arXiv:2603.17960v1 [math.SG] 18 Mar 2026

通过微局部层论研究干净拉格朗日交的拓扑约束

Tomohiro Asano YukihiroOkamoto

摘要

取一个纽结 K_0，使其位于 $\mathbb{R}^3$ 中，并考虑 $T^*\mathbb{R}^3$ 的一个拉格朗日子流形 L。该子流形可通过紧支哈密顿同伦变形同痕于 K_0 的余法丛，并沿一个纽结与零截面 $\mathbb{R}^3$ 干净相交。本文利用微局部层论和三维流形理论中的若干结果，证明 $\mathbb{R}^3$ 中 $K_1 := L \cap \mathbb{R}^3$ 的结型受到 K_0 的结型的严格约束。具体而言，我们推导出存在一个满群同态 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1)$，它保持相对于 Seifert 框架的经线和子午线。此外，结合第二作者先前的工作，我们得到了一个此前仅对平凡结已知的刚性结果：若 K_0 是（2，q）环面结或八字结，则 K_1 必须与 K_0 具有相同的结型。

1 引言

1.1 背景

设 L_1 和 L_2 是辛流形 (X, ω) 中的拉格朗日子流形，并考虑它们的交 $L_1 \cap L_2$。这里，我们假设 L_1 和 L_2 干净相交（定义见定义 2.1）。在这种情况下，交 $L_1 \cap L_2$ 是 L_1（以及 L_2）的子流形，且维数可能大于零。当 $\dim(L_1 \cap L_2) > 0$ 时，与横截交的情形不同，$L_1 \cap L_2$ 如何嵌入 L_1（以及 L_2）成为子流形，是一个非平凡的问题。

从低维拓扑的视角看，一个有趣的情形是 $\dim X = 6$ 和 $L_1 \cap L_2$ 为嵌入圆，也就是说，是三维流形 L_i 中的一个纽结，其中 $i = 1,2$。对于一对拉格朗日三球面，Smith 提出了一个问题：在哈密顿微分同胚 [下，拉格朗日交的“平凡结性是否保持（或是否刚性）” GP21，问题 1.5]。当 X 是沿着 S^3 中的平凡结对两个 T^*S^3 进行丛合所得时，Ganatra–Pomerleano [GP21，命题 6.29], 、Smith–Wemyss [SW23，命题 4.10] 以及 Asplund–Li [AL25，定理 1.3] 给出了与该问题相关的结果。特别地，[AL25，定理 1.1] 证明了在 “ 邻近哈密顿微分同胚 ” 下，干净拉格朗日交的平凡结性得以保持。

在本文中，我们考虑带有标准辛结构的 $X = T^*\mathbb{R}^3$ 情形。对于 $\mathbb{R}^3$中的任意光滑结 K，记其余法丛为 $T^*_K\mathbb{R}^3$。注意，$T^*_K\mathbb{R}^3$ 与零截面 $0_{\mathbb{R}^3}$ 沿 $K \subset 0_{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3$干净相交。令 $\mathrm{Ham}_c(T^*\mathbb{R}^3)$ 表示 $T^*\mathbb{R}^3$上紧支撑哈密顿微分同胚组成的群。给定 $\mathbb{R}^3$中的一个结 K，我们提出如下问题:

问题 1.1. 是否存在 $\varphi \in \mathrm{Ham}_c(T^*\mathbb{R}^3)$，使得 $\varphi(T^*_K\mathbb{R}^3)$与$0_{\mathbb{R}^3}$沿某个结干净相交，且该结的结型不同于 K?

这里，结型是指 $\mathbb{R}^3$中的纽结的同伦类。

注 1.2。 我们对问题 1.1 作三点注记：

1. φ 是哈密顿微分同胚这一条件至关重要。事实上，对于任意一对纽结 K_0 和 K_1，总存在一个 C^∞ 同伦变形 $(\varphi^s)_{s\in[0,1]}$，作用于带紧支集的 $T^*\mathbb{R}^3$ 上，使得 $\varphi^1(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$ 与 $0_{\mathbb{R}^3}$ 沿着 K_1 干净相交。2. 据作者所知，目前尚未发现任何例子。3. 干净相交 $\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3) \cap 0_{\mathbb{R}^3}$ 的连通性也是一个重要条件，而且似乎不容易将下文的主要结果推广到沿着多分支链环的干净相交。技术原因见注 3.7。

关于问题 1.1 的一些相关结果由 [Oka25a] 和 [Oka25b]获得。例如， [Oka25a, 定理 1.3] 在 K 是 $\mathbb{R}^3$中的平凡结时，对问题 1.1 给出了否定回答。（事实上，也可以从上文提到的 [GP21，命题 6.29]推导出这一答案。参见 [Oka25a，第 1]节。）在 K 具有非平凡结型的若干情形下， [Oka25a，定理 1.4 和 1.5]以及 [Oka25b，定理 1.1]对 $\varphi(T^*_K\mathbb{R}^3) \cap 0_{\mathbb{R}^3}$的纽结类型给出了一些较弱的约束。

1.2 主要结果

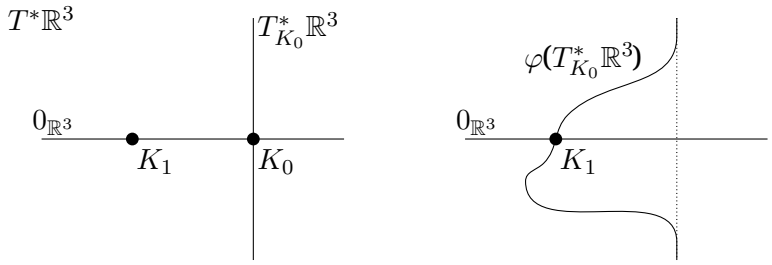


图 1.1：左侧的圆点表示 $0_{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3$ 中的纽结 K_0 和 K_1。我们假设 $\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$ 与 $0_{\mathbb{R}^3}$ 沿着 K_1 干净相交，如右侧所示。

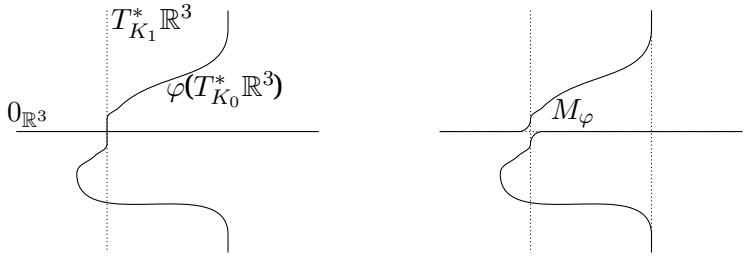


图 1.2：我们可以假设 $\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$ 在 $0_{\mathbb{R}^3}$ 的一个邻域内（左侧）与 $T^*_{K_1}\mathbb{R}^3$ 重合。三维流形 M_φ 与通过沿 K_1 对 $\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3) \cup 0_{\mathbb{R}^3}$ 进行 Polterovich 手术得到的拉格朗日子流形微分同胚（右侧）。

设 K_0 和 K_1 是 $\mathbb{R}^3$ 中的纽结。令 $\varphi \in \mathrm{Ham}_c(T^*\mathbb{R}^3)$，并假设 $\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$ 与 $0_{\mathbb{R}^3}$ 沿着 $K_1 \subset 0_{\mathbb{R}^3} \cong \mathbb{R}^3$ 干净相交。见图 1.1。

为了说明关键结果，我们先准备一些记号。在第 2.2 节中，我们将引入一个三维流形 M_φ ，它与一个拉格朗日子流形微分同胚，后者属于

$T^*\mathbb{R}^3$由 $\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$ 沿 K_1经过 Polterovich 手术得到。参见图 1.2 右侧。（本文中，我们只将 M_φ 视为一个三维流形，并不利用它是 $T^*\mathbb{R}^3$ 的精确拉格朗日子流形这一性质。）令 Λ_{K_0} 为 K_0的单位余法丛。存在两个自然嵌入

$$M_\varphi \xleftarrow{\sigma_0} \Lambda_{K_0} \xrightarrow{e_0} \mathbb{R}^3 \setminus K_0,$$

其中，σ_0是映到 $\{(x,\ \xi) \in T^*_{K_0}\mathbb{R}^3 \mid |\xi| = r\}$的嵌入，当 $r > 0$足够大时成立；e_0则是映到 K_0在 $\mathbb{R}^3$中的管状邻域边界上的嵌入。其显式描述见第 2.2 节。它们在基本群之间诱导群同态

$$\pi_1(M_\varphi) \xleftarrow{(\sigma_0)_*} \pi_1(\Lambda_{K_0}) \xrightarrow{(e_0)_*} \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0).$$

H此处，我们固定 $y_0 \in \Lambda_{K_0}$，并分别选择 $\sigma_0(y_0)$、y_0 和 $e_0(y_0)$ 作为基点 s.

定理 1.3（定理 5.2）。存在一个满群同态

$$\tilde{h}\colon \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0) \to \pi_1(M_\varphi)$$

˜，使得 $h \circ (e_0)_* = (\sigma_0)_*$。

本文中，若满同态 $\tilde{h}$：$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0) \to \pi_1(M_\varphi)$ 满足 $\tilde{h} \circ (e_0)_* = (\sigma_0)_*$，则称其为保持周边对的。通过第 1.3 节概述的层论论证构造了满同态 h：$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0) \to \pi_1(M_\varphi)$。我们还在命题 3.26 中探讨了它与 e_0 和 σ_0 的关系。通过讨论某些三维流形的基本群以及与 M_φ相关的紧三维流形的 JSJ 分解，这个满同态h 在第 5 节被提升为一个保持周边对的满同态 h。

由定理 1.3，我们可以提取关于纽结对 $(K_0,\ K_1)$ 的拓扑约束。其中一个推论如下。

定理 1.4（定理 4.7 和 4.8）。如果 K_0 是（2，q）-环面结或八字结，那么 K_1 在 $\mathbb{R}^3$ 中与 K_0 同痕。

值得注意的是，当 K 是 (2，q)-环面结或八字结时，这就对问题 1.1 给出了否定的回答。

注记 1.5。当 K_0 的结型如定理 1.4 所述时，利用定理 1.3 以及关于纽结补空间基本群的一些已知结果，可以看出 K_1 要么与 K_0 同痕，要么是平凡结。（我们指出，将命题 3.26 加强为定理 1.3 之前的版本，已足以达到这一目的。）由 Oka25b 定理 1.1] 排除了 K_1 为平凡结的情形（此时 K_0 不是平凡结）。Oka25b 定理 1.1] 的证明依赖于对 Λ_{K_i} 的 Legendrian 接触同调进行计算，其系数取自 $\mathbb{Z}[H_2(U^*\mathbb{R}^3,\ \Lambda_{K_i})]$，其中 $i = 0,\ 1$；这里 $U^*\mathbb{R}^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的单位余切丛。目前，作者尚无利用微局部层论给出的替代证明。

我们还得到了关于三维流形 $T^*_{K_0}\mathbb{R}^3 \cong S^1 \times \mathbb{R}^2$ 中 $\varphi^{-1}(K_1) = T^*_{K_0}\mathbb{R}^3 \cap \varphi^{-1}(0_{\mathbb{R}^3})$ 同伦类的一个约束。

定理1.6。假设 K_0 在 $\mathbb{R}^3$ 中与 K_1 同痕。那么，$\varphi^{-1}(K_1)$ 在 $T^*_{K_0}\mathbb{R}^3$ 中与 $K_0 = T^*_{K_0}\mathbb{R}^3 \cap 0_{\mathbb{R}^3}$ 同痕。

注意，对于 $\mathbb{R}^3$ 中任意一对同痕纽结（K_0, K_1），总存在 $\varphi \in \mathrm{Ham}_c(T^*\mathbb{R}^3)$，使得 $\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$ 与 $0_{\mathbb{R}^3}$ 沿 K_1 干净相交。

在接下来的三个小节中，我们将通过一些纽结不变量来介绍纽结 K_0、$K_1 \subset \mathbb{R}^3$之间的关系。

1.2.1 纽结群之间的满同态

固定 K_0 和 K_1的定向。它们配备了 Seifert 框架。于是，对于$i = 0$，1，我们有两个元素 l_i、$m_i \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_i)$，分别表示经线和子午线。

定理 1.7 (推论 5.3)。存在一个满群同态

$$\tilde{k}\colon \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1)$$

s ˜ ˜使得，通过必要时改变 K_1 的定向，$k(l_0) = l_1$ 和 $k(m_0) = m_1$.

关于纽结群之间满同态的研究已有不少。例如，参见 [KSW05; SW06; KS08; SW08; ORS08; AL12; ALSS20; BKN25]。另请参见注 4.1 和注 5.4。

注记 1.8。我们关于干净拉格朗日交的设定提供了一种新的几何情形，在此情形下，纽结群之间会出现满同态。

1.2.2 关于增强 A-多项式

对于一个纽结 K，存在一个多项式 $A_K \in \mathbb{Z}[\lambda, \mu]$，它与 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ 的 $SL_2(\mathbb{C})$-表示的特征簇相关，因此称为 K 的*A* 多项式。这是由 [CCGLS94] 引入的经典纽结不变量。Ni-Zang [NZ17] 考虑了对 ˜A 多项式的一个轻微增强，我们将其记为 A_K。它是 $\mathbb{Z}[\lambda, \mu]$ 上的一个多项式，通过省略 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ 的可约 $SL_2(\mathbb{C})$- 表示所对应的曲线来定义。

˜ ˜**定理 1.9**（定理 4.14）。A_{K_0} 可被 A_{K_1} 整除。

˜对于任意纽结 K，A_K 是 A_K 和 $\lambda - 1$的最小公倍式，因此该定理推出 A_{K_0} 可被 A_{K_1}整除，这一点已由 [SW06，命题 4.2]知晓。对于 [SW06，命题 4.2], 的证明而言，纽结群之间某个同态的满射性并不重要，而 k 的满射性对于定理 1.9 至关重要。我们利用了以下事实：经由 k 的拉回保持（$SL_2(\mathbb{C})$-）表示的不可约性。

1.2.3 关于 KCH 表示及其与 [Oka25a，定理 1 的关系。 1]

设 K 是一个定向纽结。若一个 n 维表示 $\rho\colon \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \to GL_n(\mathbb{C})$ 的子午线像可对角化，且特征值 1 的重数为 $n-1$，则称其为 ***KCH*** 表示。已知 KCH 表示会诱导 K 的结 DGA（或 Λ_K 的 Chekanov-Eliashberg DGA，其系数取自 $\mathbb{Z}[H_1(\Lambda_K)]$）到 $\mathbb{C}$ [Ng14，定理 5.11] 的一个增广。我们将在第 4.3 节中，从不可约 n 维 KCH 表示的集合定义 $(\mathbb{C}^*)^2$ 的一个子集 $\tilde{U}_K^n$。Cornwell 的结果 [Cor17，定理 1.2] 表明，Ng 在 [Ng08，定义 5.4] 中定义、并在 [Oka25a], 中使用的 K 的增广簇 V_K，可以通过 ~$V_K = (\mathbb{C}^* \times \{1\}) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} U_K^n$ 恢复。

˜ ˜**定理 1.10** (定理 4.18)。对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$U_{K_1}^n$ 都是 $U_{K_0}^n$ 的子集。

特别地，我们得到一个关系

$$V_{K_1} \subset V_{K_0},$$

这是对 [Oka25a, 定理 1.1] 的细化。

1.3 证明思路

正如我们将在第 2.2 节中讨论的，可以假设 $\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$ 在 $0_{\mathbb{R}^3}$ 的某个邻域内与 $T^*_{K_1}\mathbb{R}^3$ 一致，如图 1.2 左侧所示。通过一个辛同胚

$$F\colon \mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3 \to T^*\mathbb{R}^3 \setminus 0_{\mathbb{R}^3},\ (r,(x;\xi)) \mapsto (x;e^r\xi),$$

我们得到一个恰当拉格朗日协边 $L_\varphi := F^{-1}(\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3) \setminus K_1)$，位于 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$，其正端为 Λ_{K_0}，负端为 Λ_{K_1}。

定理 1.3 的证明依赖于微局部层论 [KS90; Gui23]。固定一个域$\mathbf{k}$。对于任意 C^∞ 流形 X，$\mathrm{Sh}(X)$ 表示以复形的态射集范畴 ∞中的 $\mathbf{k}$-向量空间为值的层的（∞-）范畴，定义在 X 上。对于 T^*X 的任意闭子集 A，$\mathrm{Sh}_A(X)$ 表示由微支撑包含于 A 的层组成的全子范畴。此外，令 $\mathrm{Loc}(X)$ 表示 $\mathrm{Sh}(X)$ 中由上同调局部常值层组成的全子范畴。其精确定义见第3.1节。

证明思路源自以下两项先前的工作：

- Li [Li23；Li25] 证明，给定魏因斯坦流形边界上两个 Legendrian 子流形之间的正合拉格朗日协边，我们可以关联一个介于某些微层范畴之间的全忠实函子。在本文的情形中，我们得到一个与 L_φ相关联的全忠实函子

$$\Phi_{L_\varphi}\colon \mathrm{Sh}_{0_{\mathbb{R}^3}\cup T^*_{K_1}\mathbb{R}^3}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi) \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{0_{\mathbb{R}^3}\cup T^*_{K_0}\mathbb{R}^3}(\mathbb{R}^3). \tag{1.1}$$

- Shende [She19] 证明，Λ_K 的 Legendrian 同伦类是纽结 K的完全同痕不变量。为了从范畴 $\mathrm{Sh}^{0_{\mathbb{R}^3}\cup T^*_K\mathbb{R}^3}(\mathbb{R}^3)$ 中恢复 $\mathbb{R}^3\setminus K$ 的基本群，我们使用了一个半正交分解

$$\mathrm{Sh}_{0_{\mathbb{R}^3}\cup T^*_K\mathbb{R}^3}(\mathbb{R}^3) = \big\langle \mathrm{Loc}(K), \mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3\setminus K)\big\rangle$$

见 [She19，定理 7]。关于该分解的精确定义，参见[She19，第 2]节。

结合函子 Φ_{L_φ} 与半正交分解，我们旨在建立 $\mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3\setminus K_0)$ 与 $\mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3\setminus K_1)$ 之间的联系，进而提取 $\mathbb{R}^3\setminus K_0$ 与 $\mathbb{R}^3\setminus K_1$的基本群之间的关系。然而，由于 Φ_{L_φ}定义域中包含因子 $\mathrm{Loc}(L_\varphi)$，存在一个技术难点。也就是说，在范畴 $\mathrm{Sh}^{0_{\mathbb{R}^3}\cup T^*_{K_1}\mathbb{R}^3}(\mathbb{R}^3)\times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})}\mathrm{Loc}(L_\varphi)$ 中，我们没有类似于 $\mathrm{Sh}^{0_{\mathbb{R}^3}\cup T^*_{K_0}\mathbb{R}^3}(\mathbb{R}^3)$ 的半正交分解。（本文中，对于 ∞-范畴，我们使用分裂 Verdier 序列的概念来替代半正交分解。）

1.4 与采用 Chekanov-Eliashberg DGA 的方法进行比较 s

在当前设定下，Λ_{K_i} 的 Chekanov-Eliashberg DGA（$\mathcal{A}_*(\Lambda_{K_i})$ ∂）定义在系数属于 $\mathbb{Z}[H_1(\Lambda_{K_i})]$的情形。此外，我们可以构造一个定义在 $\mathbb{Z}[H_1(\Lambda_{K_0})]$上的微分分次代数映射

$$\Psi_{L_\varphi}\colon \mathcal{A}_*(\Lambda_{K_0}) \to \mathcal{A}_*(\Lambda_{K_1}) \otimes_{\mathbb{Z}[H_1(\Lambda_{K_1})]} \mathbb{Z}[H_1(L_\varphi)]$$

与恰当拉格朗日余边界 L_φ 相关。更多详情见 [Ekh08；EHK16] 和 [Oka25a，第 3] 节。（事实上，存在一个同构 $\mathbb{Z}[H_1(\Lambda_{K_i})] \to \mathbb{Z}[H_1(L_\varphi)]$ for$i=0,\ 1$，它由一个自然嵌入诱导，因此我们可以将这些环视为相同。）固定一个域 $\mathbf{k}$，并令 $Aug(\Lambda_{K_i};\mathbf{k})$ 为一个按 [BC14，第 3.2 节.1] 中定义的 A_∞-范畴，其对象为

映射 $\epsilon\colon \mathcal{A}_*(\Lambda_{K_i}) \to \mathbf{k}$，称为从微分分次代数 $(\mathcal{A}_*(\Lambda_{K_i}),\partial)$ 到 $\mathbf{k}$ 的增广。我们注记，这个 A_∞-范畴是非幺的，区别于由 [NRSSZ20] 定义、带单位元的 A_∞-范畴 $Aug_+(\Lambda)$；该范畴针对 Λ 中的 $\mathbb{R}^3$ 勒让德链环。对于任意增广 ϵ，复合映射 $\epsilon\circ\Psi_{L_\varphi}$ 是 $\mathcal{A}_*(\Lambda_{K_0})$ 的一个增广。我们期望这一对应可扩展为这些范畴之间的一个函子

$$\Psi^*_{L_\varphi}\colon Aug(\Lambda_{K_1};\mathbf{k}) \to Aug(\Lambda_{K_0};\mathbf{k}),\ \epsilon \mapsto \epsilon\circ\Psi_{L_\varphi}.$$

类似的函子在 [Li23 第 1 节1] 中有所提及，并与函子 (1.1) 进行了比较。正如 [Li23 第 1 节1] 和 [Li25 第 1 节1], 所解释的，Li 的工作受到微局部层范畴与增广范畴之间关系的启发，这一关系基于 Ganatra–Pardon–Shende [GPS24] 的工作以及 Legendrian 手术公式 [BEE12; EL23; AE22]。

函子 (1.1) 的优势在于其全忠实性，由此可推出定理 1.3 中群同态的满射性。据作者所知，我们不知道 $\Psi^*_{L_\varphi}$ 是否全忠实。注意，对于 Legendrian纽结 Λ的范畴 $Aug_+(\Lambda)$，[Li23 定理 1.1] 的对应结果已为人所知。参见下文注记 1.11。

注记 1.11。设 Λ_+ 和 Λ_- 是具有标准接触结构的 $\mathbb{R}^3$ 中的 Legendrian纽结。设 Σ 是从 Λ_- 到 Λ_+的恰当拉格朗日协边。在满足关于 Σ的某些条件时，Pan [Pan17, 定理 1.6] 构造了一个从$Aug_+(\Lambda_-)$到$Aug_+(\Lambda_+)$的函子，该函子与 Σ 相关联，并证明了其全忠实性。

我们可以从 $(\mathcal{A}_*(\Lambda_K),\partial)$ 得到关于 K的结型的一些信息。[Oka25a] 中的方法是利用增广簇 V_K，它由 $(\mathcal{A}_*(\Lambda_K),\partial)$ 到 $\mathbb{C}$的增广集合定义。如第 1.2.3 节所述，V_K与 $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K)$ 的 KCH 表示密切相关。Ekholm-Ng-Shende [ENS18] 研究了 $(\mathcal{A}_*(\Lambda_K),\partial)$ 的一种增强形式，并证明其同调连同一个附加结构可以恢复群 $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K)$。这类似于 [She19] 中从 $\mathrm{Sh}^0_{\mathbb{R}^3\cup T^*_K\mathbb{R}^3}(\mathbb{R}^3)$ 恢复$\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K)$ 的过程。

1.5 论文结构

在第2节中，我们介绍干净拉格朗日交的几何框架，并引入一些几何对象，例如三维流形 M_φ，研究它们的基本性质。在第 3 节中，我们将微局部层论应用于这一框架。在第 3.3 节中，我们引入一个从 [Li23] 出发的余边界函子。利用这个函子，我们在第 3.4 节中构造一个群同态 h，其定义域为 $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K_0)$，陪域为 $\pi_1(M_\varphi)$。在第 3.5 节中，我们证明 h 的满射性（命题 3.25），并给出关于 $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K_0)$ 和 $\pi_1(M_\varphi)$ 的表示的命题 3.26。在第 4 节中，我们将看到，第 3.5 节的结果通过纽结群、 A 多项式和 KCH- 表示，对干净拉格朗日交的结型施加了约束。特别地，结合 [Oka25b，定理 1.1], ，我们证明了定理 1.4。在第 5 节中，我们利用三维流形理论将命题 3.26 提升为定理 1.3。

致谢。感谢 Wenyuan Li 对其研究成果所作的详尽解释以及宝贵的讨论。感谢 Yuta Nozaki 就低维拓扑学所作的解释和讨论。也感谢 Yuichi Ike 的有益讨论。TA 获得 JSPS KAKENHI Grant Number JP24K16920 和 JST、CREST Grant Number JPMJCR24Q1（日本）的资助。YO 获得 JSPS KAKENHI Grant Number JP25KJ0270 的资助。

2 几何设置

2.1 记号

设 X 是一个 C^∞ 流形。考虑 X 的余切丛 T^*X。对于任意 $x \in X$，我们用 $(x; \xi) \in T^*X$ 表示 $\xi \in T^*_x X$。令 $\pi_X \colon T^*X \to X$ 为丛投影。总空间 T^*X 上有一个典范的 Liouville 1-形式 $\lambda_X \in \Omega^1(T^*X)$，其定义为 $(\lambda_X)_{(x;\xi)} = \xi \circ (d\pi_X)_{(x;\xi)}$。我们用 0_X 表示零截面，并将其与 X 等同。群 $\mathbb{R}_+$ 对 T^*X 的作用为：对每个 $r \in \mathbb{R}_+$，$r \cdot (x; \xi) = (x; r\xi)$。$X$ 的余球丛定义为 $T^{*,\infty}X := (T^*X \setminus 0_X)/\mathbb{R}_+$。

当 X 上的黎曼度量固定后，X 的单位余切丛定义为 $U^*X := \{(x; \xi) \in T^*X \mid |\xi| = 1\}$。存在一个自然的微分同胚

$$\psi^\infty \colon U^*X \to T^{*,\infty}X,\ (x;\xi) \mapsto [(x;\xi)].$$

定义 $\alpha_X := \lambda_X|_{U^*X}$ 上的一个1-形式。于是，它是 U^*X 上的接触1-形式，并且 $d\psi^\infty(\ker \alpha_X)$ 在 $T^{*,\infty}X$ 上给出了一个规范的接触结构。

对于任意 C^∞ 子流形 $K \subset X$，其余法丛 $T^*_K X$ 是 T^*X 的拉格朗日子流形，定义为

$$T^*_K X := \{(x;\xi) \in T^*X \mid x \in K,\ \langle \xi, v \rangle = 0 \text{ for every } v \in T_x K\}.$$

我们将 K 的单位余法丛定义为

$$\Lambda_K := T^*_K X \cap U^*X.$$

由于 $\alpha_X|_{\Lambda_K} \in \Omega^1(\Lambda_K)$ 消失，Λ_K 是 (U^*X, α_X) 的 Legendrian子流形。

设 $H \colon T^*X \times [0,1] \to \mathbb{R}$，$(x; \xi)\ s) \mapsto H_s(x; \xi)$ 是一个紧支集的 C^∞ 哈密顿量。于是，$(\varphi^H_s)_{s\in[0,1]}$ 在 T^*X 上生成一个流，该流由时变向量场 $(X_s)_{s\in[0,1]}$ 确定，且该向量场由 $(d\lambda_X)(\cdot, X_s) = dH_s$ 决定。我们定义

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ham}_c(T^*X)\\ &:= \{\varphi = \varphi^H_1 \mid H \colon T^*X \times [0,1] \to \mathbb{R} \text{ is a } C^\infty \text{ Hamiltonian with compact support}\}.\end{aligned}$$

2.2 沿纽结的清洁拉格朗日交

作为一个 3 维 C^∞ 流形，我们聚焦于 $\mathbb{R}^3$。它配备了标准度量 $\sum_{i=1}^3 dx_i \otimes dx_i$，其中 (x_1, x_2, x_3) 是 $\mathbb{R}^3$ 的坐标。该度量确定了 $T^*\mathbb{R}^3$ 与 $T\mathbb{R}^3$ 之间的一个对应关系。对于任意 $r > 0$，记 $D^*_r\mathbb{R}^3 := \{(x; \xi) \in T^*\mathbb{R}^3 \mid |\xi| < r\}$。

我们回顾子流形干净相交的定义。

定义 2.1。设 L_0 和 L_1 是 $T^*\mathbb{R}^3$中的 C^∞ 子流形。若 L_0 和 L_1 沿 $L_0 \cap L_1$ 干净相交，则以下条件成立：

- $L_0 \cap L_1$ 是 L_0 和 L_1的 C^∞ 子流形。
- $T_p(L_0 \cap L_1) = T_pL_0 \cap T_pL_1$ for every $p \in L_0 \cap L_1$.

