}$-递增的。$(*)_2$ 若 I 是一个有向偏序，且 $\mathbf{q}^* = \langle \mathbf{q}^*_s : s \in I \rangle$ 是 $\mathbf{Q}$-递增连续的，则其并 $\mathbf{r} := \bigcup \mathbf{q}^*$（按自然方式定义[13]）是良定义的，并且是该序列的一个 $\leq^{\rm pre}_{\mathbf{Q}}$-最小上界。

结合第（2）部分，证明完毕。

2）首先定义 $\mathbb{P}_{\mathbf{q}^+}$。令 $\mathbf{n} := \mathbf{nq}^+ = \mathbf{nq}$。

$(*)_3$ $p \in \mathbb{P}_{\mathbf{q}^+}$ 当且仅当 (a) p 是一个定义域为 $\in [L_{\mathbf{m}}]^{<\kappa}$ 的函数。(b) 若 $s \in$ 属于 $\mathrm{dom}(p)$，则 $p(s)$ 的形式为 $(\mathrm{tr}(p(s)), \mathcal{F}_{p(s)})$，其中 $\mathrm{tr}(p(s)) \in \mathrm{TR}^{\mathbf{o}_s}$ 且 $|\mathcal{F}_{p(s)}| < \kappa$。(c) 若 $\underset{\sim}{f} \in \mathcal{F}_{p(s)}$，则存在某个 $A \in \mathcal{A}_{\mathbf{n},s}$ 使得 $(\mathrm{tr}(p(s)), \underset{\sim}{f}) \in \mathbb{P}_{\mathbf{q} \restriction A}$。

$(*)_4$ 序 $\leq_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}^+}}$ 定义如下：$p \leq_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}(+)}} q$ 当且仅当 —

[13]特别是：• $\mathbf{m_r} = \bigcup_{s \in I} \mathbf{m}^{\mathbf{q}^*_s}$（因此 $\mathcal{A}_{\mathbf{r}} = \bigcup \mathcal{A}_{\mathbf{q}^*_s}$）。
• $\mathbf{nr} = \bigcup_{s \in I} \mathbf{nq}^*_s$（因此 $W_{\mathbf{r}} = \bigcup_{s \in I} W_{\mathbf{q}^*_s}$）。

(a) $p,q\in\mathbb{P}_{\mathbf{q}^+}$(b) 若 $A\in\mathcal{A}_{\mathbf{q}^+}$ 则 $(p\restriction A)\le_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}\restriction A}}(q\restriction A)$。

现在验证。

3）简单。 $\square_{4.2}$

定义 4.3. 我们将 paut(q)（q的**部分自同构**）定义为满足以下条件的集合：存在某些$\mathbf{q}$-闭集 L_1 和 L_2，使得 π 是从$\mathbf{q}\restriction L_1$到$\mathbf{q}\restriction L_2$的同构。

断言 4.4. 1）如果 $s\in L_{\mathbf{q}}$，那么$\bigcup\mathcal{B}_{\mathbf{q},\,s}\cup\{s\}$ 是一个$\mathbf{q}$-闭集（回顾3.2(2)）。

2）如果 s、$t\in L_{\mathbf{q}}$ 且 $\mathbf{o}_s=\mathbf{o}_t$，那么$\{(s,t)\}\in\mathrm{paut}(\mathbf{q})$。

3) $(\mathbf{Q},\le_{\mathbf{Q}})$ 具有不交合并性质（如1.12(4)中所述）：

若$\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2\in\mathbf{Q}$ 且 $L_*:=L_{\mathbf{q}_1}\cap L_{\mathbf{q}_2}$ 是$\mathbf{q}_1$-闭的，并且$\mathbf{q}_2$-闭的，使得$\mathbf{q}_1\restriction L_*=\mathbf{q}_2\restriction L_*$，则存在$\mathbf{p}\in\mathbf{Q}$ 使得 $L_{\mathbf{p}}=L_{\mathbf{q}_1}\cup L_{\mathbf{q}_2}$ 且 $\bigwedge\limits_{\ell=1,\,2}\left[\mathbf{q}_\ell\le_{\mathbf{Q}}\mathbf{p}\right]$。

