arXiv:2603.17983v1 [math.CA] 18 Mar 2026

一类新的正交多项式

STEFAN KAHLER 和 JOSEF OBERMAIER

摘要。我们研究由形如

$$P_0\ x\ = 1\ \ P_1\ x\ = x \qquad xP_n\ x\ = a_n P_{n+1}\ x\ + c_n P_{n-1}\ x \quad n \in \mathbb{N} \qquad a_n \qquad c_n \qquad\qquad 1 \quad P_n\ x$$

( ) , ( ) and ( ) ( ) ( ) ( ) 的递推关系给出的随机游走多项式序列 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}[x]$ ，其中 和为正数且其和为 。如果 (( ))$_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足乘积的非负线性化，则任意两个多项式 $P_m(x)$、 $P_n(x)$ 的乘积都是 $P_{|m-n|}(x). .., P_{m+n}(x)$ 的凸组合。这一性质带来超群结构和精妙的调和分析。我们关注这样的例子：原始数列 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和对应于交换 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 与 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 角色的数列 $\widetilde{(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}}$ ，二者都满足乘积的非负线性化。Lasser 和 Obermaier 最近开始研究这类问题，其动机可来自调和分析、组合学或概率论的视角。然而，Lasser 和 Obermaier 留下了一个未解问题：除了第一类切比雪夫多项式 $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ （其中 $a_n \equiv c_n \equiv 1/2$）这一平凡例子之外，是否还存在其他例子。我们给出了一个充分判据，并明确构造了这类非平凡例子。此外，我们还通过结合对偶和哈尔测度的性质，给出了 $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的刻画。我们的判据还使我们能够解决 Kahler 和 Szwarc 提出的有关多项式超群哈尔测度的未解决问题。

1. 引言

1.1. 基本设定与所研究的问题。我们考虑满足以下形式递推关系的正交多项式数列 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}[x]$ $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$,

$$xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + c_n P_{n-1}(x)\ (n \in \mathbb{N}) \tag{1.1}$$

其中 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1)$，且 $a_n \equiv 1 - c_n$。在文献中，这类多项式通常称为（对称）“随机游走多项式序列”（下文简称“RWPS”）。正交多项式理论，尤其是 Favard定理，表明 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 关于唯一的概率（Borel）测度 μ 在 $\mathbb{R}$ 上正交，其中 $|\text{supp } \mu| = \infty$ ，且 supp $\mu \subseteq [-1, 1]$。关于正交多项式的标准结果，参见 [2] ；关于其与随机游走的关系，参见 [3, 10, 19] （有关这种关系的更多说明，亦见下文小节）。显然，RWPS 由 $P_n(1) \equiv 1$ 归一化。我们还将使用与 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 对应的正交归一多项式 $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ （其首项系数为正）。众所周知，它们可表示为 $p_0(x) = 1$、 $p_1(x) = x/\alpha_1$ 以及 $xp_n(x) = \alpha_{n+1}p_{n+1}(x) + \alpha_n p_{n-1}(x)$ $(n \in \mathbb{N})$，其中

$$\alpha_n = \begin{cases} \sqrt{c_1}, & n = 1, \\ \sqrt{c_n a_{n-1}}, & n \geq 2. \end{cases}$$

日期：2026年3月19日。2020 数学主题分类。主要分类42C05；次要分类26D07,28C10,43A62。关键词与短语。正交多项式、随机游走多项式、非负线性化、递推系数、哈尔测度、对偶空间。

在各种各样的 RWPS 中，满足“乘积的非负线性化”性质的那些

$$P_m(x)P_n(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \underbrace{g(m,n;k)}_{\overset{!}{\geq}0} P_k(x) \ (m,n \in \mathbb{N}_0) \tag{1.2}$$

之所以特别引人关注，是因为它们伴随着丰富而精深的调和分析。一方面，正交多项式与特殊函数理论，另一方面，泛函分析与调和分析，这两者的交汇点成果丰硕、生机勃勃，且近年来相关出版物不断涌现 [5, 9, 15, 20, 21]。注意，由正交性可知，(1.2) 中的线性化系数始终满足$g(m,\ n;|m-n|)\ g(m,\ n;m+n)\ \neq 0$且 $g(m,\ n;\ k)\ = 0$对 $k < |m-n|$ [13]成立。此外，由对称性显然可知，若 $m+n-k$为奇数，则 $g(m,\ n;\ k) = 0$。我们特别提及关于线性化系数性质的 [15, 定理 2.2 、定理 2.3]。此外，有大量 RWPS 的例子也满足乘积的非负线性化。然而，确定线性化系数 $g(m,\ n;\ k)$ 的符号通常是一个非常棘手的问题。一般而言，线性化系数 $g(m,\ n;\ k)$ 无法以足够明确的方式计算。不过，文献中已有一些关于乘积的非负线性化的充分判据，在这方面我们将借助 Młotkowski 和 Szwarc 的研究成果 [16] 。在文献中，乘积的非负线性化这一性质也称为“性质（P）”。

在这篇论文中，我们考虑一个相关的 RWPS $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$，它通过在（1.1）中“交换”$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的作用来定义，因此 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足递推关系$\sim P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,$

$$x\widetilde{P_n}(x) = c_n\widetilde{P_{n+1}}(x) + a_n\widetilde{P_{n-1}}(x) \ (n \in \mathbb{N}). \tag{1.3}$$

我们关注这样一个问题：何时 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 都满足乘积的非负线性化。Lasser 和 Obermaier 近期在论文 [15] 中曾研究过这一问题。显然，存在一个平凡的例子，即 $a_n \equiv c_n \equiv 1/2$，它对应于第一类切比雪夫多项式 $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 以及正交化测度 $1/\pi \cdot (1-x^2)^{-1/2}\chi_{(-1,1)}(x)\,\mathrm{d}x$ （有 $T_m(x)T_n(x) = T_{|m-n|}(x)/2 + T_{m+n}(x)/2$ [11, 13]）。在 [15] 中，以下问题仍悬而未决：是否还存在其他例子，使得 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 都满足乘积的非负线性化；或者说，$(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是否由这一显著性质所刻画。

首先，让我们更详细地简要回顾一下上述调和分析[11, 13]。如果（P_n（x））$_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足乘积的非负线性化，那么卷积（$m,\ n$）$\mapsto \sum_{k=|m-n|}^{m+n} g$（$m,\ n;\ k$）$\delta_k$ 以及作为对合的恒等映射，使 $\mathbb{N}_0$ 成为一个以 0 为单位元的交换离散超群，即“多项式超群”。[1] Haar函数

[1]关于 Jewett 意义下超群的精确定义，我们参考了诸如 [1,7,14] 的标准文献。对于离散超群，一般公理大为简化 [13,14]。粗略地说，局部紧群与超群的区别在于，后者中两个 Dirac测度 的卷积不必仍是 Dirac测度，而可以是更一般的概率测度（并满足某些非退化性和相容性条件）。

$h:\ \mathbb{N}_0 \to [1,\infty)$，

$$h(n) := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} P_n^2(x)\,\mathrm{d}\mu(x)} = \frac{1}{g(n,n;0)} = \begin{cases} 1, & n=0, \\ \frac{1}{c_1}, & n=1, \\ \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{c_k}, & n \geq 2 \end{cases} \tag{1.4}$$

