arXiv:2603.17991v1 [math.AG] 18 Mar 2026

一般约化微分概形的雅可比界猜想

Taylor Dupuy 和 David Zureick-Brown

Abstract. 我们证明了微分概形的一般约化分支满足强雅可比界猜想。

Contents

1. 引言 1 2. 背景与记号 3 3. 一般光滑性 7 4. 微分概形的切丛与线性化 8 5. 主定理的证明 12 6. 应用 13 参考文献 13

1. Introduction

由于雅可比界猜想类似于仿射空间中的 B´ezout 不等式，我们先回顾这一结论。下文中，len_K 表示一个仿射概形的长度，也就是其底层坐标环的长度。

定理 1.1. 设 K 是一个域。设 $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle \subset K[x_1, \dots, x_n]$ 是一个次数为 d_i 且具有 f_i 的理想，并设 $X =$ 谱 $K[x_1, \dots, x_n]/I$。若 X 具有有限长度，则 $\mathrm{len}_K(X) \leq d_1 d_2 \cdots d_n$。

Jacobi 在 1865 [JB65 中，Jac09] 提出了一个关于代数微分方程解的类似结论。主要的权衡是：在雅可比界猜想中，B´ezout 定理中的“有限”被“有限维”取代，而长度被交的维数取代。后来，Ritt 在 1935 [Rit35]中意识到，Jacobi 的陈述并未对“维数”作出严格定义；Jacobi 将其理解为参数化微分方程解所需的参数数量。[1] Ritt 通过给出一种基于超越次数的定义弥补了这一不足，将其列为一个公开问题，并证明了该猜想的若干情形。自 Ritt 的原始论文发表以来，这一陈述的一般情形一直悬而未决。

在本文中，我们证明了强雅可比界猜想（猜想2.10）对所有一般约化的分支均成立。记号见第2节。

定理 1.2。 设 (K, ∂) 是一个特征零的微分域。设 $I = [u_1, \dots, u_n] \subseteq K\{x_1, \dots, x_n\}$是一个微分理想，且设 $\Sigma = \mathrm{Spec}\ K\{x_1, \dots, x_n\}/I$。设 Σ_1 是 Σ 的一个不可约分支，使得Σ_1 一般约化且具有有限维数。则 $\dim(\Sigma_1) \leq J(u_1, \dots, u_n)$。

注 1.3。 数值 $J(u_1, \dots, u_n)$ 称为雅可比数或雅可比界（定义2.9）。

注记 1.4。 若 I 是根基（即 $\sqrt{I} = I$），则 Σ 的每个不可约分支都是约化的。

Date: 2026年3月19日。[1]Jacobi本人使用“序”一词来指代这一未定义的概念。

策略如下：若 Σ_1 一般约化，且泛点为 η_1，则 $\dim(T\Sigma_{\eta_1}) = \dim(\Sigma_1)$，并且 η_1, $T\Sigma_{\eta_1}$处的切空间由 $u_1, \ldots, u_n$ 的线性化所定义。线性化的雅可比界小于或等于原始雅可比界。由于线性情形的雅可比界猜想已是一个定理（见 [Rit35，第 310] 页以及 [DZB26a，第 7]节），因此我们的结果得证。我们将在第 1.1 节详细展开这三句话。

上一段的逆否命题也很有意思；它指出，只要存在一个不良的线性化，我们就必定能找到某种非约化性。特别是，雅可比界猜想尚存的困难恰恰源于非约化性。

推论 1.5. 设 $\Sigma \subset \mathbb{A}^n$ 是由 u_1，……，$u_n \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 定义的 D-概形。设 Σ_1 是 Σ 的一个不可约分支，且 $\dim(\Sigma_1) < \infty$。设 η_1 是 Σ_1 的泛点。若 $\dim((T\Sigma)_{\eta_1}) > \dim(\Sigma_1)$，则 Σ_1 不是一般约化的。

证明。 假设它是约化的。那么我们知道，定义 $I_\Sigma = [u_1, \ldots, u_n]$ 的方程 $u_1, \ldots, u_n$ 可以在 η_1 处线性化，从而得到 $(T\Sigma_1)_{\eta_1}$ 的方程。换言之，$(T\Sigma_1)_{\eta_1} = (T\Sigma)_{\eta_1}$。这就推出 $\dim((T\Sigma_1)_{\eta_1}) \neq \dim(T\Sigma_{\eta_1})$，矛盾。□

关于该陈述，还有一些补充说明。

注 1.6。 特征零这一假设似乎对我们的证明至关重要，因为它与一般光滑性有关，而一般光滑性又与贝尔蒂尼定理密切相关。

注 1.7。 过去100年来，关于雅可比界猜想取得了许多阶段性进展， [KMPe08]对此作了综述。1935年，Ritt 首先指出 Jacobi 的证明并不完整，并证明了线性情形和二变量情形，同时给出了一个一般界 $\dim(\Sigma) \leq r_1 + \cdots + r_n$ 其中$r_i = \max\{\mathrm{ord}^{\partial}_{x_i}(u_j)\colon \ 1 \leq j \leq n\}$ [Rit35]。1958年，Greenspan 在其论文中 [Gre 58] 改进了 Ritt 在差分情形下的界（该结果可以推广到微分情形，见 [Oll09，第8节1]）。另见相关论文 [Gre59]。1969年，Lando 在其论文中研究了这一猜想及其差分类比 [Lan69]。这项工作促成了论文 [Lan70, Lan72]，她在其中证明了“强猜想”的一阶情形，以及 Ritt 在差分情形下结论的类比。1976年，Tomasavic[Tom76] 为偏微分方程提出了该猜想的一个版本，并证明了二阶情形和线性情形。1980年，Cohn 给出了所谓的 Greenspan 界 [Coh80] ，用于克鲁尔维数。2004年，Hrushovski 在 arXiv 上发布了一份手稿，利用所谓的一致 Lang–Weil 估计证明了差分情形 [Hru04]。2007年，Ollivier 和 Sadik [OS 07] ，随后 Ollivier 又在 2022 [Oll22]中证明了所谓拟正则情形下的猜想。

在某些情况下，维数与雅可比界相等。特征集就是其中一种情形。特别地，这改进了 [LL16，定理 1] ，即“特征序列的雅可比界猜想”。在这种情况下，我们可以将不等式提升为等式。该不等式在 [LL16，定理 1] 中利用微分乔形式得到了证明。

推论1.8。 设 $R = K\{x_1, \ldots, x_n\}$。设 $P \subset R$ 是一个素微分理想，其关于某个排序 $\prec$的特征集为$(A_1$、…、 $A_n)$。则

$$\mathrm{trdeg}_K(R/P) = J(A_1, \ldots, A_n).$$

特别地，$\mathrm{trdeg}_K(R/P) < \infty$.