4) 若$\mathbf{o}\in\mathbf{O}$，则存在$\mathbf{q}\in\mathbf{Q}$，使得对于某些 t, $W_{\mathbf{q}}=\bigcup\mathcal{B}_{\mathbf{q},\,t}$, $L_{\mathbf{q}}=W_{\mathbf{q}}\cup\{t\}$，且 $\mathbf{o}_t=\mathbf{o}$。

5) 若$\mathbf{q}\in\mathbf{Q}$，$\mathbf{o}\in\mathbf{O}$，L_* 是 $L_{\mathbf{q}}$的初始段，且 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(L_*)$，则存在$\mathbf{r}$ 和s，使得：

- $\bullet_1$ $\mathbf{q}\le_{\mathbf{Q}}\mathbf{r}$
- $\bullet_2$ $L_{\mathbf{r}}\setminus L_{\mathbf{q}}=\bigcup\mathcal{B}_{\mathbf{q},s}\cup\{s\}$
- $\bullet_3$ $\mathbf{o}_{\mathbf{r},s}=\mathbf{o}$
- $\bullet_4$ *If* $r\in\bigcup\mathcal{B}_{\mathbf{r}}\cup\{s\}$ *and* $t\in L_{\mathbf{q}}$, *then* $L_{\mathbf{r}}\models$ "$r<t\Leftrightarrow r\in L_*$".
- $\bullet_5$ $\mathcal{A}_{\mathbf{r},s}=\mathcal{A}\cup\mathcal{B}_{\mathbf{q},s}$.

6) 在第(5)部分，我们可以允许 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(L_*\cup\mathcal{B}_{\mathbf{q}})$。

证明。显然。 $\square_{4.4}$

命题 4.5。设 $\partial=$共尾性$(\partial)\le\lambda:=|\mathbf{O}|+\sum\limits_{\mathrm{TR}\in\mathbf{TR}}\|\mathrm{TR}\|+\sum\limits_{\mathbf{o}\in\mathbf{O}\|\mathrm{TR}_{\mathbf{o}}\|\text{ 且}\mathbf{O}\neq\varnothing}\lambda_{\mathbf{o}}$，其中 $\lambda_{\mathbf{o}}=\lambda_{\mathbf{o}}^{\kappa}\ge\lambda$，设$\mathbf{q}\in\mathbf{Q}$ 满足 $\|L_{\mathbf{q}}\|\le\lambda$，使得 $L_{\mathbf{q}}\Rightarrow\lambda_{\mathbf{q},s}\le\lambda_{\mathbf{o}}$。

于是存在某个$\mathbf{r}\in\mathbf{Q}$：

(a) $|L_{\mathbf{r}}|=\lambda$ 且 $\mathbf{q}\le_{\mathbf{Q}}r$. *(b)* 对每个 $o\in O$，集合 $\{s\in L_{\mathbf{r}}:o_{\mathbf{r},s}=o\}$ 在 $L_{\mathbf{r}}$中稠密。*(c)* 存在 $L=\langle L_\varepsilon:\varepsilon<\partial\rangle$ 的一条递增序列，其元素都是 $L_{\mathbf{r}}$的子集，且满足$\bigcup L=L_{\mathbf{r}}$, $L_0:=\varnothing$, $L_1:=L_{\mathbf{q}}$，并且$\bar{r}\restriction L_1=q$. *(d)* 若 $s,t\in L_{\mathbf{r}}$ 且 $o_{\mathbf{r},s}=o_{\mathbf{r},t}=o$，则存在 r 的一个自同构 π，使得 $\pi(s)=t$，并且对每个足够大的 $\varepsilon<\partial$，都有 $\pi[L_\varepsilon]=L_\varepsilon$。*(e)* 若 $\kappa\le\theta<\partial$ 满足 $\lambda=\lambda^\theta$, $\varepsilon<\partial$, L_*, $L_{**}\in[L_{\mathbf{r}}]^\theta$，且 π 是从 $r\restriction(L_\varepsilon\cup L_*)$ 到 $r\restriction(L_\varepsilon\cup L_{**})$ 的同构，并延拓 id_{L_ε}，则存在一个自同构 $\hat{}\pi:r\to r$，延拓 π。