具有以下性质：对于任意函数 $f \in \ell^1(h) := \{f:\ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C} : \sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|h(k) < \infty\}$ 以及任意 $n \in \mathbb{N}_0$，考虑平移 $T_n f:\ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$，$T_n f(m) := \sum_{k=|m-n|}^{m+n} g(m,n;k) f(k)$，那么 $T_n f \in \ell^1(h)$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} T_n f(k)h(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)h(k)$。赋予范数 $\|f\|_1 := \sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|h(k)$，定义卷积 $f * g(n) := \sum_{k=0}^{\infty} T_n f(k) g(k) h(k)$，并以复共轭作为对合，$\ell^1(h)$ 便成为一个半单、交换、有单位元的 Banach $*$-代数。结构空间 $\Delta(\ell^1(h))$ 可与紧集等同识别

$$\mathcal{X}^b(\mathbb{N}_0) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |P_n(z)| < \infty \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \max_{n\in\mathbb{N}_0} |P_n(z)| = 1 \right\}$$

通过 $\mathcal{X}^b(\mathbb{N}_0) \to \Delta(\ell^1(h))$，$z \mapsto \varphi_z$ 其中 $\varphi_z(f) := \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\overline{P_k(z)}h(k)$，同理，厄米结构空间 $\Delta_s(\ell^1(h))$ 可以与.....等同

$$\widehat{\mathbb{N}_0} := \mathcal{X}^b(\mathbb{N}_0) \cap \mathbb{R}.$$

正交化测度 μ可视为普朗歇尔测度，并且总有$\widehat{\ }$满足 $\{\pm 1\} \cup \operatorname{supp} \mu \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq [-1,1]$。然而，与群情形不同，三个对偶对象 $\operatorname{supp} \mu$、$\widehat{\mathbb{N}_0}$ 和 $\mathcal{X}^b(\mathbb{N}_0)$ 可能彼此不同。我们还将用到 $\operatorname{supp} \mu = \sigma(T_1)$，其中 $T_1 : \ell^2(h) \to \ell^2(h)$，$f \mapsto T_1 f$ 被视为作用在$\ell^2(h)$ 上的（有界线性）算子 $:= \{f:\ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}:\ \|f\|_2 < \infty\}$，~~其中 $\|f\|_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|^2 h(k)}$~~。[2]

现在我们回到本文的核心问题，即是否存在非平凡的例子，使得 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 都满足乘积的非负线性化$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$。下文中，我们采用适当的记号，记作 h, $\mathbb{N}_0$ 等。Lasser 和 Obermaier 的以下结果，即 [15,定理 4.3、定理 4.4]，基于对系数 $g(m,\ n;\ |m-n|+2)$ 和 $g(m,\ n;\ m+n-2)$ 的分析，给出了潜在例子必须满足的一个条件：

$\widetilde{\ }$**定理 1.1.** 如果 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和$(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 都满足乘积的非负线性化，且$(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} \neq (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$，那么要么对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $c_{2n+1} > c_1 > 1/2$ 和 $c_{2n} < 1/2$，要么对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $c_{2n+1} < c_1 < 1/2$ 和 $c_{2n} > 1/2$。特别是，在这种情况下，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不可能收敛。

基于 [9]，的结果，可以给出一个例子 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} \neq (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$，使得 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足乘积的非负线性化，而且此前针对 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 也满足乘积的非负线性化所提出的必要判据同样成立：一种明确的做法是令 $c_{2n-1} = (6n+4)/(9n+9)$ 和 $c_{2n} = (n+1)/(3n+5)$，这一点可由 [9, 第 3] 节看出（另请参见下文定理 1.2 中关于 $\alpha = 2$ 和 $\beta = 5$ 的内容，以及 arXiv 版本 arXiv:2212.11229v3 [math.CA] 的定理 3.1）。然而，对于这个 $\widetilde{\ }$ 例子 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 并不满足乘积的非负线性化：事实上，简单计算可得 $\widetilde{g}(3,\ 3;\ 4) = -128/135$。本文致力于构造这样的例子，使 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 也满足乘积的非负线性化。事实上，作者最初猜想这类例子根本不存在，而这确实会导致

[2] $T_1 f$ 对 $f \in \ell^2(h)$ 的定义与上文对 $f \in \ell^1(h)$ 的定义相同；事实上，对于每个 $f:\ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$，该定义都有意义。

第一类切比雪夫多项式的刻画。作为本文的另一项结果，我们将找到恰当的替代对象，并通过进一步考察对偶的性质以及（或者）哈尔测度，来刻画第一类切比雪夫多项式。

1.2. **论文的补充动机与概要**。 所考虑的问题还可以从以下角度得到动机：在 [9], Kahler 和 Szwarc 的论文中，他们对这一观察作出了一些解释：某些看似“出人意料”的多项式超群实例，即由某些广义Chebyshev多项式 [8], 诱导的多项式超群，具有性质 $h(n) \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) [9, 第 2] 节（一般而言，我们只能确定 $h(n) > 1$ ($n \in \mathbb{N}$）。然而，他们也给出了可能是最早的违反这一性质的多项式超群实例 [9, 第 3] 节。我们回顾论文 [9, 第 3], 节中的两个结果，特别参见 [9, 定理 3.1] 和 [9, 定理 3.2], ，详述如下：

定理 1.2。 设 $\alpha, \beta \geq 2$。那么 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 可以作如下选择：

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha-1}+\sqrt{\beta-1}}, & n = 1, \\ \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha-1}+\sqrt{\beta-1}}, & n \ even, \\ \frac{\sqrt{\beta-1}}{\sqrt{\alpha-1}+\sqrt{\beta-1}}, & else, \end{cases}$$

并且相应的 *RWPS* $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足乘积的非负线性化，且具有递增的[3] *Haar* 函数 h ，其中 $h(2) \geq 2$。然而，对于每个 $\epsilon \in (0,1)$ 以及任意选取的 α 参数 β ，都可以将其选取得使得 $h(1) = 1 + \epsilon$。

定理 1.3. 设$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq$ 是一个凸零序列，其中$(0,1)$ 。那么，可以选取$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 使得

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 - s_{\frac{n+1}{2}}, & n \ odd, \\ s_{\frac{n+2}{2}} - s_{\frac{n+4}{2}}, & n \ even, \end{cases}$$

并且相应的 *RWPS* $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足乘积的非负线性化，且具有严格递增的 *Haar* 函数 h ，其中 $h(2) > 4$。然而，对于每个 $\epsilon \in (0,1)$ ，都可以选取数列$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $h(1) = 1 + \epsilon$。

我们在论文中研究的问题与此相关如下：如果 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $\widetilde{(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}}$ 都满足乘积的非负线性化，并且 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} \neq (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\widetilde{}$ ，那么由 (1.4) 可知， $h(1) = 1/c_1$ 且 $h(1) = 1/(1 - c_1)$。由于 $c_1 \neq 1/2$ 根据定理 1.1， $\widetilde{}$要么有 $h(1) < 2$ ，要么有 $h(1) < 2$。特别地，所考虑问题的任何解也会给出第一 Haar 权重小于 2 的例子。换言之：存在满足条件的 RWPS $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} \neq (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ，使得 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $\widetilde{(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}}$ 都满足乘积的非负线性化；这比“存在满足 $h(1) < 2$ 的 RWPS”这一结果更强。

除了正交多项式和特殊函数理论（以及该理论与泛函分析和调和分析的交叉）所带来的这一动机之外，我们还想提及另外两个动机。第一个属于组合类型：乘积的非负线性化可以通过某些离散边值问题以及具有特定性质的相应矩阵的存在性来刻画 [17, 18], ，而 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 与 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的互换也可以转化为这类考量。第二个属于概率类型：递推系数 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 可以解释为