关键在于 $P = \mathrm{sat}_S([A_1, \ldots, A_n])$，其中 S 是由（A_1、…、 A_n）的初式和分离式生成的乘法集，并且这些初式和分离式不属于 P。如果 η 是 P的泛点，那么这意味着 A_1、…、 A_n 在 η 处具有良线性化，因为 $\dfrac{\partial A_i}{\partial \ell_{A_i}}(\eta) \neq 0$。正文中用于线性化的重要方程是（6）。所谓“良线性化”，是指 η对应的不可约分支的维数等于 η处线性化系统的维数。另见 [CH03，第 4 节1]。

推论1.8意味着，对于任意给定的一组明确微分方程 $u_1, \ldots, u_n \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$，都可以通过计算机算法有效地判定雅可比界猜想是否对 $[u_1, \ldots, u_n]$ 成立。

推论1.9。 判断给定的一组微分方程$(u_1$、…、 $u_n)$ 在 $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 中是否满足雅可比界猜想的问题是可判定的。

在任何示例中检验JBC的方法都很简单。我们原始方程的雅可比界很容易计算。然后使用Rosenfeld–Gr¨obner算法计算素理想的特征序列。可以利用推论1.8计算这些特征序列的维数。

因此，根据推论1.9，我们有必要确定在 Rosenfeld–Gr¨obner 算法中雅可比界会发生什么变化。我们指出，在 Rosenfeld–Gr¨obner 算法的步骤中，弱雅可比界可能增大（即使对于线性微分方程也是如此），但最终总会回落到原始的雅可比界。

在 [DZB26a] 中，我们对约化过程及其对强雅可比界的影响进行了更详细的分析（我们在此处定义 $\mathrm{ord}_{x_i}^{\partial}(u) = -\infty$，条件是 x_i 不出现在 u中）。在这一过程中，[DZB26a] 实际上弥补了 Ritt 在 [Rit35]中证明线性情形时的一个漏洞。

1.1. 证明策略。 我们的方法受到一篇优秀论文 [Oll22], 的启发。该论文首先将 Jacobi 的工作转化到现代代数的框架中，随后又对其加以改进。我们希望理解 [Oll22] 的几何框架（尤其是非线性微分方程的一阶扰动与微分概形的切丛之间的关系），这一愿望逐渐发展成了这篇论文。

首先，我们注意到，在已知解 η处对系统 $[u_1, \ldots, u_n]$进行线性化，不会增大雅可比界。这是微分方程课程中讲授的标准线性化技术：给定一个解 η，我们使用 $x = \eta + \varepsilon y$ 展开方程 $u(x) = 0$，其中 $\varepsilon^2 = 0$, 从而得到关于变量 y 的线性方程，其系数涉及 η。这意味着，只要我们能够控制线性化系统的克鲁尔维数，就能证明雅可比界猜想。

其次，我们的关键观察是，切丛 $T\Sigma \to \Sigma$ 确实编码了这些一阶扰动。这意味着，$\pi\colon T\Sigma \to \Sigma$ 实际上是线性化微分方程 $T\Sigma_\eta = \pi^{-1}(\eta)$ 的参数空间，其中 $\eta \in \Sigma$可变。这里的许多要素并非新内容，但此前或许还没有以这种方式加以综合。关于线性化与切空间之间关系的方程见 Kolchin [Kol86]（参见注 4.2）；而采用现代概形理论方法所必需的 Kähler 微分上的 D-模结构（其中 $T\Sigma := \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\Omega^{\Sigma/K}))$）则见 [Joh 74] 和 [Oll22]。

最后，许多关于域上的有限型概形维数的标准定理（例如，切丛在某个不可约分支的泛点处的维数至少等于该不可约分支的维数这一标准事实）并不直接适用于一般约化但非有限型的不可约分支Σ_1。我们需要证明 Σ_1 与一个有限型概形双有理。一般而言，Σ_1 不是有限型的，这种做法只能在双有理意义下成立。接下来，我们需要谨慎处理，确保能够将开集切空间的维数估计与原始方程联系起来。要在我们的情形中应用“一般光滑性”之类的定理，还需要格外小心。

致谢。 Dupuy 获美国国家科学基金会资助（项目编号 DMS-2401570）。Zureick- Brown 获美国国家科学基金会资助（项目编号 DMS-2430098）。我们感谢 James Freitag 对本手稿早期版本提出的宝贵意见。我们也感谢 Yuval Dor 与我们进行了有益的讨论。Dupuy 感谢法属波利尼西亚大学 GAATI实验室的热情接待；他在此完成了本手稿。

软件。 本文中的实验使用 Magma [BCP97]，借助作者开发的微分代数软件包 [DZB26b] 完成。本项目期间未使用大语言模型。

2. Background and Notation.

本节按照 [Bui93 第 2] 节介绍现代微分代数几何的基本框架；另见 [Kol73] 和 [Kap76 第七章]。

陈述中出现的数 $\dim(\Sigma_1)$ 是底层概形 Σ_1 的维数。我们所说的域 K 上概形 X 的维数，是 X 的不可约分支中 $\kappa(X_1)$ 的超越次数的最大值。我们用 $\kappa(X_1)$ 表示 X_1 的底层既约不可约概形的函数域。若 $X = \mathrm{Spec}(A)$，且 $X_1 = V(Q)$，其中 Q 是一个 P-primary 理想，则 $\kappa(X_1) = \kappa(P)$

按定义，这就是 A/P 的分式域。我们将 X （分别为 A）的维数记作 $\dim(X)$（分别记作 $\dim(A)$）。当 X 或 A 是 K 上的有限型时，这分别与概形的通常诺特维数（以及环的克鲁尔维数）一致。

在 [Bui93 第 2 节第 485] 页中，Buium 将经典概形维数称为“绝对维数”，以免与微分维数的概念混淆。

2.1. **微分代数背景**。

定义 2.1. 微分环是一个二元组 (R,∂)，其中 R 是一个环，而 $\partial\colon R\to R$ 是一个满足 $\partial(ab)=\partial(a)b+a\partial(b)$ 的加法映射。微分环 (B,∂) 到 $(\to(A,\partial)$ 的态射是一个环同态σ ，满足 $\partial\sigma=\sigma\partial$。微分环态射的核是微分理想，并且有第一同构定理。

我们通常省略二元组 (R,∂)，只用 R 表示一个微分环。同样，我们只用$\sigma\colon B\to A$ 表示微分环同态。若 A 和 B 是微分环，则微分 B- 代数是指满足以下条件的 B- 代数 A ：结构映射 $B\to A$ 是微分环态射。

定义 2.2。设 R 为微分环。R 上的、以 n为变量的微分多项式环是 R上的可数多个变量的多项式环

$$R\{x_1,\dots,x_n\}=R[x_i^{(r)}\colon 1\le i\le n, r\ge 0]$$

并带有由 $\partial x_i^{(r)}=x_i^{(r+1)}$ 对 $1\le i\le n$ 和 $r\ge 0$所规定的唯一微分 R-代数结构。

在本文中，我们将 $x_i^{(0)}$ 与 x_i 等同，并按照惯例对低阶导数使用撇号，例如 $x_1''=x_1^{(2)}$ 。

微分多项式 u 关于某个微分变量的阶，是该变量所出现的最高阶导数。在上述记号下，给定有限集 $S\subset\mathbb{R}$，令 $\max^+(S)=\max(S\cup\{0\})$。

定义 2.3。设 $u\in R\{x_1,\dots,x_n\}$。u关于 x_j的阶为

$$\operatorname{ord}_{x_j}^{\partial}(u)=\max{}^+\{r\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\colon \frac{\partial u}{\partial x_j^{(r)}}\neq 0\}. \tag{1}$$

给定 $R\{x_1,\dots,x_n\}$ 中的一组元素 $u_1,\dots,u_e$，我们使用以下记号

$$[u_1,\dots,u_e]=\langle\partial^j(u_i)\colon 1\le i\le e, j\ge 0\rangle,$$

由 u_i 及其所有导数生成。等价地，它是 $R\{x_1,\dots,x_n\}$ 中包含集合 $\{u_1,\dots,u_r\}$ 且对 ∂ 封闭的最小理想。[2]