下面为问题 1.1 给出一个几何设置。设 K_0 和 K_1 是 $\mathbb{R}^3$中的纽结。对于 $\varphi \in \mathrm{Ham}_c(T^*\mathbb{R}^3)$，假设 $\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$与 $0_{\mathbb{R}^3}$ 沿着 $0_{\mathbb{R}^3} \cong \mathbb{R}^3$ 中的 K_1 干净相交（参见图 1.1）。根据 [Oka25a，引理 2.3],，存在一个 $\varphi' \in \mathrm{Ham}_c(T^*\mathbb{R}^3)$，其支撑包含在 $T^*\mathbb{R}^3$ 中 K_1 的某个邻域内，使得 $(\varphi' \circ \varphi)(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$与 $T^*_{K_1}\mathbb{R}^3$重合

在 $0_{\mathbb{R}^3}$的某个邻域内。将 $\varphi' \circ \varphi$ 改写为 φ后，我们可以假设对于充分小的 $\varepsilon > 0$,

$$\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3) \cap D^*_\varepsilon\mathbb{R}^3 = T^*_{K_1}\mathbb{R}^3 \cap D^*_\varepsilon\mathbb{R}^3.$$

见图 1.2 左图。

我们考虑一个微分同胚

$$\psi\colon \mathbb{R} \times U^*\mathbb{R}^3 \to T^*\mathbb{R}^3 \setminus 0_{\mathbb{R}^3},\ (r,(x;\xi)) \mapsto (x;e^r\xi). \tag{2.1}$$

那么， $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$ 连同 1-形式 $\psi^*(\lambda_{\mathbb{R}^3}) = e^r\alpha_{\mathbb{R}^3}$ 给出了接触流形 $(U^*\mathbb{R}^3, \alpha_{\mathbb{R}^3})$ 的辛化。考虑 $T^*\mathbb{R}^3 \setminus 0_{\mathbb{R}^3}$ 的一个精确拉格朗日子流形

$$L_\varphi \coloneqq \varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3) \setminus K_1.$$

那么， $\psi^{-1}(L_\varphi)$ 是 $U^*\mathbb{R}$ 的辛化中的一个精确拉格朗日子流形 [3].

此外，正如 [Oka25a, 第2节.2] 中所讨论的， $\psi^{-1}(L_\varphi)$ 是 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$ 中的一个精确拉格朗日协边，其正端为 Λ_{K_0}，负端为 Λ_{K_1}。事实上，存在 $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$，使得 $a_0 > a_1$，从而 $\psi^{-1}(L_\varphi) \cap ([a_1,a_0]\times U^*\mathbb{R}^3)$ 是紧的，并且

$$\psi^{-1}(L_\varphi) \cap ([a_0,\infty)\times U^*\mathbb{R}^3) = [a_0,\infty)\times\Lambda_{K_0},$$
$$\psi^{-1}(L_\varphi) \cap ((-\infty,a_1]\times U^*\mathbb{R}^3) = (-\infty,a_1]\times\Lambda_{K_1}.$$

此外，若取函数 $f\colon \psi^{-1}(L_\varphi) \to \mathbb{R}$ 使得 $df = (e^r\alpha_{\mathbb{R}^3})|_{\psi^{-1}(L_\varphi)}$，则$df = 0$ 在 $(-\infty, a_1]\times\Lambda_{K_1}$ 上。由于 Λ_{K_1} 连通， f 在 $(-\infty, a_1]\times\Lambda_{K_1}$ 上为常数。

我们先为 $i \in \{0,1\}$准备一些记号：

- 我们有一个嵌入

$$\sigma_i\colon \Lambda_{K_i} \to L_\varphi,\ (x;\xi) \mapsto \psi(a_i,(x;\xi)) = (x;e^{a_i}\xi).$$

  σ_i 也可以视为一个嵌入 $\sigma_i\colon \Lambda_{K_i} \to T^*_{K_i}\mathbb{R}^3 \setminus 0_{\mathbb{R}^3}$。

- 我们在 $\mathbb{R}^3$ 中取 K_i 的一个管状邻域，定义为

$$N_{K_i} \coloneqq \{x+v \mid x\in K_i,\ v\in (T_xK)^\perp \text{ and } |v|<\varepsilon\}$$

  当 $\varepsilon > 0$ 足够小时。通过由标准度量确定的识别 $T^*\mathbb{R}^3 \cong T\mathbb{R}^3$，我们定义

$$e_i\colon \Lambda_{K_i} \to \partial N_{K_i},\ (x;\xi) \mapsto x + \varepsilon\cdot\xi. \tag{2.2}$$

- 固定 Λ_{K_i}的一个基点 y_i 。我们还固定纽结 K_i 的定向，并取其 Seifert 框架。然后，我们取 $m_i,\ l_i \in \pi_1(\Lambda_{K_i},\ y_i)$，使得这些元素

$$(e_i)_*(m_i), (e_i)_*(l_i) \in \pi_1(\partial N_{K_i}, e_i(y_i))$$

  分别给出带框架纽结 K_i的子午线和经线。

我们也用 $m_i,\ l_i \in H_1(\Lambda_{K_i};\mathbb{Z})$表示对应于 $m_i,\ l_i \in\pi_1(\Lambda_{K_i},\ y_i)$的同调类。显然， $H_1(L_\varphi;\mathbb{Z})$是一个自由阿贝尔群，其一组基为

$$\{(\sigma_1)_*(m_1), (\sigma_0)_*(l_0)\}.$$

同调类 $(\sigma_0)_*(m_0)$ 和 $(\sigma_1)_*(l_1)$ 可描述如下。证明见 [Oka25b，引理 2.6 及其证明中的公式 (4)]。

命题 2.2。 存在 $a \in \{1,-1\}$ 和 $b \in \mathbb{Z}$ 使得

$$(\sigma_0)_*(m_0) = a \cdot (\sigma_1)_*(m_1), \quad (\sigma_1)_*(l_1) = a \cdot (\sigma_0)_*(l_0) + b \cdot (\sigma_1)_*(m_1),$$

在 $H_1(L_\varphi;\ \mathbb{Z})$ 。

该命题表明，$(\sigma_i)_*$: $H_1(\Lambda_{K_i};\ \mathbb{Z}) \to H_1(L_\varphi;\ \mathbb{Z})$ 对于$i = 0,\ 1$ 是同构。此外，作为 $H_1(\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3))$ 中的同调类，我们有

$$(\sigma_1)_*(l_1) = [K_1], \quad (\sigma_0)_*(l_0) = \varphi_*([K_0]), \quad (\sigma_1)_*(m_1) = 0,$$

因此，命题 2.2 的第二个等式意味着

$$[K_1] = a \cdot \varphi_*([K_0]) \tag{2.3}$$

在 $H_1(\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3))$ 中，对于 $a = \pm 1$。

最后，我们介绍一个用于陈述定理 1.3 的三维流形 M_φ 。我们有两个带边界的三维流形:

$$\mathbb{R}^3 \setminus N_{K_1}, \quad L_\varphi \setminus \psi((-\infty, a_1) \times \Lambda_{K_1}).$$

通过微分同胚 $\sigma_1 \circ e_1^{-1}$ 粘合它们的边界: $\partial N_{K_1} \to \psi(\{a_1\} \times \Lambda_{K_1})$，我们得到一个无边界的非紧 3-流形

$$M_\varphi := \left(\mathbb{R}^3 \setminus N_{K_1}\right) \cup_{\sigma_1 \circ e_1^{-1}} \left(L_\varphi \setminus \psi((-\infty, a_1) \times \Lambda_{K_1})\right). \tag{2.4}$$

让我们取 $y_1' := \sigma_1(y_1) = e_1(y_1) \in M_\varphi$ 作为基点。注意到

$$H_1(M_\varphi; \mathbb{Z}) \cong H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

由于 $(\sigma_1 \circ e_1^{-1})_*$: $H_1(\partial N_{K_1};\ \mathbb{Z}) \to H_1(L_\varphi)$ 根据命题 2.2 是一个同构。

下面的结果将被多次使用。设 $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ 为以 0 为中心的单位圆盘。

定理 2.3 ([Gab89，定理 1。1])。 设 K 是 $S^1 \times D^2$ 中的一个纽结，使得 $[K] = \pm[S^1 \times \{0\}]$ 位于 $H_1(S^1 \times D^2;\ \mathbb{Z})$ 中。若 M 是通过对 K 做非平凡手术由 $S^1 \times D^2$ 得到的一个3-流形，则以下情况之一成立:

1. $M = S^1 \times D^2$。在此情况下， K 与 $S^1 \times \{0\}$同痕。
2. $M = M' \# W$，其中 W是闭的3流形，而 $H_1(W;\ \mathbb{Z})$ 是有限且非平凡的。
3. M 是不可约的，且 ∂M 是不可压缩的。

我们注记，在 $M = S^1 \times D^2$、 [Gab89的情况下，定理 1.1] 指出，在关于 K的较弱假设下， K在 $S^1 \times D^2$ 中要么是0-桥辫，要么是1-桥辫。（关于 $k \in \{0, 1\}$的 k-桥辫的定义，参见 [Gab89，第1]节。它由一个辫的闭包得到。）假设 $[K] = \pm[S^1 \times \{0\}]$， K 与点 $\times D^2$ 的代数交数为 ± 1，且0-桥辫或1-桥辫 K 必与 $S^1 \times \{0\}$同痕。

M_φ 的基本群的下一个性质对于第 3.4 节的讨论很重要，尤其是命题 3.19。Recall，若群 G 具有全序 $<$，且对任意 f， g， $h \in G$， $g < h$蕴含 $fg < fh$，则称其为左序的 。

引理 2.4. 群 $\pi_1(M_\varphi, y_1')$ 是左序的。

证明。 为方便起见，我们使用 $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 的 $\mathbb{R}^3$ 的紧化，并考虑一个三维流形

$$M'_\varphi := \left(S^3 \setminus N_{K_1}\right) \cup_{\sigma_1 \circ e_1^{-1}} \left(L_\varphi \setminus \psi((-\infty, a_1) \times \Lambda_{K_1}\right).$$

M'_φ的基本群与 $\pi_1(M_\varphi,\ y'_1)$同构。

首先，我们考察三维流形 L_φ。根据定义， L_φ 与

$$T^*_{K_0}\mathbb{R}^3 \setminus \varphi^{-1}(K_1)$$

通过 φ。经由平凡化 $T^*_{K_0}\mathbb{R}^3 \cong K_0 \times \mathbb{R}^2$， $\varphi^{-1}(K_1)$被视为 $K_0 \times \mathbb{R}^2$中的一个纽结，并且根据(2.3)，它与 $K_0 \times \{0\}$ 同调等价（相差一个符号）。因此， L_φ 与 S^3中链环 $U \sqcup K'_1$ 的补空间同胚，其中 U 是平凡结， K'_1 是一个纽结，它与 U 的链接数为 ± 1 （特别地，非零）。这意味着 L_φ 是一个不可约三维流形。

此外，根据命题 2.2，$(\sigma_1)_*\colon H_1(\Lambda_{K_1}) \to H_1(L_\varphi)$是一个同构，因此群同态

$$(\sigma_1)_*\colon \pi_1(\Lambda_{K_1}) \to \pi_1(L_\varphi)$$

是单射。这意味着，嵌入环面 $\sigma_1(\Lambda_{K_1})$ 位于 L_φ 中，是一个不可压缩曲面。

接下来，我们证明 M'_φ 是一个不可约三维流形。证明分为以下两种情况：

- 若 K_1 是 S^3 中的平凡结，则 $S^3 \setminus N_{K_1}$ 同胚于一个实心环面。因此，M'_φ 是由（开）实心环面

  $$K_0 \times \mathbb{R}^2 \cong S^1 \times \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$$

  沿纽结 $\varphi^{-1}(K_1)$ 进行德恩手术得到的三维流形。由于如上所见， $[\varphi^{-1}(K_1)]$ $= \pm[K_0 \times \{0\}]$ ，我们可以应用定理 2.3。由于 $H_1(M_\varphi;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ，且特别地没有挠元， M'_φ 不是连通和 $M''\#W$，其中 W 是一个闭三维流形，且 $H_1(W;\ \mathbb{Z})$ 是有限且非平凡的。因此，由定理 2.3 可知，或者 (1) $M'_\varphi = S^1 \times \mathbb{R}^2$，或者 (2) M'_φ 不可约且 $\sigma_0(\Lambda_{K_0})$ 不可压缩。在这两种情况下， M'_φ 都是不可约的。

- 若 K_1 在 S^3中是打结的，则 $S^3 \setminus K_1$ 是不可约三维流形，且嵌入环面 ∂N_{K_1} 是不可压缩曲面。因此， M'_φ 被分成两个不可约三维流形

  $$S^3 \setminus N_{K_1},\quad L_\varphi \setminus \psi((-\infty, a_1) \times \Lambda_{K_1})$$

  沿着一个在两个组成部分中都不可压缩的嵌入环面。根据 [Hat07 第 11 页（4）中的论证], ，可知 M'_φ 也是不可约的。

现在，我们可以应用 [BRW05]中的一个结果。由于可定向三维流形 M'_φ 是不可约的，并且存在满群同态 $\pi_1(M'_\varphi) \to H_1(M'_\varphi;\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$，由 [BRW05 定理 1.1（1）] 可知，群 $\pi_1(M'_\varphi)$是左序的。 □

3 层论中余配边函子的应用

我们固定基域 $\mathbf{k}$ 为 $\mathbb{C}$ 复数域。不过，命题 3.25 之前的所有论证对任意域都成立。

3.1 预备知识

在本小节中，我们回顾微局部层论所需的背景知识。令 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{k}}$ 为$\mathbf{k}$-向量空间复形的 ∞-范畴。由于$\mathbf{k}$ 是一个域，它自然等价于$\mathbf{k}$的导出 ∞-范畴。

本文使用（$\mathrm{Mod}_{\mathbf{k}}$富化的稳定） ∞-范畴的语言。为了使下文定义的 Kashiwara–Schapira 层叠满足所需的下降条件，纯粹的 1-范畴处理并不足够，因此需要借助 dg 范畴或 ∞-范畴来研究。本文中，对于 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{k}}$富化稳定范畴的对象 x， y ，记号 $\mathrm{Hom}(x,\ y)$ 表示相应的 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{k}}$ 对象。关于 ∞- 范畴富化理论，参见 [HM24] 的附录 C 及其中的参考文献。

注记 3.1. 我们引用的一些结果最初是用经典导出范畴或 dg 范畴的语言表述的。此外，虽然 [KS90] 使用经典有界导出范畴，但本文不施加相应的有界性条件。

用 dg 范畴语言进行的处理可以自然地改写为 ∞-范畴的语言。详情参见 [Lur，第 1.3 节1] 和 [Coh16]。另一方面，在经典框架下表述的结果未必能自动解释为 ∞-范畴结果。目前，根据 [RS18] 的结果，已知若层的系数范畴是紧生成的，则 [KS90] 的几乎所有结果在∞-范畴框架下均成立，无需施加有界性条件。

设 X 为一个 C^∞ 流形，并令 $\mathrm{Sh}(X)$ 表示在 X上取值于$\mathbf{k}$-向量空间复形的 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{k}}$-富集稳定范畴。对于任意 $F\in\mathrm{Sh}(X)$，其微支撑 $\mathrm{SS}(F)$ 按照 [KS90，定义 5.12] 定义为以下集合的闭包

$$\left\{(x;\xi)\in T^*X \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{there exists a } C^1 \text{ function } f \text{ on a neighborhood of } x\\ \text{such that } f(x)=0,\ (df)_x=\xi \text{ and } \left(\Gamma_{\{f\geq 0\}}F\right)_x\neq 0\end{array}\right\}.$$

它是 T^*X的一个锥形闭子集。对于 T^*X的任意闭子集 A，令 $\mathrm{Sh}_A(X)$ 表示 $\mathrm{Sh}(X)$ 的全子范畴，其对象为满足 $\mathrm{SS}(F)\subset A$ 的 $F\in\mathrm{Sh}(X)$。

令 $\mathrm{Loc}(X)$ 表示 $\mathrm{Sh}(X)$ 的全子范畴，其对象为满足上同调层 $H^*(F)$在 X上局部常值的 $F\in\mathrm{Sh}(X)$。

我们回顾 Kashiwara–Schapira 层叠的定义。这里，叠指的是取值于 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{k}}$-富集稳定范畴及正合函子的（$\infty$-）范畴中的层。Kashiwara–Schapira [KS90]研究了这一叠所依据的基本概念。这里我们采用 Nadler–Shende [NS20，第 6]节给出的定义。

定义 3.2。 在 T^*X 上的 *Kashiwara–Schapira* 层叠 $\mu\mathrm{sh}$ 是一个取值于 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{k}}$-富集稳定范畴的（$\infty$-）范畴的锥层，它与由以下定义的锥预层 $\mu\mathrm{sh}^{\mathrm{pre}}$ 相关联：

$$\mu\mathrm{sh}^{\mathrm{pre}}(\Omega)\coloneqq \mathrm{Sh}(X)/\,\mathrm{Sh}_{T^*X\setminus\Omega}(X)$$

对每个锥形开子集 $\Omega\subset T^*X$。对于 $F\in\mu\mathrm{sh}(\Omega)$，$\Omega$ 中的闭锥形子集 $\mathrm{SS}(F)\cap\Omega$ 是良定义的。

Let $\widehat{\Lambda}$ 是 T^*X 的一个局部闭锥形子集。 $\mu\mathrm{sh}$ 的子叠 $\mu\mathrm{sh}'_{\widehat{\Lambda}}$ 定义为

$$\mu\mathrm{sh}'_{\widehat{\Lambda}}(\Omega)\coloneqq\{F\in\mu\mathrm{sh}(\Omega)\mid \mathrm{SS}(F)\cap\Omega\subset\widehat{\Lambda}\cap\Omega\}.$$

我们将 *Kashiwara–Schapira* 层叠 $\mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}}$ 定义为子叠 $\mu\mathrm{sh}'_{\widehat{\Lambda}}$ 沿包含映射 $i_{\widehat{\Lambda}}\colon\widehat{\Lambda}\to T^*X$ 的逆像 $i_{\widehat{\Lambda}}^*\,\mu\mathrm{sh}'_{\widehat{\Lambda}}$ 。

对于开子集 $\Lambda_0 \subset \Lambda$ 和 $F,\ G \in \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}}(\Lambda_0)$，赋值

$$\widehat{\Lambda}_0 \supset U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}}(U)}(F|_U, G|_U)$$

满足层公理，并定义了 $\mathrm{Sh}(\Lambda_0)$ 中的一个对象 $\overline{\mu hom}(F,G)$。

对于 $F,G \in \mathrm{Sh}(X)$，$\mu hom(F,G) \in \mathrm{Sh}(T^*X)$ 由 Kashiwara–Schapira [KS90，第 4.4] 节定义。$\mu hom(F,G)$ 的支撑包含于 $\mathrm{SS}(F) \cap \mathrm{SS}(G)$。两个函子 $\wedge$ $\sim\mu hom$ 和 μhom 关系密切。注意，对于 $F \in \mathrm{Sh}(X)$ 和一个开子集 $\Lambda_0 \subset \Lambda$，若存在开子集 $\Omega_0 \subset T^*X$ 满足 $\Lambda_0 \subset \Omega_0$ 且 $\mathrm{SS}(F) \cap \Omega_0 \subset \Lambda_0$，则 F 自然地定义一个对象 $\mathfrak{m}_{\widehat{\Lambda}_0}(F) \in \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}}(\Lambda_0)$。

命题 3.3 ([KS90, 定理 6.1.2])。设 F, G 是 $\mathrm{Sh}(X)$ 中的对象，Λ_0 是 Λ的一个开子集。假设存在一个开子集 $\Omega_0 \subset T^*X$ 满足 $\Lambda_0 \subset \Omega_0$ 且 $(\mathrm{SS}(F) \cup \mathrm{SS}(G)) \cap \Omega_0 \subset \Lambda_0$。那么存在一个自然同构

$$i_{\widehat{\Lambda}_0}^* \mu hom(F,G) \simeq \overline{\mu hom}(\mathfrak{m}_{\widehat{\Lambda}_0}(F), \mathfrak{m}_{\widehat{\Lambda}_0}(G))$$

其中 $i_{\widehat{\Lambda}_0}:\ \Lambda_0 \to T^*X$ 是包含映射。

[KS90]中的定理 6.1.2 是关于茎的陈述。命题 3.3 是由 [KS90] 中的定理推得的，因为在当前情形下，底空间是流形且系数范畴 $\mathbf{Mod_k}$ 是紧生成的，因此可以通过茎来检验层之间的同构。对于这一部分，同样至关重要的是，Kashiwara–Schapira 层叠的茎范畴的同伦范畴对应于 [KS90]中讨论的范畴 $\mathrm{D}^b(X;p)$。

下文中，我们主要考虑稳定范畴 $\mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}}(\Lambda)$及其自然函子

$$\mathfrak{m}_{\widehat{\Lambda}}:\ \mathrm{Sh}_{\widehat{\Lambda}}(X) \to \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}}(\widehat{\Lambda}),\ F \mapsto \mathfrak{m}_{\widehat{\Lambda}}(F).$$

考虑 Λ 为锥形光滑拉格朗日子流形的情形。对于开子集 $\Lambda_0 \subset \Lambda$，若对象 $\mathscr{F} \in \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}}(\Lambda_0)$的恒等态射$\mathbf{k}_{\widehat{\Lambda}_0} \to \mu hom(\mathscr{F},\mathscr{F})$是一个同构，则称其为（沿着 Λ_0）简单对象。根据 [Gui23，命题 X.2.4]，，如果存在一个简单整体对象 $\mathscr{F} \in \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}}(\Lambda)$，那么我们有一个函子

$$\overline{\mu hom}(\mathscr{F},\cdot):\ \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}}(\widehat{\Lambda}) \to \mathrm{Loc}(\widehat{\Lambda}),$$

而且，它给出了一个范畴等价。

设 L 是 T^*X中的一个恰当拉格朗日子流形，不一定是锥形或光滑的。我们假设 L 是连通的，并且具有一个由光滑拉格朗日子流形族$\{L_i\}_{i=1,\dots,m}$给出的分层$L = \coprod_{i=1}^m L_i$。此外，假设存在一个连续函数 $f\colon L \to \mathbb{R}$，使得 $f|_{L_i}$是一个 C^∞函数，并且对每个$i \in \{1,\dots,m\}$都有 $d(f|_{L_i}) = \lambda_X|_{L_i}$。注意，如果 f存在，由于 L 是连通的，它在相差一个常数的意义下是唯一的。对于这样的 L，我们通过以下方式构造 $T^*(X \times \mathbb{R})$中的一个锥形拉格朗日子流形 $\widehat{L}$

$$\widehat{L} \coloneqq \coprod_{i=1}^m \{(x, -f(x;\xi); \tau\xi, \tau) \in T^*(X \times \mathbb{R}) \mid \tau > 0,\ (x;\xi) \in L_i\}. \tag{3.1}$$

然后，Kashiwara–Schapira 层叠 $\mu\mathrm{sh}_{\widehat{L}}$ on $\widehat{L}$定义如下，即定义 3.2。为简便起见，我们分别将 $\mu\mathrm{sh}_{\widehat{L}}(\widehat{L})$和 $\mathfrak{m}_{\widehat{L}}$ 记作 $\mu\mathrm{sh}_L(L)$和 $\mathfrak{m}_L$。

注记 3.4。 如果 L 是 T^*X中的锥形拉格朗日子流形，我们取 $f\colon L \to \mathbb{R}$ 为取值 0 的常值函数。于是，利用映射 $i\colon X \to X \times \mathbb{R},\quad x \mapsto (x,\ 0)$，我们得到一个等价$i^*\colon \mathrm{Sh}_{\widehat{L}}(X \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_L(X)$。通过 i^*将 $\mathrm{Sh}_{\widehat{L}}(X \times \mathbb{R})$ 与 $\mathrm{Sh}_L(X)$ 视为相同，我们将 $\mathfrak{m}_L$视为定义在 $\mathrm{Sh}_L(X)$ 上的函子。此外，如果 L 包含 0_X，则该函子

$$\mathfrak{m}_L\colon \mathrm{Sh}_L(X) \to \mu\mathrm{sh}_L(L)$$

是一个等价。

3.2 结的余法丛

我们聚焦于 $X = \mathbb{R}^3$ 的情形。对于 $\mathbb{R}^3$ 中的纽结 K，记作

$$\begin{aligned} L_K &\coloneqq 0_{\mathbb{R}^3} \cup T^*_K\mathbb{R}^3, \\ \widehat{\Lambda}_K &\coloneqq T^*_K\mathbb{R}^3 \setminus 0_{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}_+ \cdot \Lambda_K. \end{aligned}$$

与 K_i 的 (2.2) 相同，我们定义 $e\colon\ \Lambda_K \to \mathbb{R}^3 \setminus K$ 为映入 K 的一个管状邻域的边界上的嵌入。

任意单对象 $\mathscr{F} \in \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_K}(\Lambda_K)$ 都定义了一个函子

$$\overline{\mu hom}(\mathscr{F}, \cdot)\colon \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_K}(\widehat{\Lambda}_K) \to \mathrm{Loc}(\widehat{\Lambda}_K) \simeq \mathrm{Loc}(\Lambda_K).$$

最后一个等价由包含映射 $\Lambda_K \to \Lambda_K$ 诱导，该映射是一个同伦等价。我们还有限制函子 $\mathrm{res}\colon\ \mu\mathrm{sh}_{L_K}(L_K) \to \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_K}(\Lambda_K)$。