[3]我们使用“递增”一词时，指的是“非递减”，也就是说，除非另有明确说明，否则不要求严格单调。

某些相应随机游走的一步转移概率 [3, 10, 19], , 而（a_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 与（c_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 的互换显然对应于相反的概率。然而，如果$\widetilde{\ }$（P_n（x））$_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和（P_n（x））$_{n\in\mathbb{N}_0}$ 都满足乘积的非负线性化，那么调和分析的相关工具便可用于这两个版本。

本文的组织如下：在第 2 节中，我们给出主要结果，尤其构造 RWPS $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} \neq (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$，使得 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $\widetilde{\ }(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 都满足乘积的非负线性化。更准确地说，我们为递推系数 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 提出一个充分判据，并给出满足该判据的显式例子；此外，我们还给出上述关于 $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的刻画。据我们所知，我们的判据还给出了首批 Haar函数并非递增[4], 的多项式超群例子，以及首批第二个 Haar 权重小于 2 的例子。这凸显了正交多项式的多样性，并尤其回答了 [9] 中提到的一些未解决问题。在第 3 节中，我们给出证明。最后，在第 4 节中，我们汇总由充分判据所给出的多项式的一些其他性质。我们尤其关注相应正交化测度的性质。

我们指出，我们的研究得益于计算机代数系统（Maple），它们帮助我们找到合适的简化方法和估计、提出猜想、进行数值实验等。不过，最终的证明无需借助计算机即可理解。

2. 主要结果的陈述

下面的结果给出了上述充分判据，应用该判据即可解决当前考虑的问题。

定理 2.1。 设$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\ 1)$ 是一个数列，满足

$$s_2 < 1 - \frac{s_1}{1-s_1} \tag{2.1}$$

and

$$s_n \leq \frac{s_{n-2}}{2} - 2s_{n-1}\ (n \geq 3), \tag{2.2}$$

并设$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 由以下任一方式给出

$$c_n := \begin{cases} 1-s_n, & n\ odd, \\ s_n, & n\ even \end{cases} \tag{2.3}$$

or

$$c_n := \begin{cases} s_n, & n\ odd, \\ 1-s_n, & n\ even. \end{cases} \tag{2.4}$$

$\widetilde{\ }$那么$(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和$(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 都满足乘积的非负线性化。

上文数列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一些性质，尤其是有关增长和单调性的性质，将在引理 3.1 中讨论。根据定理 2.1，我们立即得到存在 RWPS $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} \neq (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$，使得 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $\widetilde{\ }(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 都满足乘积的非负线性化。例如，选择$s_n = 1/5^n$ 或 $s_n = 1/(n+3)!$ 都满足定理 2.1 的条件。不过，我们还可以进一步证明

[4]事实上，我们将看到，对于满足乘积的非负线性化的 RWPS $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} \neq (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$（其中 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $\widetilde{\ }(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 均满足这一性质），不可能同时存在两个递增的 Haar 函数 h 和 $\widetilde{h}$；这也可视为研究该问题的另一项动机。

更多结果，并找到各种这样的 RWPS。此外，我们根据其对偶的性质，对满足乘积的非负线性化的 RWPS $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}\widetilde{\ }$进行分类，其中 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 都满足乘积的非负线性化。特别地，我们可以通过一个附加性质刻画 $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$。

定理 *2.2. (i)* 对于每个 $C \in (0, 1)\backslash\{1/2\}$，都存在一个 *RWPS* $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} \neq \widetilde{\ } (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$，使得 $c_1 = C$，且 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 均满足乘积的非负线性化。$\widetilde{\ }$*(ii)* $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足乘积的非负线性化，且 $0 \in \sim\frown\ \frown\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{N}_0$ 当且仅当 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} = (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$。$\widetilde{\ }$*(iii)* 若 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足乘积的非负线性化，则 $0 \in \sim\frown\ \frown\mathbb{N}_0$（若 $c_1 \leq 1/2$）或 $0 \in \mathbb{N}_0$（若 $c_1 \geq 1/2$）。

关于定理 2.2 (ii)，我们提及 Lasser 和 Obermaier 先前给出的相关刻画：显然，由定理 1.1 可知，若$\widetilde{\ }$两者 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 均满足乘积的非负线性化，并且进一步要求，对于某个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $c_n = 1/2$，或 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，那么 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} = (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$（参见 [15, 定理 4.2、定理 4.4]）。注意，定理 1.1 的第二部分也可由定理 2.2 (ii) 轻易重新得到：如果 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}\widetilde{\ }$ 和 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 均满足乘积的非负线性化，且 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，那么$\sim\frown\ \frown\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0 = [-1, 1]$ [12, 定理 (2.2)]。此外，注意到，给定任意的 $\epsilon \in (0, 1)$，满足乘积的非负线性化且 $h(1) = 1 + \epsilon$ 的 RWPS $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的存在性（参见定理 1.2 和定理 1.3）也可由定理 2.2 (i) 得到，因为 $h(1) = 1/c_1 = 1/C$。

最后，我们得到了两个关于哈尔测度的结果。据我们所知，这些结果与此前已知的所有多项式超群实例都形成鲜明对比（另请再次参见定理 1.2 和定理 1.3）。第一个结果给出了对 $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的另一种刻画。

定理 2.3。存在 *RWPS* $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$，使得乘积的非负线性化成立，且哈尔函数 h 不是递增的。更确切地说，有如下结果：

$\widetilde{\ }$*(i)* $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足乘积的非负线性化，且 $h\widetilde{\ }$ 和 h 均为递增，当且仅当 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} = (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$。*(ii)* 若 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 如定理 *2.1* 中所述，则对所有 $n \in \mathbb{N}$，$h(2n) < h(2n-1)$；或者对所有 $n \in \mathbb{N}$，$h(2n+1) < h(2n)$。

定理 2.4。对于每个 $\epsilon \in (0,1)$，都存在 *RWPS* $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$，使得乘积的非负线性化成立，且 *Haar*函数 h 满足 $h(2) = 1 + \epsilon$。

定理 2.4 完整地解答了 [9,Section4], 中提出的未解决问题 (i) 和 (iii)；从下面的证明可以看出，还能得到 [9, Section 4]中未解决问题 (iv) 和 (v) 的部分解答。特别地，我们将找到满足$\frown h(1) > 2$、$h(2) < 2$ 和 $0 \in \mathbb{N}_0$的例子。

3. 主要结果的证明

定理 2.1 的证明依赖于两个关键要素。第一个要素是以下关于乘积的非负线性化的充分判据 [16, 定理 3]:

定理 3.1。 设 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是一个 *RWPS*。

(i) 如果三对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha_{2N} & \alpha_1 & & & (0) \\ \alpha_1 & \alpha_{2N} & \alpha_2 & & \\ & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \alpha_{2N-1} \\ (0) & & & \alpha_{2N-1} & \alpha_{2N} \end{pmatrix}$$

对所有 $N \in \mathbb{N}$ 都是正定的，那么 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足乘积的非负线性化。

(ii) 如果三对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha_{2N+1} & \alpha_1 & & & (0) \\ \alpha_1 & \alpha_{2N+1} & \alpha_2 & & \\ & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \alpha_{2N} \\ (0) & & & \alpha_{2N} & \alpha_{2N+1} \end{pmatrix}$$

对所有 $N \in \mathbb{N}$ 都是正定的，那么 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足乘积的非负线性化。