以下结论众所周知。例如，参见 [Joh69b, §5, last paragraph]。由于我们不知道有哪篇文献给出了证明，因此在此提供一个证明。

命题 2.4 (极小素理想原理)。设 $R=K\{x_1,\dots,x_n\}$，且 $I\subset R$ 是一个微分理想。

(1) 任何在 I 上极小的素理想 $P\supset I$ 都是微分理想。(2) 存在一个有限不可约冗余的微分素理想集合 $Q_1,\dots,Q_m$，使得 $\sqrt{I}=Q_1\cap\cdots\cap Q_m$。

证明。第二个断言见 [Bui94, Theorem 3.3 of Chapter 2]。存在互不相同的素微分理想 $Q_1,\dots,Q_m$，使得 $I=Q_1\cap\cdots\cap Q_m$。以极小方式选取 m，由 [AM69, Theorems 4.5 and 4.6] 可知，这些 Q_i 恰好是 I 上的极小素理想集合；特别地，微分理想上的每个极小素理想都是素微分理想。□

我们的除法算法将用 Weyl 代数来表述。

定义 2.5。设 R 为一个微分环。R 的 Weyl 代数是一个（非交换）结合代数 $R[\partial]$，它作为左 R-模同构于 $\bigoplus R\partial^d$，并且对每个$r\in R$都满足规则 $\partial r=r\partial+\partial(r)$。

[2]在微分代数中，通常用 $\{u_1,\dots,u_e\}$ 表示 $[u_1,\dots,u_e]$ 的根基。本文不遵循这一惯例，而是将花括号保留用于表示集合。

定义 2.6. 左 R-模 M 是一个 D-模，当且仅当它是左 $R[\partial]$-模。

左 R-模 M 是一个 D-模，等价于赋予其一个映射 $\partial\colon\ M \to M$，使得对于 $r \in R$ 和 $m \in M$，$\partial(rm) = \partial(r)m + r\partial(m)$。微分环 R 本身是一个 D-模，因为它是一个左 $R[\partial]$-模。对于 $u_1, \ldots, u_e \in R\{x_1, \ldots, x_n\}$，微分理想 $[u_1, \ldots, u_e]$ 是一个 D-模，它作为左 $R\{x_1, \ldots, x_n\}[\partial]$-模由 $\{u_1, \ldots, u_e\}$生成；
$[u_1, \ldots, u_n] = R\{x_1, \ldots, x_n\}[\partial]u_1 + \cdots + R\{x_1, \ldots, x_n\}[\partial]u_n$。它是包含 $u_1, \ldots, u_e$的最小左 $R\{x_1, \ldots, x_n\}[\partial]$-模，其中 $R\{x_1, \ldots, x_n\}$，并且每个元素 $f \in [u_1, \ldots, u_e]$ 都可以写成 $f = Q_1u_1 + \cdots Q_eu_e$，其中 $Q_i \in R\{x_1, \ldots, x_n\}[\partial]$ 满足$1 \leq i \leq e$。

关于 D-概形和微分簇，我们遵循 [Bui94，第 3 章，第 3 节，第 68] 页。

定义 2.7. D-概形是指满足 $\mathcal{O}_\Sigma$ 为微分环层的概形 Σ。D-概形的态射是概形态射，且其结构层态射是微分环态射。

D-概形也称为微分概形。若 R 是微分环，则 Spec(R) 是一个 D-概形。所谓D上的 R -概形，是指 D-概形态射 $\Sigma \to \text{Spec}(R)$。等价地说，这是一个 D-概形 Σ，满足 $\mathcal{O}_\Sigma$ 是微分 R-代数层。

设 Σ 是一个 K上的 D-概形。Σ 的微分 L-点是指一个态射 $\text{Spec}(L) \to \Sigma$，且它是 D-概形态射。

注 2.8. 假设 $\Sigma = \text{Spec}\ K\{x_1, \ldots, x_n\}/I$，其中 I是一个微分理想。并非所有概形论点 $x \in \Sigma$ 都是微分点。Σ 的一个不可约分支的泛点 η 是一个微分点。这由命题 2.4 得出。

设 K 是一个域。对于任意 K-代数 R，我们用 dim(R) 表示满足以下条件的最大 n：存在一个由 n 个变量构成、系数取自 K 的多项式环到 R的单射。类似地，对于任意 K 上的概形 Σ，我们用 dim(Σ) 表示 Σ的维数。对于不可约概形 Σ，这等于 $\text{trdeg}_K(\kappa(\Sigma))$，即底层既约概形的函数域 $\kappa(\Sigma)$ 关于 K的超越次数。对于一般的 K上的概形，dim(Σ) 表示其不可约分支的最大维数。对于 D-概形，为了将其与“微分维数”区分开来，[Bui93] 将其称为绝对维数，而 [Kol73]则称为序。我们选择使用 dim，因为它的含义较为明确，并且符合交换代数学家和代数几何学家采用的标准术语。如果 Σ 是有限型的，且是域 K上的整概形，那么 dim(Σ) 与克鲁尔维数一致。

定义2.9。设 R为一个微分环。设 u_1、.....、$u_n \in R\{x_1, \ldots, x_n\}$。元组（$u_1$，.....，$u_n$）的雅可比数定义为

$$J(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \max_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} \text{ord}_{x_i}^{\partial}(u_{\sigma(i)}).$$

现在我们陈述雅可比界猜想。

猜想2.10（雅可比界猜想（JBC）[Rit35，第 303], [页；Kol68，第 274]页）。设 K 为一个微分域，且设 Σ为由 u_1、u_2、.....、$u_n \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$定义的微分代数簇。设 Σ_1为 Σ的一个不可约分支，并假设 Σ_1 具有有限的克鲁尔维数。则

$$\dim(\Sigma_1) \leq J(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

2.2. **Ritt 除法算法与特征集**。设 R 为一个微分环 g.

定义2.11。$R\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的一个排序是集合 $\{x_i^{(j)}$ 上的一个序关系 $\prec$：$1 \leq i \leq n$、$j \geq 0\}$，满足：对于该集合中的任意 v 和 u，若 $u \prec v$，则 ∂（u）$\prec \partial$（v）；并且对于集合 $u \prec \partial$中的任意 u，满足u。

我们将排序视为它们在 $R\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上诱导的字典序项序。我们通常使用一种 Ritt 排序：先按变量排序，再按序排序，最后按次数排序。

定义 2.12. 在 $R\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上固定一个排序 $\prec$。令 $A \in R\{x_1, \ldots, x_n\}$。

(1) 按照排序，ℓ_A of A 的主元是 A 中出现的最大变量。(2) 如果 $\ell_A = x_i^{(r)}$，则首项变量为 $t_A = x_i$.