———

证明。 我们通过对 $\alpha < \lambda^+$ 使用归纳法来选择 $(\mathbf{q}_\alpha, \pi^\alpha)$，使得：

（$*$）$_\alpha$ （a）$\mathbf{q}_\alpha \in \mathbf{Q}$（b）$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}$（并且为记号简洁起见，$L_{\mathbf{q}_0} = \varnothing$）。（c）$\pi^\alpha = \langle \pi_{\beta,i} : \beta < \alpha,\ i < \lambda\beta + \lambda \rangle$（d）$\langle \mathbf{q}^\beta : \beta \le \alpha \rangle$ 是 $\le_{\mathbf{Q}}$-递增连续的。（e）如果 $\beta < \bar{\alpha}$ 且 $i < \lambda\beta + \lambda$，那么 $\pi_{\beta,i} \in \mathbf{p}$ 自同构群 $(\mathbf{q}_\alpha)$。（f）如果 $\beta < \alpha$ 且 $i \in [\lambda\beta, \lambda\beta + \lambda)$，那么 $\langle \pi_{\gamma,i} : \gamma \in [\beta, \alpha) \rangle$ 是 $\subseteq$-递增的。（g）如果 $\gamma + 1 \in [\beta, \alpha)$ 且 $i \in [\lambda\beta, \lambda\beta + \lambda)$，那么（h）令 $\beta < \alpha$。每个满足下文“$\bullet_1 \vee \bullet_2$”的 π 都会在某处出现 ——

$$L_{\mathbf{q}_\gamma} \subseteq \mathrm{dom}(\pi_{\gamma+1,i}) \cap \mathrm{rang}(\pi_{\gamma+1,i}).$$

e

在序列 $\pi_{\ i}$ 中$\langle\ \beta i \in [\lambda\beta, \lambda\beta + \lambda)$。$\ \rangle$

- $\bullet_1$ $\pi = \{(s,t)\}$, where $s, t \in L_{\mathbf{q}_\beta}$ and $\mathbf{o}_{\mathbf{q}_\beta, s} = \mathbf{o}_{\mathbf{q}_\beta, t}$.
- $\bullet_2$ There exist $\gamma < \beta$ and $\mathbf{q}_\beta$-closed L_*, L_{**} such that $L_* \cup L_{**} \subseteq L_{\mathbf{q}_\beta}$, $\lambda = \lambda^{|L_*|}$, and π is an isomorphism from $\mathbf{q}_\beta \restriction (L_{\mathbf{q}_\gamma} \cup L_*)$ onto $\mathbf{q}_\beta \restriction (L_{\mathbf{q}_\gamma} \cup L_{**})$ with $\pi \restriction L_{\mathbf{q}_\gamma} = \mathrm{id}_{L_{\mathbf{q}_\gamma}}$.

归纳法的进行没有问题。现在，对于 $\delta < \lambda^+$ 的一个闭无界集，若 $\mathrm{cf}(\delta) = \partial$，则 $\mathbf{q}_\delta$ 符合要求。$\square_{4.5}$

* * *

现在我们转向糖性（为清晰起见，使用单个$\mathbf{o}$）。

定义 4.6。 设 κ 是一个不可达基数（或仅为弱不可达基数）。若 $\mathbf{d}$ 由以下内容组成，我们称其为一个 κ-参数

(a) $\bar{\lambda} = \langle \lambda_\eta, \lambda^0_\eta, D_\eta : \eta \in \mathcal{T} \rangle$，如 1.6(4) 中所述（因此 $\mathcal{T}$ 是 $({}^{\kappa>}\kappa, \lhd)$ 的子树）。(b) $\mathbf{o}_{\bar{\lambda}}$，如 1.6(4) 中所述。(c) $\lambda = \mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$ (d) $\bar{\rho} = \langle \rho_\alpha : \alpha < \lambda \rangle \subseteq \prod \lambda_\eta, \eta \in \mathcal{T}$