众所周知，具有正对角元素的严格对角占优对称矩阵是正定的。然而，作为第二个要素，我们需要一个更精细的正定性判据 [4,定理 2.3]:

定理 3.2. 对于每个 $N \in \mathbb{N}$，形如以下形式的（实）对称三对角矩阵

$$\begin{pmatrix} D_1 & A_1 & & & (0) \\ A_1 & D_2 & A_2 & & \\ & A_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & A_{N-1} \\ (0) & & & A_{N-1} & D_N \end{pmatrix}$$

当且仅当存在 t_1、.....、$t_N > 0$，使得 $t_1 = D_1$ 且对于所有 $n \in \{1, \ldots, N-1\}$ 都有 $t_{n+1} = D_{n+1} - A_n^2/t_n$ 时，才是正定的。

在证明定理 2.1 之前，我们先整理数列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一些性质，并进行一些进一步的准备工作。

引理 3.1。 设 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如定理 *2.1* 中所述。则 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 严格递减，并以指数速度趋于 0。更确切地说，有

$$s_n < \frac{s_1}{4^{n-1}} \ (n \geq 2) \tag{3.1}$$

其中 $s_1 < 1/2$。此外，还有

$$s_3 < \frac{s_1 - s_2}{1 - s_2} - \frac{s_2}{(1 - s_2)^2} \tag{3.2}$$

and

$$s_4 < 1 - \frac{s_1 s_2}{1 - s_3} - \frac{1 - s_2 + s_2 s_3}{(1 - s_3)^2}. \tag{3.3}$$

证明。 结论 $s_1 < 1/2$ 由 (2.1) 立即得出，该式给出

$$0 < 1 - \frac{s_1}{1 - s_1}.$$

此外，由（2.2）可得，对所有 $n \in \mathbb{N}$， $s_{n+1} < s_n/4$ ，这表明了单调性，并得到（3.1）。（3.2）也是（2.2）的推论，证明如下：只需证明

$$\frac{s_1}{2} - 2s_2 < \frac{s_1 - s_2}{1 - s_2} - \frac{s_2}{(1 - s_2)^2}$$

或者，等价地，

$$6s_2^2 - 4s_2^3 < s_1(1 - s_2^2).$$

由于根据（3.1）， $s_1 > 4s_2$ ，因此只需证明

$$6s_2^2 - 4s_2^3 < 4s_2 \cdot (1 - s_2^2).$$

然而，后者可归结为正确的断言 $s_2 < 2/3$。为了由（2. 推出（3.3）， 2),
我们证明

$$\frac{s_2}{2} - 2s_3 < 1 - \frac{s_1 s_2}{1 - s_3} - \frac{1 - s_2 + s_2 s_3}{(1 - s_3)^2}$$

或者，等价地，

$$2s_1 s_2(1 - s_3) < s_2(1 - s_3^2) + 4s_3^3 - 6s_3^2.$$

由于根据 (2.1)， $s_1 < (1 - s_2)/(2 - s_2)$，因此只需证明

$$\frac{2 - 2s_2}{2 - s_2} \cdot s_2(1 - s_3) < s_2(1 - s_3^2) + 4s_3^3 - 6s_3^2$$

或者等价地，

$$(1 - s_3)^2 s_2^2 + (2s_3 + 4s_3^2 - 4s_3^3)s_2 + 8s_3^3 - 12s_3^2 > 0.$$

后者可如下看出：令 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 由 $f(x) := (1 - s_3)^2 x^2 + (2s_3 + 4s_3^2 - 4s_3^3)x + 8s_3^3 - 12s_3^2$ 定义。则

$$f'(4s_3) = 10s_3 - 12s_3^2 + 4s_3^3 > 0$$

and

$$f'(1) = 2 - 2s_3 + 6s_3^2 - 4s_3^3 > 0,$$

因此 f 在 $(4s_3, 1)$ 上严格递增。由于 $s_2 > 4s_3$，可得

$$\begin{aligned}
&(1 - s_3)^2 s_2^2 + (2s_3 + 4s_3^2 - 4s_3^3)s_2 + 8s_3^3 - 12s_3^2 \\
&> (1 - s_3)^2 (4s_3)^2 + (2s_3 + 4s_3^2 - 4s_3^3) \cdot 4s_3 + 8s_3^3 - 12s_3^2 \\
&= 12s_3^2 - 8s_3^3 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

□

引理 3.2. 设$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如定理 *2.1* 中所述，并设$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如(2.3)中所述。则$(\alpha_{2n-1}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(\widetilde{\alpha_{2n}^2})_{n\in\mathbb{N}}$ 均严格递增。

证明。 所述的单调性行为是引理 3.1 的推论：一方面，由 (3.2) 可得

$$s_3 < \frac{s_1 - s_2}{1 - s_2}$$

因此

$$\alpha_3^2 - \alpha_1^2 = c_3 a_2 - c_1 = (1 - s_3)(1 - s_2) - (1 - s_1) > 0.$$

另一方面，由 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的单调性显然可知

$\alpha_{2n+1}^2-\alpha_{2n-1}^2=c_{2n+1}a_{2n}-c_{2n-1}a_{2n-2}=(1-s_{2n+1})(1-s_{2n})-(1-s_{2n-1})(1-s_{2n-2})>0$

对所有 $n\geq 2$ 均成立。因此，我们得到 $(\alpha_{2n-1}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ 严格递增。同理可得，$(\widetilde{\alpha_{2n}}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ 严格递增。□

引理 3.3. 设 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如定理 *2.1* 中所述，且设 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如 (2.3) 中所述。若 $N\geq 2$, *then*

$$(1-\alpha_{2N+1}^2a_{2n+2})\alpha_{2n+1}^2<\alpha_{2N+1}^2a_{2n}(\alpha_{2N+1}^2-\alpha_{2N+1}^4a_{2n+2}-\alpha_{2n+2}^2) \tag{3.4}$$

and

$$\alpha_{2n+1}^2<\alpha_{2N+1}^4a_{2n} \tag{3.5}$$

对所有 $n\in\{1,\dots,N-1\}$ 均成立。此外，若 $N\geq 3$，则

$$(1-\widetilde{\alpha_{2N}}^2c_{2n+3})\widetilde{\alpha_{2n+2}}^2<\widetilde{\alpha_{2N}}^2c_{2n+1}(\widetilde{\alpha_{2N}}^2-\widetilde{\alpha_{2N}}^4c_{2n+3}-\widetilde{\alpha_{2n+3}}^2). \tag{3.6}$$

and

$$\widetilde{\alpha_{2n+2}}^2<\widetilde{\alpha_{2N}}^4c_{2n+1} \tag{3.7}$$

对所有 $n\in\{1,\dots,N-2\}$ 均成立。

证明。令 $N\geq 2$ 和 $n\in\{1,\dots,N-1\}$。由 (2.2) 可得

$$2c_{2k+4}+c_{2k+3}-(2c_{2k+2}+c_{2k+1})=2s_{2k+4}+s_{2k+1}-2s_{2k+2}-s_{2k+3}>0$$

对所有 $k\in\mathbb{N}$均成立。因此可得

$$2c_{2n+2}+c_{2n+1}\leq 2c_{2N}+c_{2N-1}.$$

此外，我们可以估计

$$\begin{aligned}c_{2N+1}^2a_{2N}^2-(2c_{2N}+c_{2N-1})&=(1-s_{2N+1})^2(1-s_{2N})^2-2s_{2N}-1+s_{2N-1}\\&>(1-2s_{2N+1})(1-2s_{2N})-2s_{2N}-1+s_{2N-1}\\&>-2s_{2N}-2s_{2N+1}-2s_{2N}+s_{2N-1}\\&=s_{2N-1}-4s_{2N}-2s_{2N+1}\\&\geq 0,\end{aligned}$$