(3) A to be $s_A = \dfrac{\partial A}{\partial \ell_A}$ 的分离子。(4) 如果 $A = \sum_{i=0}^{d} a_i \ell_A^i$，则 A 的初式 I_A 为 a_d。

元素 $A = \sum_{i=0}^{d_A} a_i \ell_A^i \in R\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的秩是 $\ell_A^{d_A}$。如果相对于 A 而言，B 在 A 的主元中具有较低的秩，则称 B 是里特约化的。注意，对于 $A \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 和 $j > 0$，我们有

$$I_{A^{(j)}} = s_A \ell_A^{(j)}.$$

换句话说，虽然求导通常会打乱多项式 A 的各项，但对于 A 的任意导数，其首项都有一个简洁的公式。

现在，让我们研究系数取自特征零微分域 K 的多项式环 $K\{x_1, \ldots, x_n\}$；我们所考虑的所有域都具有特征零。

例 2.13。考虑 $K\{x_1, x_2\}$，其中 $x_1 \prec x_2$。考虑 A，$B \in K\{x_1, x_2\}$，其中 $A = x_1' + 1$ 和 $B = x_2'' x_1'' + x_1^2$。尽管有 $A \prec B$，但 B 相对于 A 并非约化的，因为 x_1'' 出现在 B 和 $x_1'' \succ x_1' = \ell_A$ 中。$C = x_1 x_1' + 1$ 的分离子和初式均为 x_1。

这种修改后的除法算法（在其中我们对多项式求导，并乘以分离子）称为 Ritt 除法。

定理 2.14 (Ritt 除法算法 [Kap76，引理 7。3])。设 $A, B \in R = K\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$。则存在某些 $s, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$Q \in R[\partial]$ 和 $C \in R$，使得

$$S_A^s I_A^t B = QA + C$$

其中 C 关于 A 是约化的，而 Q的运算是通过通常的 D-模结构进行的。

设 $A = (A_1, \ldots, A_r)$ 是 $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 中元素的一个序列。若每个A_{i+j} 关于 A_i都是约化的，并且 A_{i+1} 涉及一个未出现在 A_i中的变量，则称 A 是自约化的。设 $S = S_A$为由 $A_1, \ldots, A_r$的分离式和初式生成的乘法幺半群。设 $B \in R$。若 A 是自约化的，则重复应用定理 2.14 可得元素 $s \in S$, $Q_i \in R[\partial]$ 和 $c \in R$，使得

$$sB = Q_1 A_1 + \cdots + Q_r A_r + c$$

其中，c 相对于每个 A_i都是约化的。这称为 Ritt 除法算法。详情请参阅[Hub00]。

例 2.15. 设 $f = x' + y'''$ 和 $g = x^2 + y'' x' + t$ 属于 $\mathbb{C}(t)\{x, y\}$，并赋予其一个项序，该项序对所有 i 和 j都关于 $x^{(i)} > y^{(j)}$ 为字典序，而对所有 i则关于 $x^{(i+1)} > x^{(j)}$（分别为 $y^{(i+1)} > y^{(j)}$）。那么我们有

$$sf = Qg + r$$

其中

$$s = -(x')^2, \quad Q = x'' - x'\partial, \quad r = -x^2 x'' + -tx'' + -(x')^3 + 2x(x')^2 + x'.$$

在自约化集上归纳地定义一个偏序。设 $A = (A_1, A_2, \ldots, A_r)$和 $B = (B_1, B_2, \ldots, B_s)$。我们称 $A \succ B$，当且仅当

(1) 存在某个 i，使得 $0 < i < r$ 满足

$$\ell_{A_j}^{d_{A_j}} = \ell_{B_j}^{d_{B_j}} \qquad \forall j, \text{ with } 0 < j < i$$

其中 $d_{A_j} = \deg^{\ell_{A_j}}(A_j)$，且 $d_{B_j} = \deg^{\ell_{B_j}}(B_j)$和 $A_i \prec B_i$，或者

(2) $\ell_{A_j}^{d_{A_j}} = \ell_{B_j}^{d_{B_j}}$ 对于所有 $j \leq r$ 和 $s > r$。

设 $I \subseteq K\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 为一个理想。

定义 2.16。序列 $A_1, \ldots, A_r \in I$是 I 的特征列，当且仅当 $A_1, \ldots, A_r$ 是极小自约化序列。

文献中常将特征序列称为特征集，我们有时也会这样称呼；但这样做时，我们仍牢记它们实际上是序列。

若 S 是环 R 的乘法闭子集，且 I 是 R 中的理想，则 I 关于 R 的饱和化为 $\mathrm{sat}_S(I) = \{f \in R: \exists s \in S,\ sf \in I\}$。这与 $\varphi_S^{-1}(IS^{-1}R)$ 相同，其中 $\varphi_S\colon R \to S^{-1}R$ 是局部化映射 [AM69，第 41] 页。

定理 2.17 （[Hub00，定理 4.5、定理 5.2 和算法 7。1]）。若 P 是素 ∂-理想，则存在一个特征集 $A = (A_1, \ldots, A_r)$，满足 $A_i \in P$，使得 $P = \mathrm{sat}_S([A_1, \ldots, A_r])$，其中 S 是由 A 的初式和分离式生成的乘法子集。

注 2.18。在任意特征列中，A_i 的首变量两两不同，否则该序列就不是自约化的。设 P 是一个素微分理想，其特征集为 $A = (A_1, \ldots, A_r)$。如果微分概形 Spec $K\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}/P$ 的克鲁尔维数有限，则由饱和化断言可得 $r = n$。否则，微分超越次数将是无限的，因为会存在一个自由微分变量，它并非任何一个元素的首变量。

对于具有特征列 $A = (A_1, \ldots, A_n)$ 的素理想 $P \subset K\{x_1, \ldots, x_n\}$，以及元素 $f \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$，有：$f \in P$ 当且仅当 f 被 A 作 Ritt 除法后的余数为零。[Kol73，III.8，引理 5]。这有时也称为 Rosenfeld 引理。参见 [KO06，定理 1]下方。

例 2.19。在环 $K\{x, y\}$ 中，按照 $(x) \prec (y)$ 给定的排序，我们将计算 $\sqrt{[f_1, f_2]}$ 的特征集，其中 $f_1 = x'' + y$ 且 $f_2 = (x')^2 + y$。微分理想 $\sqrt{I}$ 有两个分支 P_1 和 P_2，其中第一个由下式给出

$$P_1 = \mathrm{sat}_{S_1}([(y')^2 + 4y^3, 2yx' - y']),$$

其中，S_1 是由 y，y' 生成的 $K\{x, y\}$ 的乘法闭子集；这些元素除相差一个 K 的倍数外，分别是 $2yx' - y$ 和 $(y')^2 + 4y^3$ 的分离式。第二个分支由下式给出

$$P_2 = [y, x']$$

且无需进行任何饱和处理（此处所有初式和分离子都是平凡的）。

3. Generic Smoothness

我们的证明将依赖这样一个事实：若 Σ_1 是一个克鲁尔维数有限的一般约化微分概形，则其切丛是有限维的。若省略一般约化假设，Σ_1 的切丛可能不是有限维的，即使 Σ_1 本身是有限维的；见例3.1。

例3.1。环 $A = K\{x\}/[x^2]$ 不是有限生成的。其极小素理想为 $[x] = \langle x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots\rangle$，$A$ 的约化 A_{red} 同构于 K，并且对每个 i，$x^{(i)}$ 都是幂零元。首先注意到 $\partial(x^2) = 2xx'$ 且 $\partial^2(x^2) = 2(x')^2 + 2xx''$。将 $\partial(x^2)$ 乘以 x' 可推出 $(x')^3 \in [x^2]$。然后可以继续归纳。事实上，根据Kap76，引理1.7]，，若 $a^n \in [x^2]$，则 $(a')^{2n-1} \in [x^2]$。这证明了 $(x')^5 \in [x^2]$、$(x'')^9 \in [x^2]$ 等。特别地，$\Sigma = \text{谱}\, A$ 在拓扑上是一个单独的、高度非约化的点，而 Σ 不是一般约化的。