此外，我们还要求满足以下条件：

(e) [**Notation:**] For any L, let

- $X_{L,\bar{\lambda}} :=$
$$\big\{\mathbf{i} = (\zeta, u, g, \nu) : \zeta < \kappa,\ u \subseteq [\kappa]^{<\kappa},\ g : u \to \mathcal{T} \cap {}^{\zeta}\kappa,\ \lambda_\nu \neq 1,$$
$$\text{and } \eta \in \mathcal{T} \cap {}^{\zeta}\kappa \setminus \{\nu\} \Rightarrow \lambda_\eta = 1]\big\}$$
- We define the following partial order on $X_{L,\bar{\lambda}}$:
$(\zeta_1, u_1, g_1, \nu_1) \le_{L,\bar{\lambda}} (\zeta_2, u_2, g_2, \nu_2)$ iff
$\zeta_1 < \zeta_2$, $\nu_1 \lhd \nu_2$, $u_1 \subseteq u_2$, and $\beta \in u_1 \Rightarrow g_1(\beta) \trianglelefteq g_2(\beta)$.
- Let $Y_{L,\bar{\lambda}} := \mathrm{inc}_\kappa(X_{L,\bar{\lambda}})$.
(That is, $\le_{L,\bar{\lambda}}$-increasing sequences from $X_{L,\bar{\lambda}}$ of length κ.)
- For $\bar{\mathbf{i}} \in Y_{L,\bar{\lambda}}$, let $E_{\bar{\mathbf{i}}} := \{\varepsilon < \kappa : \zeta_{\mathbf{i}_\varepsilon} = \varepsilon = u_{\mathbf{i}_\varepsilon}\}$; this is a club of κ.

(f) 对任意 $h : \lambda \to Y_{L,\bar{\lambda}}$ 我们都可以找到 $(\zeta_*, u_*, g_*, \nu_*) \in X_{L,\bar{\lambda}}$ 以及 $\mathrm{w} \subseteq \lambda$，使得：

- $\mathrm{otp}(\mathrm{w}) = \lambda_{\nu_*}$

- $(\zeta_{\mathbf{i}_\alpha},\nu_{\mathbf{i}_\alpha}) = (\zeta_*,\nu_*)$以及$\zeta_* \in E_{h(\alpha)}$ 对于 $\alpha \in \mathbf{w}$。
- $\langle u_{\mathbf{i}_\alpha} : \alpha \in \mathbf{w}\rangle$ 是一个以 u_* 为核的 Δ-系统。
- $g_{\mathbf{i}_\varepsilon} \restriction u_* = g_*$
- $\langle \rho_\alpha(\nu_*) : \alpha \in \mathbf{w}\rangle \in {}^{\mathbf{w}}\lambda_{\nu_*}$ 是 $<_{L,\bar\lambda}$-递增的。

命题 4.7。设 κ 是不可达基数（或弱不可达基数），且满足 $\diamondsuit_\kappa$。

1）若 $\kappa^+ = 2^\kappa$，则存在一个 κ-参数 $\mathbf{d}$。

2）若 $\lambda > \kappa$, $\mathbb{P} :=$科恩$_\kappa(\lambda)$（即添加 λ 个 κ 实数的强迫概念），且 $\bar\lambda$、$\mathbf{o}_{\bar\lambda}$如 1.6(2) 中所述，则

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\textit{there is a } \kappa\textit{-parameter } \mathbf{d} \textit{ such that } \bar\lambda_{\mathbf{d}} = \bar\lambda \textit{ and } \bar{\mathbf{o}}_{\mathbf{d}} = \mathbf{o}\text{”}.$$

证明。显然。 $\square_{4.7}$

命题 4.8。我们有“$(A) \Rightarrow (B)$”，其中

(A) (a) $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ (b) κ 是不可达基数。(c) $\mathbf{d}$ 是一个 κ-参数。
(d) λ 是 κ-活跃的（见1.6(4)）。
(e) $s \in L_{\mathbf{q}} \Rightarrow \mathbf{o}_{\mathbf{q},s} = \mathbf{o}_{\bar\lambda}$

(B) 若 $\mathbf{G} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{q}}$ 在 $\mathbf{V}$ 上是泛型，则在 $\mathbf{V}[\mathbf{G}]$，中，成员 $\eta \in \lim(\mathcal{T}_{\bar\lambda})$ 中对 $(\mathbb{Q}_{\bar\lambda},\underset{\sim}{\eta}_{\bar\lambda})$ 在 $\mathbf{V}$ 上泛型的集合恰好是 $\{\eta_{\mathbf{q},s} : s \in L_{\mathbf{q}}\}$。