这里再次使用了条件 (2.2)。将两者结合起来，得到

$$2c_{2n+2}+c_{2n+1}<c_{2N+1}^2a_{2N}^2 \tag{3.8}$$

因此

$$(c_{2N+1}a_{2N}+c_{2N+1}^2a_{2N}^2)c_{2n+2}+c_{2n+1}<c_{2N+1}^2a_{2N}^2. \tag{3.9}$$

将后一个不等式乘以 $(1-c_{2N+1}a_{2N})a_{2n}$，经过简单计算即可得到 (3.4)（注意递推系数 a_n 和 c_n 之和始终为 1）。此外，作为 (3.8) 的另一个推论，我们得到

$$c_{2N+1}^2a_{2N}^2>c_{2n+1}.$$

乘以 a_{2n} 可得（3.5）。现在令 $N\geq 3$ 和 $n\in\{1,\dots,N-2\}$。我们有

$$2a_{2n+3}+a_{2n+2}<a_{2N}^2c_{2N-1}^2 \tag{3.10}$$

and

$$(a_{2N}c_{2N-1}+a_{2N}^2c_{2N-1}^2)a_{2n+3}+a_{2n+2}<a_{2N}^2c_{2N-1}^2 \tag{3.11}$$

作为（3.8）和（3.9）的类似形式。乘以（$1-a_{2N}c_{2N-1}$）c_{2n+1}后，（3.11）得到（3.6）。此外，（3.10）还得到

$$a_{2N}^2c_{2N-1}^2>a_{2n+2}.$$

将后者与 c_{2n+1} 相乘，即得 (3.7)。 □

定理 *2.1* 的证明。显然，只需假设 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如 (2.3) 所示，以下均作此假设，因为若 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如 (2.4) 所示，则 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 与 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的角色恰好互换。我们的策略是证明 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}\widetilde{\ }$符合定理 3.1 (ii)，而 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 符合定理 3.1 (i)（后者将 α_n 替换为 $\widetilde{\alpha_n}$），并以定理 3.2 为工具，证明其中出现的矩阵具有正定性。关于定理 3.2 的应用，一个关键思路是适当地将 t_1，t_3，..... 的构造与 t_2，t_4，..... 的构造分开。

我们首先证明 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足乘积的非负线性化，并将证明分为两个步骤。令 $N\in\mathbb{N}$ 为任意但固定的量。

步骤 *1*：我们证明存在 t_1、t_3、.....、$t_{2N+1}\in\mathbb{R}$，满足 $t_1=\alpha_{2N+1}$ 以及

$$t_{2n+1}=\alpha_{2N+1}-\frac{\alpha_{2n}^2t_{2n-1}}{\alpha_{2N+1}t_{2n-1}-\alpha_{2n-1}^2} \tag{3.12}$$

and

$$\alpha_{2N+1}^3a_{2n}<t_{2n+1} \tag{3.13}$$

对所有 $n\in\{1,\dots,N\}$（(3.13) 所给出的估计是使证明成立的关键辅助工具，另见注 3.1）。我们从 t_1 开始：$=\alpha_{2N+1}$ 以及 $t_3:=\alpha_{2N+1}-\alpha_2^2t_1/(\alpha_{2N+1}t_1-\alpha_1^2)$。由于 $\alpha_{2N+1}t_1-\alpha_1^2=\alpha_{2N+1}^2-\alpha_1^2>0$（引理 3.2），$t_3$ 定义良好。此外，我们有

$$t_3-\alpha_{2N+1}^3a_2=\frac{\alpha_{2N+1}(1-\alpha_{2N+1}^2)(\alpha_{2N+1}^2a_2-c_1-c_2a_1)}{\alpha_{2N+1}^2-\alpha_1^2}$$

（简短计算再次利用了递推系数 a_n 和 c_n 始终 su m
不超过 1（以下将直接使用这一点，不再另行解释），并且

$$\begin{aligned}\alpha_{2N+1}^2a_2-c_1-c_2a_1&\geq\alpha_3^2a_2-c_1-c_2a_1\\&=c_3a_2^2-c_1-c_2a_1\\&=(1-s_3)(1-s_2)^2-(1-s_1)-s_2s_1\\&>0\end{aligned}$$

根据 (3.2) 和引理 3.2。这说明对于 $n=1$，(3.12) 和 (3.13) 成立。现在令 $n\in\{1,\dots,N-1\}$ 为任意但固定的值，并假设 t_{2n-1} 和 t_{2n+1} 使得对于 n，(3.12) 和 (3.13) 成立。于是我们定义 $t_{2n+3}:=\alpha_{2N+1}-\alpha_{2n+2}^2t_{2n+1}/(\alpha_{2N+1}t_{2n+1}-\alpha_{2n+2}^2)$。其良定义性源于以下假设：对于 n，(3.13) 成立，并结合 (3.5)（引理 3.3）；事实上，我们可以估计

$$\alpha_{2N+1}t_{2n+1}-\alpha_{2n+1}^2>\alpha_{2N+1}^4a_{2n}-\alpha_{2n+1}^2$$

因此

$$\alpha_{2N+1}t_{2n+1}-\alpha_{2n+1}^2>0. \tag{3.14}$$

根据构造，显然 (3.12) 对于 $n+1$ 成立。剩下需要证明 (3.13) 成立 s
对于 $n+1$ 也成立，这可由 (3.4) 如下看出：根据 (3.4)，我们知道

$$\alpha_{2N+1}^2-\alpha_{2N+1}^4a_{2n+2}-\alpha_{2n+2}^2>0 \tag{3.15}$$

and

$$\frac{\alpha_{2N+1}(1-\alpha_{2N+1}^2a_{2n+2})\alpha_{2n+1}^2}{\alpha_{2N+1}^2-\alpha_{2N+1}^4a_{2n+2}-\alpha_{2n+2}^2}<\alpha_{2N+1}^3a_{2n},$$

so

$$\frac{\alpha_{2N+1}(1-\alpha_{2N+1}^2 a_{2n+2})\alpha_{2n+1}^2}{\alpha_{2N+1}^2-\alpha_{2N+1}^4 a_{2n+2}-\alpha_{2n+2}^2}<t_{2n+1}.$$

再次考虑 (3.14) 和 (3.15)，我们可以将后者重新表述为

$$\alpha_{2N+1}^3 a_{2n+2}<\alpha_{2N+1}-\frac{\alpha_{2n+2}^2 t_{2n+1}}{\alpha_{2N+1}t_{2n+1}-\alpha_{2n+1}^2}=t_{2n+3}.$$

在进行第二步之前，我们强调，我们的构造特别 ly
意味着

$$t_3,t_5,\dots,t_{2N+1}\in(0,\alpha_{2N+1}). \tag{3.16}$$

步骤 *2*：由此，作为 (3.16) 的推论，我们有

$$t_{2n}:=\frac{\alpha_{2n}^2}{\alpha_{2N+1}-t_{2n+1}}>0$$

对所有 $n\in\{1,\dots,N\}$ 均成立。此外，对所有 $n\in\{1,\dots,N\}$，此构造和 (3.12) 给出

$$t_{2n+1}=\alpha_{2N+1}-\frac{\alpha_{2n}^2}{t_{2n}}$$

and

$$t_{2n}=\frac{\alpha_{2n}^2}{\alpha_{2N+1}-\left(\alpha_{2N+1}-\frac{\alpha_{2n}^2 t_{2n-1}}{\alpha_{2N+1}t_{2n-1}-\alpha_{2n-1}^2}\right)}=\alpha_{2N+1}-\frac{\alpha_{2n-1}^2}{t_{2n-1}}.$$