命题3.2. 设 $\Sigma = \text{谱}\, K\{x_1, \ldots, x_n\}/[u_1, \ldots, u_n]$，并设 Σ_1 是 Σ的一个不可约分支，使得 Σ_1 一般约化且克鲁尔维数有限。存在非空开子集 $U' \subseteq U \subseteq \Sigma_1$，使得 U 是 K 上的有限型，且 U' 在 K 上光滑。

一般而言，不清楚 Σ_1 自身是否局部有限型；我们的证明构造出一个特定的 U，它是有限型的。

证明。设 $R = K\{x_1, \ldots, x_n\}$。设 $P_1 \subseteq K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 是对应于 Σ_1的素理想，并设 $A_1 = K\{x_1, \ldots, x_n\}/P_1$，使得 $\text{谱}(A_1) = (\Sigma_1)_{\mathrm{red}}$。

令 $g_1, \ldots, g_n \in P_1$ 是 P_1 的一个特征列，并令 m 为 g_i 的序的最大值；注意，由于 Σ_1 的克鲁尔维数有限，该集合由 n 个互不相同的元素组成，且 Ritt 除法所得余式的序至多为 m。令 S 为由特征集的分离子和初式生成的理想。

令 $K[x_1,\dots,x_n]^{(m)} = K[x_i^{(j)}\colon 1\le i\le n, 0\le j\le m]$。我们声称映射 $\sigma\colon S^{-1}K[x_1,\dots,x_n]^{(m)}\to S^{-1}A_1$ 是满射。只需证明，对于每个 $j>m$， $x_i^{(j)}$ 都属于 σ 的像。根据 Ritt 除法（见第 2.2 小节），存在元素 $s\in S$、 $Q_i\in R[\partial]$ 和 $c\in R$，使得 c 的序至多为 m，并且

$$sx_i^{(j)} = Q_1g_1+\cdots+Q_ng_n+c.$$

由于 c 的序至多为 m， c 属于 σ的像；由于每个 $Q_ig_i\in P_1$在 A_1中均为零，因此我们得出 $sx_i^{(j)}$ 也属于 σ的像。由于我们已将 s取逆， $x_i^{(j)}$ 属于 σ的像，正如所需。

由于 σ 是满射， $V=\operatorname{Spec} S^{-1}A_1$ 是 $(\Sigma_1)_{\mathrm{red}}$ 的一个非空开子集，且为有限型。由于 Σ_1 一般约化，映射 $i\colon(\Sigma_1)_{\mathrm{red}}\to\Sigma_1$ 是双有理的。设 $W\subseteq\Sigma_1$ 是一个非空开子集，使得 i 到 W 的限制是同构。那么 $U=W\cap V$就是所需的 Σ_1 的非空开子集，使得 U 在 K上是有限型的。

由于 U 是整且有限型的，根据 [Vak25，定理 21.6，4] U 在 K上一般光滑，从而证明了关于 U的断言。□

命题 3.3。设 $\Sigma=$谱 $K\{x_1,\dots,x_n\}/[u_1,\dots,u_n]$，并设 Σ_1 是 Σ 的一个不可约分支，使得 Σ_1 一般约化且具有有限的克鲁尔维数。设 $\eta_1\in\Sigma_1$ 为泛点。则维数(Σ_1) =维数$(T\Sigma_{\eta_1})$。

证明。由命题3.2，存在一个非空开子集 $U\subseteq\Sigma_1$，使得 U 在 K 上光滑。于是

$$\dim(\Sigma_1)=\dim(U)=\dim(TU_{\eta_1})=\dim(T(\Sigma_1)_{\eta_1})=\dim(T\Sigma_{\eta_1})$$

第二个等号成立是因为 U 光滑，且各种局部化运算具有其余的交换性。□

4. Tangent Bundles of Differential Schemes and Linearization

设 $\Sigma=$谱 $K\{x_1,\dots,x_n\}/[u_1,\dots,u_n]$，并设 Σ_1 是一个一般约化的不可约分支。由于 Σ_1 一般光滑（命题 3.2），其维数等于其泛点处切空间的维数（命题 3.3）。

在本节中，我们证明微分点 η 处的 Σ 的切空间 $T\Sigma_\eta$ 同构于我们在 η处的微分方程的“扰动空间” $L[\Sigma,\eta]$ （即线性化）。推论 4.6 将表明二者同构。此外，我们还将证明，定义 $L[\Sigma,\eta]$ 的线性微分方程的雅可比数由原始雅可比数 J（u_1，……， u_n）界定（命题 4.11）。由于 Ritt 已证明雅可比界猜想的线性情形 [Rit35], ，将这些结果汇总起来（第 5 节）即可证明 dim Σ_1 由 J（u_1，……， u_n）界定，从而证明 Σ_1 的 JBC。

4.1. 切丛的维数。设 $I=[u_1,\dots,u_n]$，其中 u_1，……， $u_n\in R=K\{x_1,\dots,x_n\}$, $A=R/I$, $\Sigma=$谱 A，并设 Σ_1 是 Σ 的一个不可约分支，使得 Σ_1 一般约化且具有有限克鲁尔维数。根据命题3.2，存在一个非空开集 $U\subset\Sigma_1$，使得 U 在 K上光滑。

令 $\Omega^{A/K}$ 为 K¨ahler 微分的 A-模，并令 $\Omega^1_{\Sigma/K}=\widetilde{\Omega^{A/K}}$ 为相对微分层。由于 U 光滑，$(\Omega^1_{\Sigma/K})|_U=\Omega^1_{U/K}$ 局部自由；又由于 U 在 η 处光滑，根据 [Har77, III.10],

$$\dim\Sigma_1=\dim U=\operatorname{rk}\Omega^1_{U/K}. \tag{2}$$

接下来，$\Omega^1_{\Sigma/K}$ 是一个层，但我们也可以等价地考虑“实际的”切丛 $\pi\colon T\Sigma\to\Sigma$。

定义 4.1. Σ 的切丛 $T\Sigma$ 定义为 $T\Sigma=$Spec(Sym($\Omega^{A/K}$))，其中 Spec 是全局谱函子，Sym 是对称代数。

由于 U 在 K 上光滑且 $\Omega^1_{\Sigma/K}$ 是局部自由的，根据 [Har77, II, 习题 5.18] ，对于任意 $\eta\in U$,

$$\operatorname{rk}\Omega^1_{U/K}=\dim\pi^{-1}(\eta). \tag{3}$$

注 4.2。 设 Σ 是域 K上的一个 D-概形。微分切空间还有另外两种定义，我们将不采用它们。这两种定义都是逐点的；由于对我们而言，重要的是微分切空间的定义所给出的方程是一阶扰动，即我们的非线性微分方程的一阶扰动（见方程（6）），因此在它们适用的点处，这些定义与我们的定义是等价的。

对于概形 X，点 $x \in X$ 处的扎里斯基切空间定义为 $\kappa(x)$-向量空间 m_x/m_x^2 的对偶空间。Kolchin 采用扎里斯基切空间的方法来处理 Σ 处的切空间，并得到了相同的公式 (6)。参见 [Kol73，第 198] 页。这种处理方式也见于 [PZ03，第 5 页 Fact 1 之前。1]注意，给出一个点 $\mathrm{Spec}(F[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle) \to X$ 等价于给出一个点 $x \in X(F)$，满足 $\kappa(x) = F$，以及一个元素 T_x [Har77，第 II 章，问题 2。8]。