证明。$(*)_1$ 在 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\mathbf{q}}}$ 中，我们有：“若 $\rho \in \prod\limits_{\eta\in\mathcal{T}_{\bar\lambda}} \lambda_\eta$，则 $\mathbf{B}_{\sim\rho} \in \mathrm{id}_{\le\kappa}(\mathbb{Q}_{\bar\lambda},\underset{\sim}{\eta}_{\bar\lambda})$”，其中

$$\mathbf{B}_\rho := \big\{\nu \in \lim \mathcal{T}_{\bar\lambda} : (\exists^\kappa \varepsilon < \kappa)\big[\nu(\varepsilon) < \rho(\varepsilon)\big]\big\}.$$

这一点很容易看出是正确的。现在假设：

$(*)_2$ $\underset{\sim}{\eta}$ 是 $\lim \mathcal{T}_{\bar\lambda}$中某个元素的 $\mathbb{P}_{\mathbf{q}}$名称，并且 $p \in \mathbb{P}_{\mathbf{q}}$ 满足

$$p \Vdash_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}}} (\forall^\infty \varepsilon < \kappa)\big[\underset{\sim}{\eta}(\varepsilon) > \rho_\alpha(\underset{\sim}{\eta} \restriction \varepsilon)\big]$$

对所有 $\alpha < \lambda$均成立。

对于 $\alpha < \lambda$，我们可以选择 $\langle(p_{\alpha,\varepsilon},\zeta_{\alpha,\varepsilon},\Lambda_{\alpha,\varepsilon},\nu_{\alpha,\varepsilon}) : \varepsilon < \kappa\rangle$ 通过对 ε 使用归纳法，使得：

$(*)_3$ (a) $p_{\alpha,\varepsilon} \in \mathbb{P}_{\mathbf{q}}$ 随 ε连续递增。(b) $p \le p_{\alpha,\varepsilon}$ 和 $\zeta_* \le \zeta_{\alpha,\varepsilon}$。
(c) $(\zeta_{\alpha,\varepsilon},u_{\alpha,\varepsilon},g_{\alpha,\varepsilon},\nu_{\alpha,\varepsilon}) \in X_{L,\bar\lambda}$ 其中 $\Lambda_{\alpha,\varepsilon} :=$ 值域$(g_{\alpha,\zeta})$。(d) $\Lambda_{\alpha,\varepsilon} := \{\mathrm{tr}(p_{\alpha,\varepsilon}(\gamma)) : \gamma \in$ 定义域$(p_{\alpha,\varepsilon})\}$(e) $\langle\zeta_{\alpha,\varepsilon} : \varepsilon < \kappa\rangle$ 连续递增。(f) $p_{\alpha,\varepsilon} \Vdash$“$\underset{\sim}{\eta} \restriction \zeta_{\alpha,\varepsilon} = \nu_{\alpha,\varepsilon}$”（g）$p_{\alpha,0} \Vdash_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}}}$“如果 $\varepsilon \in [\zeta_{\alpha,0},\kappa)$，则 $\underset{\sim}{\eta}(\varepsilon) > \rho_\alpha(\underset{\sim}{\eta} \restriction \varepsilon)$”。

[为什么？对于 $\varepsilon = 0$，这由 $(*)_2$ 可轻松得出。对于 ε 极限情形，使用极限；对于 ε 后继序数，请记住，$\mathbb{P}_{\mathbf{q}}$ 中每个长度为 $< \kappa$ 的递增序列都有一个最小上界。]

$\bar{}(*)_4$ (a) 令 $h : \lambda \to Y_{L_{\mathbf{q}},\bar{\lambda}}$ 由 $\beta \mapsto \langle \mathbf{i}_\alpha : \alpha < \beta \rangle$ 定义。(b) 将 4.6(f) 应用于我们对 h 的选择，可像那里一样选取 w 和 $(\zeta_*, u_*, g_*, \nu_*)$。

最后，我们定义 q。

(A) $\mathrm{dom}(q) := \bigcup\limits_{\alpha\in\mathsf{w}} \mathrm{dom}(p_{\alpha,\zeta_*})$

(B) $q(s) := \begin{cases} p_\alpha(s) & \text{if } s \in \mathrm{dom}(p_{\alpha,\zeta_*}) \setminus u_* \\ \big(\mathrm{tr}(p_{\alpha_*}(s)),\ \bigcup\limits_{\alpha\in\mathsf{w}} \mathcal{F}_{p_\alpha(s)}\big) & \text{if } s \in u_*, \end{cases}$

where we fix α_* as (e.g.) $\min u_*$.