我们定义 $\mathscr{F}_K \coloneqq \mathfrak{m}_{\widehat{\Lambda}_K}(\mathbf{k}_K[-1]) \in \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_K}(\Lambda_K)$。于是，函子的复合

$$\mathrm{Sh}_{L_K}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathfrak{m}_{L_K}} \mu\mathrm{sh}_{L_K}(L_K) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_K}(\widehat{\Lambda}_K) \xrightarrow{\overline{\mu hom}(\mathscr{F}_K, \cdot)} \mathrm{Loc}(\Lambda_K)$$

与 $\mu_K(\cdot)|_{\Lambda_K}[1]$ 一致，其中 $\mu_K\colon \mathrm{Sh}(\mathbb{R}^3) \to \mathrm{Sh}(T^*_K\mathbb{R}^3)$ 是微局部化函子 [KS90, 第 4.3 节。]。事实上，对于任意 $F \in \mathrm{Sh}_{L_K}(\mathbb{R}^3)$,

$$\overline{\mu hom}(\mathscr{F}_K, (\mathfrak{m}_{L_K}(F))|_{\widehat{\Lambda}_K})\Big|_{\Lambda_K} = \mu hom(\mathbf{k}_K[-1], F)|_{\Lambda_K} = \mu_K(F)|_{\Lambda_K}[1]. \tag{3.2}$$

为计算最后一项，我们先给出下面的命题。证明中的类似陈述和论证见 [She19，第 4–5] 节。

命题 3.5。 我们用 $K \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3 \xleftarrow{j} \mathbb{R}^3 \setminus K$ 表示包含映射。于是，函子之间有两个等价：

$$\begin{aligned} \mu_K(i_*(\cdot))|_{\Lambda_K} &\simeq (\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_K})^*\colon \mathrm{Loc}(K) \to \mathrm{Loc}(\Lambda_K), \\ \mu_K(j_!(\cdot))|_{\Lambda_K} &\simeq e^*(\cdot)[-1]\colon \mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K) \to \mathrm{Loc}(\Lambda_K). \end{aligned}$$

证明。 (1) 对于任意 $F \in \mathrm{Loc}(K)$，$\mathrm{SS}(i_*F) \subset T^*_K\mathbb{R}^3$。根据 [KS90，定理 6.4.1]，可以验证，$\mu_K(i_*F) \in \mathrm{Sh}(T^*_K\mathbb{R}^3)$ 的微支撑包含于 $T^*(T^*_K\mathbb{R}^3)$ 的零截面中。因此，$\mu_K(i_*F)$ 在 $T^*_K\mathbb{R}^3$ 上局部常值。另请注意，根据 [KS90，定理 4.3.2 (iv)]，$\mu_K(i_*F)|_{0_K} \simeq F$在 $K \cong 0_K = T^*_K\mathbb{R}^3 \cap 0_{\mathbb{R}^3}$上。由于投影$\pi_{\mathbb{R}^3}|_{T^*_K\mathbb{R}^3}\colon T^*_K\mathbb{R}^3 \to K$是同伦等价，我们得到

$$\mu_K(i_*F) \simeq (\pi_{\mathbb{R}^3}|_{T^*_K\mathbb{R}^3})^*(F),$$

由此得到第一个断言。

(2) 对任意 $F \in \mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K)$，$\mathrm{SS}(j_!F) \setminus 0_{\mathbb{R}^3} \subset T^*_K\mathbb{R}^3 \setminus 0_K$。根据利用 [KS90 定理 6.4.1] 所作的微局部估计，可得如上所述，$\mu_K(j_!F)|_{T^*_K\mathbb{R}^3\setminus 0_K}$ 在 $T^*_K\mathbb{R}^3 \setminus 0_K$ 上局部常值。

考虑 $T^*\mathbb{R}^3 \setminus 0_{\mathbb{R}^3}$ 上的归一化测地流 $\phi = (\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$。它是齐次哈密顿同伦变形，并且我们有与 ϕ [GKS12 第 3] 节相关联的 GKS 核 $K^\phi \in \mathrm{Sh}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$。固定 $\varepsilon > 0$，并令 $K^\phi_{-\varepsilon} := K^\phi\big|_{\{t=-\varepsilon\}} \in \mathrm{Sh}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$。注意到 $K^\phi_{-\varepsilon} \simeq \mathbf{k}_{\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \mid |x_1-x_2|\le\varepsilon\}}$。若 $\varepsilon > 0$ 足够小，则 $N_K := \{x' \in \mathbb{R}^3 \mid \min_{x\in K} |x - x'| < \varepsilon\}$ 是 K 的管状邻域，我们可以计算得

$$K^\phi_{-\varepsilon} \circ \mathbf{k}_K \simeq \mathbf{k}_{\overline{N}_K}, \quad K^\phi_{-\varepsilon} \circ (j_!F) \simeq F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K},$$

其中 $\overline{N}_K$是 N_K的闭包。此外，根据 [KS90 定理 7.2。1]，

$$\begin{aligned}(\phi_{-\varepsilon})_* \left(\mu hom(\mathbf{k}_K, j_!F)|_{U^*\mathbb{R}^3}\right) &\simeq \mu hom\left(K^\phi_{-\varepsilon} \circ \mathbf{k}_K, K^\phi_{-\varepsilon} \circ (j_!F)\right)\Big|_{U^*\mathbb{R}^3} \\ &\simeq \mu hom(\mathbf{k}_{\overline{N}_K}, F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K})\Big|_{U^*\mathbb{R}^3},\end{aligned} \tag{3.3}$$

其支撑在 $\phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda_K)$ 上。

根据（某个版本的）佐藤标志三角 [Gui23, （I.3.5）],

$$\mathcal{H}om(\mathbf{k}_{\overline{N}_K}, \mathbf{k}_{\mathbb{R}^3}) \otimes F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K} \to \mathcal{H}om(\mathbf{k}_{\overline{N}_K}, F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K}) \to \hat{\pi}_* \left(\mu hom(\mathbf{k}_{\overline{N}_K}, F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K})\Big|_{U^*\mathbb{R}^3}\right)$$

是 $\mathrm{Sh}(\mathbb{R}^3)$ 中的（余）纤维序列，其中 $\hat{\pi} := \pi_{\mathbb{R}^3}|_{U^*\mathbb{R}^3}$。我们有

$$\mathcal{H}om(\mathbf{k}_{\overline{N}_K}, \mathbf{k}_{\mathbb{R}^3}) \otimes F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K} \simeq \mathbf{k}_{N_K} \otimes F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K} \simeq 0,$$

因此，序列中的第二个箭头是一个同构。由于 $\pi' := \hat{\pi}|_{\phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda_K)} : \phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda_K) \to \partial N_K$ 是一个同胚，我们得到

$$\mathcal{H}om(\mathbf{k}_{\overline{N}_K}, F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K})\Big|_{\partial\overline{N}_K} \simeq \pi'_* \left(\mu hom(\mathbf{k}_{\overline{N}_K}, F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K})\Big|_{\phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda_K)}\right).$$

此外，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}om(\mathbf{k}_{\overline{N}_K}, F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K}) &\simeq \mathcal{H}om(\mathbf{k}_{\partial\overline{N}_K}, F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K}) \\ &\simeq \mathcal{H}om(\mathbf{k}_{\partial\overline{N}_K}, F) \\ &\simeq \Gamma_{\partial\overline{N}_K}(F) \simeq F_{\partial\overline{N}_K}[-1].\end{aligned}$$

这里，第一个和第二个同构分别由 $\mathcal{H}om(\mathbf{k}_{N_K}, F_{\mathbb{R}^3\setminus N_K}) \simeq 0$ 和 $\mathcal{H}om(\mathbf{k}_{\partial N_K}, F_{N_K}) \simeq 0$ 对于 $F \in \mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ 得出，二者均已通过局部计算得到验证。最后一个同构由 [KS90，推论 5.4.11]得出。因此，

$$i'^* F[-1] \simeq \pi'_* \left(\mu hom(\mathbf{k}_{\overline{N}_K}, F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K})\Big|_{\phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda_K)}\right) \tag{3.4}$$

对于包含映射 $i' : \partial N_K \to \overline{\mathbb{R}^3 \setminus K}$。

现在，我们得到

$$\begin{aligned}\mu_K(j_!F)|_{\Lambda_K} &\simeq \mu hom(\mathbf{k}_K, j_!F)|_{\Lambda_K}\\ &\simeq (\phi_\varepsilon)_*\left(\mu hom(\mathbf{k}_{\overline{N}_K}, F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K})\Big|_{\phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda_K)}\right)\\ &\simeq (\phi_\varepsilon\circ\pi'^{-1})_*\left(\pi'_*\left(\mu hom(\mathbf{k}_{\overline{N}_K}, F_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{N}_K})\Big|_{\phi_\varepsilon^{-1}(\Lambda_K)}\right)\right)\\ &\simeq (\phi_\varepsilon\circ\pi'^{-1})_*(i'^*F)[-1].\end{aligned}$$

这里，第二个和第四个同构分别由 (3.3) 和 (3.4) 得出。注意，$\phi_\varepsilon\circ\pi'^{-1}\colon \partial N_K \to \Lambda_K$ 是一个同胚，且映射 $i'\circ\overline{(\phi_\varepsilon\circ\pi'^{-1})}^{-1}$ 与

$$e\colon \Lambda_K \to \mathbb{R}^3\setminus K,\ (x;\xi)\mapsto x+\varepsilon\cdot\xi$$

（见 (2.2)）。因此，我们有 $(\phi_\varepsilon\circ\pi'^{-1})_*(i'^*F) = e^*F$。这证明了第二个断言。 □

3.3 与恰当拉格朗日余边界相关的函子

我们回到第 2.2 节中的几何设置。我们将应用上文介绍的层论以及 [Li23] 关于恰当拉格朗日余边界的结果。本小节的目标是给出交换图 (3.15)。

设 K_0 和 K_1 是 $\mathbb{R}^3$ 中的纽结。对于 $\varphi\in \mathrm{Ham}_c(T^*\mathbb{R}^3)$，假设 $\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$ 和 $0_{\mathbb{R}^3}$ 沿着 $K_1\subset 0_{\mathbb{R}^3}=\mathbb{R}^3$ 干净相交。我们采用以下记号表示包含映射：

$$\mathbb{R}^3\setminus K_0 \xrightarrow{j_0} \mathbb{R}^3 \xleftarrow{i_0} K_0, \qquad \mathbb{R}^3\setminus K_1 \xrightarrow{j_1} \mathbb{R}^3 \xleftarrow{i_1} K_1.$$

稳定范畴的序列

$$\mathrm{Loc}(K_0) \xrightarrow{i_{0*}} \mathrm{Sh}_{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{j_0^*} \mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3\setminus K_0) \tag{3.5}$$

是一个带有伴随 $i_0^* \dashv i_{0*} \dashv i_0^!$ 和 $j_{0!} \dashv j_0^* \dashv j_{0*}$的分裂 Verdier 序列，也就是说，它是稳定范畴范畴中的一个余纤维序列，其中的态射同时具有左伴随和右伴随。关于分裂 Verdier 序列的一般理论，参见 [CDHHL+26，附录 A]。特别地，对于任意 $F\in \mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3)$，$j_{0!}\dashv j_0^*$ 的余单位态射和 $i_0^*\dashv i_{0*}$ 的单位态射给出一个（余）纤维序列

$$j_{0!}j_0^*F \longrightarrow F \longrightarrow i_{0*}i_0^*F \tag{3.6}$$

在 $\mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3)$ 中，使得 $j_0^*F\in \mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3\setminus K_0)$ 和 $i_0^*F\in \mathrm{Loc}(K_0)$。如果 $F_x\simeq 0$ 在某个 $x\in\mathbb{R}^3\setminus K_0$处，则 $j_0^*F\simeq 0$ 属于 $\mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3\setminus K_0)$，从而由（3.6）可得 $F\simeq i_{0*}i_0^*F$。

对于恰当拉格朗日子流形 $L_\varphi = \varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)\setminus 0_{\mathbb{R}^3}$，我们有

$$L_\varphi\setminus D^*_r\mathbb{R}^3 = \widehat{\Lambda}_{K_0}\setminus D^*_r\mathbb{R}^3$$

当 $r>0$ 足够大时，并且如第 2.2 节所述，我们可以假设

$$L_\varphi\cap D^*_\varepsilon\mathbb{R}^3 = \widehat{\Lambda}_{K_1}\cap D^*_\varepsilon\mathbb{R}^3$$

当 $\varepsilon>0$ 足够小时。令 $\widehat{\Lambda}'_{K_0}:=\widehat{\Lambda}_K\setminus D^*_r\mathbb{R}^3$ 且 $\widehat{\Lambda}'_{K_1}:=\widehat{\Lambda}_{K_1}\cap D^*_\varepsilon\mathbb{R}^3$。对于 $i=0,1$，$\widehat{\ }$限制到 $\Lambda'_{K_i}\subset\Lambda_{K_i}$ 给出一个等价

$$\mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_{K_i}}(\widehat{\Lambda}_{K_i}) \xrightarrow{\sim} \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}'_{K_i}}(\widehat{\Lambda}'_{K_i}).$$

对于带有接触型边界 $\partial^\infty X$ 的魏因斯坦流形 X，Li [Li23] 构造了一个与 $\mathbb{R}\times\partial^\infty X$ 中的恰当拉格朗日余边界相关联的函子，并研究了它的性质。在当前情形中，$T^*\mathbb{R}^3$ 是一个拉格朗日骨架为 $0_{\mathbb{R}^3}$ 的魏因斯坦流形。通过式 (2.1) 的映射 ψ，$\psi^{-1}(L_\varphi) = \psi^{-1}(\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3) \setminus 0_{\mathbb{R}^3})$ 是 $\mathbb{R}\times U^*\mathbb{R}^3$ 中的恰当拉格朗日余边界。于是，我们得到如下函子。

定理 3.6 ([Li23，定理 1。1])。 与恰当拉格朗日余边界 L_φ相关联的是一个全忠实函子

$$\Phi_{L_\varphi}\colon \mu\mathrm{sh}_{0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)}(0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)) \hookrightarrow \mu\mathrm{sh}_{L_{K_0}}(L_{K_0}).$$

严格来说，[Li23] 的定理 1.1是针对适当对象范畴陈述的。此处使用的陈述在该定理的证明过程中更早处已经得到证明。

注 3.7。 记 $L = 0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$ 为 $\frown\mu\mathrm{sh}_L(L)$。关于范畴的定义，Recall，我们需要将 L提升到如（3.1）中的锥形拉格朗日子流形 $\widehat{L}$。我们注意到，如果干净相交 $\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)\cap\mathbb{R}^3$不是连通的，则用于定义 $\widehat{L}$ 的函数 $f\colon L\to\mathbb{R}$可能不存在。在我们的假设下，$K_1 = \varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)\cap\mathbb{R}^3$是一个纽结，我们可以取 $f\colon L\to\mathbb{R}$，使得 $f|_{0_{\mathbb{R}^3}}$恒等于 0 且 $d(f|_{\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)}) = \frown\lambda_X|_{\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)}$，并由（3.1）得到提升 L。

由于 $L_{K_0}\setminus D^*_r\mathbb{R}^3 = \big(0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)\big)\setminus D^*_r\mathbb{R}^3 = \widehat{\Lambda}'_{K_0}$，我们有限制函子 rs

$$\begin{aligned}
&\mathrm{res}\colon \mu\mathrm{sh}_{L_{K_0}}(L_{K_0}) \to \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}'_{K_0}}(\widehat{\Lambda}'_{K_0}) \simeq \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_{K_0}}(\widehat{\Lambda}_{K_0}),\\
&\mathrm{res}'\colon \mu\mathrm{sh}_{0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)}(0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)) \to \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}'_{K_0}}(\widehat{\Lambda}'_{K_0}) \simeq \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_{K_0}}(\widehat{\Lambda}_{K_0}).
\end{aligned}$$

引理 3.8. 限制$\circ\Phi_{L_\varphi} \simeq$ 限制′。

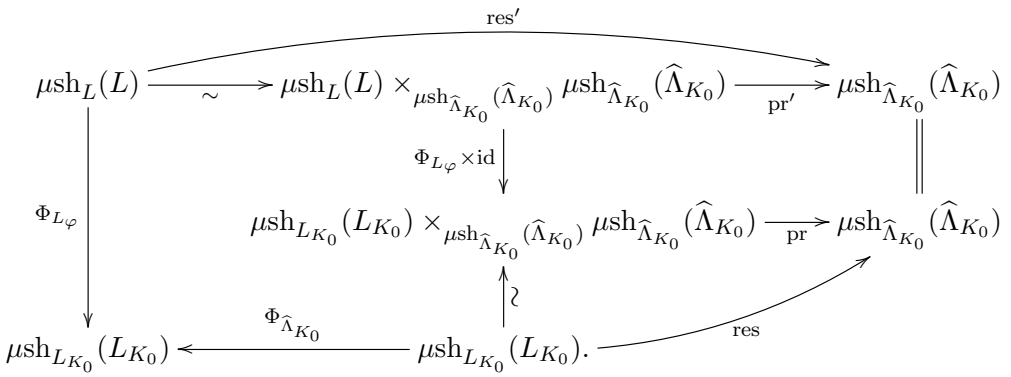
证明。 我们将 L_φ 视为以下两个拉格朗日余边界的复合：

- 从 Λ_{K_1} 到 Λ_{K_0}的拉格朗日余边界 L_φ，$\frown$
- 从 Λ_{K_0} 到 Λ_{K_0}的平凡协边 Λ_{K_0}。

那么，根据 [Li23，定理 3.6], ，我们有

$$\Phi_{L_\varphi} \simeq \Phi_{\widehat{\Lambda}_{K_0}} \circ \left(\Phi_{L_\varphi}\times \mathrm{id}_{\mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_{K_0}}(\widehat{\Lambda}_{K_0})}\right).$$

由此结果，我们得到以下交换图（此处将 $0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$ 简记为 L）：



这里，pr 和 pr′ 是到第二个因子的投影，纤维积定义为

$$\mu\mathrm{sh}_L(L) \xrightarrow{\mathrm{res}'} \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_{K_0}}(\widehat{\Lambda}_{K_0}) \xleftarrow{\mathrm{id}} \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_{K_0}}(\widehat{\Lambda}_{K_0}),$$
$$\mu\mathrm{sh}_{L_{K_0}}(L_{K_0}) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_{K_0}}(\widehat{\Lambda}_{K_0}) \xleftarrow{\mathrm{id}} \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_{K_0}}(\widehat{\Lambda}_{K_0}).$$

此外，由于 $\widehat{\Lambda}_{K_0}$ 是由Λ_{K_0}的恒定 Legendrian 同伦变形得到的余边界，根据 [Li23，定理 1，我们有7]

$$\Phi_{\widehat{\Lambda}_{K_0}} \simeq \mathrm{id}_{\mu\mathrm{sh}_{L_{K_0}}(L_{K_0})}.$$

于是，图表的交换性意味着 $\mathrm{res}\circ\Phi_{L_\varphi} \simeq \mathrm{res}'$。 □

下一个引理可由[Li23，第 3 节1]中余边界函子的构造验证。

引理 3.9。 设 $U \subset \mathbb{R}^3$ 是一个开子集，使得 $\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3) \cap T^*U = \emptyset$。那么，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mu\mathrm{sh}_{0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)}(0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)) & \xrightarrow{\Phi_{L_\varphi}} & \mu\mathrm{sh}_{L_{K_0}}(L_{K_0}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mu\mathrm{sh}_{0_U}(0_U) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mu\mathrm{sh}_{0_U}(0_U). \end{array} \tag{3.7}$$

这里，竖直函子由对 $0_U \subset 0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$ 和 $0_U \subset L_{K_0} = 0_{\mathbb{R}^3}\cup T^*_{K_0}\mathbb{R}^3$的限制定义。

证明。 参照 [Li23, 第 3 节，1], 可以看出，在我们的设定中，函子 Φ_{L_φ} 源自 $T^{*,\infty}(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R})$ 上的接触哈密顿流，而该流是 $T^*\mathbb{R}^3$ 的负 Liouville 流的提升。开子集 T^*U 在负 Liouville 流下保持不变，其在 $T^{*,\infty}(U\times\mathbb{R})$ 上的提升诱导出余边界函子 Φ_L：$\mu\mathrm{sh}^{0_U}(0_U) \to \mu\mathrm{sh}^{0_U}(0_U)$，并将 $L \subset T^*U \setminus 0_U$ 映为集合空集。根据 [Li23, 第 3 节中余边界函子的构造，(3.7) 的垂直限制函子与 Φ_{L_φ} 和 $\Phi_\emptyset \simeq \mathrm{id}_{\mu\mathrm{sh}_{0_U}(0_U)}$ 相交织：$\mu\mathrm{sh}^{0_U}(0_U) \to \mu\mathrm{sh}^{0_U}(0_U)$，且该图表可交换。 □

我们将单对象 $\mathscr{F}_{L_\varphi} \in \mu\mathrm{sh}^{L_\varphi}(L_\varphi)$ 定义为

$$\mathscr{F}_{L_\varphi} := \left(K^\varphi \circ (\mathfrak{m}_{T^*_{K_0}\mathbb{R}^3}(\mathbf{k}_{K_0}[-1]))\right)\Big|_{L_\varphi}.$$

它是复合函子作用于 $\mathfrak{m}_{T^*_{K_0}\mathbb{R}^3}(\mathbf{k}_{K_0}[-1]) \in \mu\mathrm{sh}^{T^*_{K_0}\mathbb{R}^3}(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$ 后得到的像

$$\mu\mathrm{sh}_{T^*_{K_0}\mathbb{R}^3}(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3) \xrightarrow{K^\varphi\circ(\cdot)} \mu\mathrm{sh}_{\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)}(\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)) \xrightarrow{(\cdot)|_{L_\varphi}} \mu\mathrm{sh}_{L_\varphi}(L_\varphi),$$

其中 $K^\varphi := K^H\big|_{\{t=1\}}$是与具有紧支集的哈密顿同伦（$\varphi^t_H$）相关联的核 K^H，满足 $\varphi^1_H = \varphi$ [GKS12]。我们可以假设 $D^*_r\mathbb{R}^3$ 包含（φ^t_H）$_{t\in[0,1]}$的支撑。考虑如第 3.2 节中所述的单对象 $\mathscr{F}_{K_i} = \mathfrak{m}_{\widehat{\Lambda}_{K_i}}(\mathbf{k}_{K_i}[-1]) \in \mu\mathrm{sh}^{\widehat{\Lambda}_{K_i}}(\widehat{\Lambda}_{K_i})$，其中 $i = 0, 1$。于是，$\mathscr{F}_{L_\varphi}$在 $\widehat{\Lambda}'_{K_0} = \widehat{\Lambda}_{K_0} \setminus D^*_r\mathbb{R}^3$ 和 $\widehat{\Lambda}'_{K_1}$ 上的限制满足

$$\mathscr{F}_{L_\varphi}\big|_{\widehat{\Lambda}'_{K_0}} \simeq \mathscr{F}_{K_0}\big|_{\widehat{\Lambda}'_{K_0}}, \quad \mathscr{F}_{L_\varphi}\big|_{\widehat{\Lambda}'_{K_1}} \simeq \mathscr{F}_{K_1}\big|_{\widehat{\Lambda}'_{K_1}} \otimes \ell', \tag{3.8}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$对于某个秩一局部系统 $\ell' \in \mathrm{Loc}(\Lambda'_{K_1})$。通过同伦等价 $\Lambda'_{K_1} \simeq \Lambda_{K_1}$，我们从 ℓ' 得到 Λ_{K_1}上的一个秩一局部系统 ℓ。

注 3.10. $\mathscr{F}_{L_\varphi}\big|_{\widehat{\Lambda}'_{K_1}}$ 和 $\mathscr{F}_{K_1}$ 均由$\mu\mathrm{sh}^{T^*_{K_1}\mathbb{R}^3}(T^*_{K_1}\mathbb{R}^3)$中简单对象的限制给出。因此，对于某个定义在 K_1上的局部系统 $\bar{\ell}$，有 $\ell = (\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_1}})^*(\bar{\ell})$。

利用 ℓ 和嵌入 $\sigma_1\colon \Lambda_{K_1} \hookrightarrow L_\varphi$，我们得到一个函子

$$\ell \otimes \sigma_1^*(\cdot)\colon \mathrm{Loc}(L_\varphi) \to \mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1}),\ F \mapsto \ell \otimes \sigma_1^* F.$$

引理 3.11. 考虑以下范畴等价

$$\begin{cases} \mathfrak{m}_{L_{K_1}} & : \mathrm{Sh}_{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \to \mu\mathrm{sh}_{L_{K_1}}(L_{K_1}), \\ \overline{\mu hom}(\mathscr{F}_{K_1}, \cdot) & : \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}'_{K_1}}(\widehat{\Lambda}'_{K_1}) \simeq \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_{K_1}}(\widehat{\Lambda}_{K_1}) \to \mathrm{Loc}(\widehat{\Lambda}_{K_1}) \simeq \mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1}), \\ \overline{\mu hom}(\mathscr{F}_{L_\varphi}, \cdot) & : \mu\mathrm{sh}_{L_\varphi}(L_\varphi) \to \mathrm{Loc}(L_\varphi). \end{cases} \tag{3.9}$$

那么，以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccccc} \mu\mathrm{sh}_{L_{K_1}}(L_{K_1}) & \longrightarrow & \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}'_{K_1}}(\widehat{\Lambda}'_{K_1}) & \longleftarrow & \mu\mathrm{sh}_{L_\varphi}(L_\varphi) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathfrak{m}_{L_{K_1}}} \wr & & \wr \downarrow{\scriptstyle \overline{\mu hom}(\mathscr{F}_{K_1},\cdot)} & & \wr \downarrow{\scriptstyle \overline{\mu hom}(\mathscr{F}_{L_\varphi},\cdot)} \\ \mathrm{Sh}_{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mu_{K_1}(\cdot)|_{\Lambda_{K_1}}[1]} & \mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1}) & \xleftarrow{\ell\otimes\sigma_1^*(\cdot)} & \mathrm{Loc}(L_\varphi), \end{array}$$

其中，上方的水平箭头是限制函子。

证明。 根据（3.2），左边的方块交换。为证明右边的方块交换，注意到

$$\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1}) \to \mu\mathrm{sh}_{\Lambda_{K_1}}(\Lambda_{K_1}),\ F \mapsto \mathscr{F}_{K_1} \otimes F, \quad \mathrm{Loc}(L_\varphi) \to \mu\mathrm{sh}_{L_\varphi}(L_\varphi),\ G \mapsto \mathscr{F}_{L_\varphi} \otimes G$$

是竖直函子的逆。于是，对任意 $G \in \mathrm{Loc}(L_\varphi)$,

$$(\mathscr{F}_{L_\varphi} \otimes G)\big|_{\widehat{\Lambda}'_{K_1}} = (\mathscr{F}_{K_1} \otimes \ell') \otimes G|_{\widehat{\Lambda}'_{K_1}},$$

$\widehat{\ }$并且通过自然等价 $\mu\mathrm{sh}^{\widehat{\Lambda}'_{K_1}}(\Lambda'_{K_1}) \simeq \mu\mathrm{sh}^{\Lambda_{K_1}}(\Lambda_{K_1})$，它与 $\mathscr{F}_{K_1} \otimes (\ell \otimes \sigma_1^* G)$ 一致。这说明右边的方块具有交换性。 □