总之，我们已经证明 t_1，……，$t_{2N+1}>0$，其中 $t_1=\alpha_{2N+1}$，并且

$$t_{n+1}=\alpha_{2N+1}-\frac{\alpha_n^2}{t_n}$$

对所有 $n\in\{1,\dots,2N\}$ 均成立。由定理 3.2，这证明三对角矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha_{2N+1} & \alpha_1 & & & (0)\\ \alpha_1 & \alpha_{2N+1} & \alpha_2 & & \\ & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \alpha_{2N}\\ (0) & & & \alpha_{2N} & \alpha_{2N+1}\end{pmatrix}$$

是正定的。由于 N 是任意的，由定理 3.1 (ii) 可知，$(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足乘积的非负线性化。

~接下来还需证明 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 也满足乘积的非负线性化。我们采用与上文类似的方法，但会给出详细证明，因为其中存在一些重要差异，而且我们希望强调不等式 (2.1)、(2.2) 和 (3.2)、(3.3) 各自的作用。注意，到目前为止，证明尚未用到 (3.3)。再次令 $N\in\mathbb{N}$ 为任意但固定的值。

步骤 *1*：现在我们证明存在 t_2，t_4，……，$t_{2N}\in(0,\widetilde{\alpha_{2N}})$，使得

$$t_2=\widetilde{\alpha_{2N}}-\frac{\widetilde{\alpha_1}^2}{\widetilde{\alpha_{2N}}}$$

并且，在 $N\geq 2$ 的情况下，

$$t_{2n+2}=\widetilde{\alpha_{2N}}-\frac{\widetilde{\alpha_{2n+1}}^2 t_{2n}}{\widetilde{\alpha_{2N}}t_{2n}-\widetilde{\alpha_{2n}}^2} \tag{3.17}$$

and

$$\widetilde{\alpha_{2N}}^3 c_{2n+1} < t_{2n+2} \tag{3.18}$$

对于所有 $n \in \{1, \dots, N-1\}$。令 $t_2 := \widetilde{\alpha_{2N}} - \widetilde{\alpha_1}^2/\widetilde{\alpha_{2N}}$ 和 $t_4 := \widetilde{\alpha_{2N}} - \widetilde{\alpha_3}^2 t_2/\ (\widetilde{\alpha_{2N}} t_2 - \widetilde{\alpha_2}^2)$。由 (2.1) 和引理 3.2，得 $t_2 \in (0, \widetilde{\alpha_{2N}})$。$t_4$ 的良定义性可如下看出：根据 (3.3)，我们可以估计

$$(1-s_4)(1-s_3) > s_1 s_2 + \frac{1 - s_2 + s_2 s_3}{1 - s_3} > s_1 s_2 + 1 - s_2.$$

后者意味着

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha_4}^2 - \widetilde{\alpha_1}^2 - \widetilde{\alpha_2}^2 &= a_4 c_3 - a_1 - a_2 c_1 \\
&= (1-s_4)(1-s_3) - s_1 - (1-s_2)(1-s_1) \\
&= (1-s_4)(1-s_3) - s_1 s_2 - 1 + s_2 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

因此，通过引理 3.2，我们得到

$$\widetilde{\alpha_{2N}} t_2 - \widetilde{\alpha_2}^2 = \widetilde{\alpha_{2N}}^2 - \widetilde{\alpha_1}^2 - \widetilde{\alpha_2}^2 > 0, \tag{3.19}$$

从而 t_4 是良定义的。根据构造，对于 $n = 1$，(3.17) 成立。现在我们证明对于 $n = 1$，(3.18) 也成立：事实上，我们有

$$t_4 - \widetilde{\alpha_{2N}}^3 c_3 = \frac{(1 - \widetilde{\alpha_{2N}}^2)(\widetilde{\alpha_{2N}}^2 (c_3 \widetilde{\alpha_{2N}}^2 + a_1 a_3 c_2 - a_1 - a_2 c_1 - a_3 c_2) + a_1 a_3 c_2)}{\widetilde{\alpha_{2N}}(\widetilde{\alpha_{2N}}^2 - \widetilde{\alpha_1}^2 - \widetilde{\alpha_2}^2)}$$

and

$$\begin{aligned}
&c_3 \widetilde{\alpha_{2N}}^2 + a_1 a_3 c_2 - a_1 - a_2 c_1 - a_3 c_2 \\
&\geq c_3 \widetilde{\alpha_4}^2 + a_1 a_3 c_2 - a_1 - a_2 c_1 - a_3 c_2 \\
&= a_4 c_3^2 + a_1 a_3 c_2 - a_1 - a_2 c_1 - a_3 c_2 \\
&= (1-s_4)(1-s_3)^2 + s_1 s_2 s_3 - s_1 - (1-s_2)(1-s_1) - s_2 s_3 \\
&> 0
\end{aligned}$$

由 (3.3) 和引理 3.2 可知。结合 (3.19)，上述估计给出了所需结论。特别地，t_4 是 $(0, \widetilde{\alpha_{2N}})$ 中的一个元素。本步骤的其余部分与上面的步骤 1 类似：令 $n \in \{1, \dots, N-2\}$ 为任意但固定的值，并令 t_{2n} 和 t_{2n+2} 使得对于 n，(3.17) 和 (3.18) 成立。我们定义t_{2n+4}：$= \widetilde{\alpha_{2N}} - \widetilde{\alpha_{2n+3}}^2 t_{2n+2}/(\widetilde{\alpha_{2N}} t_{2n+2} - \widetilde{\alpha_{2n+2}}^2)$，由归纳假设以及 (3.6)、(3.7) 可知，$t_{2n+4}$ 是 $(0, \widetilde{\alpha_{2N}})$ 中的良定义元素，并且对于 $n+1$，(3.17) 和 (3.18) 均成立。

步骤 *2*：因为 $t_2, t_4, \dots, t_{2N} \in (0, \widetilde{\alpha_{2N}})$，我们得到

$$t_{2n-1} := \frac{\widetilde{\alpha_{2n-1}}^2}{\widetilde{\alpha_{2N}} - t_{2n}} > 0$$

对于所有 $n \in \{1, \dots, N\}$，该构造给出

$$t_{n+1} = \widetilde{\alpha_{2N}} - \frac{\widetilde{\alpha_n}^2}{t_n}$$

对于所有 $n \in \{1, \dots, 2N-1\}$。此外，我们有

$$t_1 = \frac{\widetilde{\alpha_1}^2}{\widetilde{\alpha_{2N}} - t_2} = \frac{\widetilde{\alpha_1}^2}{\widetilde{\alpha_{2N}} - \left(\widetilde{\alpha_{2N}} - \frac{\widetilde{\alpha_1}^2}{\widetilde{\alpha_{2N}}}\right)} = \widetilde{\alpha_{2N}}.$$

因此，我们可以应用定理 3.1 (i) 和定理 3.2，得出 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 也满足乘积的非负线性化。□