[为什么是 $q \in \mathbb{P}_{\mathbf{q}}$? 因为如果 $\alpha \in \mathsf{w}$且 $\varrho \in \mathcal{T} \cap \bigcup\limits_{\varepsilon\le\zeta_*} {}^{\varepsilon}\kappa$，那么 $\varrho \neq \nu_* \Rightarrow \lambda_{\nu_*} < \lambda^0_{\varrho^\circ}$]

此外， q 是 $\{p_{\alpha,\zeta_*}$ 的 $\leq_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}}}$-上界： $\alpha \in \mathsf{w}\}$，但这意味着

$$q \Vdash \text{`}\alpha \in \mathsf{w} \Rightarrow \underset{\sim}{\eta}(\zeta_*) > \rho_\alpha(\zeta_*)\text{'}.$$

由于 $\langle \rho_\alpha(\zeta_*) : \alpha < \lambda_{\nu_*} \rangle \in {}^{\lambda_{\nu_*}}\lambda_{\nu_*}$

是递增的，我们便得到与 $p_\alpha \Vdash$`$\underset{\sim}{\eta}(\zeta_*) < \lambda_{\eta\restriction\zeta_*}$'和$p_\alpha \Vdash$`$\lambda_{\eta\restriction\zeta_*} = \lambda_{\nu_*}$'矛盾的结论。 $\square_{4.8}$

事实 4.9。 4.8 的结论对任意不可达基数 κ （允许进行预备强迫）都成立，无需任何额外的集合论假设。

证明。 如果我们通过 $\mathbb{P}_{\cdot} := \mathrm{Levy}(\kappa^+, 2^\kappa)$ 进行强迫，那么

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}2^\kappa = \kappa^+ \text{ and the desired conclusion holds”},$$

因此我们有 $\langle \underset{\sim}{p}_\alpha : \alpha \in \underset{\sim}{S} \rangle$：所需对象的名称。但由于 $\mathbb{P}_{\mathbf{q}} = \mathbb{P}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{V}[\mathbb{P}]}$，所以我们可以轻松完成证明。$\square_{4.9}$

如同 4.8 和 4.9 中一样，

断言 4.10。 我们有`$(A) \wedge (B) \Rightarrow (C)$'，其中

(A) $\kappa := \aleph_0 < \lambda = \lambda^{\aleph_0} \le 2^\kappa$*(B) (a)* $q \in Q$ *(b)* $o = o^2_{\mathbf{n}}$ 如 *1.6(1)* 中一样。*(c)* $s \in L_{\mathbf{q}} \Rightarrow o_{\mathbf{q}}$，$_s = o$。*(C)* 如果 $G \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{q}}$ 在 V 上是泛型的，那么在 $V[G]$，中，成员 $\eta \in lim(\mathcal{T}_{\bar{\lambda}})$ 中对于 $(\mathbb{Q}^2_{\mathbf{n}}, \underset{\sim}{\eta}^2_{\mathbf{n}})$ 在 V 上为泛型的集合恰好是 $\{\underset{\sim}{\eta}_{\mathbf{q},s} : s \in L_{\mathbf{q}}\}$。

证明。 基本上根据 [HS，第 6 节，断言 21]。那里采用的迭代是 FS，但这不会造成任何严重问题。此外，我们也可以像证明上述断言那样证明这一点。$\square_{4.10}$

§ 5. Variants, and the theorem

讨论 5.1。 1）在第 1–4 节中，我们选择了最简单版本的迭代 $\mathbf{q}$：具体来说，$\mathrm{TR}_{\mathbf{q}}$ 很简单。这里我们将介绍一个更一般的版本。

2) 考虑一个 $\leq_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}}}$-递增序列 $\langle p_i : i < \delta \rangle$，其中 $\delta < \kappa$ 是极限序数，我们并不总能得到一个最小上界。当 $\mathrm{cf}(\delta) \in \Theta$ 时就会出现这种情况；否则，我们就必须在 1.2 的要求中加入最小上界存在这一条件。