由此引理，（3.9）中的三个函子诱导出一个范畴等价

$$\begin{aligned} \mu\mathrm{sh}_{0_{\mathbb{R}^3} \cup \varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)}(0_{\mathbb{R}^3} \cup \varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)) &\simeq \mu\mathrm{sh}_{L_{K_1}}(L_{K_1}) \times_{\mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}'_{K_1}}(\widehat{\Lambda}'_{K_1})} \mu\mathrm{sh}_{L_\varphi}(L_\varphi) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi), \end{aligned} \tag{3.10}$$

其中第二行中的纤维积由以下内容定义

$$\mathrm{Sh}_{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mu_{K_1}(\cdot)|_{\Lambda_{K_1}}[1]} \mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1}) \xleftarrow{\ell\otimes\sigma_1^*(\cdot)} \mathrm{Loc}(L_\varphi). \tag{3.11}$$

通过 (3.10) 和 $\mathfrak{m}_{L_{K_0}}\colon \mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\sim} \mu\mathrm{sh}^{L_{K_0}}(L_{K_0})$，函子 Φ_{L_φ} 给出了一个全忠实函子

$$\boldsymbol{\Phi}\colon \mathrm{Sh}_{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi) \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3)$$

使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}_{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi) & \xrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} & \mathrm{Sh}_{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3) \\ \uparrow{\scriptstyle (3.10)}\wr & & \wr\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{m}_{L_{K_0}}} \\ \mu\mathrm{sh}_{0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)}(0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)) & \xrightarrow{\Phi_{L_\varphi}} & \mu\mathrm{sh}_{L_{K_0}}(L_{K_0}). \end{array} \tag{3.12}$$

以下注记中的陈述的证明见 [HM24, 附录 C.1。20]。也可以从 [BB13], 中对 dg范畴的同伦拉回的明确描述，以及 dg范畴与 $\mathbf{Mod_k}$-富集稳定范畴之间的对应看出这一点。

注记 3.12。我们对 $\mathbf{Mod_k}$-富集稳定范畴的拉回有如下描述。给定 $\mathbf{Mod_k}$-富集稳定范畴 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$、$\mathcal{D}$ 以及正合函子 $F_1\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}$、$F_2\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}$，$\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}_2$ 的一个对象由三元组 (c_1, c_2, α) 构成，其中对于每个 $i \in \{1,2\}$，c_i 是 $\mathcal{C}_i$ 的一个对象，并且 $\alpha\colon F_1(c_1) \simeq F_2(c_2)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个等价。我们通常将其简写为 α。从 (c_1, c_2, α) 到 (c_1', c_2', α') 的一个态射由三元组 (f_1, f_2, β) 构成，其中对于每个 $i \in \{1,2\}$，$f_i\colon c_i \to c_i'$ 是 $\mathcal{C}_i$ 中的一个态射，并且 β 是 $\alpha' \circ F_1(f_1)$ 与 $F_2(f_2) \circ \alpha$ 在 $\mathcal{D}$ 中的一个同伦。等价地，存在一个等价

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1\times_{\mathcal{D}}\mathcal{C}_2}((c_1,c_2,\alpha),(c_1',c_2',\alpha')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(c_1,c_1') \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_1(c_1),F_2(c_2'))} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_2}(c_2,c_2')$$

其中右侧的拉回在 ∞-范畴 $\mathbf{Mod_k}$ 中计算。注意，若 c_2 或 c_2' 中任一者为零对象，则该投影

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1\times_{\mathcal{D}}\mathcal{C}_2}((c_1,c_2,\alpha),(c_1',c_2',\alpha')) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(c_1,c_1')$$

是一个等价。

引理 3.13。下图交换：

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathrm{Loc}(\Lambda_{K_0}) \\ & & \overset{\sigma_0^*\circ\mathrm{pr}}{\nearrow} & & \overset{\mu_{K_0}(\cdot)|_{\Lambda_{K_0}}[1]}{\nwarrow} \\ \mathrm{Sh}_{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi) & & \xrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} & & \mathrm{Sh}_{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3). \end{array} \tag{3.13}$$

这里 $\mathrm{pr}\colon \mathrm{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi) \to \mathrm{Loc}(L_\varphi)$，$(F, G) \mapsto G$ 是投影。证明。考虑下图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sh}_{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi) & \xrightarrow{\sigma_0^*\circ\mathrm{pr}} & \mathrm{Loc}(\Lambda_{K_0}) & \xleftarrow{\mu_{K_0}(\cdot)|_{\Lambda_{K_0}}[1]} & \mathrm{Sh}_{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3) \\ \wr\downarrow{\scriptstyle (3.10)} & & \wr\downarrow{\scriptstyle \mathscr{F}_{K_0}\otimes(\cdot)} & & \wr\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{m}_{L_{K_0}}} \\ \mu\mathrm{sh}_{0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)}(0_{\mathbb{R}^3}\cup\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)) & \xrightarrow[\mathrm{res}']{} & \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_{K_0}}(\widehat{\Lambda}_{K_0}) & \xleftarrow[\mathrm{res}]{} & \mu\mathrm{sh}_{L_{K_0}}(L_{K_0}). \end{array}$$

若该图表交换，则由引理3.8和图表(3.12)，(3.13)的交换性立即成立。

由(3.8)，$\mathscr{F}_{L_\varphi}|_{\widehat{\Lambda}'_{K_0}} \simeq \mathscr{F}_{K_0}|_{\widehat{\Lambda}'_{K_0}}$。因此，对于任意的 $(F, G) \in \mathrm{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi)$，

$$(\mathrm{res}' \circ (3.10))(F,G) \simeq (\mathscr{F}_{L_\varphi} \otimes G)\big|_{\widehat{\Lambda}'_{K_0}} \simeq \mathscr{F}_{K_0} \otimes \sigma_0^* G$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$通过自然等价 $\mu\mathrm{sh}^{\widehat{\Lambda}_{K_0}}(\Lambda_{K_0}) \simeq \mu\mathrm{sh}^{\widehat{\Lambda}'_{K_0}}(\Lambda'_{K_0}) \simeq \mu\mathrm{sh}^{\Lambda_{K_0}}(\Lambda_{K_0})$。这说明左方形交换。右三角形根据 (3.2) 交换。 □

令我们固定 $x_0 \in \mathbb{R}^3$，使其位于包含 $N_{K_0} \cup N_{K_1} \cup \pi_{\mathbb{R}^3}(\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3))$ 的一个足够大的球之外。于是，$x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus K_0$。对于 $i \in \{0,1\}$，我们有一个函子

$$\mathrm{Sh}_{L_{K_i}}(\mathbb{R}^3) \to \mathrm{Sh}(\{x_0\})$$

它取 x_0 处的茎。于是，我们得到一个图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathbf{Loc}(L_\varphi)^\subsetneq & \xrightarrow{\quad \mathbf{\Phi} \quad} & \mathbf{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbf{Sh}(\{x_0\})。 & \end{array} \tag{3.14}$$

引理 3.9 表明这个图表是交换的。

对于任意$\mathbf{k}$-向量空间 V，令 $V_{\mathbb{R}^3} \in \mathbf{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3)$ 表示在 $\mathbb{R}^3$ 上为 V 常值的层。Recall 定义纤维积 $\mathbf{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathbf{Loc}(L_\varphi)$ 的函子 (3.11)。由于

$$\mu_{K_1}(V_{\mathbb{R}^3})|_{\Lambda_{K_1}}[1] \simeq 0 \text{ in } \mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1}),$$

我们有一个对象 $(V_{\mathbb{R}^3}, 0) \in \mathbf{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathbf{Loc}(L_\varphi)$。

引理 3.14. $\mathbf{\Phi}((V_{\mathbb{R}^3}, 0)) \simeq V_{\mathbb{R}^3}$

证明。将 $F = \mathbf{\Phi}((V_{\mathbb{R}^3}, 0)) \in \mathbf{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3)$ 记作简写。由引理 3.13,

$$\mu_{K_0}(F)|_{\Lambda_{K_0}}[1] \simeq \sigma_0^*(0) = 0 \text{ in } \mathrm{Loc}(\Lambda_{K_0}).$$

由于函子 $\mu hom(\overline{\mathscr{F}_{K_0}}, \cdot)$ 是一个等价，由 (3.2) 可得

$$\mathfrak{m}_{L_{K_0}}(F)\Big|_{\widehat{\Lambda}_{K_0}} \simeq 0 \text{ in } \mu\mathrm{sh}_{\widehat{\Lambda}_{K_0}}(\widehat{\Lambda}_{K_0})$$

对于微局部化函子 $\mathfrak{m}_{L_{K_0}}$。因此，依 KS90 的命题 5.4.5], 存在某个由$\mathbf{k}$-向量空间组成的链复形 V'，使得 $\mathrm{SS}(F) \subset 0_{\mathbb{R}^3}$ 且 $F \simeq V'_{\mathbb{R}^3}$。由 (3.14) 的交换性，$V'$ 与 V 同构。 □

接下来，考虑注 3.10 中 K_1 上的局部系统 ℓ 以及常值层 $\mathbf{k}_{L_\varphi} \in \mathbf{Loc}(L_\varphi)$。由函子 (3.11),

$$i_{1*}\bar{\ell} \xmapsto{\mu_{K_1}(\cdot)|_{\Lambda_{K_1}}[1]} \mu_{K_1}(i_{1*}\bar{\ell})\big|_{\Lambda_{K_1}}[1] \simeq (\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_1}})^*(\bar{\ell})[1] = \ell[1] \xmapsto{\ell \otimes \sigma_1^*(\cdot)} \mathbf{k}_{L_\varphi}[1].$$

这里，我们对 $\ell \in \mathbf{Loc}(K_1)$使用命题 3.5。因此，我们得到一个对象 $(i_{1*}\ell, \mathbf{k}_{L_\varphi}[1]) \in \mathbf{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathbf{Loc}(L_\varphi)$。

引理 3.15. ℓ 是一个平凡局部系统。即，$\mathscr{F}_{L_\varphi}|_{\widehat{\Lambda}'_{K_1}} \simeq \mathscr{F}_{K_1}$。此外，

$$\mathbf{\Phi}((\mathbf{k}_{K_1}, \mathbf{k}_{L_\varphi}[1])) \simeq \mathbf{k}_{K_0}$$

在$\mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3)$中。

证明。我们将 $F = \mathbf{\Phi}(i_{1*}\bar{\ell},\ \mathbf{k}_{L_\varphi}[1]) \in \mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3)$ 简记为。由 (3.14) 的交换性，F在 $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus K_0$ 处的茎消失。这意味着 $j_0^* F \simeq 0$ 属于 $\mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_0)$，并且由纤维（余纤维）序列 (3.6) 可得 $F \simeq i_{0*} i_0^* F$，其中 $i_0^* F \in \mathrm{Loc}(K_0)$。

由引理 3.13,

$$\mu_{K_0}(F)|_{\Lambda_{K_0}}[1] \simeq \sigma_0^* \mathbf{k}_{L_\varphi}[1] = \mathbf{k}_{\Lambda_{K_0}}[1] \text{ in } \mathrm{Loc}(\Lambda_{K_0}).$$

另一方面，由命题 3.5,

$$\mu_{K_0}(i_{0*} i_0^* F)|_{\Lambda_{K_0}} \simeq (\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}})^*(i_0^* F).$$

由此可得 $\mathbf{k}^{\Lambda_{K_0}} \simeq (\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}})^*(i_0^* F)$ 属于 $\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_0})$。取截面 $s\colon K_0 \to \Lambda_{K_0}$ of $\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}}$，我们得到

$$\mathbf{k}_{K_0} = s^* \mathbf{k}_{\Lambda_{K_0}} \simeq (\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}} \circ s)^*(i_0^* F) = i_0^* F.$$

因此，$i_0^* F$ 是 K_0 上取值恒为 $\mathbf{k}$ 的层，且 $F \simeq i_{0*} i_0^* F \simeq \mathbf{k}^{K_0}$。

由引理 3.14，得 $\mathbf{\Phi}((\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3}, 0)) \simeq \mathbf{k}_{\mathbb{R}^3}$。由 $\mathbf{\Phi}$ 的全忠实性,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}((\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3}, 0), (i_{1*}\bar{\ell}, \mathbf{k}_{L_\varphi}[1])) &\simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{\Phi}((\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3}, 0)), \mathbf{\Phi}((i_{1*}\bar{\ell}, \mathbf{k}_{L_\varphi}[1]))) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3}, \mathbf{k}_{K_0}) \\ &\simeq H^*(K_0; \mathbf{k}).\end{aligned}$$

另一方面，根据纤维积 $\mathrm{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi)$ 的定义（另见注记 3.12），

$$\mathrm{Hom}((\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3}, 0), (i_{1*}\bar{\ell}, \mathbf{k}_{L_\varphi})) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3}, i_{1*}\bar{\ell}).$$

同构 $\mathrm{Hom}(\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3}, i_{1*}\ell) \simeq H^*(K_0; \mathbf{k})$ 表明，ℓ 是 K_1上的平凡秩一局部系统。因此，ℓ 也是 Λ_{K_1}上的平凡局部系统。 □

由三维流形 M_φ的构造，我们自然得到一个范畴等价

$$\mathrm{Loc}(M_\varphi) \cong \mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_1) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi),$$

其中，纤维积由嵌入 $\mathbb{R}^3 \setminus K_1 \xleftarrow{e_1} \Lambda_{K_1} \xrightarrow{\sigma_1} L_\varphi$定义。由命题 3.5，以下图表交换:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_1) & \xrightarrow{e_1^*} & \mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1}) & \xleftarrow{\sigma_1^*} & \mathrm{Loc}(L_\varphi) \\
{\scriptstyle j_{1!}}\downarrow & & \| & & \| \\
\mathrm{Sh}_{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mu_{K_1}(\cdot)|_{\Lambda_{K_1}}[1]} & \mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1}) & \xleftarrow{\sigma_1^*} & \mathrm{Loc}(L_\varphi),
\end{array}$$

其中，由于 ℓ根据引理 3.15 是平凡的，下方的水平函子与 (3.11) 一致。因此，全忠实函子 $j_{1!}$ 与 $\mathrm{Loc}(L_\varphi)$ 上的恒等函子定义了一个函子

$$J\colon \mathrm{Loc}(M_\varphi) \to \mathrm{Sh}_{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi).$$

根据注记 3.12 中提到的稳定范畴拉回的显式描述，J 是全忠实的。

我们将图表 (3.13) 和 (3.14)，以及函子 J 和 $j_0^*\colon \mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3) \to \mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_0)$ 结合起来。于是得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Loc}(\Lambda_{K_0}) & & \\ & \overset{\sigma_0^*}{\nearrow} & & \overset{\mu_{K_0}(\cdot)|_{\Lambda_{K_0}}[1]}{\nwarrow} & \\ \mathrm{Loc}(M_\varphi) & \xhookrightarrow{J} & \mathrm{Sh}_{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi) & \xhookrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} & \mathrm{Sh}_{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3) \\ & \searrow & & \swarrow & \downarrow{\scriptstyle j_0^*} \\ & & \mathrm{Sh}(\{x_0\}) & \longleftarrow & \mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_0), \end{array} \tag{3.15}$$

其中，指向 $\mathrm{Sh}(\{x_0\})$ 的三个箭头都是取 x_0 处茎的函子。

我们也来考虑 $\mathrm{Loc}(\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3))$ 中的对象。我们有一个自然等价

$$\mathrm{Loc}(\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)) \simeq \mathrm{Loc}(K_1) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi),$$

其中，纤维积由 $\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_1}}\colon \Lambda_{K_1} \to K_1$ 和 $\sigma_1\colon \Lambda_{K_1} \to L_\varphi$ 定义。与 J 类似，我们有一个全忠实函子

$$I\colon \mathrm{Loc}(\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)) \simeq \mathrm{Loc}(K_1) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi) \to \mathrm{Sh}_{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi)$$

它由 $i_{1*}\colon \mathrm{Loc}(K_1) \hookrightarrow \mathrm{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3)$ 以及 $\mathrm{Loc}(L_\varphi)$ 上的恒等函子诱导。

引理 3.16. 全忠实函子 $\boldsymbol{\Phi} \circ I\colon \mathrm{Loc}(\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)) \to \mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3)$ 的本质像与 $i_{0*}\colon \mathrm{Loc}(K_0) \to \mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3)$ 的本质像一致。

证明。任取 $F \in \mathrm{Loc}(K_0)$。令 $\pi'\colon \varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3) \to K_0$ 为 $\varphi^{-1}|_{\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)}\colon \varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3) \to T^*_{K_0}\mathbb{R}^3$ 与 $(\pi_{\mathbb{R}^3})|_{T^*_{K_0}\mathbb{R}^3}\colon T^*_{K_0}\mathbb{R}^3 \to K_0$ 的复合。由于 φ 固定了 $\sigma_0(\Lambda_{K_0})$ 中的每个点，因此 $\pi' \circ \sigma_0 = \pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}}$。于是，我们得到一个对象 $\pi'^*F \in \mathrm{Loc}(\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3))$，使得 $\sigma_0^*(\pi'^*F) = (\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}})^*F$ 属于 $\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_0})$。

考虑 $\boldsymbol{\Phi}(I(\pi'^*F[1])) \in \mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3)$。由 (3.14) 的交换性可知，其在 x_0 处的茎为零。因此，由 (3.6) 的（余）纤维序列可得，对于某个 $G \in \mathrm{Loc}(K_0)$，有 $\boldsymbol{\Phi}(I(\pi'^*F[1])) \simeq i_{0*}G$。

我们断言 $G \simeq F$。事实上，由引理 3.13 和命题 3.5，

$$(\sigma_0^* \circ \mathrm{pr})(I(\pi'^*F[1])) \simeq \mu_{K_0}(i_{0*}G)[1] \simeq (\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}})^*G[1].$$

此外，根据 I 的定义，

$$(\sigma_0^* \circ \mathrm{pr})(I(\pi'^*F[1])) = \sigma_0^*(\pi'^*F[1]) = (\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}})^*F[1].$$

因此，$(\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}})^*F \simeq (\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}})^*G$ 属于 $\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_0})$。取一个截面 $s\colon K_0 \to \Lambda_{K_0}$ of $\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}}$，则

$$G \simeq s^*(\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}})^*G \simeq s^*(\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}})^*F \simeq F.$$

因此，我们得到 $\boldsymbol{\Phi}(I(\pi'^*F[1])) \simeq i_{0*}F$。 □

3.4 基本群之间的同态 h

从现在起，出于下文注记 3.18 中所解释的原因，我们将处理 ∞-范畴的同伦范畴。

记号 3.17。令 $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ 表示可能是无限维的 $\mathbf{k}$-向量空间所构成的 1-范畴。

对于一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，$\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ 表示其同伦范畴。若 $\mathcal{C}$ 是一个以 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{k}}$ 为富集的稳定 ∞-范畴，则 $\mathrm{Ho}(C)$ 自然具有一个以 $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ 为富集的三角范畴结构。$\mathcal{C}$ 中的（余）纤维序列对应于 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ 中的 distinguished 三角。对于以 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{k}}$ 为富集的稳定 ∞-范畴 $\mathcal{C}$中的任意对象 $x,\ y$，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{C})}(x,y) \simeq H^0(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)) \quad \text{in } \mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}.$$

此外，稳定 ∞-范畴之间的正合函子 $\alpha\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 会诱导出三角范畴之间的正合函子 $\mathrm{Ho}(\alpha)\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{D})$。在不致引起混淆时，我们将简写 $\mathrm{Ho}(\alpha)$ 为 α。

还需注意，若 $\mathcal{C} \to \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 是一个分裂 Verdier 序列，则同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathcal{D})$ 具有一个经典意义下的半正交分解 $\mathrm{Ho}(\mathcal{D}) = \langle \mathrm{Ho}(\mathcal{E}),\ \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \rangle$，其中 $\mathrm{Ho}(\mathcal{E})$ 通过投影函子 $\mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 的左伴随被视为 $\mathrm{Ho}(\mathcal{D})$ 的子范畴。

对于流形 X，令 $\mathrm{loc}(X)$ 表示 X 上 $\mathbf{k}$-向量空间的局部常值层构成的 1-范畴。它等价于 $\mathrm{Loc}(X)$ 的全子范畴的同伦范畴，该全子范畴由满足以下条件的 $F \in \mathrm{Loc}(X)$ 构成：对于任意 $i \neq 0$，$H^i(F) = 0$。

注意，$\mathrm{loc}(M_\varphi)$ 等价于 $\mathrm{Loc}(M_\varphi)$ 的全子范畴的同伦范畴，该全子范畴由满足以下条件的 $F \in \mathrm{Loc}(M_\varphi)$ 构成：其在 x_0 处的茎 $F_{x_0} \in \mathrm{Sh}(\{x_0\})$ 是一个集中在第 0 度的 $\mathbf{k}$-向量空间复形；$\mathrm{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_0)$ 也有类似结论。于是，由图表 (3.15)，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{loc}(M_\varphi) & \xrightarrow{j_0^* \circ \mathbf{\Phi} \circ J} & \mathrm{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_0) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}, & \end{array} \tag{3.16}$$

其中向下的箭头是通过取 x_0 处的茎定义的函子。

对于任意群 G，令 $\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G)$ 表示 G 在 $\mathbf{k}$-向量空间上的表示构成的阿贝尔范畴，这些向量空间可以是无限维的。我们用下式表示遗忘函子

$$F_G\colon \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G) \to \mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}.$$

此外，令 $\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}^{\mathrm{fin}}(G)$ 表示 $\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G)$ 的全子范畴，该全子范畴由满足 $F_G(\rho)$ 具有有限维的 $\rho \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G)$ 构成。对于任意 $V \in \mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$，$\mathrm{GL}(V)$ 表示 V 的线性自同构群。

在本节中，我们将其简写为

$$G_0 \coloneqq \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0, x_0), \quad G_1 \coloneqq \pi_1(M_\varphi, x_0).$$

考虑局部常值层的单值化，我们得到阿贝尔范畴的自然等价

$$\mathrm{mon}_{x_0}^0\colon \mathrm{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_0) \to \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_0), \quad \mathrm{mon}_{x_0}^1\colon \mathrm{loc}(M_\varphi) \to \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1).$$

更准确地说，对于任意局部常值层 $\ell \in \mathrm{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_0)$ 以及任意 $g \in G_0$，$\mathrm{mon}^0_{x_0}(\ell)(g) \in \mathrm{GL}(\ell_{x_0})$ 是 ℓ 沿着以 x_0 为基点、表示 g 的环路的单值化，而 $\mathrm{mon}^1_{x_0}$ is$\widetilde{\ }$ 以类似方式定义。另一方面，通过取 $\mathbb{R}^3 \setminus K_0$ 的普遍覆盖 M_0，$\mathrm{mon}^0_{x_0}$ 的逆函子定义为

$$(\mathrm{mon}^0_{x_0})^{-1} \colon \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_0) \to \mathrm{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_0),\ \rho \mapsto \ell^0_\rho \coloneqq \widetilde{M_0} \times_\rho V,$$

$\widetilde{\ }$其中 $V = F_{G_0}(\rho)$，且 $M_0 \times_\rho V$ 是与 ρ相关联的局部常值层。类似地，我们定义

$$(\mathrm{mon}^1_{x_0})^{-1} \colon \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1) \to \mathrm{loc}(M_\varphi),\ \rho \mapsto \ell^1_\rho \coloneqq \widetilde{M_\varphi} \times_\rho V,$$

$\widetilde{\ }$其中 M_φ 是 M_φ 的普遍覆盖，且 $V = F_{G_1}(\rho)$。

将 $j_0^* \circ \mathbf{\Phi} \circ J$简记为 Ψ。那么，由 (3.16) 可得一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1) & \xrightarrow{\mathrm{mon}^0_{x_0} \circ \Psi \circ (\mathrm{mon}^1{}_{x_0})^{-1}} & \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_0) \\ & {\scriptstyle F_{G_1}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle F_{G_0}} & \\ & \mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}. & \end{array}$$

注记 3.18. 对任意群 G，表示范畴 $\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G)$ 也可以用 ∞-范畴的方式定义。从 ∞-范畴理论的角度来看，将表示范畴 $\mathrm{Rep}^\infty_{\mathbf{k}}(G)$ 定义为函子范畴 $\mathrm{Fun}(\mathrm{B}G, \mathrm{Mod}_{\mathbf{k}})$ 是很自然的。我们可以考虑由那些取值为集中在 0 次的复形的函子组成的 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{k}}$-富化全子范畴 $\mathrm{Rep}^\infty_{\mathbf{k}}(G)^\heartsuit$。$\mathrm{Rep}^\infty_{\mathbf{k}}(G)^\heartsuit$ 的同伦范畴等价于我们所用的 1-范畴 $\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G)$。然而，函子 $\mathrm{mon}^0_{x_0}$、$\mathrm{mon}^1_{x_1}$ 无法提升为从 $\mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_i)$ 到 $\mathrm{Rep}^\infty_{\mathbf{k}}(G_i)$ 的富化 ∞-函子，因$i \in \{0,1\}$。另一方面，对于每个 $i \in \{0,1\}$，函子 $(\mathrm{mon}^0_{x_0})^{-1}$、$(\mathrm{mon}^1_{x_1})^{-1}$ 都可以通过自然态射 $\mathbb{R}^3 \setminus K_i \to \mathrm{B}G_i$ 和自然同一 $\mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_i) \simeq \mathrm{Fun}(\mathbb{R}^3 \setminus K_i, \mathrm{Mod}_{\mathbf{k}})$ 定义为富化 ∞-函子。这些 ∞-函子在同伦范畴之间诱导出等价，但它们并非 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{k}}$-富化 ∞-范畴之间的等价。

命题 3.19. 存在一个群同态

$$h \colon G_0 \to G_1$$

以及一个1维表示 $\kappa \colon G_0 \to \mathbf{k}^*$，使得 G_0 的$\mathrm{mon}^0_{x_0} \circ \Psi \circ (\mathrm{mon}^1_{x_0})^{-1}$与

$$h^*(\cdot) \otimes \kappa \colon \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1) \to \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_0),\ \rho \mapsto (h^*\rho) \otimes \kappa.$$

证明. 对于一般的群 G，我们使用以下事实，称为 Tannaka 重构：令 $\mathrm{End}(F_G)$ 表示从 F_G 到其自身的自然变换的集合。其元素记作 $(\theta_\rho)_{\rho \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G)}$，其中 $\theta_\rho \colon F_G(\rho) \to F_G(\rho)$ 是一个$\mathbf{k}$线性映射。于是，它具有自然的$\mathbf{k}[G]$代数结构，其单位元为 $(\mathrm{id}_{F_G(\rho)})_{\rho \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G)}$，并且$\mathbf{k}$代数映射

$$\mathbf{k}[G] \to \mathrm{End}(F_G),\ g \mapsto (\rho(g))_{\rho \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G)}$$

是一个同构。

我们将 $\Psi' = \mathrm{mon}^0_{x_0} \circ \Psi \circ (\mathrm{mon}^1_{x_0})^{-1}$ 简记为。由于 $F_{G_0} \circ \Psi' \simeq F_{G_1}$，$\Psi'$ 诱导出一个保幺环同态

$$\hat{h} \colon \mathrm{End}(F_{G_0}) \to \mathrm{End}(F_{G_1}),\ (\theta_{\rho_0})_{\rho_0 \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_0)} \mapsto (\theta_{\Psi'(\rho_1)})_{\rho_1 \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1)}.$$