另一种方法是将点处 x 的切空间定义为 $\mathcal{O}_{X,\,x}$ 的导子。 [Kol86，第 VII 章第 2 节，第 197] 页采用了这种方法。在 [Kol86，第 198] 页末尾，他们从这一角度再次得到了 (6)。这些方程也见于 [Kol86，第 V 章第 20 节，第 334] 页。

4.2. **可数多个变量下的概形线性化**。 在 4.1 中，我们使用对称代数定义了 $\Sigma \to \mathrm{Spec}(K)$ 的切丛。另一种等价的定义方式是通过微分方程的一阶扰动，在点函子层面给出如下定义：

$$T\Sigma(B) = \Sigma(B[\varepsilon]/(\varepsilon^2), \partial)$$

其中 B 是一个 K-代数。我们将此函子记为 $L[\Sigma]$，并在命题 4.5 中证明它与$T\Sigma$一致。

暂时从微分代数转到交换代数，设 $B = K[x_1, x_2, \ldots]$ 是一个有可数多个变量的多项式环，设 $J \subseteq B$ 是一个理想，设 $C = B/J$，并设 $X = \mathrm{Spec}\, C$。对于 $u \in J$，定义 $L[u]$ 为

$$L[u] := \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} y_i \in C[y_1, y_2, \ldots] \tag{4}$$

其中 $C[y_1, y_2, \ldots]$ 对此前的每个变量 x_i 都有一个新变量 y_i。

注 4.3。 将 $x + \varepsilon y$ 代入 u，假设 $\varepsilon^2 = 0$ 且x 是 u 的一个解，然后收集 ϵ 项，即可得到方程 4。换言之，方程 4 是一阶扰动所得到的方程。

对于 $\eta \in X$（对应于素理想 P），定义 $L[u, \eta]$ 为 $L[u]$ 在域 $\kappa(\eta)$ =Frac(B/P) 中的像（即“在 η处计算 $L[u]$ ”）；这等于

$$L[u, \eta] := \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(\eta) y_i \in \kappa(\eta)[y_1, y_2, \ldots].$$

定义 $L[J]$ 为理想 $\langle L[u] : \ u \in J\rangle$，并定义 $L[J, \eta]$ 为理想 $\langle L[u, \eta] : \ u \in J\rangle$。

定义 4.4。 设 $B = K[x_1, x_2, \ldots]$ 为具有可数多个变量的多项式环。设 $J \subseteq B$ 为一个理想，且设 $C = B/J$。令 $X =$Spec(C)。我们将 $L[X]$ 定义为 Spec $C[y_1, y_2, \ldots]/L[J]$，并将 $L[X, \eta]$ 定义为 Spec $\kappa(\eta)[y_1, y_2, \ldots]/L[J, \eta]$。

命题 4.5。 设 $B = K[x_1, x_2, \ldots]$ 是一个有可数多个变量的多项式环。设 $J \subseteq B$ 是一个理想，并设 $C = B/J$。映射 $dx_i^{(j)} \mapsto y_i^{(j)}$ 定义了一个 C-代数同构 Sym$(\Omega^{C/K}) \to C[y_1, y_2, \ldots]/L[J]$。

证明。 元素 $dx_i^{(j)}$ 和 y_i 分别作为 C-代数生成 Sym$(\Omega^{C/K})$ 和 $C[y_1, y_2, \ldots]/L[J]$。我们声称此映射使两边的关系相对应。由于 $\Omega_{C/K} \cong \Omega_{B/K}/\Omega^{J/K}$

$$\Omega_{C/K} \cong \Omega_{B/K}/\Omega_{J/K},$$

只需注意，对于 $u \in J$，

$$du = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i \mapsto \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} y_i = L(u).$$

□

4.3. 的线性化概形。现在考虑形如 $C = K\{x_1, \ldots, x_n\}/I$ 的微分环，即在 K 上为 ∂-有限型的微分 (K, ∂)-代数。这给出如下结果。

推论 4.6. 设 Σ 是 谱(K) 上的仿射 D-概形，且为 ∂-有限型。概形 $T\Sigma \to L[\Sigma]$ 作为 Σ-概形同构：存在函子同构 $T\Sigma \to L[\Sigma]$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} T\Sigma & \longrightarrow & L[\Sigma] \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\nu} & \\ & \Sigma & \end{array}$$

可交换。 特别地，对于所有 $\eta \in \Sigma$， $T\Sigma_\eta = \pi^{-1}(\eta) \cong \nu^{-1}(\eta) = L[\Sigma]_\eta$，且 维数 $T\Sigma_\eta =$维数 $L[\Sigma]_\eta$.

设 η 是 $\Sigma =$Spec$(K\{x_1, \ldots, x_n\}/I)$ 的一个点。于是通过特化得到一个同构

$$L[\Sigma]_\eta \cong \operatorname{Spec} \kappa(\eta)\{y_1, \ldots, y_n\}/L[I, \eta]. \tag{5}$$

我们暂停片刻，记录式 (4) 在微分多项式和微分点情形下的一种特殊形式。设 $u \in K[x_1, \ldots, x_n]^{(r)} = K[x_i^{(j)} : 1 \le i \le n, 0 \le j \le r]$。记 $x = (x_1, \ldots, x_n)$。设 $\eta \in \Sigma$ 是一个微分点。令 $y = (y_1, \ldots, y_n)$ 为一组新的微分不定元。我们有

$$0 = u(\eta + \varepsilon y) = u(\eta) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nabla^r x}(\eta) \cdot \nabla^r(y) = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nabla^r x}(\eta) \cdot \nabla^r(y),$$

其中

$$\nabla^r(x) = (x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{(r)}, x_2, \dot{x}_2, \ldots, x_2^{(r)}, \ldots, x_n, \dot{x}_n, \ldots, x_n^{(r)}),$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nabla^r x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial \dot{x}_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_1^{(r)}}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial \dot{x}_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_2^{(r)}}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial \dot{x}_n}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n^{(r)}} \right),$$

这意味着线性化方程具有如下形式

$$\frac{\partial u}{\partial \nabla^r x}(\eta) \cdot \nabla^r(y) = 0. \tag{6}$$

于是我们有 $L[u, \eta] := \dfrac{\partial u}{\partial \nabla^r x}(\eta) \cdot \nabla^r(y)$。

现在我们来考察微分理想的线性化。设 $\eta \in \Sigma =$Spec $K\{x_1, \ldots, x_n\}/[u_1, \ldots, u_n]$ 是一个微分点。设 $I = [u_1, \ldots, u_n]$ 是 Σ的定义理想。我们知道，微分理想 I 的线性化是这些线性化的微分理想：

$$L[I, \eta] = [L[u_1, \eta], \ldots, L[u_n, \eta]]. \tag{7}$$

事实上， $L[\Sigma]_\eta$ 是一个微分概形：若 $u \in I$，则对方程 4 求导可得

$$L[u, \eta]' = L[u', \eta]. \tag{8}$$

注 4.7。 尽管在逻辑上证明我们的定理并不需要这一观察，但我们可以利用 $\Omega^{A/K}$ 上的 D-模结构以及由 (8) 给出的 D-模结构，将命题 4.5 中的同构提升为微分环态射。$\Omega^{A/K}$ 上的 D-模结构并非新颖，早在 [Joh69a]和[Oll22 的第 6]节中便已出现。