注记 3.1. 我们想对上述证明中的构造作一点说明。[5]读者或许会疑惑，为什么我们要证明由 (3.13) 给出的下界 $t_{2n+1} > \alpha_{2N+1}^3 a_{2n}$，而实际上最终只需证明 $t_{2n+1} > 0$。原因是，步骤 1 中的归纳假设实质上得益于更强的估计；换言之，证明如下形式的蕴含要方便得多：$t_{2n+1} > \alpha_{2N+1}^3 a_{2n} \Rightarrow t_{2n+3} > \alpha_{2N+1}^3 a_{2n+2}$，而不是处理如下形式的蕴含：$t_{2n+1} > 0 \Rightarrow t_{2n+3} > 0$。我们还要强调，第 1 节末尾关于使用计算机代数系统（Maple）的说明，特别是指通过数值实验寻找类似 (3.13) 及其对应式 (3.18) 的估计。

定理 *2.2* 的证明。 (i) 通过定理 2.1 得到的一种可能构造如下：考虑

$$s_n := \frac{C'}{K^{n-1}}$$

满足 $C' := \min\{C, 1-C\}$。然后

$$1 - \frac{s_1}{1-s_1} - s_2 = \frac{(1-2C')K + (C')^2 - C'}{(1-C')K},$$

$$\frac{s_{n-2}}{2} - 2s_{n-1} - s_n = \frac{C'(K^2 - 4K - 2)}{2K^{n-1}} \ (n \geq 3),$$

并且可以选择 $K \in \mathbb{N}$，使得 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1)$ 且右端变为正数。现在，若 $C > 1/2$，则按 (2.3) 定义 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$；若 $C < 1/2$，则按 (2.4) 定义。

(ii) 根据得到命题 3.1，$a_1 \leq 1/2$，因此 $c_1 \leq 1/2$。同理，$0 \in \mathbb{N}_0 \cap \mathbb{N}_0$ 推出 $c_1 = 1/2$，故由定理 1.1 可得所述结论。

(iii) 这也是定理 1.1 的推论：设 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是一个 RWPS，且 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 都满足乘积的非负线性化。若 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} = (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$（因而 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} = (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$），则 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0 = [-1, 1]$。此外，由 (1.1) 和 (1.3) 显然可知，对于所有 $n \in \mathbb{N}_0$，$|P_{2n}(0)| = \prod_{k=1}^{n} c_{2k-1}/a_{2k-1}$ 且 $P_{2n+1}(0) = 0$；而对于所有 $n \in \mathbb{N}_0$，$|P_{2n}(0)| = \prod_{k=1}^{n} a_{2k-1}/c_{2k-1}$ 且 $P_{2n+1}(0) = 0$。因此，若对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $c_{2n+1} > c_1 > 1/2$，则 $0 \in \mathbb{N}_0$；而若对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $c_{2n+1} < c_1 < 1/2$，则 $0 \in \mathbb{N}_0$。□

定理 *2.3* 的证明。 (i) 假设 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 均满足非-负乘积线性化，且 h 和 h 均为递增函数。由 (1.4) 可知，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$1 - c_n = a_n \geq c_{n+1}$ 和 $c_n \geq a_{n+1} = 1 - c_{n+1}$，因此 $c_n + c_{n+1} \equiv 1$。然而，后者意味着 hat $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在两个值之间振荡。

[5]下文中，我们仅讨论关于 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的构造，但同样的评论也适用于关于 $(\widetilde{P_n}(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的构造。

由定理 1.1 可得 $c_n \equiv 1/2$，进而有 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0} = (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$。反之显然。

(ii) 设 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 如定理 2.1 所述（上文给出了显式例子）。那么，由 (1.4) 和引理 3.1 可得,

$$\frac{h(2n)}{h(2n-1)} = \frac{a_{2n-1}}{c_{2n}} = \frac{1-s_{2n-1}}{1-s_{2n}} < 1$$

若 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如 (2.4) 所述，则对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立；而

$$\frac{h(2n+1)}{h(2n)} = \frac{a_{2n}}{c_{2n+1}} = \frac{1-s_{2n}}{1-s_{2n+1}} < 1$$

若 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如 (2.3) 所述，则对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

□

定理 *2.4* 的证明。 通过定理 2.1 进行构造的一种方法如下：令 $\epsilon \in (0,1)$，并令

$$s_n := \begin{cases} \frac{K^2}{(2+\epsilon)\cdot K^2-(1+\epsilon)}, & n = 1, \\ \frac{1}{K^n}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Then

$$\begin{aligned} 1 - \frac{s_1}{1-s_1} - s_2 &= \frac{\epsilon K^4 - (1+\epsilon)(2K^2-1)}{(1+\epsilon)K^2(K^2-1)}, \\ \frac{s_1}{2} - 2s_2 - s_3 &= \frac{K^5 + \mathcal{O}(K^3)}{2K^3((2+\epsilon)K^2-(1+\epsilon))}, \\ \frac{s_{n-2}}{2} - 2s_{n-1} - s_n &= \frac{K^2-4K-2}{2K^n} \ (n \geq 4), \end{aligned}$$

并且可以适当选择 $K \in \mathbb{N}$，使得 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1)$，且右侧均为正。现在，若 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 由 (2.4) 给出，则有

$$h(2) = \frac{1-s_1}{s_1(1-s_2)} = 1 + \epsilon.$$

□

注 3.2。 关于第 2 节末尾的评论，我们注意到，若$\epsilon \in (0,1)$，且 K、$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如上文证明中所述，则

$$h(1) = \frac{1}{s_1} > 2$$

$\widehat{\ }$(引理 3.1)。此外，还有 $0 \in \mathbb{N}_0$，参见定理 2.2。

4. 新多项式的更多性质

我们将更详细地考察符合充分判据定理 2.1 的 RWPS，尤其是正交化测度。我们证明如下：$\widetilde{\ }$如果 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 如定理 2.1 中所述，那么存在严格递增的数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$(\widetilde{x_n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1)$，使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \widetilde{x_n} = 1$ 并且

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \mu &= \{\pm 1\} \cup \{\pm x_n : n \in \mathbb{N}\}, \\ \operatorname{supp} \widetilde{\mu} &= \{\pm 1\} \cup \{\pm \widetilde{x_n} : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

显然，只需证明 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的断言即可。我们采用与 [16, 备注 2 第 427] 页类似的方法（但略有不同），并考虑 $T_1^2-\mathrm{id}$ 作用于 $\ell^2(h)$ 上的算子，其定义为

$$(T_1^2-\mathrm{id})f(m)=\begin{cases}a_1(f(2)-f(0)), & m=0,\\ a_2a_1(f(3)-f(1)), & m=1,\\ a_{m+1}a_m(f(m+2)-f(m))-c_mc_{m-1}(f(m)-f(m-2)), & m\geq 2.\end{cases}$$

由于 $\lim_{m\to\infty}a_{m+1}a_m=\lim_{m\to\infty}c_mc_{m-1}=0$（回想引理 3.1，数列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个零序列），$T_1^2-\mathrm{id}$ 是紧的。因此，（无限）集合

$$\{x^2-1:x\in\operatorname{supp}\mu\}=\sigma(T_1^2-\mathrm{id})$$

（它是 $[-1,0]$ 的子集）具有如下形式 $\{0\}\cup\{y_n:\ n\in\mathbb{N}\}$，其中 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in[-1,0)$ 是一个满足 $\lim_{n\to\infty}y_n=0$ 的数列。这就得到了所述结论。