利用上述同构 $\mathrm{End}(F_{G_i}) \cong \mathbf{k}[G_i]$，对于 $i = 0, 1$，我们得到一个环同态 $h\colon \mathbf{k}[G_0] \to \mathbf{k}[G_1]$。由于 $\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_i)$ 可以视为左 $\mathbf{k}[G_i]$-模的范畴，h 诱导出一个函子

$$\hat{h}^*\colon \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1) \to \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_0)$$

^ 且这与 Ψ' 一致。为说明这一点，注意对于 $g \in G_0$, $h(g) \in \mathbf{k}[G_1]$ 对应于 $(\Psi'(\rho_1)(g))_{\rho_1 \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1)} \in \mathrm{End}(F_{G_1})$。

令 $\mathbf{k}[G_i]^\times$ 表示 $\mathbf{k}[G_i]$ 的单位群，其中 $i = 0,1$。它包含 G_i 作为子群，且 h 被限制为一个群同态

$$\hat{h}\colon G_0 \to \mathbf{k}[G_1]^\times.$$

由于 G_1 根据引理 2.4 是左序的，$\mathbf{k}[G_1]$ 只有平凡单位，即

$$\mathbf{k}[G_1]^\times = \{k \cdot g' \mid k \in \mathbf{k}^*,\ g' \in G_1\}.$$

证明参见 [RZ98，例如命题 6]，。对于每个 $g \in G_0$，我们可以唯一地^确定 $\kappa(g) \in \mathbf{k}^*$ 和 $h(g) \in G_1$，使得 $h(g) = \kappa(g) \cdot h(g)$。于是，$h\colon G_0 \to G_1$ 和 $\kappa\colon G_0 \to \mathbf{k}^*$ 都是群同态。对于任意 $\rho \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1)$，$g \in G_0$ 和 $v \in F_{G_1}(\rho)$，

$$((\hat{h}^*\rho)(g))(v) = \kappa(g) \cdot ((h^*\rho)(g))(v).$$

^ 因此，$\Psi'(\rho) = h^*\rho = (h^*\rho) \otimes \kappa$。 □

引理 3.20。 命题 *3.19* 的表示 $\kappa\colon G_0 \to \mathbf{k}^*$ 是平凡的。

证明。 根据函子 (3.11)，

$$j_{1!}\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3\setminus K_1} \xmapsto{\mu_{K_1}(\cdot)|_{\Lambda_{K_1}}[1]} \mu_{K_1}(j_{1!}\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3\setminus K_1})|_{\Lambda_{K_1}}[1] \simeq e_1^*\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3\setminus K_1} \xmapsto{\sigma_1^*} \mathbf{k}_{L_\varphi}.$$

这里，我们对 $\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3\setminus K_1} \in \mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_1)$ 使用命题 3.5。因此，我们有一个对象 $(j_{1!}\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3\setminus K_1}, \mathbf{k}_{L_\varphi}) \in \mathrm{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi)$。此外，结合引理 3.14 和引理 3.15 中考察的对象，我们得到一个 distinguished 三角

$$(j_{1!}\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3\setminus K_1}, \mathbf{k}_{L_\varphi}) \longrightarrow (\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3}, 0) \longrightarrow (i_{1*}\mathbf{k}_{K_1}, \mathbf{k}_{L_\varphi}[1]) \xrightarrow{+1}$$

在 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi))$ 中。简记 $F = \mathbf{\Phi}((j_{1!}\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3\setminus K_1}, \mathbf{k}_{L_\varphi})) \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3))$。那么，引理 3.14 和引理 3.15 表明，在 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3))$ 中存在一个 distinguished 三角

$$F \longrightarrow \mathbf{k}_{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \mathbf{k}_{K_0} \xrightarrow{+1}.$$

特别地，$j_0^*F \simeq \mathbf{k}_{\mathbb{R}^3\setminus K_0}$ 属于 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_0))$。

令 $\rho_{\mathrm{triv}}\colon G_1 \to \mathbf{k}^*$ 表示 1 维平凡表示。由于 $h^*(\rho_{\mathrm{triv}}) \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_0)$ 是平凡的，命题 3.19 表明

$$\Psi(\ell^1_{\rho_{\mathrm{triv}}}) \simeq \ell^0_\kappa.$$

此外，根据函子 J 的定义，$J(\ell^1_{\rho_{\mathrm{triv}}}) \simeq (j_{1!}\mathbf{k}_{\mathbb{R}^3\setminus K_1}, \mathbf{k}_{L_\varphi})$。因此，

$$j_0^*F = (j_0^* \circ \mathbf{\Phi} \circ J)(\ell^1_{\rho_{\mathrm{triv}}}) \simeq \ell^0_\kappa,$$

因此，ℓ^0_κ 是 $\mathbb{R}^3 \setminus K_0$上的平凡秩一局部系统。因此，$\kappa$ 是 G_0的平凡表示。

□

根据此引理，$\mathrm{mon}^0_{x_0}\circ\Psi\circ(\mathrm{mon}^1_{x_0})^{-1}$ 与拉回函子一致

$$h^*\colon \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1)\to\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_0)$$

对于命题 3.19 的群同态 h。这意味着对于任意 $\rho\in\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1)$,

$$\Psi(\ell^1_\rho)\simeq\ell^0_{h^*\rho}. \tag{3.17}$$

引理 3.21。 固定任意 $\rho\in\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1)$。则，一个层 $F\colon=(\mathbf{\Phi}\circ J)(\ell^1_\rho)\in\mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3))$满足

$$j_0^*F\simeq\ell^0_{h^*\rho}$$

在 $\mathrm{loc}(\mathbb{R}^3\setminus K_0)$ 中。此外，在 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_0}))$ 中存在一个 *distinguished* 三角

$$e_0^*\ell^0_{h^*\rho}\longrightarrow\sigma_0^*\ell^1_\rho\longrightarrow\pi_0^*i_0^*F[1]\xrightarrow{+1}, \tag{3.18}$$

其中 $\pi_0:=\pi_{\mathbb{R}^3}|_{\Lambda_{K_0}}\colon\ \Lambda_{K_0}\to K_0$。

证明。 对于层 $F\in\mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3))$（按断言中的定义），

$$j_0^*F=j_0^*\circ\mathbf{\Phi}\circ J(\ell^1_\rho)=\Psi(\ell^1_\rho)$$

由图表 (3.16) 可知，x_0 处的茎 $(j_0^*F)_{x_0}$ 同构于 $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ 中的 $(\ell^1_\rho)_{x_0}=F_{G_1}(\rho)$。$j_0^*F\in\mathrm{loc}(\mathbb{R}^3\setminus K_0)$ 沿着以 x_0 为基点的环路的单值化由下式给出

$$\mathrm{mon}^0_{x_0}(j_0^*F)=(\mathrm{mon}^0_{x_0}\circ\Psi\circ(\mathrm{mon}^1_{x_0})^{-1})(\rho)=h^*\rho\in\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_0).$$

这里，Recall $G_0=\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K_0,\ x_0)$。因此，$j_0^*F\simeq\ell^0_{h^*\rho}$ 属于 $\mathrm{loc}(\mathbb{R}^3\setminus K_0)$。

接下来，我们考虑由 (3.6) 诱导的 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3))$ 中的 distinguished 三角

$$j_{0!}j_0^*F\longrightarrow F\longrightarrow i_{0*}i_0^*F\xrightarrow{+1}.$$

注意，$j_{0!}j_0^*F\simeq j_{0!}\ell^0_{h^*\rho}$。对这个 distinguished 三角，我们应用函子$\mu_K(\cdot)|_{\Lambda_{K_0}}[1]\colon\mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3))\to\mathrm{Ho}(\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_0}))$。命题 3.5 表明

$$\mu_K(j_{0!}\ell^0_{h^*\rho})\Big|_{\Lambda_{K_0}}[1]=e_0^*\ell^0_{h^*\rho},\quad\mu_K(i_{0*}i_0^*F)|_{\Lambda_{K_0}}[1]=\pi_0^*i_0^*F[1].$$

此外，由图表 (3.15)，我们有

$$\mu_{K_0}(F)|_{\Lambda_{K_0}}[1]=(\mu_{K_0}\circ\mathbf{\Phi}\circ J)(\ell^1_\rho)\big|_{\Lambda_{K_0}}[1]\simeq\sigma_0^*\ell^1_\rho.$$

因此，我们在 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_0}))$ 中得到一个 distinguished 三角 (3.18)。 □

对于第 2.2 节中固定的 y_0 of Λ_{K_0} 基点，我们选取路径

$$\gamma_0\colon[0,1]\to\mathbb{R}^3\setminus K_0,\quad\gamma_1\colon[0,1]\to M_\varphi, \tag{3.19}$$

使得 $\gamma_0(0)=\gamma_1(0)=x_0$, $\gamma_0(1)=e_0(y_0)$ 且 $\gamma_1(1)=\sigma_0(y_0)$。它们定义了群同态

$$\begin{aligned}(e_0)'_*&\colon\pi_1(\Lambda_{K_0},y_0)\to G_0=\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K_0,x_0),\ [\gamma]\mapsto[\gamma_0\cdot(e_0\circ\gamma)\cdot\gamma_0^{-1}],\\(\sigma_0)'_*&\colon\pi_1(\Lambda_{K_0},y_0)\to G_1=\pi_1(M_\varphi,x_0),\ [\gamma]\mapsto[\gamma_1\cdot(\sigma_0\circ\gamma)\cdot\gamma_1^{-1}].\end{aligned}$$

令 $m_0'\coloneqq(e_0)'_*(m_0)\in G_0$ 和 $l_0'\coloneqq(\sigma_0)'_*(l_0)\in G_1$。

引理 3.22. 令 $\rho \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}^{\mathrm{fin}}(G_1)$。若 $(h^*\rho)(m_0') \in \mathrm{GL}(F_{G_1}(\rho))$ 没有以 1 为特征值，则

$$i_0^*(\mathbf{\Phi} \circ J(\ell_\rho^1)) \simeq 0$$

属于 Ho(Loc(K_0))。

证明。对于满足断言中条件的任意 $\rho \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}^{\mathrm{fin}}(G_1)$，令

$$F \coloneqq (\mathbf{\Phi} \circ J)(\ell_\rho^1) \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}_{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3)).$$

根据引理 3.21，我们在 Ho(Loc(Λ_{K_0})) 中有一个 distinguished 三角 (3.18)

$$e_0^*\ell_{h^*\rho}^0 \longrightarrow \sigma_0^*\ell_\rho^1 \longrightarrow \pi_0^* i_0^* F[1] \xrightarrow{+1}.$$

若取一个截面 $s\colon\ K_0 \to \Lambda_{K_0}$，则

$$s^*(\pi_0^* i_0^* F) = i_0^* F = i_0^*(\mathbf{\Phi} \circ J(\ell_\rho^1)).$$

因此，只需证明上述 distinguished 三角中的态射 $e_0^*\ell_{h^*\rho}^0 \to \sigma_0^*\ell_\rho^1$ 是拟同构，这意味着 $\pi_0^* i_0^* F \simeq 0$。

作为层复形，$\ell_{h^*\rho}^0$ 和 ℓ_ρ^1 都集中在 0 次。通过取上同调，我们得到 Loc(Λ_{K_0}) 中的一个正合序列

$$\ell' \coloneqq H^0(\pi_0^* i_0^* F) \xrightarrow{f} e_0^*\ell_{h^*\rho}^0 \xrightarrow{g} \sigma_0^*\ell_\rho^1 \longrightarrow H^1(\pi_0^* i_0^* F).$$

为了证明 g 是一个同构，我们来考察该正合序列中的局部常值层沿 $m_0 \in \pi_1(\Lambda_{K_0},\ y_0)$ 的单值化。

- 对于 ℓ' m_0 ℓ'_{y_0} $\ell' =$，沿.....的单值化由..... π_0^* H^0 i_0^*F π_0^* $i_0^*F \in$ K_0 π_0 $_*$ m_0 $\in$ 上的恒等映射给出。事实上，对于 Ho(Sh( ))，.....（因为.....是一个正合函子），而（ ）.....（ ）$\pi_1(K_0,\ \pi_0(y_0))$ 在 K_0中由一个常值环路表示。

- 对于 $e_0^*\ell_{h^*\rho}^0$，令$U_{m_0} \in$ GL($(\ell_{h^*\rho}^0)_{e_0(y_0)}$)为沿 m_0的单值化所给出的线性自同构。通过 $\ell_{h^*\rho}^0$ 沿 γ_0^{-1}从 $e_0(y_0)$ 到x_0的平行传输，U_{m_0} 与线性自同构 $(h^*\rho)(m_0') \in$ GL($F_{G_1}(\rho)$)重合。这里请注意，$(\ell_{h^*\rho}^0)_{x_0} \cong (\ell_\rho^1)_{x_0} = F_{G_1}(\rho)$

态射 $f\colon\ \ell' \to e_0^*\ell_{h^*\rho}^0$ 诱导出一个线性映射 $f_{y_0}\colon\ \ell'_{y_0} \to (\ell_{h^*\rho}^0)_{e_0(y_0)}$。根据上述观察，$\mathrm{Im} f_{y_0}$ 包含于一个线性子空间中

$$\{v \in (\ell_{h^*\rho}^0)_{e_0(y_0)} \mid U_{m_0}(v) = v\}.$$

通过沿 γ_0^{-1}的 $\ell_{h^*\rho}^0$ 平行传输，这同构于

$$\{v \in F_{G_1}(\rho) \mid ((h^*\rho)(m_0'))(v) = v\},$$

根据对 ρ 的假设，该空间是零向量空间。因此，$\mathrm{Im}\, f_{y_0} = 0$。

态射 $g\colon\ e_0^*\ell_{h^*\rho}^0 \to \sigma_0^*\ell_\rho^1$ 在这些茎之间诱导出一个线性映射

$$g_{y_0}\colon (\ell_{h^*\rho}^0)_{e_0(y_0)} \to (\ell_\rho^1)_{\sigma_0(y_0)}.$$

由于 $\mathrm{Ker} g_{y_0} = \mathrm{Im}\ f_{y_0} = 0$, g_{y_0} 是单射。此外，由于两个茎的有限维数都与 $F_{G_1}(\rho)$ 相同，g_{y_0} 必须是同构。由于 $e_0^*\ell_{h^*\rho}^0$ 和 $\sigma_0^*\ell_\rho^1$ 是局部常值层，我们可以得出 g 是同构。

□

利用由分裂 Verdier 序列 (3.5) 诱导的 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3))$ 的半正交分解，我们根据引理 3.22 得到以下结果。

命题 3.23. 设 $\rho \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}^{\mathrm{fin}}(G_1)$。若 $(h^*\rho)(m_0') \in \mathrm{GL}(F_{G_1}(\rho))$ 不以 1 为特征值，则

$$(\mathbf{\Phi} \circ J)(\ell^1_\rho) \simeq j_{0!}\ell^0_{h^*\rho}$$

在 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3))$ 中。此外，$\pi_1(\Lambda_{K_0}, y_0)$ 的两个表示

$$(h^*\rho)\circ(e_0)'_*,\ \rho\circ(\sigma_0)'_* \colon \pi_1(\Lambda_{K_0}, y_0) \to \mathrm{GL}(F_{G_1}(\rho))$$

在 $\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}^{\mathrm{fin}}(\pi_1(\Lambda_{K_0}, y_0))$ 中等价。

证明。 由引理 3.22 可得 $i_{0*}i_0^*(\mathbf{\Phi}\circ J)(\ell^1_\rho) \simeq 0$。由 (3.6) 诱导的 distinguished 三角可得

$$(\mathbf{\Phi} \circ J)(\ell^1_\rho) \simeq j_{0!}j_0^*(\mathbf{\Phi}\circ J(\ell^1_\rho)) = j_{0!}\Psi(\ell^1_\rho) \simeq j_{0!}\ell^0_{h^*\rho}$$

在 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3))$ 中。这里，最后一个同构由 (3.17) 得出。

通过沿 γ_0 的平行传输得到的同构 $(\ell^0_{h^*\rho})_{e_0(y_0)} \cong F_{G_0}(h^*\rho) = F_{G_1}(\rho)$，$e_0^*\ell^0_{h^*\rho}$ 沿任意 $[\gamma] \in \pi_1(\Lambda_{K_0}, y_0)$ 的单值化为

$$(h^*\rho)([\gamma_0 \cdot (e_0\circ\gamma)\cdot\gamma_0^{-1}]) = (h^*\rho)((e_0)'_*([\gamma])).$$

同样，通过沿 γ_1 的平行传输得到的同构 $(\ell^1_\rho)_{\sigma_0(y_0)} \cong F_{G_1}(\rho)$，$\sigma_0^*\ell^1_\rho$ 沿 $[\gamma] \in \pi_1(\Lambda_{K_0}, y_0)$ 的单值化为

$$\rho([\gamma_1 \cdot (\sigma_0\circ\gamma)\cdot\gamma_1^{-1}]) = \rho((\sigma_0)'_*([\gamma])).$$

正如我们在引理 3.22 的证明中所见，存在一个同构 $e_0^*\ell^0_{h^*\rho} \simeq \sigma_0^*\ell^1_\rho$，位于 $\mathsf{loc}(\Lambda_{K_0})$ 中。比较它们沿任意 $[\gamma] \in \pi_1(\Lambda_{K_0}, y_0)$ 的单值化，我们得到

$$(h^*\rho)\circ(e_0)'_* \simeq \rho\circ(\sigma_0)'_*$$

在 $\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}^{\mathrm{fin}}(\pi_1(\Lambda_{K_0}, y_0))$ 中。 □

3.5 h 的满射性

考虑 Hurewicz 同态

$$\begin{aligned} p_0 &\colon G_0 = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0, x_0) \to H_1(\mathbb{R}^3\setminus K_0;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},\\ p_1 &\colon G_1 = \pi_1(M_\varphi, x_0) \to H_1(M_\varphi;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

such p_0 映射 $m_0' = (e_0)'_*(m_0) \in G_0$ 到 $1 \in \mathbb{Z}$，而 p_1 映射 $(\sigma_0)'_*(m_0) \in G_1$ 到 $1 \in \mathbb{Z}$.

引理 3.24。 $(p_1 \circ h)(m_0') \neq 0$。

证明。 假设 $(p_1\circ h)(m_0') = 0$。令 $V := \mathbf{k}[t, t^{-1}]$，并定义一个表示 $\rho\colon G_1 \to \mathrm{GL}(V) \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1)$，使得 $\rho(g)(\xi) = t^{p_1(g)}\cdot\xi$ 对每个 $\xi \in V = \mathbf{k}[t,t^{-1}]$ 都成立。（注意，由于 ρ 是无限维的，我们无法应用命题 3.23。）

令 $F := \mathbf{\Phi}(J(\ell^1_\rho)) \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3))$。由 (3.17)，$j_0^*F \simeq \ell^0_{h^*\rho}$。由于 $h^*\rho\colon G_0 \to \mathrm{GL}(V)$ 根据我们的假设是 G_0 的平凡表示，我们有

$$j_{0!}j_0^*F \simeq V_{\mathbb{R}^3\setminus K_0}. \tag{3.20}$$

考虑由 (3.6) 给出的 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3))$ 中的 distinguished 三角

$$V_{\mathbb{R}^3\setminus K_0} \longrightarrow V_{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{f} V_{K_0} \xrightarrow{+1},$$

$$j_{0!}j_0^*F \longrightarrow F \xrightarrow{g} i_{0*}i_0^*F \xrightarrow{+1}.$$

在引理 3.15 中将 $\mathbf{k}$ 替换为 V，可以证明 $\mathbf{\Phi}(V_{K_1}, V_{L_\varphi}[1]) \simeq V_{K_0}$。此外，根据引理 3.14，$\mathbf{\Phi}(V_{\mathbb{R}^3}, 0) \simeq V_{\mathbb{R}^3}$。由于 $\mathbf{\Phi}$ 是全忠实的，存在 $f' \in \mathrm{Hom}((V_{\mathbb{R}^3}, 0), (V_{K_1}, V_{L_\varphi}[1]))$，使得 $\mathbf{\Phi}(f') = f$，并且

$$\mathbf{\Phi}(\mathrm{Cone}(f')) \simeq \mathrm{Cone}(\mathbf{\Phi}(f')) \simeq V_{\mathbb{R}^3\setminus K_0}[1]. \tag{3.21}$$

记 $\mathrm{Cone}(f')[-1] = (W, \ell) \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi))$。那么，由 distinguished 三角

$$(W, \ell) \longrightarrow (V_{\mathbb{R}^3}, 0) \xrightarrow{f'} (V_{K_1}, V_{L_\varphi}[1]) \xrightarrow{+1}$$

以及 $j_1^*V_{K_1} \simeq 0$，我们得到

$$j_1^*W \simeq j_1^*V_{\mathbb{R}^3} = V_{\mathbb{R}^3\setminus K_0} \text{ in } \mathrm{Ho}(\mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_1)).$$

接下来，根据引理 3.16，对于对象 $i_0^*F \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Loc}(K_0))$，存在对象 $(G, \ell') \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Loc}(K_1) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi))$，使得

$$\mathbf{\Phi}(I((G, \ell'))) \simeq i_{0*}i_0^*F \text{ in } \mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}_{L_{K_0}}(\mathbb{R}^3)).$$

回顾一下，根据定义，$F = \mathbf{\Phi}(J(\ell_\rho^1))$。由于 $\mathbf{\Phi}$ 是全忠实的，存在 $g' \in \mathrm{Hom}(J(\ell_\rho^1)\ I((G,\ \ell')))$，使得 $\mathbf{\Phi}(g') = g$ 并且

$$\mathbf{\Phi}(\mathrm{Cone}(g')) \simeq \mathrm{Cone}(\mathbf{\Phi}(g')) \simeq j_{0!}j_0^*F[1]. \tag{3.22}$$

我们将 $\mathrm{Cone}(g')[-1] = (W',\ \ell'') \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3) \times_{\mathrm{Loc}(\Lambda_{K_1})} \mathrm{Loc}(L_\varphi))$ 记作。注意，$J(\ell_\rho^1)$ 和 $I((G,\ \ell'))$ 的 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sh}^{L_{K_1}}(\mathbb{R}^3))$-分量分别为 $j_{1!}(\ \ell_\rho^1|_{\mathbb{R}^3\setminus K_1})$ 和 $i_{1*}G$。（参见 J 和 I 的定义。我们将 $\mathbb{R}^3 \setminus K_1 \cong \mathbb{R}^3 \setminus N_{K_1} \subset M_\varphi$ 视为相同。）于是，由 distinguished 三角

$$(W', \ell'') \longrightarrow J(\ell_\rho^1) \xrightarrow{g'} I((G, \ell')) \xrightarrow{+1}$$

并且 $j_1^*(i_{1*}G) \simeq 0$，我们得到

$$j_1^*W' \simeq j_1^*(j_{1!}(\ell_\rho^1|_{\mathbb{R}^3\setminus K_1})) \simeq \ell_\rho^1|_{\mathbb{R}^3\setminus K_1} \text{ in } \mathrm{Ho}(\mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_1)).$$

由于 $V_{\mathbb{R}^3\setminus K_0} \simeq j_{0!}j_0^*F$，根据 (3.20)，由 (3.21) 和 (3.22) 可得

$$\mathbf{\Phi}(\mathrm{Cone}(f')) \simeq \mathbf{\Phi}(\mathrm{Cone}(g')).$$

由 $\mathbf{\Phi}$ 的全忠实性，$\mathrm{Cone}(f') \simeq \mathrm{Cone}(g')$。使用上述记号，$(W,\ \ell) \simeq (W',\ \ell'')$，由此得到 $j_1^*W \simeq j_1^*W'$ in $\mathrm{Ho}(\mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_1))$。然而，这意味着 $V_{\mathbb{R}^3\setminus K_0} \simeq \ell_\rho^1|_{\mathbb{R}^3\setminus K_1}$ in $\mathrm{Ho}(\mathrm{Loc}(\mathbb{R}^3 \setminus K_1))$，这与表示 $\rho \circ j'_*$ 的非平凡性矛盾：$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1,\ x_0) \to \underline{\mathrm{GL}}(V)$，其中 $j'\colon \mathbb{R}^3 \setminus K_1 \cong \mathbb{R}^3 \setminus N_{K_1} \to M_\varphi$ 是包含映射。

□

注意到，函子 h^*: $\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1) \to \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_0)$ $\rho \mapsto \rho \circ h$ 有一个左伴随

$$h_* \colon \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_0) \to \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1)$$

使得对于任意表示 ρ: $G_0 \to \mathrm{GL}(V)$ of G_0, $(h_*\rho)(g) \in \mathrm{GL}(\mathbf{k}[G_1] \otimes_{\mathbf{k}[G_0]} V)$ 由下式确定

$$(h_*\rho)(g)(\xi \otimes v) = (g \cdot \xi) \otimes v$$

对于任意 $g \in G_1, \xi \in \mathbf{k}[G_1]$ 以及 $v \in V$。这里，$\mathbf{k}[G_1]$ 通过环同态 $\mathbf{k}[G_0] \to \mathbf{k}[G_1]$ 被视为右 $\mathbf{k}[G_0]$-模，该环同态由 h诱导。特别地， $h_*\rho$的维数为

$$\dim_{\mathbf{k}}(h_*\rho) = \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[G_1] \otimes_{\mathbf{k}[G_0]} V) = \#(G_1/h(G_0)) \cdot \dim V.$$

命题 3.25。群同态 h: $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0, x_0) \to \pi_1(M_\varphi, x_0)$ 是满射。

证明。考虑任意表示 $\rho_1 \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}^{\mathrm{fin}}(G_1)$，使得 $(h^*\rho_1)(m_0')$ 不以 1 为特征值。根据引理 3.22 以及由 (3.6) 诱导的 distinguished 三角，余单位态射 $j_{0!}j_0^*(\mathbf{\Phi} \circ J(\ell^1_{\rho_1})) \to \mathbf{\Phi} \circ J(\ell^1_{\rho_1})$ 是同构。此外，利用全忠实函子 $\mathbf{\Phi} \circ J$，对于任意不一定是有限维的表示$\rho_2 \in \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(G_1)$，我们得到以下同构：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2) &\simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{\Phi} \circ J(\ell^1_{\rho_1}), \mathbf{\Phi} \circ J(\ell^1_{\rho_2})) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(j_{0!}j_0^*\mathbf{\Phi} \circ J(\ell^1_{\rho_1}), \mathbf{\Phi} \circ J(\ell^1_{\rho_2})) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(j_0^*\mathbf{\Phi} \circ J(\ell^1_{\rho_1}), j_0^*\mathbf{\Phi} \circ J(\ell^1_{\rho_2})) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(h^*\rho_1, h^*\rho_2) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(h_*h^*\rho_1, \rho_2).
\end{aligned}$$

对于第四个同构，Recall $j_0^*\mathbf{\Phi} \circ J(\ell^1_\rho) = \Psi(\ell^1_\rho) \simeq \ell^1_{h^*\rho}$。该同构 $\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(h_*h^*\rho_1, \rho_2)$ 与通过对余单位态射 $h_*h^*\rho_1 \to \rho_1$ 进行前复合得到的态射一致。