令 $\Sigma =$谱(A)，其中 $A = K\{x_1, \ldots, x_n\}/I$ 其中 I是一个微分理想。由命题 4.5 以及 Sym$(\Omega^{A/K})$ 是一个微分K-代数这一事实可知， $T\Sigma \to \Sigma$是 D-概形的态射。我们将 $L[f]$与 df等同，并利用 $\partial(df) = d(\partial(f))$ 与 (8)。

具体而言，在 $I = 0$ 的情形下，我们有

$$\operatorname{Sym}(\Omega_{K\{x_1, \ldots, x_n\}/K}) = K\{x_1, \ldots, x_n\}[dx_i^{(j)} : 1 \le i \le n, j \ge 0].$$

模 $\Omega^{K\{x_1, \ldots, x_n\}/K}$ 继承了 D-模的结构，其中 $\partial df = d\partial f$对所有 $f \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$均成立。在 $\Sigma =$Spec $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的情形下，有 $T\Sigma =$Spec $K\{x_1, \ldots, x_n\}\{y_1, \ldots, y_n\}$，此时我们可以将$y = (y_1, \ldots, y_n)$视为扰动展开 $x + \varepsilon y$ 中出现的额外变量。同构 Sym$(\Omega^{K\{x\}/K}) \to K\{x\}\{y\}$ 由 $dx_i^{(j)} \mapsto y_i^{(j)}$ 给出，并且它是 ∂-代数的同构。

$I \neq 0$ 的情形也可以类似地明确写出。我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}(\Omega_{A/K}) &= A[dx_i, d\dot{x}_i, d\ddot{x}_i, \ldots : 1 \le i \le n]/[du_i : 1 \le i \le n] \\ &\cong K\{x\}\{y\}/\left[I, \frac{\partial u}{\partial \nabla^\infty x} \cdot \nabla^\infty(y) : u \in I\right],\end{aligned}$$

A代数之间的同构由 $dx_i^{(r)} \mapsto y_i^{(r)}$ 给出。可以看出，由于 $du = \dfrac{\partial u}{\partial \nabla^\infty x} \cdot d\nabla^\infty(x)$，这个态射可以下降到商的层次。显然，这是理想之间的双射，因此该态射是微分 A代数的同构。

4.4. 线性化与雅可比界。 现在我们给出两个有限克鲁尔维数的微分概形 Σ 以及一个点 $\eta \in \Sigma$，使得 $L[\Sigma, \eta]$ 是无限维的。在例 4.8 中，不可约分支不是一般约化的。在例 4.9 中，该点不是泛点，且其底层不可约分支是一般约化的。

例 4.8。 继续例3.1，令 $A = K\{x\}/[x^2]$，并令 η 为约化 $\Sigma_{\mathrm{red}} \cong$谱 K的泛点（通过令每个 $x^{(i)} = 0$成立而给出）。那么 $L[x^2, \eta] = \frac{\partial u}{\partial x}(\eta)y = (2x|_\eta)\ y = (0)y = 0$，且 $L[\Sigma]_\eta =$谱 $K\{y\}$。特别地，Σ 的切丛是一个无限维仿射空间。

例 4.9。 考虑由 $u_1 = y^2 - x^3 = 0$和 $u_2 = x' = 0$给出的、含两个微分变量 x，y的方程组。该方程组的雅可比数为一。此外，概形 Spec $K\{x, y\}/[y^2 - x^3, x']$ 不可约但非约化。为说明这一点，注意到 $2yy' - 3x^2x' = 0$ 推出 $2yy' = 0$，进而推出 $yy' = 0$。再求一次导数，得到 $(y')^2 + yy'' = 0$。乘以 y' 得到 $(y')^3 = 0$（利用关系 $yy' = 0$）。取根基后，~~我们~~发现 $y' \in \sqrt{[y^2 - x^3, x']}$。因此

$$K\{x, y\}/\sqrt{[y^2 - x^3, x']} \cong K[x, y]/\langle y^2 - x^3\rangle,$$

其克鲁尔维数为一。

在 $\eta = (x_0,\ y_0) = (0,\ 0)$ 处，使用 $x = x_0 + \varepsilon x_1$和 $y = y_0 + \varepsilon y_1$进行线性化后，我们发现 $L[u_1, \eta] = 0$ 和 $L[u_2, \eta] = x_1'$。这个线性化系统的克鲁尔维数为无穷，微分维数为一。

仅对微分多项式取幂，也是构造非一般约化微分概形实例的另一种直接方法。事实上，如果 $I = [u_1, \ldots, u_n]$是一个微分理想，那么 $J = [u_1^{a_1}, \ldots, u_n^{a_1}]$就是一个非一般约化微分理想，且有 $\sqrt{I} = \sqrt{J}$。）在这类例子中，非约化性是“显而易见的”，显然应当研究 I，而不是 J。换言之，若从理想 J出发，那么计算根基时，先对生成元开方，再取$J(u_1$、.....、$u_n) \le J(u_1^{a_1}$、.....、$u_n^{a_1})$。

一般而言，“消除”非约化性并非易事，下面的例子便说明了这一点。

例4.10。 令 $J = \langle g_1$、g_2、$g_3\rangle = \langle s^2 + tu$、$t^2 + us$、$u^2 + st\rangle \subset K[s, t, u]$，并考虑（非微分）概形 谱 $K[s, t, u]/J$。从射影角度看，这三个圆锥曲线彼此不相交，因此作为仿射概形，它是一个单独的非约化点。每个元素都是幂零元；不过，要明确展示这一点，例如对于变量 s，可以考察以下簧关系

$$2s^4 = (2s^2 - tu)g_1 + u^2 g_2 - sug_3 \in J;$$

根据构造，J中没有任何元素的次数为 1，因此 $s \notin J$。

由此可以通过代入构造一个非约化的微分概形。例如，设 $f_1, f_2, f_3 \in K\{x_1, x_2, x_3\}$为任意微分多项式，并设 $u_i = g_i(f_1, f_2, f_3)$。那么由理想 $I = [u_1, u_2, u_3]$ 给出的微分概形不是一般约化的。此外，要计算 I的根基，首先必须承认 $\sqrt{I} \supset [f_1, f_2, f_3]$。$f_i$是任意的；因此有时我们会有 $\sqrt{I} = [f_1, f_2, f_3]$，但通常 $\sqrt{I}$ 会更大，并且需要三个以上的生成元。这带来了重大问题：

(1) 如果$\sqrt{I}$ 不是由三个元素极小生成的，我们就不再处于雅可比界猜想的情形中；更糟的是，(2) 即使 $\sqrt{I} = [f_1, f_2, f_3]$，一般也不知道 $J(f_1,\ f_2,\ f_3)$ 与 $J(u_1,\ u_2,\ u_3)$ 之间存在什么关系。

下面我们利用一般光滑性（命题 3.3）证明，例 4.8、4.9 和 4.10 中的这类情形不可能出现在一般约化分支的泛点处。

首先，我们证明，无论线性化是否为无限维，其雅可比数都不会增加。

命题 4.11（线性化下雅可比界不增）。设 K 为K的一个微分闭包。则以下结论成立。

（1）设 $u \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$。若 $\eta \in \widehat{K}^n$ 满足 $u(\eta) = 0$，则对于所有 x_j，都有 $\mathrm{ord}^{\partial}_{x_j} L[u, \eta] \leq \mathrm{ord}^{\partial}_{x_j}(u)$.