3) 此外，2.4(3) 也必须修改。

4) 我们可以将“κ-主干控制器”推广为“$(\kappa,\ \Theta,\ \Upsilon)$-主干控制器”，但为了节省参数，我们不打算这样做。（不过，在证明需要修改时，我们会加以说明。）

5) 在迭代中，我们没有处理这样的情形：$\mathbb{Q}_{\mathbf{p},\ t}$ 是由一个 $\mathbb{P}_{\mathbf{p},\ t}$-名称参数定义的（即使在这种情形下，它也是一个实数的 $\mathbb{P}_{\mathbf{p},\ t}$-名称）。

事实 5.2. 我们可以在作如下修改后重复 §1–4：

1) 在 1.1(3)、(4) 中，

- $\bullet_1$ 每个 $\mathrm{TR} \in \mathbf{TR}$ 都是一个 $(\kappa, \Theta, \Upsilon)$-主干控制器（见 0.7(2)），因此 $\mathbf{TR}$ 不一定是简单的。
- $\bullet_2$ 同样，我们要求：由$\mathbf{TR}$ 中成员构成的序列的 $< \kappa$-支集积始终是一个 κ-主干控制器。（这并非关键。）
- $\bullet_3$ $\theta = \mathrm{cf}(\theta) > \kappa$ 和 $\alpha < \kappa \Rightarrow |\alpha|^{\kappa} < \theta$

2) 在 1.2(A) 中，

$$\mathrm{TR}_{\mathbf{o}} = (|\mathrm{TR}_{\mathbf{o}}|, \leq_{\mathbf{o}}, \mathsf{plus}_{\mathbf{o}}, S_{\mathbf{o}}, \mathrm{val}_{\mathbf{o}}).$$

3）在 1.2(F)(b) 中：

- 在结论中，一般只有一个上界存在。
- 但是，如果 $\mathrm{cf}(\delta) \in \Theta$，则完整的结论成立。

4）在 1.5(2) 中，我们只要求

- 长度为 $< \kappa$ 的 $\mathbb{Q}_{\mathbf{o}}$ 中的任意严格递增序列都有一个上界。
- 长度为 $\delta < \kappa$ 且 $\mathrm{cf}(\delta) \in \Theta$ 的任意严格递增序列都有一个最小上界。

5）我们将 1.9(1)(c) 替换为

$(c)'$ $\mathcal{A}_t \subseteq [L_{\mathbf{q},t}]^{<\theta}$

6）在定义 1.11 中，我们省略条款 (f)。

7）在 2.4(3) 中，如果共尾性$(\delta) \in \Theta$，那么是的，确实存在最小上界。（否则，我们只有上界。）

8) 在 $(*)_{s,\ i}$ 在 2.7(2) 的证明中，我们将第(c)条替换为

(c)′ $A^*_{s,i} \cap A^*_{s,j} = \varnothing$ for all $j < i$, and $A^*_{s,i} \cap A = \varnothing$ for all $A \in \mathcal{A}_{p(s),i}$.

9) 不过，如果我们弱化第(1)条 $\bullet_2$ ，那么在 4.5(b) 中必须添加如下假设：TR $_{\mathbf{o}} \times \prod \mathrm{TR}_{\mathbf{o}_t} \notin \mathbf{O}^+$ 是一个 κ-主干控制器。$t \in L_{\mathbf{q}}$

定理 5.3。 沿用5.1的背景，我们有$(A) \Rightarrow (B)$ 以及$(A) \wedge (B) \Rightarrow (C)$，其中

(A) (a) 我们有“ $\bullet_1 \vee \bullet_2$，” 其中 $\bullet_1$ κ 是不可达基数，并且$\mathbf{o} :=$ $\mathbf{o}${v20>（因此 $\mathbb{Q}_{\mathbf{o}} = \mathbb{Q}_{\bar{\lambda}}$）。

$\bullet_2$ $\kappa := \aleph_0$ 以及 $\mathbf{o} := \mathbf{o}^2_\kappa$ 如 1.6(1)中所述。(b) $\lambda > \theta =$ 共尾性$(\theta) > \kappa$