取一个一维表示 ρ: $G_1 \to \mathbf{k}^* = \mathbb{C}^*$，使得对每个$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$都有 $\rho(m_1)^k \neq 1$。根据引理 3.24，这个 ρ 满足 ρ_1的假设。将上文中的 $(\rho, h_*h^*\rho)$ 取为 (ρ_1, ρ_2)，我们得到

$$\mathrm{Hom}(\rho, h_*h^*\rho) \simeq \mathrm{Hom}(h_*h^*\rho, h_*h^*\rho).$$

我们来考察恒等映射 $\mathrm{id}_{h_*h^*\rho}$: $h_*h^*\rho \to h_*h^*\rho$。它可分解为

$$h_*h^*\rho \to \rho \to h_*h^*\rho$$

由态射集 $\mathrm{Hom}(\rho, h_*h^*\rho) \to \mathrm{Hom}(h_*h^*\rho, h_*h^*\rho)$ 的满射性可知。特别地，态射 $\rho \to h_*h^*\rho$ 给出了表示空间之间的线性满射。由于 ρ 和$h^*\rho$都是 1 维的，

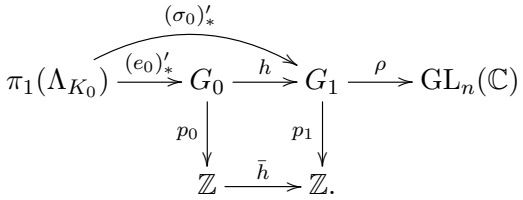
$$\#(G_1/h(G_0)) = \#(G_1/h(G_0)) \cdot \dim_{\mathbb{C}}(h^*\rho) = \dim_{\mathbb{C}}(h_*h^*\rho) \leq \dim_{\mathbb{C}}(\rho) = 1.$$

这表明 h 是满射的。 □

在上述命题的证明中，我们使用了某个元素 $\xi \in \mathbf{k}^* = \mathbb{C}^*$的存在性，使得 $\xi^k \neq 1$ 对任意 $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$都成立。Recall$\mathbf{k} = \mathbb{C}$，我们可以加强命题 3.23 的后一断言。

命题 3.26. 对于任意 $\rho \in$ 表示$^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{C}}(G_1)$, $(h^*\rho)\circ(e_0)'_*$ 与 $\rho\circ(\sigma_0)'_*$ 在表示$^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{C}}(\pi_1(\Lambda_{K_0}, y_0))$中等价。

证明。同态 $p_1\circ h$可经由 h分解为 $G_0\to\mathbb{Z}$，从而下图中的方形交换（即 $p_1\circ h = h\circ p_0$）：



由于 $p_1\circ h$ 是满射，h 也是满射。令 $c := h(1) \in \{1,-1\}$。此外，Recall，$p_0\colon G_0\to\mathbb{Z}$ 将 $m'_0 = (e_0)'_*(m_0) \in G_0$ 映射到 $1\in\mathbb{Z}$。

我们希望证明，对于任意 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 以及任意表示 $\rho\colon G_1\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,

$$(h^*\rho)\circ(e_0)'_* \simeq \rho\circ(\sigma_0)'_* \text{ in } \mathrm{Rep}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{C}}(\pi_1(\Lambda_{K_0}, y_0)). \tag{3.23}$$

证明分为三个步骤。

（步骤 1）我们证明任意一维表示 $\rho\colon G_1\to\mathbb{C}^*$都满足（3.23）。在此情形下，$\rho$ 经由 p_1 分解，并且存在群同态 $\bar{\rho}\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^*$ 使得$\rho = \bar{\rho}\circ p_1$。如果 $\bar{\rho}(1) = 1$，则对于任意 $g\in G_1$，$\rho(g) = 1$，因此（3.23）显然成立。如果 $\bar{\rho}(1)\neq 1$，那么

$$(h^*\rho)(m'_0) = (\bar{\rho}\circ p_1\circ h)(m'_0) = (\bar{\rho}\circ\bar{h}\circ p_0)(m'_0) = \bar{\rho}(c)\neq 1$$

因为 $c\in\{\pm 1\}$。因此，ρ 满足命题 3.23 的条件，而 (3.23) 由命题 3.23 得出。

(步骤 2) 我们证明 (3.23) 对任意 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$-表示 $\rho\colon G_1\to\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 成立。在这种情况下，选择满足以下两个条件的 $\xi\in\mathbb{C}^*$：

1. ξ^{-c} 不是矩阵 $(h^*\rho)(m'_0)\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 的特征值。
2. 对每个 $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$，$\xi^k\neq 1$。

然后，我们定义

$$\tilde{\rho}\colon G_1\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ g\mapsto\xi^{p_1(g)}\cdot\rho(g).$$

这是一个 G_1 的有限维表示，其矩阵

$$(h^*\tilde{\rho})(m'_0) = \xi^{p_1\circ h(m'_0)}\cdot(h^*\rho)(m'_0) = \xi^c\cdot(h^*\rho)(m'_0)$$

根据 ξ 上的第一个条件，其特征值不包含 1。因此，由命题 3.23,

$$(h^*\tilde{\rho})\circ(e_0)'_*\simeq\tilde{\rho}\circ(\sigma_0)'_*$$

在 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{C}}(\pi_1(\Lambda_{K_0}, y_0))$ 中。这两个表示记作

$$(h^*\tilde{\rho})\circ(e_0)'_*\colon g\mapsto\xi^{q_0(g)}\cdot\left((h^*\rho)\circ(e_0)'_*\right)(g),$$
$$\tilde{\rho}\circ(\sigma_0)'_*\colon g\mapsto\xi^{q_1(g)}\cdot\left(\rho\circ(\sigma_0)'_*\right)(g),$$

其中 q_0，$q_1\colon\pi_1(\Lambda_{K_0}, y_0)\to\mathbb{Z}$ 由 $q_0 := p_1\circ h\circ(e_0)'_*$ 和 $q_1 := p_1\circ(\sigma_0)'_*$给出。$(h^*\tilde{\rho})\circ(e_0)'_*(g)$ 与 $\tilde{\rho}\circ(\sigma_0)'_*(g)$ 的行列式相同，因此我们得到

$$(\xi^{q_0(g)})^n = (\xi^{q_1(g)})^n$$

对每个 $g \in \pi_1(\Lambda_{K_0},\ y_0)$ 都成立。由关于 ξ 的第二个条件可知 $q_0 = q_1$。因此，$(h^*\rho) \circ (e_0)'_* \simeq \rho \circ (\sigma_0)'_*$ 在 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{C}}(\pi_1(\Lambda_{K_0},\ y_0))$ 中。

（步骤 3）我们任意取一个表示 $\rho\colon G_1 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$。一维表示 $G_1 \to \mathbb{C}^*,\quad g \mapsto \det \rho(g)$ 经由 p_1 分解，且存在一个群同态 $\nu\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$，使得对每个 $g \in G_1$ 都有 $\nu \circ p_1(g) = \det(\rho(g))$。我们选择 $\zeta \in \mathbb{C}^*$，使得 $\zeta^n = \nu(1)$，并考虑两个表示

$$\rho_1\colon G_1 \to \mathbb{C}^*,\ g \mapsto \zeta^{p_1(g)},\quad \rho_2\colon G_1 \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}),\ g \mapsto \zeta^{-p_1(g)} \cdot \rho(g).$$

这里请注意，$\det \rho(g) = (\nu(1))^{p_1(g)} = \zeta^{n \cdot p_1(g)}$。对于任意 $g \in G_1$，$\rho(g) = \rho_1(g) \cdot \rho_2(g)$，此外，由上述两个步骤可得，

$$(h^*\rho_1) \circ (e_0)'_* = \rho_1 \circ (\sigma_0)'_*,\quad (h^*\rho_2) \circ (e_0)'_* \simeq \rho_2 \circ (\sigma_0)'_*,$$

在 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{C}}(\pi_1(\Lambda_{K_0},\ y_0))$ 中。这表明 (3.23) 对 ρ 成立。 □

将命题 3.26 应用于一维表示，我们可以证明如下结 g.

命题 3.27. 命题 *2.2* 中的整数 b 等于0。

证明. 对于 $i \in \{0,1\}$，注意到 $(e_i)_*(l_0) = 0$ 属于 $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_i;\mathbb{Z})$，因为该同调类来自相对于 Seifert 框架的 K_i 的经线。于是，我们有

$$p_0((e_0)'_*(l_0)) = 0,\quad p_1((\sigma_0)'_*(l_0)) = b.$$

第二个等式可由下式验证

$$(\sigma_0)_*(l_0) = a \cdot (\sigma_1)_*(l_1) + b \cdot (\sigma_0)_*(m_0) \text{ in } H_1(L_\varphi;\mathbb{Z})$$

由命题 2.2 以及 $(\sigma_1)_*(l_1) = (e_1)_*(l_1) = 0$ 属于 $H_1(M_\varphi;\mathbb{Z}) \cong H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1;\mathbb{Z}$).

考虑一个特定的一维表示 $\rho\colon G_1 \to \mathbb{C}^*,\quad g \mapsto 2^{p_1(g)}$。利用命题 3.26 的证明中的同态 $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，

$$((h^*\rho) \circ (e_0)'_*)(l_0) = 2^{(\bar{h} \circ p_0 \circ (e_0)'_*)(l_0)} = 2^{\bar{h}(0)} = 1,$$
$$(\rho \circ (\sigma_0)'_*)(l_0) = 2^b.$$

根据命题 3.26，$(h^*\rho) \circ (e_0)'_* = \rho \circ (\sigma_0)'_*$。因此，$1 = 2^b$ 从而，$b = 0$。 □

注 3.28。 $a \in \{\pm 1\}$ 和 $b \in \mathbb{Z}$ 来自命题 2.2，而该命题的证明使用了 $T^*\mathbb{R}^3$中的拉格朗日子流形的 Floer 上同调群。参见[Oka25b，附录 A]。如果仅使用 Floer 上同调或更初等的工具能够证明 $b = 0$，将会很有趣。

4 关于（K_0，K_1）的纽结类型的约束

我们继续考虑第 3.3 节中的设定。纽结 K_0 和 K_1 在 $\mathbb{R}^3$ 中定向，并配备 Seifert 框架。对于 $\varphi \in \mathrm{Ham}_c(T^*\mathbb{R}^3)$，我们假设 $\varphi(T^*_{K_0}\mathbb{R}^3)$ 与 $0_{\mathbb{R}^3}$ 沿着 K_1干净相交。

4.1 纽结群之间的满同态

我们定义同态 $r_1\colon \pi_1(L_\varphi,\ \sigma_1(y_1)) \to \pi_1(\Lambda_{K_1},\ y_1)$，其定义为以下复合

$$\pi_1(L_\varphi, \sigma_1(y_1)) \longrightarrow H_1(L_\varphi;\mathbb{Z}) \xrightarrow{(\sigma_1)_*^{-1}} H_1(\Lambda_{K_1};\mathbb{Z}) \cong \pi_1(\Lambda_{K_1}, y_1).$$

这里，第一个映射和最后一个同构是 Hurewicz 同态，中间的映射是 $(\sigma_1)_*$ 的逆映射，根据命题 2.2，它在第一同调群上是一个同构。于是，r_1 是同态 $(\sigma_1)_*\colon \pi_1(\Lambda_{K_1}, y_1) \to \pi_1(L_\varphi, \sigma_1(y_1))$ 的收缩，该同态由嵌入 $\sigma_1\colon \Lambda_{K_1} \to L_\varphi$ 诱导，即 $r_1 \circ (\sigma_1)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(\Lambda_{K_1}, y_1)}$。

考虑复合映射

$$\pi_1(\Lambda_{K_0}, y_0) \xrightarrow{(\sigma_0)_*} \pi_1(L_\varphi, \sigma_0(y_0)) \cong \pi_1(L_\varphi, \sigma_1(y_1)) \xrightarrow{r_1} \pi_1(\Lambda_{K_1}, y_1), \tag{4.1}$$

其中，中间的同构通过在 L_φ 中选择一条从 $\sigma_0(y_0)$ 到 $\sigma_1(y_1)$ 的路径来确定。利用命题 2.2 的 $a \in \{\pm 1\}$ 和 $b \in \mathbb{Z}$，(4.1) 将 m_0 映射为 $(m_1)^a$，将 l_0 映射为 $(l_1)^a(m_1)^b$。由命题 3.27，我们知道 $b = 0$。下文中，如有必要，通过改变 K_1 的定向，我们假设 $a = 1$。因此，(4.1) 表示为

$$(4.1)\colon \pi_1(\Lambda_{K_0}, y_0) \to \pi_1(\Lambda_{K_1}, y_1),\ m_0 \mapsto m_1,\ l_0 \mapsto l_1. \tag{4.2}$$

根据流形 M_φ 的构造 (2.4) 以及 Seifert–van Kampen 定理，存在唯一的群同态

$$\bar{r}_1\colon \pi_1(M_\varphi, y_1') \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1, e_1(y_1))$$

使得下图交换：

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(L_\varphi, \sigma_1(y_1)) & & \xrightarrow{\quad i \quad} & & \pi_1(M_\varphi, y_1') \\ \uparrow{\scriptstyle (\sigma_1)_*} & \overset{(e_1)_*\circ r_1}{\searrow} & & \overset{\bar{r}_1}{\twoheadrightarrow} & \uparrow{\scriptstyle i'} \quad \overset{\cong}{\nearrow}{\scriptstyle i''} \\ \pi_1(\Lambda_{K_1}, y_1) & & \xrightarrow{(e_1)_*} & & \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus N_{K_1}, e_1(y_1)). \end{array} \tag{4.3}$$

这里，同态 i、i' 和 i'' 由包含映射诱导。我们注记，$\bar{r}_1$ 是满射。

我们选择一条从 $e_0(y_0)$ 到 x_0、位于 $\mathbb{R}^3 \setminus K_0$ 中的路径，以及一条从 y_1' 到 x_0、位于 M_φ 中的路径，以确定同构

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0, e_0(y_0)) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0, x_0) = G_0, \quad \pi_1(M_\varphi, y_1') \cong \pi_1(M_\varphi, x_0) = G_1.$$

于是，通过复合可得到一个满群同态

$$k\colon \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0, e_0(y_0)) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1, e_1(y_1))$$

由以下复合给出

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0, e_0(y_0)) \cong G_0 \xrightarrow{h} G_1 \cong \pi_1(M_\varphi, y_1') \xrightarrow{\bar{r}_1} \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1, e_1(y_1)). \tag{4.4}$$

注 4.1. 给定纽结 K 和 K'，若存在满群同态 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K')$，则记作 $K \geq K'$。（本节沿用先前研究中的做法，将纽结群之间的这种映射简称为满同态。）于是，对于本节中的纽结K_0 和 K_1，有 $K_0 \geq K_1$。关于纽结群之间的满同态，已有不少研究。例如，以下结果已为人所知。

- 设 $\Delta_K \in \mathbb{Z}[t]$ 表示纽结 K的亚历山大多项式。众所周知，若 $K \geq K'$，则Δ_K 可被 $\Delta_{K'}$ 整除。
- 对于任意纽结 K， $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ 映射到的纽结群（按同构计）至多只有有限多个 [AL12，推论 1.2]。
- 当 K和 K'是二桥纽结时， [ORS08，定理 1.1] 给出了成为 $K \geq K'$的充分条件，而 [ALSS20，定理 8.1]给出了充要条件。

我们将在注 5.4 中讨论条件 $K \geq K'$ 的一些改进。

满同态 k 具有如下性质。

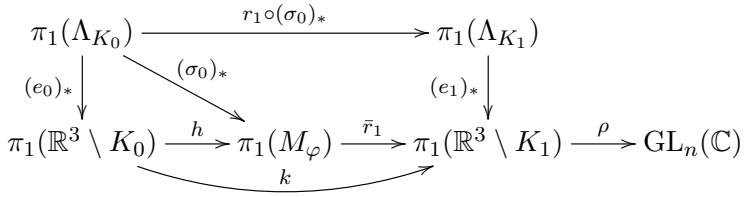
命题 4.2. 对于 $j \in \{0,1\}$，我们分别将子午线 $(e_j)_*(m_j)$ 和经线$(e_j)_*(l_j)$ 简记为m_j 和 l_j 。那么，对于任意表示

$$\rho\colon \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1, e_1(y_1)) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

存在 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 使得

$$(\rho \circ k)(m_0) = g \cdot \rho(m_1) \cdot g^{-1}, \quad (\rho \circ k)(l_0) = g \cdot \rho(l_1) \cdot g^{-1}.$$

证明。 只需研究基本群的表示在等价意义下的情况，因此我们无需考虑基点的选择。对于任意表示 $\rho\colon \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，我们考虑以下图表：



根据 $\bar{r}_1$ 和 k的定义，我们有

$$(e_1)_* \circ (r_1 \circ (\sigma_0)_*) = \bar{r}_1 \circ (\sigma_0)_*, \quad \bar{r}_1 \circ h = k.$$

我们将命题 3.26 应用于 $\pi_1(M_\varphi)$ 的有限维表示 $\rho \circ \bar{r}_1$ ，于是

$$(\rho \circ \bar{r}_1) \circ h \circ (e_0)_* \simeq (\rho \circ \bar{r}_1) \circ (\sigma_0)_*$$

在 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}(\pi_1(\Lambda_{K_0}))$ 中。因此，

$$\rho \circ k \circ (e_0)_* \simeq \rho \circ (e_1)_* \circ (r_1 \circ (\sigma_0)_*).$$

在 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}(\pi_1(\Lambda_{K_0}))$ 中。映射 $r_1 \circ (\sigma_0)_*$ 与 (4.1) 一致，因此它将 m_0 映到 m_1 ，并将 l_0 映到l_1。取 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，使得对于每个 $x \in \pi_1(\Lambda_{K_0})$，都有 $\rho \circ k \circ (e_0)_*(x) = g \cdot (\rho \circ (e_1)_* \circ (r_1 \circ (\sigma_0)_*)(x)) \cdot g^{-1}$ 。于是命题的断言成立。 □

将 $T^*_{K_0}\mathbb{R}^3$ 视为与 $S^1 \times \mathbb{R}^2$微分同胚的三维流形。本节中，若 $\varphi^{-1}(K_1)$ 在 $T^*_{K_0}\mathbb{R}^3$ 中同痕于 $T^*_{K_0}\mathbb{R}^3$中的 $K_0 = T^*_{K_0}\mathbb{R}^3 \cap 0_{\mathbb{R}^3}$，则称其为平凡结 。在这种情况下， $\psi^{-1}(L_\varphi)$ 与 $\mathbb{R} \times \Lambda_{K_0}$微分同胚，并且它是 $\mathbb{R} \times U^*\mathbb{R}^3$ 中从 Λ_{K_1} 到 Λ_{K_0}的精确拉格朗日共边。

定理 4.3。 如果 K_0 是 $\mathbb{R}^3$中的平凡结，那么 K_1 也是 $\mathbb{R}^3$中的平凡结。此外，φ^{-1}（K_1）是 $T^*_{K_0}\mathbb{R}^3$ 中的平凡结。

证明。 由满同态 (4.4) 的存在可知，若 K_0 是平凡结，则 $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K_1) \cong\mathbb{Z}$。根据环定理， K_1 必定是 $\mathbb{R}^3$中的平凡结。

为证明后一断言，我们使用引理 2.4 的证明中定义的三维流形 M'_φ 。如该处所见，若 K_1是平凡结，则 M'_φ是由 $T^*_{K_0}\mathbb{R}^3 \cong K_0 \times \mathbb{R}^2$沿 $\varphi^{-1}(K_1)$ 做德恩手术得到的三维流形。由满射同态 $h\colon \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0) \to \pi_1(M'_\varphi)$ 和 $H_1(M'_\varphi; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 的存在可得$\pi_1(M'_\varphi) \cong \mathbb{Z}$。这意味着嵌入环面 $\sigma_0(\Lambda_{K_0})$ 不可压缩，因为 $(\sigma_0)_*\colon \pi_1(\Lambda_{K_0}) \to \pi_1(M'_\varphi)$ 不是单射。因此，由定理 2.3 可知 $M'_\varphi \cong S^1 \times \mathbb{R}^2$，并且 $\varphi^{-1}(K)$ 同痕于平凡结 $K_0 \times \{0\}$。

□

定理 4.4。 设 K_1 在 $\mathbb{R}^3$中与 K_0 具有相同的结型。那么， $\varphi^{-1}(K_1)$是 $T^*_{K_0}\mathbb{R}^3$中的平凡结。

证明。 根据定理 4.3，我们可以假设 K_1 不是 $\mathbb{R}^3$中的平凡结。根据 [Hem87，定理 1, 1], 已知对于 $\mathbb{R}^3$中的任意纽结 K， $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ 都是有限生成且剩余有限的，这意味着 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ 是一个霍普夫群。因此，如果 K_0与 K_1同痕，那么从 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0)$ 到 $\pi_1($ $\mathbb{R}^3 \setminus K_1)$ 的满同态 (4.4) 必为同构。根据 (4.4) 的构造，满射 h 也是同构，因此 $\bar{r}_1$ 必为同构。

我们参考图表 (4.3)。根据假设， K_1 不是平凡结，$e_1(\Lambda_{K_1}) = \partial N_{K_1}$ 是 $\mathbb{R}^3\setminus K_1$中的不可压缩曲面。这意味着 $(e_1)_*$ 是单射。映射 $(\sigma_1)_*$ 也为单射，因为它有一个收缩 r_1。根据 amalgamated 积的一般性质 [LS01, Chapter IV, Theorem 2.6]，以下两个映射

$$i\colon \pi_1(L_\varphi) \to \pi_1(M_\varphi), \quad i'\colon \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus N_{K_1}) \to \pi_1(M_\varphi),$$

图表 (4.3) 中的映射都是单射。由于 $\bar{r}_1$ 是一个同构，$(e_1)_* \circ r_1 = \bar{r}_1 \circ i$ 也为单射，进而可知 r_1 是单射。由于 r_1 是 $(\sigma_1)_*$的一个收缩，因此 $(\sigma_1)_*\colon \pi_1(\Lambda_{K_1}, y_1) \to \pi_1(L_\varphi, y_1)$ 也是一个同构。

考虑一个三维流形 M，它是通过沿 $\varphi^{-1}(K_1)$ 进行非平凡手术，从 $T^*_{K_0}\mathbb{R}^3$ 得到的。注意，

$$\varphi^{-1} \circ \sigma_1\colon \Lambda_{K_1} \to T^*\mathbb{R}^3 \setminus \varphi^{-1}(K_1) = \varphi^{-1}(L_\varphi)$$

是到 $\varphi^{-1}(K_1)$ 的管状邻域边界上的一个嵌入，并且它在基本群上诱导出一个同构。这意味着 $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$。特别地，$H_1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 是无挠的，并且 $\sigma_0(\Lambda_{K_0})$ 不是不可压缩曲面。应用定理 2.3，得到 $M \cong \mathbb{R}^2 \times S^1$ 和 $\varphi^{-1}(K_1)$ 在 $T^*_{K_0}\mathbb{R}^3$ 中同痕于平凡结。

□

令 $T_{(p,q)}$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的 (p, q) 环面结，其中 p, q 为互素整数。下文中，当我们说一个纽结是 (p, q) 环面结时，总是假设$1 < p < |q|$。

从 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_{(p,q)})$ 到某个纽结群的满同态，已知如下结论。

命题 4.5 ([SW08, 命题 2。4])。 设 K' 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个纽结， K 是(p, q)- 环面结。若存在满同态 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K')$，则 K' 要么是平凡结，要么是(p', q')-环面结，其中 $p' \mid p$ 且 $q' \mid q$，或 $p' \mid q$ 且 $q' \mid p$。

注 4.6。 这一事实可由一条刻画环面结的经典结果推导得出。我们概述 [SW08 命题 2.4] 的证明。对于任意纽结 K，令 Z_K 表示群 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ 的群中心。

1. 设 $f\colon \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_{(p,q)}) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K')$ 是一个满同态。假设 $Z_{K'} = \{1\}$。那么， f 可分解为一个满同态

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T_{(p,q)})/Z_{T_{(p,q)}} \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K').$$

然而，由于 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K')$ 是局部可示的 [HS85，引理 2], 指出不存在有限阶的非平凡元素，因此我们得出矛盾。

2. $Z_{K'} \neq \{1\}$ 当且仅当 K' 是平凡结或环面结 [BZ66]。另见[BZH14，定理 6.1]。

3. 假设 K' 是（p'， q'）环面结。那么，满同态 $f\colon \pi_1 \mathbb{R}^3 \setminus T_{(p',q'}$ $\pi_1 \quad \to$ $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p'\mathbb{Z} * (\mathbb{R}^3 \setminus T_{(p,q)})$ () 诱导出满射同态 ( ) ( ) ( ) $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})$。通过对 $(\mathbb{Z}/p'\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})$ 中扭元的代数论证，我们可以推得 $p' \mid p$ 和 $q' \mid q$，或 $p' \mid q$ 和 $q' \mid p$。

定理 4.7. 若 K_0 是奇数 q对应的$(2, q)$环面结，则 K_1 也为$(2, q)$环面结。

证明。 假设 $K_0 = T_{(2,q)}$。那么，命题 4.5 表明 K_1 是 $T_{(2,q')}$ ，其中 $q'|q$或为平凡结。根据 [Oka25a，定理 1.5]，对于 $q' \neq q$有 $K_1 \neq T_{(2,q')}$ 。此外，根据 [Oka25b，定理 1.1]， K_1 不是平凡结。因此， $K_1 = T_{(2,q)}$。 □

更一般的情形，即 K_0 是 (p, q) 环面结，将在定理 4.15 中讨论。我们也来考虑八字结 4_1。

定理 4.8. 若 K_0 是八字结，则 K_1 也是八字结。

证明。 假设 $K_0 = 4_1$。根据 [KS08，定理 2.1], 4_1 是极小的，也就是说，对于纽结 K'，若存在满同态 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus 4_1) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K')$，则 K' 要么是 4_1，要么是平凡结。（准确地说， [KS08，定理 2.1]陈述了 4_1 在素结中的极小性。我们注意到， $4_1 \geq K_1 \# K_2$ 意味着 $4_1 \geq K_1$ 和 $4_1 \geq K_2$。 ）根据 [Oka25b，定理 1.1]，, K_1 不是平凡结。因此， $K_1 = 4_1$。 □

4.2 A-多项式

我们回顾 A-多项式增强的定义，该定义出自 [NZ17，第 2] 节。另见 [BS23，第 10.1] 节。

我们先准备一些记号。设 G 是一个有限生成群。对于 G 的任意 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-表示 ρ ，其特征是如下定义的映射

$$\chi_\rho\colon G \to \mathbb{C},\ g \mapsto \mathrm{tr}(\rho(g)).$$

我们将 G 上的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 表示的特征集记为

$$X(G) \coloneqq \{\chi_\rho\colon G \to \mathbb{C} \mid \rho \text{ is a } \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\text{-representation of } G\}.$$

它与一个仿射代数集等同。参见 [CS83，第 1 节 1.4，推论 1.4.5]。 $X(G)$ 称为 G 的特征簇 。当 $G = \pi_1(M,\ x)$ 对于一个带基点 x 的连通流形 M 时，我们将 $X(M) \coloneqq X(\pi_1(M,\ x))$ 记为。

注 4.9。 对于任意 $x_1,\ x_2 \in M$，代数集 $X(\pi_1(M,\ x_1))$ 与 $\cong X(\pi_1(M,\ x_2))$ 之间存在典范同构。因此，在讨论 $X(M)$ 及其元素时，我们将省略在 $\pi_1(M,\ x)$ 中写出基点 x 。