因此，对于满足乘积的非负线性化的 RWPS 的正交化测度而言，定理 2.1 给出的例子与平凡例子 $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 非常不同，因为对于后者，其绝对连续测度的 supp 为 $\mu=[-1,1]$。尽管如此，符合定理 2.1 的 RWPS 与 $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 具有一个重要的共同性质，即三个对偶对象重合。更确切地说，我们有

$$\operatorname{supp}\mu=\widehat{\mathbb{N}_0}=\mathcal{X}^b(\mathbb{N}_0)$$

and

$$\operatorname{supp}\widetilde{\mu}=\widetilde{\widehat{\mathbb{N}_0}}=\widetilde{\mathcal{X}^b(\mathbb{N}_0)}.$$

证明如下：首先，同样只需证明关于 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的断言。现在我们采用 [9, 定理 3.2 (iii)] 的证明中的一个论证，并结合 [9,注 3.3]，按以下方式进行（我们仅给出证明概要，详细内容参见 [9]）：受 [16, 第 6], 节的启发，定义 $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}\subseteq\mathbb{R}[x]$ 为 $R_n(x^2)=P_{2n}(x)$。$(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足 $R_0(x)=1$、$R_1(x)=(x-c_1)/a_1$、$R_1(x)R_n(x)=a_n^RR_{n+1}(x)+b_n^RR_n(x)+c_n^RR_{n-1}(x)$ $(n\in\mathbb{N})$，其中

$$a_n^R:=\frac{a_{2n}a_{2n+1}}{a_1},b_n^R:=\frac{a_{2n}c_{2n+1}+c_{2n}a_{2n-1}-c_1}{a_1},c_n^R:=\frac{c_{2n}c_{2n-1}}{a_1},$$

并且，由于 $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足乘积的非负线性化，$(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ 也满足乘积的非负线性化。由于 $\lim_{n\to\infty}a_n^R=\lim_{n\to\infty}c_n^R=0$ 和 $\lim_{n\to\infty}b_n^R=1$（引理 3.1），所得多项式超群属于“强紧型” [6, 命题 4]。若 μ_R 表示相应的正交化测度，则

$$\{1\}\cup\{x_n^2:n\in\mathbb{N}\}=\operatorname{supp}\mu_R=\left\{z\in\mathbb{C}:\max_{n\in\mathbb{N}_0}|R_n(z)|=1\right\},$$

其中，第一个等式由构造显然成立，第二个等式由 [6,定理 2]得出。因此，我们得到

$$\mathcal{X}^b(\mathbb{N}_0)\subseteq\left\{z\in\mathbb{C}:\max_{n\in\mathbb{N}_0}|\underbrace{P_{2n}(z)}_{=R_n(z^2)}|=1\right\}=\{\pm1\}\cup\{\pm x_n:n\in\mathbb{N}\}=\operatorname{supp}\mu\subseteq\widehat{\mathbb{N}_0}\subseteq\mathcal{X}^b(\mathbb{N}_0).$$

参考文献

[1] W. R. Bloom 和 H. Heyer，《超群上概率测度的调和分析》，De Gruyter数学研究，第 20，1995 1312826 卷，Walter de Gruyter &
[2] Co.，柏林，。MR T. S. Chihara，《正交多项式导论》，数学及其应用，第13卷，Gordon and Breach Science Publishers，纽约-伦敦-巴黎，1978。MR 481884[3] P. Coolen-Schrijner 和 E. A. van Doorn，《利用正交多项式分析随机游走》，J. Comput. Appl. Math. **99** 1998 1 2, 387 399 1662710 ( )，第 - 期 – 。MR M.
[4] El-Mikkawy，《关于三对角矩阵三项递推的一则注记》，Appl. Math. Comput. 139 (2003 2 3, 503 511 1948655)，第 - 期 – 。MR Ż. Fechner、E. Gselmann 和 L. Székelyhidi，《多项式超群
[5] 上的高秩矩函数》，Adv. Oper. Theory **7** 2022 3, 41, 9 4450238 ( )，第 期，论文编号 。MR F. Filbir、R. Lasser
[6] 和 R. Szwarc，《紧型超群》，J. Comput. Appl. Math. 178 (2005)，第1-2期，205–214。MR 2127880[7] R. I. Jewett，《具有抽象测度卷积的空间》，Advances in Math. 18 1, 1 1975 101 394034 ( )，第 – 期。MR[8] S. Kahler，《 Jacobi 多项式与广义切比雪夫多项式的非负及严格正线性化》，Constr. Approx. 54 (2021)，第2期，207–236，DOI：https://doi.org/10.1007/s00365-021-09552-3。MR 4321773[9] S. Kahler 和 R. Szwarc，《多项式超群的对偶空间与哈尔测度》，J. Approx. Theory **305** 2025 106099, 15, 10 1016 2024 106099 4805806 ( )，论文编号
[10] DOI：https://doi.org/ . /j.jat. . . MR S. Karlin 和 J. McGregor，《随机游走》，Illinois J. Math. ( ) **3** 1959 66 81 100927 ，– 。MR
[11] 7 **3** 1983 R. Lasser，《正交多项式与超群》，Rend. Mat. ( ) ( )，第2期，185–209。MR 735062[12] ，《正交多项式与超群 II：对称情形》，Trans. Amer. Math. Soc. **341** 1994 2, 749 770 1139495 ( )，第 – 期。MR《离散交换超群》，《Inzell 正交多项式讲座》，《正交多项式高级理论与特殊函数》，第2卷，Nova Sci. Publ.，Hauppauge，NY，2005，第55–102页。MR
[13] 2130515[14] ，《超群上的调和分析——逼近与随机序列》，《多元分析丛书》，第14卷，World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，Hackensack，NJ， [2023] ©2023。MR 4583504[15] R. Lasser 和 J. Obermaier，《正交多项式的性质（P）与递推系数切换》，Mediterr. J. Math. **22** 2025 6, 165 4948171 ( )，论文编号 。MR W.
[16] Młotkowski 和 R. Szwarc，《关于离散测度正交的多项式的非负线性化》，Constr. Approx. **17** 2001 3, 413 429 1828919 ( )，第 – 期。MR R. Szwarc，《正交多
[17] 项式非负乘积线性化的充要条件》，Constr. Approx. **19** 2003 4, 565 573 1998905 ( )，第 – 期。MR《正交多项式与Banach代数》，
[18] 《Inzell 正交多项式讲座》，《正交多项式高级理论与特殊函数》，第2卷，Nova Sci. Publ.，Hauppauge，NY，2005，第103–139页。MR 2130516[19] E. A. van Doorn 和 P. Schrijner，《随机游走多项式与随机游走测度》，J. Comput. Appl. Math. **49** 1993 1 3, 289 296 1256038 ( )，第 - 期 – 。MR M. Voit，《距离正则图上Gibbs态的
[20] 正性》，Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **26** 2023 1, 2250026, 23 4565214 ( )，论文编号 。MR S. Yamagami，《多项式超群
[21] 解析泛函的矩问题》，J. Math. Soc. Japan 78 (2026)，第1期，225–242。MR 5021039

Stefan Kahler ，数学系 ，亚琛工业大学 ，Pontdriesch 14-16 ，52062 亚琛 ，德国
电子邮件地址：kahler@mathematik.rwth-aachen.de

Josef Obermaier，数学系，慕尼黑工业大学，Boltz- mannstraße 3，85748 加兴，德国电子邮件地址：josef.obermaier@tum.de