(B) 存在$\mathbf{q}$ 和 $\bar{t}$ ，$\bar{}$ 使得

(a) $\bar{q} = \langle q_\alpha : \alpha \leq \theta \rangle \subseteq Q$。令 $q := q_\theta$。(b) $|L_{\mathbf{q}_\alpha}| = \lambda$$(c)$ $\bar{t} = \langle t_\alpha : \alpha < \theta \rangle$ (d) $t_\alpha \in L_{\mathbf{q}_{\alpha+1}}$ 以及 $L_{\mathbf{q}_\alpha} \in \mathcal{A}_{\mathbf{q}}$，$_{t_\alpha}$$(e)$ $o_{\mathbf{q}}$，$_t$ $:=$$o$ (f) 对任意 r，$s \in L_{\mathbf{q}}$，存在一个 $\pi \in$ 自同构群$(L_{\mathbf{q}})$，使得 $\pi(r) = s$。(g) 此外，如果 $s <_{L_{\mathbf{q}}} t_1$ 和 $s <_{L_{\mathbf{q}}} t_2$，则存在一个 $\pi \in$自同构群$(L_{\mathbf{q}})$，使得 $\pi(t_1) = t_2$，并且 $\pi \restriction L_{\leq s}$ 是恒等映射。

(C) 设 $\underset{\sim}{X} := \{\underset{\sim}{\eta}_{\mathbf{q},s} : s \in L_{\mathbf{q}}\}$ 是一个 $\mathbb{P}_{\mathbf{q}}$-名称，则有

$$\mathbf{V}_1 := \mathrm{HOD}(\mathbf{V} \cup \underset{\sim}{X})^{\mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\mathbf{q}}}}$$

满足以下条件：(a) 它是 ZF 的一个模型。(b) $\mathrm{id}_{<\theta}(\mathbb{Q}, \eta)$ 具有可测性。$_{\sim}(c)$ $\mathbf{V}_1$ 具有可数选择$_{<\theta}$。

证明。 显然。 $\square_{5.3}$

注记 5.4。 我们可以考虑一种替代 5.2 的方案，保留“$\mathcal{A}_{\mathbf{m},\ t}$ 是两两不交集的集合。” 不过，在定义 $\mathbf{m} \leq_{\mathbf{M}} \mathbf{n}$ 时，我们将“$\mathcal{A}_{\mathbf{m},\ s} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{n},\ s}$”替换为

- For every $A \in \mathcal{A}^+_{\mathbf{m},s}$ there exists a unique $B \in \mathcal{A}^+_{\mathbf{n},s}$ such that $B \supseteq A$.

References

[HS] Haim Horowitz 和 Saharon Shelah， *Saccharinity with ccc*，arXiv：1610.02706。[KS11] Jakob Kellner 和 Saharon Shelah， *Saccharinity* **76** 2011 4, ，《符号逻辑杂志》（），第 1153 –1183 期，arXiv：math/。MR [RS04] Andrzej Ros 0511330 2895391 *Sweet & sour and other flavours of ccc forcing* lanowski 和 Saharon Shelah，， *notions* **43** 2004 9909115 《数学逻辑文献档案》（），第 5, 583 663, 2076408 – 期，arXiv：math/。[06] *How much sweetness is there in the universe?* **52** 2006 MR RS，，《数学逻辑季刊》（），第 1, 71 86, 0406612 2195002 – 期，arXiv：math/。[ ] MR She Saharon Shelah， *Are* $\mathfrak{a}$ *and* $\mathfrak{d}$ *your cup of tea? Revisited.*，arXiv：2108.03666。《 [Sh:700].[She04] 》的修订版， *Two cardinal invariants of the continuum* $\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$ *and FS linearly ordered iterated* （），《数学学报》（），第 *forcing* **192** 2004 2, 187 223, $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{d}$ – 期。此前标题为 “Are and your cup of tea?” arXiv：math/ 0012170 2096454 。[22] *Forcing axioms for* λ*-complete* μ^+*-c.c* MR She，，《数学逻辑季刊》**68** 1，6 2022 1310 4042 4413641（），第 –26 期，arXiv：。。MR

[She23] , *Corrected iteration*, 《意大利数学联合会公报》**16** （2023）, 第3期, 521–584, arXiv: 2108.03672。
MR 4627290[Sol70] Robert M. Solovay, *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable* **92** 1970 1 56 , 《数学年刊》（）, –。

Einstein Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, 9190401, Jerusalem, Israel; and, Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway, NJ 08854-8019, USA

URL: https://shelah.logic.at/