设 K 是赋予 Seifert 框架的 $\mathbb{R}^3$ 中的一个定向纽结。我们取 N_K 的一个管状邻域 K，并记作

$$M_K \coloneqq \mathbb{R}^3 \setminus N_K.$$

对于 Λ_K，令 $e\colon \Lambda_K \to M_K$be 为一个嵌入到 ∂N_K 的映射，其定义如式 (2.2)。$\pi_1(\Lambda_K)$ 的生成元 $\{m, l\}$ 确定为使得 $e_*(m)$ 和 $e_*(l)$ 分别是带框架纽结 K 的子午线和经线。嵌入 $e\colon \Lambda_K \to M_K$ 定义了一个正则映射

$$e^*\colon X(M_K) \to X(\Lambda_K),\ \chi_\rho \mapsto \chi_{\rho\circ e_*} = \chi_\rho \circ e_*.$$

我们还考虑一个映射

$$t\colon \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \to X(\Lambda_K)$$

使得对于任意的 $(\mu, \lambda) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$，$t(\mu, \lambda)\colon \pi_1(\Lambda_K) \to \mathbb{C}$ 是表示的特征

$$\pi_1(\Lambda_K) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\ m \mapsto \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix},\ l \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

令 $\mathscr{X}_K$ 为代数集 $X(M_K)$ 的不可约分支 X 的集合，且满足 $\dim_{\mathbb{C}} e^*(X) = 1$。我们有一个元素 $X_K^{\mathrm{red}} \in \mathscr{X}_K$，称为平凡分支，由 $\pi_1(M_K)$ 的可约表示的特征组成。利用 $\pi_1(M_K)$ 的交换子子群 $[\pi_1(M_K)\ \pi_1(M_K)]$，

$$X_K^{\mathrm{red}} = \{\chi \in X(M_K) \mid \chi(c) = 2 \text{ for every } c \in [\pi_1(M_K), \pi_1(M_K)]\}. \tag{4.5}$$

证明见 [CS83，推论 1.2.2]。

现在，考虑 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 的一个子集

$$\tilde{V}_K \coloneqq t^{-1}\left(\bigcup_{X_K^{\mathrm{red}} \neq X \in \mathscr{X}_K} \overline{e^*(X)}\right). \tag{4.6}$$

˜我们将 $A_K \in \mathbb{C}[\mu, \lambda]$ 定义为一个没有重复因子的多项式，其零点集与 $\tilde{V}_K$ 在 $\mathbb{C}^2$ 中的 Zariski 闭包一致。它在乘以非零常数的意义下唯一确定。

注 4.10. $\mathscr{X}_K = \{X_K^{\mathrm{red}}\}$ 当且仅当 K 是平凡结 [DG04]，，此时我们˜定义 $A_K \coloneqq 1$。对于任意纽结 K，其 A 多项式 $A_K \in \mathbb{Z}[\mu, \lambda]$ 由 [CCGLS94，第2节3] 定义为一个没有重复因子的多项式，其零点集与 $t^{-1}\left(\bigcup_{X \in \mathscr{X}_K} e^*(X)\right)$ 在 $\mathbb{C}^2$ 中的 Zariski 闭包一致。由于 $t^{-1}\left(e_*(X_K^{\mathrm{red}})\right) = \{\lambda = 1\}$，$A_K$ 是 A_K 和 $\lambda - 1$ 的最小公倍式。参见 [BS23，注记 10.1]。

注 4.11（与 K 的定向无关）。由于 $t(\mu, \lambda) = t(\mu^{-1}, \lambda^{-1})$，集合 $\tilde{V}_K$ 在映射 $(\mathbb{C}^*)^2 \to (\mathbb{C}^*)^2$, $(\mu, \lambda) \mapsto (\mu^{-1}, \lambda^{-1})$ 下保持不变。另一方面，存在自然双射 $\tilde{V}_K \to \tilde{V}_{-K}$，$(\mu, \lambda) \mapsto (\mu^{-1}, \lambda^{-1})$，其中 $-K$ 是具有相反定向的纽结 K˜ ˜。因此，$A_K = A_{-K}$。

˜ ˜我们希望利用命题 4.2 推导出 A_{K_0} 与 A_{K_1} 之间的关系。

对于 $i \in \{0, 1\}$，我们有嵌入 $e_i\colon \Lambda_{K_i} \to M_{K_i}$，以及 $\pi_1(\Lambda_{K_i})$ 的生成元 $\{m_i, l_i\}$。映射 (4.4) 给出一个满群同态

$$k\colon \pi_1(M_{K_0}) \to \pi_1(M_{K_1}).$$

这定义了一个映射 $k^*\colon X(M_{K_1}) \to X(M_{K_0})$ $\chi_\rho \mapsto \chi_{\rho\circ k}$。下一个引理立即由命题 4.2 得出。

引理 4.12。设 $C^*\colon\ X(\Lambda_{K_1}) \to X(\Lambda_{K_0})\ \ \chi \mapsto \chi \circ C$ 为由一个同构定义的映射

$$C\colon \pi_1(\Lambda_{K_0}) \to \pi_1(\Lambda_{K_1}),\ m_0 \mapsto m_1,\ l_0 \mapsto l_1.$$

那么，下面的图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} X(\Lambda_{K_1}) & \xrightarrow{C^*} & X(\Lambda_{K_0}) \\ \uparrow{\scriptstyle e_1^*} & & \uparrow{\scriptstyle e_0^*} \\ X(M_{K_1}) & \xrightarrow{k^*} & X(M_{K_0}). \end{array}$$

正则映射 $k^*\colon X(M_{K_1}) \to X(M_{K_0})$ 具有如下性质。

引理 4.13. 对于每个 $X \in \mathscr{X}_{K_1}$，都存在 $X \in \mathscr{X}_{K_0}$，使得 $k^*(X) \subset X$。此外，$k^*(X) \subset X_{K_0}^{\mathrm{red}}$ 当且仅当 $X = X_{K_1}^{\mathrm{red}}$。

证明。对于任意 $X \in \mathscr{X}_{K_1}$，$k^*(X)$ 是 $X(M_{K_0})$ 的一个不可约子集。设 X 是包含 $k^*(X)$ 的 $X(M_{K_0})$ 的一个不可约分支。根据 [DG04，引理 2.1], $\dim_{\mathbb{C}} e_0^*(X)$ 为 0 或 1。由于 $\dim_{\mathbb{C}} C^*(e_1^*(X)) = \dim_{\mathbb{C}} e_1^*(X) = 1$ 并且

$$C^*(e_1^*(X)) = e_0^*(k^*(X)) \subset e_0^*(\hat{X})$$

由引理 4.12 可得，$\dim_{\mathbb{C}} e_0^*(X) = 1$，因此 $X \in \mathscr{X}_{K_0}$。

若取 $X = X_{K_1}^{\mathrm{red}}$，显然有

$$\begin{aligned} k^*(X_{K_1}^{\mathrm{red}}) &= \{\chi_{\rho\circ k} \mid \rho\colon \pi_1(M_{K_1}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \text{ is a reducible representation}\} \\ &\subset X_{K_0}^{\mathrm{red}}. \end{aligned}$$

反过来，假设对 $X \in \mathscr{X}_{K_1}$ 有 $k^*(X) \subset X_{K_0}^{\mathrm{red}}$。任取一个特征 $\chi \in X$。我们使用 $X_{K_0}^{\mathrm{red}}$ 和 $X_{K_1}^{\mathrm{red}}$ 的描述 (4.5)。于是，$k^*(\chi) = \chi \circ k \in X_{K_0}^{\mathrm{red}}$ 在交换子子群 $[\pi_1(M_{K_0})\ \pi_1(M_{K_0})]$ 上恒等于 2。由于 $k\colon\ \pi_1(M_{K_0}) \to \pi_1(M_{K_1})$ 是一个满射，像 $k([\pi_1(M_{K_0})\ \pi_1(M_{K_0})])$ 是 $\pi_1(M_{K_1})$ 的一个正规子群，且包含 $[\pi_1(M_{K_1})\ \pi_1(M_{K_1})]$。因此，$\chi$ 必须在 $[\pi_1(M_{K_1})\ \pi_1(M_{K_1})]$，上恒等于 2，这意味着 $\chi \in X_{K_1}^{\mathrm{red}}$。因此，$X = X_{K_1}^{\mathrm{red}}$。 □

我们注记，k 的满射性对本证明的后半部分至关重要。

利用上述两个引理，我们可以推导出.....之间的一个关系 $\tilde{A}_{K_0}$ 和 $\tilde{A}_{K_1}$.

定理 4.14. A_{K_0} 可被 A_{K_1}整除。

证明. 对于任意 $X \in \mathscr{X}_{K_1} \setminus \{X_{K_1}^{\mathrm{red}}\}$，由引理 4.13 可得$X \in \mathscr{X}_{K_0} \setminus \{X_{K_0}^{\mathrm{red}}\}$，使得 $k^*(X) \subset X$，而引理 4.12 表明

$$C^*(e_1^*(X)) = (e_0^* \circ k^*)(X) \subset e_0^*(\hat{X}).$$

因此，$C^*\colon\ X(\Lambda_{K_1}) \to X(\Lambda_{K_0})$ 被限制为一个映射

$$C^*\colon \bigcup_{X\in\mathscr{X}_{K_1}\setminus\{X_{K_1}^{\mathrm{red}}\}} \overline{e_1^*(X)} \to \bigcup_{X\in\mathscr{X}_{K_0}\setminus\{X_{K_0}^{\mathrm{red}}\}} \overline{e_0^*(X)}.$$

显然，C^* 与映射 $t\colon\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \to X(\Lambda_i)$对 $i = 0,\ 1$可交换。根据对 $i = 0,\ 1$的定义（4.6），我们得到 $V_{K_1} \subset V_{K_0}$ 属于 $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$。这意味着多项式 A_{K_1} 整除多项式 A_{K_0}。 □

利用 A 多项式（增强版本）的整除性，我们可以推导出以下结果。

推论 4.15。 如果 K_0 是 $(p,\ q)$ 环面结，那么 K_1 要么是 $(p,\ q)$ 环面结，要么是平凡结。

证明。 假设 $K_0 = T_{(p,q)}$ 和 K_1 都不是平凡结。那么，命题 4.5 表明 $K_1 = T_{(p',q')}$ 与 $p' \mid p$ 和 $q' \mid q$，或 $p' \mid q$ 和 $q' \mid p$。此外，定理 4.14 表明 $\tilde{A}_{T_{(p,q)}}$ 被 $\tilde{A}_{T_{(p',q')}}$ 整除。根据 [BS23，命题 10.3]，$\tilde{A}_{T_{(p,q)}}$ 整除 $\mu^{2pq}\lambda^2 - 1$；根据 [CCGLS94，命题]，$\tilde{A}_{T_{(p',q')}}$ 被 $\mu^{p'q'}\lambda + 1$ 整除。综上，

$$(\mu^{p'q'}\lambda + 1)|\tilde{A}_{T_{(p',q')}}|\tilde{A}_{T_{(p,q)}}|(\mu^{2pq}\lambda^2 - 1).$$

因此，$\mu^{2pq}\lambda^2 - 1$ 可被$\mu^{p'q'}\lambda + 1$整除，这表明 $pq = p'q'$。由于我们知道 $p' \mid p$ 和 $q' \mid q$，或者 $p' \mid q$ 和 $q' \mid p$，因此可得$T_{(p',q')} = T_{(p,q)}$。 □

注 4.16. [BS23，定理 10.14] 可用于在（$p,\ q$）=(2，3)时，给出定理 4.7 的另一种证明，而无需使用 [SW08，命题 2.4] 和 [Oka25a，定理 1.5]。对于任意多项式 $A = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m'} a_{i,\ j}\lambda^i\mu^j \in \mathbb{C}[\lambda,\mu]$，其牛顿多边形 $\mathcal{N}_A$ 定义为 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 中集合 {($i,\ j$) | $a_{i,\ j} \neq 0$}的凸包。众所周知，对于$A,\ B \in \mathbb{C}[\lambda,\mu]$,

$$\mathcal{N}_{AB} = \{x + y \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{N}_A,\ y \in \mathcal{N}_B\}. \tag{4.7}$$

对于 $r \in \mathbb{Q}$，非平凡纽结 K 称为 r-薄，如果 $\mathcal{N}_{\tilde{A}_K}$ 包含在斜率为 r [的线段中（BS23，定义 10.5]）。根据 [BS23，例 10.6]，$T_{(2,3)}$ 是 6-薄的。假设$K_0 = T_{(2,3)}$。那么，根据 [Oka25b，定理 1.1]，K_1 是一个非平凡纽结。由于 A_{K_1} 整除$A_{T_{(2,3)}}$，由 (4.7) 可知，K_1 也是 6-薄的。因此，根据 [BS23，定理 10.14], ，我们可以得出结论：$K_1 = T_{(2,3)}$。

4.3 KCH 表示与增广簇

设 K 是复数域 $\mathbb{R}^3$中的一个定向纽结。

定义 4.17 （[Cor14，定义 3.2]）。 对于$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，表示 $\rho\colon \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$称为 <KCH representation>，如果存在 $\mu \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$，使得 $\rho(m)$ 共轭于对角矩阵 diag(μ，1，. . .，1)。

正如下面的注 4.19 所解释的，KCH 表示与 K的纽结接触同调密切相关。

对于任意 KCH 表示，ρ $\rho(m)$ 与 $\rho(l)$ 可交换。因此，如果我们取 $\mu \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$和 $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$，使得 $\rho(m)(v) = \mu \cdot v$，那么对于某个 $\lambda \in \mathbb{C}^*$，有 $\rho(l)(v) = \lambda \cdot v$。我们将这对 ($\lambda$，$\mu$) 记作 ($\lambda_\rho$，$\mu_\rho$)。令 $\mathrm{KCH}_n^{\mathrm{irr}}(K)$ 表示 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ 的 n 维不可约 KCH 表示的集合。（对于每个 K，满足 $\mathrm{KCH}_n^{\mathrm{irr}}(K) \neq \emptyset$ 的 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 只有有限多个。参见 [Cor14，定理 1]。）对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，我们定义

$$\tilde{U}_K^n := \{(x,y) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid \text{there exists } \rho \in \mathrm{KCH}_n^{\mathrm{irr}}(K) \text{ such that } x = \lambda_\rho \text{ and } y = \mu_\rho\}. \tag{4.8}$$

如果省略 ρ 不可约这一条件，它就与 [第 3 节2]中 Cor14 考虑的子集 $U_K^n \subset (\mathbb{C}^*)^2$相同。

对于任意 $\rho \in \mathrm{KCH}_n^{\mathrm{irr}}(K)$，表示 ρ'，$g \mapsto {}^t(\rho(g))^{-1}$ 也属于 $\mathrm{KCH}_n^{\mathrm{irr}}(K)$。因此，$\tilde{U}_K^n$ 在映射 $(\mathbb{C}^*)^2 \to (\mathbb{C}^*)^2 : (x,\ y) \to (x^{-1},\ y^{-1})$ 下保持不变。这意味着$\tilde{}$ U_K^n 与 K的定向无关。

利用满同态 $k\colon \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1)$，我们可以推导出 $U_{K_0}^n$ 与 $U_{K_1}^n$ 之间的关系$\tilde{}$ $\tilde{}$。

定理 4.18。对于每一个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，$U^n_{K_1} \subset U^n_{K_0}$。

证明。任取 $\rho \in \mathrm{KCH}^{\mathrm{irr}}_n(K_1)$。表示 $\rho \circ k\colon \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是不可约的，因为 k 是满射。此外，命题 4.2 表明，$\rho \circ k$ 满足作为 KCH 表示的条件，其中 $(\lambda_{\rho\circ k}, \mu_{\rho\circ k}) = (\lambda_\rho, \mu_\rho)$。这表明 $U^n_{K_1} \subset U^n_{K_0}$。 □

注 4.19。Ng 在 [Ng08，定义 5.4] 中引入了一个称为 K 的增广簇子集 $(\mathbb{C}^*)^2$，。这里，我们采用 [Ng14，定义 5.1] 中的约定，并将其记为 $V_K \subset (\mathbb{C}^*)^2$。它由 K 的纽结接触同调定义，系数取自 $\mathbb{Z}[\lambda^{\pm}, \mu^{\pm}]$。由 [Cor17，定理 1.2] 可知，$V_K = \{y = 1\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{U}^n_K$。定理 4.18 表明 $V_{K_1} \subset V_{K_0}$，而这一关系是 [Oka25a，定理 1.1]的细化。

5 保持周边对的满射的存在性

我们回到第 3 节，继续讨论。

约定。在本节中，对于 $i \in \{0, 1\}$，我们通过映射 e_i 将 Λ_{K_i} 与 ∂N_{K_i} 视为相同。于是，m_i，$l_i \in \pi_1(\partial N_{K_i}, y_0)$ 分别表示 K_i 的经线和子午线。映射 σ_i 被视为一个嵌入 $\sigma_i\colon \partial N_{K_i} \to L_\varphi$。

记号 5.1。本节将讨论具有环面边界的紧 3-流形的基本群。因此，我们将经常考虑紧 3-流形 $S^3 \setminus N_{K_0}$ 和，而不采用第 2.2 节中引入的 $\mathbb{R}^3 \setminus K_0$ 和 M_φ

$$M'_\varphi \coloneqq \left(S^3 \setminus N_{K_1}\right) \cup_{\sigma_1} \left(L_\varphi \cap \psi([a_1, a_0] \times U^*\mathbb{R}^3)\right).$$

$S^3 \setminus N_{K_0}$ 的边界是 ∂N_{K_0}，而 M'_φ 的边界是 $\sigma_0(\partial N_{K_0}) = \psi(\{a_0\} \times \Lambda_{K_0})$。正如我们在引理 2.4 的证明中所见，$M'_\varphi$ 是不可约的。我们记

$$G'_0 \coloneqq \pi_1(S^3 \setminus N_{K_0}, y_0), \quad G'_\varphi \coloneqq \pi_1(M'_\varphi, \sigma_0(y_0)).$$

注意到，G'_0 和 G'_φ 分别自然同构于 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0, y_0)$和 $\pi_1(M_\varphi, \sigma_0(y_0))$。此外，我们通过 (3.19) 中连接基点的路径 γ_0 （分别为γ_1），将 G_0 （分别为 G_1）与 G'_0 （分别为 G'_φ）视为相同。于是，满射 h可改写为

$$h\colon G'_0 \twoheadrightarrow G'_\varphi.$$

最后，记

$$m_\varphi \coloneqq (\sigma_0)_*(m_0), \quad l_\varphi \coloneqq (\sigma_0)_*(l_0) \in G'_\varphi.$$

使用上述记号，关于 $h\colon G'_0 \to G'_\varphi$ 的命题 3.26 可重述如下：对于任意表示 $\rho\colon G'_\varphi \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，存在 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，使得

$$A \cdot \rho(h(m_0)) \cdot A^{-1} = \rho(m_\varphi), \quad A \cdot \rho(h(l_0)) \cdot A^{-1} = \rho(l_\varphi).$$

本节旨在证明以下定理。

定理 5.2. 存在一个元素 $g \in G'_\varphi$，使得

$$g \cdot h(m_0) \cdot g^{-1} = m_\varphi, \quad g \cdot h(l_0) \cdot g^{-1} = l_\varphi.$$

特别地，存在一个满同态 $h\colon G'_0 \to G'_\varphi$，满足 $h(m_0) = m_\varphi$ 且 $h(l_0) = l_\varphi$。

这是命题 3.26 以及关于三维流形基本群的结果的推论。

下面的结论是定理 5.2 的直接推论。

推论 5.3。 存在一个满群同态

$$\tilde{k}\colon \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1)$$

~ ~使得通过在必要时改变 K_1 的定向，$k(l_0) = l_1$ 和 $k(m_0) = m_1$。

~ ~证明。 取定理 5.2 中的一个满射 $h\colon G'_0 \to G'_\varphi$，并定义 $k := \bar{r}_1 \circ h$，其中$\bar{r}_1\colon G'_\varphi \to \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1)$ 在第 4.1 小节中定义。等式 $\tilde{k}(l_0) = l_1$ 和 $\tilde{k}(m_0) = m_1$ 由关系式 (4.2) 得出。 □

注 5.4。 设 K 和 K' 是赋有 Seifert 框架的 S^3 中的定向纽结。设 $G_K := \pi_1(S^3 \setminus K, y)$，其中 $y \in \partial N_K$，并设 l和 m分别为经线和子午线。同样地，对于纽结 K'，我们令 l'，$m' \in G_{K'}$。在注 4.1 中，我们讨论了一个条件：$K \geq K'$ 若存在一个满同态 $G_K \to G_{K'}$。我们可以考虑它的四种细化：

1. $K \geq_m K'$ 若存在满同态 $k\colon G_K \to G_{K'}$，使得 $k(m) = m'$。
2. $K \geq_p K'$若存在满同态 $k\colon G_K \to G_{K'}$，使得 $k(\pi_1(\partial N_K)) \subset \pi_1(\partial N_{K'})$。3. $K \geq_{ml} K'$ 若存在满同态 $k\colon G_K \to G_{K'}$，使得 $k(m) = m'$ 且 $k(l) = l'$。
4. $K \geq_1 K'$若存在度为 1 的映射 $(S^3 \setminus N_K, \partial N_K) \to (S^3 \setminus N_{K'}, \partial N_{K'})$。

这些条件之间的蕴含关系为

$$K \geq_1 K' \Leftrightarrow K \geq_{ml} \pm K' \Rightarrow K \geq_p K' \Rightarrow K \geq_m \pm K' \Rightarrow K \geq K'.$$

这些关系可按如下方式验证（作者未能在文献中找到这些条件之间关系的总结）：

- $K \geq_{ml} \pm K' \Rightarrow K \geq_p K'$ 和 $K \geq_m \pm K' \Rightarrow K \geq K'$ 显然成立。
- $K \geq_{ml} \pm K' \Rightarrow K \geq_1 K'$：我们利用 $S^3 \setminus N_K$和 $S^3 \setminus N_{K'}$是非球面的这一事实。若 $K \geq_{ml} \pm K'$，则满同态 k 确定了一个映射 F，使下图在同伦意义下交换：

$$\begin{array}{ccc} S^3 \setminus N_K = K(G_K, 1) & \xrightarrow{F} & K(G_{K'}, 1) = S^3 \setminus N_{K'} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \partial N_K = K(\mathbb{Z}^2, 1) & \xrightarrow{\sim} & K(\mathbb{Z}^2, 1) = \partial N_{K'}. \end{array}$$

这里，竖直箭头是包含映射。我们可以通过在 ∂N_K 的领形邻域上进行同伦来安排 F，使图表严格交换。 F 的度为 1，因为 F 诱导了一个同构

$$H_3(S^3 \setminus N_K, \partial N_K) \cong H_2(\partial N_K) \to H_2(\partial N_{K'}) \cong H_3(S^3 \setminus N_{K'}, \partial N_{K'})$$

它保持基本类不变。因此， $K \geq_1 K'$ 成立。

- $K \geq_p K' \Rightarrow K \geq_m \pm K'$：若 $K \geq_p K'$，则必要时改变 K' 的定向$k(m) = m'(l')^a$，使得对某个 $a \in \mathbb{Z}$成立。令 $\langle\langle m'(l')^a \rangle\rangle \subset G_{K'}$ 为包含 $m'(l')^a$的最小正规子群，并类似地定义 $\langle\langle m \rangle\rangle \subset G_K$。那么，$k$ 诱导一个满射

$$\{1\} = G_K / \langle\langle m \rangle\rangle \to G_{K'} / \left\langle\left\langle m'(l')^a \right\rangle\right\rangle,$$

  所以 $G_{K'} / \langle\langle m'(l')^a \rangle\rangle$ 是平凡的。现在，[KM04], 证明的性质 P 表明$a = 0$。

- $K \geq_1 K' \Rightarrow K \geq_{ml} \pm K'$：若 $K \geq_1 K'$，则在必要时改变 K' 的定向，度为 1 的映射会诱导出一个满同态 k：$G_K \to G_{K'}$，使得对某个 $a \in \mathbb{Z}$，有 $k(m) = m'(l')^a$，并且 $k(l) = l'$。利用上述性质 P，我们可以证明$a = 0$。

最后，让我们讨论反向蕴含是否成立：

- 若 K' 是素的，则 $K \geq_m \pm K'$ 推出 $K \geq_p K'$ [（SW08，推论 2.3]）。对于这一蕴含，K' 的素性条件是必要的：对于任意一对纽结 K_1，K_2以及 K_2的镜像 K_2，存在一个保持子午线的同构 $G_{K_1\#K_2} \to G_{K_1\#(-K_2)}$。特别地，$K_1\#K_2 \geq_m K_1\#(-K_2)$ 成立。然而，若存在一个保持外围子群的满同态 k：$G_{K_1\#K_2} \to G_{K_1\#(-K_2)}$，则根据纽结群的霍普夫性质，$k$必为同构；由此，根据 [SW06，命题 3.2]，可得 $K_1\#K_2$ 在镜像意义下同痕于 $K_1\#(-K_2)$。例如，当 $K_1 = K_2 = 3_1$时，这种情况不可能发生。

- 在 [CS16，定理 1.1] 中构造了无穷多对素结（K，K'），其中 $K \geq K'$ 和 $K \ngeq_m K'$。

  [BKN25，命题 B.3.] 给出了一些纽结对（K，K'）的例子，其中 $K \geq_p K'$ 和 $K \ngeq_{ml} K'$。

5.1 三维流形群的预备知识

在本小节中，我们回顾三维流形基本群的一些结果，并将利用这些结果证明定理 5.2。

下面的定理 5.6 是一个高度非平凡的结果，它是在 Wise 和 Agol 关于双曲 3-流形基本群的研究成果基础上得到的。

定义 5.5。若一个群 G 满足：对于任意两个g_1，$g_2 \in G$ 在 G 中不共轭的元素，都存在一个有限群 H 和一个同态p：$G \to H$，使得 $p(g_1)$ 与 $p(g_2)$ 在 H 中不共轭，则称 G 为共轭可分。

定理 5.6 ([HWZ13，定理 1.3。])。任意紧致可定向三维流形的基本群 $\pi_1(M)$ M 都是共轭可分的。

我们还需要的其余结果都是相对基础的事实。

引理 5.7。设 N 是一个带边界的紧致不可约三维流形。设 T 是 ∂N 的一个连通分支，并假定 T 与环面 $S^1 \times S^1$同胚。若$\pi_1(T) \to \pi_1(N)$ 不是单射，则 N与 $S^1 \times D^2$同胚。

证明可参见 [HW14，引理 13], ，例如。

群 G 的子群 H 称为自正规化的，若对于任意$g \in G \setminus H$，$H \cap (gHg^{-1})$ 都是平凡的。

命题 5.8 ([HW14，定理 3。]，[Fri11，定理 4.5。])。设 N 是一个紧致、可定向、不可约的3维流形，且具有环面边界。设 T 是 ∂N 的一个连通分支， N_0 是包含 T 的 N 的 ***JSJ*** 分支。若 N_0 是双曲的，则 $\pi_1(T)$ 是 $\pi_1(N)$ 的自正规化子群。

由三维流形 N 的 JSJ 分解 $\{N_1, \dots, N_r\}$，可按照 [Fri11, 第 2] 节以及 [Cer17, 第 3 节1] 中的定义构造一个群图。其底层图由顶点集 $V = \{v_1, \dots, v_r\}$ 和边集 E 组成，并配有映射 $E \to V \times V$, $e \mapsto (s(e)\ t(e))$，使得对于每个 JSJ 环面 $S \subset \partial N_{k_1} \cap \partial N_{k_2}$，都指定一条边 $e_S \in E$ 及其逆边 $\bar{e}_S$，其中 $s(e_S) = v_{k_1}$ 和 $t(e_S) = v_{k_2}$。此外，我们为每个顶点 v_k 关联群 $\pi_1(N_k)$，并为 e_S 和 $\bar{e}_S$ 关联群 $\pi_1(S)$，同时配备同态 $\pi_1(S) \to \pi_1(N_{k_i})$；当 $s(e_S) = v_{k_1}$ 且 $t(e_S) = v_{k_2}$ 时，这些同态由包含映射诱导。

$\pi_1(N)$中的每个元素都由群图 [Fri11, 第2节.2]中的一个“环路”表示。在命题 5.8 的证明中，Friedl 研究了 g 和 gxg^{-1}的环路，其中 $g \in \pi_1(N) \setminus \pi_1(T)$ 和 $x \in \pi_1(T)$。

与命题 5.8 类似，当 N_0 是 Seifert 纤维化时，以下结果成立。

命题 5.9 ([Cer17, 定理 1.1.(i)])。设 N 是一个紧致、可定向、不可约且边界为环面的3-流形。假设 N 不同胚于 $S^1 \times D^2$，也不同胚于环面或克莱因瓶上的 $[0,1]$-丛。设 T 是 ∂N 的一个连通分支， N_0 是包含 T 的 N 的 ***JSJ*** 分支。假设该 N_0 是 ***Seifert*** 纤维化的。那么 N_0 的塞弗特纤维化结构是唯一的（见下文注 ***5.10***）。

令 $c \in \pi_1(N_0)$ 为表示 N_0 的 ***Seifert*** 纤维化纤维的元素（其在取逆意义下唯一确定 $c \leftrightarrow c^{-1}$）。令 $g \in \pi_1(N)$。

1. *If* $g \in \pi_1(N_0) \setminus \pi_1(T)$, *then* $\pi_1(T) \cap \left(g \cdot \pi_1(T) \cdot g^{-1}\right) = \langle c \rangle$.
2. *If* $g \in \pi_1(N) \setminus \pi_1(N_0)$, *then* $\pi_1(T) \cap \left(g \cdot \pi_1(T) \cdot g^{-1}\right)$ *is trivial.*

在证明中，Cerocchi 使用了 Bass-Serre 树；群 $\pi_1(N)$ 在该树上作用，而该树与群图 [Cer17, 第 3 节.1] 的外围扩张相对应。取 $h \in \pi_1(T) \cap \left(g \cdot \pi_1(T) \cdot g^{-1}\right)$。命题 5.9 的证明通过研究连接子树中两片叶子（陪集） $1 \cdot \pi_1(T)$ $g \cdot \pi_1(T) \in \pi_1(N)/\pi_1(T)$ 的测地线完成，该子树由 h 的作用固定。详情见 [Cer17, 命题 3.6]。

注 5.10。注意，当总空间可定向时，环面上的 $[0,1]$-丛与 $S^1 \times S^1 \times [0,1]$ 同胚，而克莱因瓶上的 $[0,1]$-丛是一个只有一个边界分支的紧 3-流形。根据 N_0 的定义，若 N 不与 $S^1 \times D^2$ 同胚，也不是环面或克莱因瓶上的 $[0,1]$-丛，则 N_0 与它们都不同胚。此外，在这种情况下，N_0 的塞弗特纤维化结构（若存在）在同伦变形意义下唯一。参见 [Hat07, 定理 2.3]。另请注意，如果 N 是环面或克莱因瓶上的 $[0,1]$-丛，则 $H_2(N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

5.2 定理 5.2 的证明

引理 5.11. 对于任意 $f \in \pi_1(\partial N_{K_0}, y_0)$，$h(f)$ 在 G'_φ 中与 $(\sigma_0)_*(f)$ 共轭。

证明。任取 $f \in \pi_1(\partial N_{K_0},\ y_0)$，并令 $f_\varphi := (\sigma_0)_*(f) \in G'_\varphi$。由命题 3.26 可知，对于任意表示 $\rho\colon G'_\varphi \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$， $\rho(h(f))$ 与 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 中的 $\rho(f_\varphi)$ 共轭，因此 $\mathrm{tr}(\rho(h(f))) = \mathrm{tr}(\rho(f_\varphi))$。

任取有限群 H 以及态射 p: $G \to H$。设 $\mathrm{Irr}_H = \{\rho_1, \dots \rho_k\}$为 H 的有限维不可约复表示所成的集合。对于任意$\rho_i \in \mathrm{Irr}_H$，有 $\mathrm{tr}(\rho_i \circ p(h(f))) = \mathrm{tr}(\rho_i \circ p(f_\varphi))$。由于特征标函数 $\{\mathrm{tr}(\rho_i(\text{-}))\}_i$构成 H 上类函数向量空间的一组基，因此 $p(h(f))$ 与$p(f_\varphi)$ 在 H 中共轭。

由定理 5.6， G'_φ 是共轭可分的，因此我们可以得出， $h(f)$和 f_φ在 G'_φ中共轭。

□

引理 5.11 表明，对于任意 $f \in \pi_1(\partial N_{K_0}, y_0)$，存在一个元素 $g_f \in G'_\varphi$满足 $g_f \cdot h(f) \cdot g_f^{-1} = (\sigma_0)_*(f)$。对于每一对 $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$，考虑 $f = m_0^c l_0^d \in \pi_1(\partial N_{K_0}, y_0)$ 的情形，并固定一个元素$g_{c,d} \in G'_\varphi$，使其满足$g_{c,d} \cdot h(m_0^c l_0^d) \cdot g_c^{-1}{}_{,d} = m_\varphi^c l_\varphi^d$。然后，我们定义

$$h_{c,d} \colon G'_0 \to G'_\varphi,\ f \mapsto g_{c,d} \cdot h(f) \cdot g_{c,d}^{-1}.$$

根据定义，$h_{c,d}$ 是一个满足$h_{c,d}(m_0^c l_0^d) = m_\varphi^c l_\varphi^d$的满射。

$h_{1,\,0}$ 的存在对 M_φ的拓扑施加了限制。（这一观察对定理 5.2 的证明并非必需。）

引理 5.12。 存在一个纽结 $K_\varphi \subset \mathbb{R}^3$，使得 M_φ 与 $\mathbb{R}^3 \setminus K_\varphi$同胚。特别地， G'_φ 同构于一个纽结群。

证明。首先，注意以下基本事实：设 N 是一个紧 3-流形， $T \subset \partial N$是 N的一个环面边界分支。取一个基点 $y \in T$ 和一条简单闭曲线 γ： $[0,1] \to T$，满足 $\gamma(0) = \gamma(1) = y$。也用 γ表示由路径 γ所代表的 $\pi_1(T,y)$和 $\pi_1(N,y)$中的元素。设 N_γ为通过同胚 f： $T \to \partial(S^1 \times D^2)$粘合 N和 $S^1 \times D^2$得到的三维流形 $N \cup_f (S^1 \times D^2)$，其中 $f(\gamma)$在 $S^1 \times D^2$中围成一个圆盘。根据 Seifert–van Kampen定理， $\pi_1(N_\gamma, y)$自然同构于$\pi_1(N,y)/\langle\langle\gamma\rangle\rangle$，其中 $\langle\langle\gamma\rangle\rangle$ 是 $\pi_1(N,y)$中包含 γ的最小正规子群。

满射 $h_{1,\,0}$： $G'_0 \to G'_\varphi$ 诱导出一个满射 $G'_0/\langle\langle m_0\rangle\rangle \to G'_\varphi/\langle\langle m_\varphi\rangle\rangle$。根据上述观察，$G'_0/\langle\langle m_0\rangle\rangle = \pi_1\big((S^3 \setminus N_{K_1}) \cup N_{K_1}\big) = \pi_1(S^3)$ 是平凡的，因此$G'_\varphi/\langle\langle m_\varphi\rangle\rangle$ 也是一个平凡群。再次根据上述观察， $G'_\varphi/\langle\langle m_\varphi\rangle\rangle$ 同胚于某个流形的基本群

$$(M'_\varphi)_{m_\varphi} \coloneqq M'_\varphi \cup_f (S^1 \times D^2),$$

其中 f： $\sigma_0(\Lambda_{K_0}) \to \partial(S^1 \times D^2)$ 是满足 $f_*(m_\varphi) = 1 \in \pi_1(S^1 \times D^2)$ 的同胚。根据庞加莱猜想的肯定性解决，闭三维流形 $(M'_\varphi)_{m_\varphi}$同胚于 S^3。通过同胚 $(M'_\varphi)_{m_\varphi} \cong S^3$， $S^1 \times D^2 \subset (M'_\varphi)_{m_\varphi}$对应于 S^3 中某个纽结 K_φ 的管状邻域。因此， M_φ同胚于纽结补空间 $\mathbb{R}^3 \setminus K_\varphi$。

□

引理 5 13 $\sigma_0 * \pi_1 \Lambda_{K_0} y_0 \to G'_\varphi$ M'_φ $S^1 \times$ .. 如果 (): (,) 不是单射，D^2 $h\ l_0 = l_\varphi$ $h\ m_0 = m_\varphi$ 则与 同胚。此外，() 和() 。

证明。 假设 $(\sigma_0)_*$不是单射。由引理 5.7， $M'_\varphi \cong S^1 \times D^2$。因此 $G'_\varphi \cong \mathbb{Z}$。由于 G'_φ 是阿贝尔的，由引理 5.11 可知 $h(l_0) = l_\varphi$ 以及 $h(m_0) = m_\varphi$。 □

从现在起，我们假设 $(\sigma_0)_*$: $\pi_1(\partial N_{K_0}, y_0) \to G'_\varphi$ 是单射。将其像记为

$$H \coloneqq (\sigma_0)_*(\pi_1(\partial N_{K_0}, y_0)) \subset G'_\varphi.$$

考虑 M'_φ 的 JSJ 分解，并令 $M_0 \subset M'_\varphi$ 为包含 $\partial M'_\varphi = \sigma_0(\partial N_{K_0})$ 的 JSJ 分支。注意， $H \to \pi_1(M_0,\ \sigma_0(y_0))$ 和 $\pi_1(M_0,\ \sigma_0(y_0)) \to$

G'_φ 是单射。我们根据 M_0 是双曲的还是 Seifert 纤维化的进行分类讨论。

我们来讨论 M_0 是双曲的情形。注意，根据定义，$h_{1,\,0}(m_0) = m_\varphi$。

引理 5.14。若 M_0 是双曲的，则$h_{1,\,0}(l_0) = l_\varphi$。

证明。由$h_{1,\,0}(m_0) = m_\varphi$，我们有

$$h_{1,0}(l_0) \cdot m_\varphi \cdot h_{1,0}(l_0)^{-1} = h_{1,0}(l_0 m_0 l_0^{-1}) = h_{1,0}(m_0) = m_\varphi.$$

这意味着$H \cap \left(h_{1,\,0}(l_0) \cdot H \cdot h_{1,\,0}(l_0)^{-1}\right) \neq \{1\}$。根据命题 5.8，$H = (\sigma_0)_*(\pi_1(\partial N_{K_0},\ y_0))$ 是 G'_φ 的自正规化子群，因此 $h_{1,\,0}(l_0) \in H$。

根据$h_{1,\,0}$的定义，$h_{1,\,0}(l_0)$在 G'_φ中与 $h(l_0)$共轭。此外，根据引理 5.11，$h(l_0)$在 G'_φ 中与 l_φ 共轭。因此，$h_{1,\,0}(l_0)$和 l_φ 在 G'_φ中共轭。我们选取一个满足$g \cdot h_{1,\,0}(l_0) \cdot g^{-1} = l_\varphi$的元素 $g \in G'_\varphi$。由于 $l_\varphi \in H \cap gHg^{-1}$，再由 H 在 G'_φ中的自正规化性，可得 $g \in H$。由于 H 是阿贝尔的，$l_\varphi = g \cdot h_{1,\,0}(l_0) \cdot g^{-1} = h_{1,\,0}(l_0)$。 □

下面讨论 M_0 为 Seifert 纤维化的情形。注意，具有环面边界 $\sigma_0(\partial N_{K_0})$ 的 M'_φ 满足命题 5.9 的假设，因为 $H \to G'_\varphi$ 是单射且 $H_2(M'_\varphi;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ $H^1(M'_\varphi;\ \partial M'_\varphi;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong (;)$。$H^1(\text{事实上，}(,;)) \xrightarrow{\cong} H^1(M'_\varphi;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\oplus 2} (\partial M'_\varphi;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是单射。）

令 $c \in H \subset \pi_1(M_0,\ \sigma_0(y_0))$ 为由 M_0 的 Seifert 纤维化中的正则纤维所表示的元素。由于 c 是 $H \cong \mathbb{Z}^2$ 的本原元素，至多存在一个 $d' \in \mathbb{Z}$ 使得 $m_\varphi l_\varphi^{d'} \in \langle c \rangle$。因此，我们可以选择 $d \in \mathbb{Z}$，使得 $m_\varphi l_\varphi^{d},\ m_\varphi l_\varphi^{d+1} \notin \langle c \rangle$。

引理 5.15。$h_{1,\,d}(m_0) = m_\varphi$ 和 $h_{1,\,d}(l_0) = l_\varphi$。

证明。根据 $h_{1,\,d}$, $h_{1,\,d}(m_0 l_0^d) = m_\varphi l_\varphi^d$ 的定义。由于 $h_{1,\,d}$ 是群同态，只需证明 $h_{1,\,d}(m_0 l_0^{d+1}) = m_\varphi l_\varphi^{d+1}$。由于 H 是阿贝尔的，

$$\begin{aligned} h_{1,d}(m_0 l_0^{d+1}) \cdot m_\varphi l_\varphi^d \cdot h_{1,d}(m_0 l_0^{d+1})^{-1} &= h_{1,d}(m_0 l_0^{d+1} m_0 l_0^d (m_0 l_0^{d+1})^{-1}) \\ &= h_{1,d}(m_0 l_0^d) \\ &= m_\varphi l_\varphi^d. \end{aligned}$$

因此 $m_\varphi l_\varphi^d \in H \cap \left(h_{1,d}(m_0 l_0^{d+1}) \cdot H \cdot h_{1,\,d}(m_0 l_0^{d+1})^{-1}\right)$，这意味着

$$H \cap \left(h_{1,d}(m_0 l_0^{d+1}) \cdot H \cdot h_{1,d}(m_0 l_0^{d+1})^{-1}\right) \not\subset \langle c \rangle$$

根据 d 的选取。因此，由命题 5.9，$h_{1,\,d}(m_0 l_0^{d+1}) \in H$。根据 $h_{1,\,d}$ 的定义以及引理 5.11，$h_{1,\,d}(m_0 l_0^{d+1})$ 和 $m_\varphi l_\varphi^{d+1}$ 在 G'_φ 中共轭。我们选取一个满足 $g \cdot h_{1,\,d}(m_0 l_0^{d+1}) \cdot g^{-1} = m_\varphi l_\varphi^{d+1}$ 的元素 $g \in G'_\varphi$。于是，$m_\varphi l_\varphi^{d+1} \in H \cap gHg^{-1}$ 成立。这再次由 d 的选取得出 $H \cap gHg^{-1} \not\subset \langle c \rangle$。因此，根据命题 5.9，$g$ 是 H 的一个元素。由于 H 是阿贝尔的，$h_{1,\,d}(m_0 l_0^{d+1}) = g \cdot h_{1,\,d}(m_0 l_0^{d+1}) \cdot g^{-1} = m_\varphi l_\varphi^{d+1}$。 □

定理 *5.2* 的证明。以上三个引理证明，若按如下方式取$g \in G'_\varphi$，则定理 5.2 成立：若 $(\sigma_0)_*\colon \pi_1(\Lambda_{K_0}) \to G'_\varphi$ 不是单射，则取 $g = 1 \in G'_\varphi \cong \mathbb{Z}$。若 $(\sigma_0)_*$ 是单射且 N_0 是双曲的，则取 $g = g_{1,\,0}$。若 $(\sigma_0)_*$ 是单射且 N_0 是塞弗特纤维化的，则取 $g = g_{1,\,d}$，其中 $d \in \mathbb{Z}$ 如上所述选取。

□

参考文献

[AL12] I. Agol 和 Y. Liu。“表示长度与 Simon 猜想”。美国数学会杂志 25.1 (2012)，第 151–187 页。[ALSS20] S. Aimi、D. Lee、S. Sakai 和 M. Sakuma。“具有两个抛物生成元的克莱因群的抛物生成对分类”。Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 52 (2020)，第 477–511 页。[AE22] J. Asplund 和 T. Ekholm。“奇异 Legendrian 子流形的 Chekanov-Eliashberg 微分分次代数”。《辛几何杂志》20.3 (2022)，第 509–559 页。[AL25] J. Asplund 和 Y. Li。“干净拉格朗日交的平凡结性的保持”。《拓扑学杂志》18.4 (2025)，论文编号 e70053。[BS23] J. A. Baldwin 和 S. Sivek。“瞬子与 L-空间手术”。J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 25.10 (2023)，第 4033–4122 页。[BB13] O. Ben-Bassat 和 J. Block。“凝聚微分分次范畴的 Milnor 下降”。J. K-Theory 12.3 (2013)，第 433–459 页。[BKN25] M. Boileau、T. Kitano 和 Y. Nozaki。“关于结的对称并的属”。Canad. J. Math. (2025)，第 1–26 页。[BC14] F. Bourgeois 和 B. Chantraine。“双线性化 Legendrian 接触同调与增广范畴”。《辛几何杂志》12.3 (2014)，第 553–583 页。[BEE12] F. Bourgeois、T. Ekholm 和 Y. Eliashberg。“Legendrian 手术的影响”。Geom. Topol. 16.1 (2012)。附录由 Sheel Ganatra 和 Maksim Maydanskiy 撰写，第 301–389 页。[BRW05] S. Boyer、D. Rolfsen 和 B. Wiest。“可定序三维流形群”。Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55.1 (2005)，第 243–288 页。[BZ66] G. Burde 和 H. Zieschang。“环面结的一种刻画”。Math. Ann. 167 (1966)，第 169–176 页。[BZH14] G. Burde、H. Zieschang 和 M. Heusener。《纽结》。扩展版。第 5 卷。De Gruyter 数学研究丛书。电子 ISBN：978-3-11-027078-5。De Gruyter，柏林，2014，第 xiv +417 页。[CDHHL+26] B. Calm`es、E. Dotto、Y. Harpaz、F. Hebestreit、M. Land 等。“稳定 ∞范畴的 Hermitian K 理论 II：配边范畴与可加性”。Acta Math. 235.2 (2026)，第 149–400 页。[Cer17] F. Cerocchi。《关于不可约三维流形群的外围子群与无环分裂》。2017。arXiv：1705.06124 [math.GT]。[CS16] J. C. Cha 和 M. Suzuki。“纽结群的非子午线满同态”。Algebr. Geom. Topol. 16.2 (2016)，第 1135–1155 页。[Coh16] L. Cohn。《微分分次范畴是 k-线性稳定无穷范畴》。2016。arXiv：1308.2587 [math.AT]。[CCGLS94] D. Cooper、M. Culler、H. Gillet、D. D. Long 和 P. B. Shalen。“与三维流形特征簇相关的平面曲线”。Invent. Math. 118.1 (1994)，第 47–84 页。[Cor14] C. R. Cornwell。“纽结接触同调与纽结群的表示”。《拓扑学杂志》7.4 (2014)，第 1221–1242 页。

[Cor17] C.R. Cornwell. “KCH 表示、增广与 A-多项式”。《辛几何杂志》15.4 (2017), pp. 983–1017.[CS83] M. Culler and P. B. Shalen. “群表示簇与三维流形的分裂”。Ann. of Math. (2) 117.1 (1983), pp. 109–146.[DG04] N. M. Dunfield and S. Garoufalidis. “ A-多项式对 S^3中纽结的非平凡性”。Algebr. Geom. Topol. 4 (2004), pp. 1145–1153.[Ekh08] T. Ekholm. “以 $\mathbb{Z}_2$ 为系数的恰当拉格朗日协边上的有理辛场论”。J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 10.3 (2008), pp. 641–704.[EHK16] T. Ekholm, K. Honda, and T. K´alm´an. “Legendrian纽结与恰当拉格朗日协边”。J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 18.11 (2016), pp. 2627–2689.[EL23] T. Ekholm and Y. Lekili. “拉格朗日不变量与Legendrian不变量之间的对偶性”。Geom. Topol. 27.6 (2023), pp. 2049–2179.[ENS18] T. Ekholm, L. Ng, and V. Shende. “由接触同调得到的完备纽结不变量”。Invent. Math. 211.3 (2018), pp. 1149–1200.[Fri11] S. Friedl. “三维流形群中的中心化子”。RIMS Kˆokyˆuroku 1747 (June 2011), pp. 23–34.[Gab89] D. Gabai. “实心环面中的纽结手术”。Topology 28.1 (1989), pp. 1–6.[GPS24] S. Ganatra, J. Pardon, and V. Shende. “缠绕Fukaya范畴的微局部Morse理论”。Ann. of Math. (2) 199.3 (2024), pp. 943–1042.[GP21] S. Ganatra and D. Pomerleano. “一个对数PSS态射及其在拉格朗日嵌入中的应用”。《拓扑学杂志》14.1 (2021), pp. 291–368.[Gui23] S. Guillermou. “余切丛的层与辛几何”。Ast´erisque 440 (2023), pp. x+274.[GKS12] S. Guillermou, M. Kashiwara, and P. Schapira. “哈密顿同痕的层量子化及其在不可移动性问题中的应用”。《杜克数学杂志》161.2 (2012), pp. 201–245.[HWZ13] E. Hamilton, H. Wilton, and P. A. Zalesskii. “三维流形群中双陪集和共轭类的可分性”。J. Lond. Math. Soc. (2) 87.1 (2013), pp. 269–288.[HW14] P. de la Harpe and C. Weber. “关于三维流形基本群的自正规外围子群”。Confluentes Math. 6.1 (2014), pp. 41–64.[Hat07] A. Hatcher. 三维流形拓扑基础笔记。2007. URL: https://pi. math.cornell.edu/~hatcher/3M/3M.pdf.[Hem87] J. Hempel. “三维流形的剩余有限性”。载于：组合群论与拓扑（犹他州阿尔塔，1984）。第111卷。《数学年刊研究丛书》。平装 ISBN:0-691-08410-6。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1987, pp. 379–396.[HM24] C. Heyer and L. Mann. 六函子形式体系与光滑表示。2024。arXiv: 2410.13038 [math.CT].[HS85] J. Howie and H. Short. “带和问题”。J. London Math. Soc. (2) 31.3 (1985), pp. 571–576.

[KS90] M. Kashiwara and P. Schapira.流形上的层. Vol. 292. 数学科学基础丛书。Springer-Verlag，柏林，1990，pp. x+5 12.
[KS08] T. Kitano 和 M. Suzuki。《纽结表中的一个偏序 II》。《数学学报（英文版）》24.11 (2008)，第 1801–1816 页。[KSW05] T. Kitano、M. Suzuki 和 M. Wada。《扭亚历山大多项式与群同态的满射性》。《Algebr. Geom. Topol.》5 (2005)，第 1315–1324 页。[KM04] P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka。《Witten 猜想与性质 P》。《Geom. Topol.》8 (2004)，第 295–310 页。[Li23] W. Li。《微局部层论中的拉格朗日余边界函子 I》。《拓扑学杂志》16.3 (2023)，第 1113–1166 页。[Li25] W. Li。《微局部层论中的拉格朗日余边界函子 II》。《辛几何杂志》23.3 (2025)，第 599–672 页。[Lur] J. Lurie。《高阶代数》。URL：https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf。[LS01] R. C. Lyndon 和 P. E. Schupp。《组合群论》。数学经典丛书。1977 年版重印。Springer-Verlag，柏林，2001 年，第 xiv+339 页。[NS20] D. Nadler 和 V. Shende。《Weinstein 辛流形中的层量子化》。2020 年。arXiv：2007.10154 [math.SG]。[Ng08] L. Ng。《带框架纽结接触同调》。《杜克数学杂志》141.2 (2008)，第 365–406 页。[Ng14] L. Ng。《纽结接触同调的拓扑学导论》。载于：《接触拓扑与辛拓扑》。第 26 卷。Bolyai 数学学会研究丛书。电子 ISBN：978-3-319-02036-5。J´anos Bolyai 数学学会，布达佩斯，2014 年，第 485–530 页。[NRSSZ20] L. Ng、D. Rutherford、V. Shende、S. Sivek 和 E. Zaslow。《增广即层》。《几何与拓扑》24.5 (2020)，第 2149–2286 页。[NZ17] Y. Ni 和 X. Zhang。《纽结检测及一种缆绕公式，适用于 A-多项式》。《Algebr. Geom. Topol.》17.1 (2017)，第 65–109 页。[ORS08] T. Ohtsuki、R. Riley 和 M. Sakuma。《双桥链群之间的满同态》。载于：《Zieschang 纪念文集》。第 14 卷。《几何与拓扑专著》。Geom. Topol. Publ.，考文垂，2008 年，第 417–450 页。[Oka25a] Y. Okamoto。《关于 $T^*\mathbb{R}^3$中的干净拉格朗日交的结型》。2025 年。arXiv：2305.09912 [math.SG]。[Oka25b] Y. Okamoto。《由 $\mathbb{Q}$-值增广给出的干净拉格朗日交的拓扑约束》。2025 年。arXiv：2505.00330 [math.SG]。[Pan17] Y. Pan。《恰当拉格朗日协边诱导的增广范畴映射》。《Algebr. Geom. Topol.》17.3 (2017)，第 1813–1870 页。[RS18] M. Robalo 和 P. Schapira。《关于∞-范畴情形下微局部层论的一个引理》。《数学科学研究所出版物》54.2 (2018)，第 379–391 页。[RZ98] D. Rolfsen 和 J. Zhu。《辫子、序与零因子》。《J. Knot Theory Ramifications》7.6 (1998)，第 837–841 页。

[She19] V. Shende。《余法丛环面是一个完全的纽结不变量》。*ForumMath. Pi* 7 (2019)，e6，16。[SW06] D. S. Silver 和 W. Whitten。《纽结群满同态》。*J. Knot TheoryRamifications* 15.2 (2006)，第 153–166 页。[SW08] D. S. Silver 和 W. Whitten。纽结群满同态 *II*。2008 年。arXiv：0806.3223 [math.GT]。[SW23] I. Smith 和 M. Wemyss。《双泡沫丛合成与双曲线翻转》。*Selecta Math. (N.S.)* 29.2 (2023)，论文编号 29，共 62 页。Tomohiro Asano：京都大学数学系，日本京都市左京区北白川追分町，606-8502。电子邮箱：tasano[at]math.kyoto-u.ac.jp，tomoh.asano[at]gmail.com。Yukihiro Okamoto：东京都立大学数理科学系，日本东京八王子市南大泽，192-0397。电子邮箱：yukihiro[at]tmu.ac.jp