（2）设 $u_1, \ldots, u_n \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$。若 $\eta \in K^n$ 满足 $u_1(\eta) = u_2(\eta) = \cdots = u_n(\eta) = 0$，则

$$J(L[u_1, \eta], L[u_2, \eta], \ldots, L[u_n, \eta]) \leq J(u_1, \ldots, u_n).$$

此外，在 V 的柯尔钦开子集 U 上，我们有 $([u_1, \ldots, u_n])$

$$J(L[u_1, \eta], L[u_2, \eta], \ldots, L[u_n, \eta]) = J(u_1, \ldots, u_n),$$

对所有微分点 $\eta \in U$。

证明。下文中，我们用 $\max^+$ 表示有限集合与零中的最大值。对于 $K\{x_1, \ldots, x_n\}$，其序由公式给出：

$$\mathrm{ord}^{\partial}_{x_j}(u) = \max^+ \left\{ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \colon \frac{\partial u}{\partial x_j^{(r)}} \neq 0 \right\}.$$

由线性化公式 (6)，我们有

$$\mathrm{ord}^{\partial}_{y_j}(L[u, \eta]) = \max^+ \left\{ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \colon \frac{\partial u}{\partial x_j^{(r)}}(\eta) \neq 0 \right\}.$$

这意味着 $\mathrm{ord}^{\partial}_{x_j}(u) \geq \mathrm{ord}^{\partial}_{y_j}(L[u, \eta])$。这对 $1 \leq j \leq n$成立。现在我们有

$$\begin{aligned} J(L[u_1, \eta], L[u_2, \eta], \ldots, L[u_n, \eta]) &= \max_{\sigma \in S_n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{ord}^{\partial}_{y_j}(L[u_{\sigma(j)}, \eta]) \\ &\leq \max_{\sigma \in S_n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{ord}^{\partial}_{x_j}(u_{\sigma(j)}) \\ &= J(u_1, \ldots, u_n). \end{aligned}$$

线性化后雅可比数不下降的柯尔钦开子集，是由满足 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j^{(a_{ij})}} \neq 0$ where $a_{ij} = \mathrm{ord}^{\partial}_{x_j}(u_i)$ 的微分点 $\eta \in V([u_1, \ldots, u_n])$ 组成的。□

5. Proof of Main Theorem

现在我们证明定理 1.2。

令 $\Sigma = 谱(K\{x_1, \ldots, x_n\}/[u_1, \ldots, u_n])$。令 $\Sigma_1 \subset \Sigma$ 为一个一般约化的不可约分支，并令 $\eta \in \Sigma_1$ 为其泛点。根据第 4 节中的方程 (2) 和 (3)，由于 Σ_1 一般光滑，我们有

$$\dim(T\Sigma_\eta) = \dim(\Sigma_1).$$

根据推论 4.6，我们有 $T\Sigma_\eta \cong L[\Sigma, \eta]$。现在，$L[\Sigma, \eta]$ 是一个线性微分簇，根据方程 (7)，其定义理想为 $[L[u_1, \eta], \ldots, L[u_n, \eta]]$。

$$\dim(L[\Sigma, \eta]) \leq J(L[u_1, \eta], \ldots, L[u_n, \eta]).$$

根据命题 4.11，$J(L[u_1, \eta], \ldots, L[u_n, \eta]) \leq J(u_1, \ldots, u_n)$，由此我们得出 t

$$\dim(\Sigma_1) \leq J(u_1, \ldots, u_n).$$

6. Applications

现在我们使用线性化技术重新证明 [LL16，定理 23] 。这是关于特征序列的雅可比界猜想。在这种情况下，我们得到等号成立。

推论 6.1. 设 $R = K\{x_1, \dots, x_n\}$。设 $P \subset R$ 是一个素微分理想，且 $\operatorname{trdeg}_K^{\partial}(R/P) < \infty$。若 $(g_1, \dots, g_n)$ 是 P 关于某个排序 $\prec$ 的特征集，那么

$$\operatorname{trdeg}_K^{\partial}(R/P) = J(g_1, \dots, g_n).$$

证明。 设 S 表示由 g_i 的初式和分离式生成的乘法集。根据特征集的定义，我们有

$$P = \operatorname{sat}_S([g_1, \dots, g_n]) \tag{9}$$

其中 sat 表示关于乘法集 S 的饱和化。设 ℓ_i 表示 g_i 的主元。由于 $S \cap P = \emptyset$，我们有 $\partial g_i / \partial \ell_i \notin P$；又由于特征集中所有元素的首变量各不相同， $[g_1, \dots, g_n]$ 在 P 处具有良线性化。

注意，在此情形下， $J(g_1, \dots, g_n)$ 就是 Ritt界，也就是每一列的最大值，因为每个元素都关于其他每个元素约化，且首变量各不相同。

此外，在这种情况下，维数恰好等于雅可比界 [CH03，定理 4.5 及其下文讨论]。□

推论 6.1 表明，对于任意给定的显式微分方程组 $u_1, \dots, u_n \in K\{x_1, \dots, x_n\}$，都可以通过计算机算法有效地判定雅可比界猜想是否成立。

推论 6.2。 </style}判定给定的微分方程组 $(u_1, \dots, u_n)$ 在 $K\{x_1, \dots, x_n\}$ 中是否满足雅可比界猜想的问题是可判定的。

证明。 给定 $[u_1, \dots, u_n]$，我们可以运行 Rosenfeld–Gr¨obner 算法，提取$\sqrt{[u_1, \dots, u_n]}$的素分解。Rosenfeld–Gr¨obner 算法的输出是与$\sqrt{[u_1, \dots, u_n]}$ 相关联的一组特征集——其中每一个都定义了一个如 (9) 中所示的素微分理想。由于对于与素理想 P相关联的每个特征集 $(g_1, \dots, g_n)$，根据推论 6.1，对于 P 有限维的情形（那些不具有有限克鲁尔维数的特征集，其长度将小于 n），我们恰有 $\operatorname{trdeg}_K^{\partial}(R/P) = J(g_1, \dots, g_n)$，因此我们可以将 $J(u_1, \dots, u_n)$ 与有限个 $J(g_1, \dots, g_n)$ 逐一比较，从而判断这个例子中雅可比界猜想是否成立。□

References

[AM69] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley 出版公司，雷丁，马萨诸塞州—伦敦—唐米尔斯，安大略省，1969。MR 242802[BCP97] Wieb Bosma、John Cannon 和 Catherine Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, 第 24 卷，1997，1993 235 265 计算代数与数论（伦敦，），第 – 页。MR [93] *Effective bound for the geometric Lang conjecture* **71** Bui Alexandru Buium，, 《杜克数学杂志》（1993），第 2 期，475–499。MR 1233446[Bui94] , *Differential algebra and Diophantine geometry*, 《数学时讯》。[当前数学专题], Hermann，巴黎，1994 1487891 。MR CH Thomas Cluzeau 和 Evelyne Hubert, [03] *Resolvent representation for regular differential ideals*, 《应用代数、工程、通信与计算》（**13** 2003 5, 395 425 1959171 ），第 – 期。MR Coh Richard M. Cohn, [80] *The Greenspan bound for the order of differential systems*, 《美国数学会会刊》**79** （1980），第 4 期，523–526。MR 572294[DZB26a] Taylor Dupuy 和 David Zureick-Brown, *The dimension conjecture implies the jacobi bound conjecture*, 预印本（2026）。[DZB26b] Taylor Dupuy 和 David Zureick-Brown, *magma_diff_alg*, 2026，GitHub:tdupu/magma-diff-alg [Gre58] Bernard Greenspan, *A bound for the order of the zero-dimensional component of a system of algebraic difference equations* 1958, , ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，博士论文——罗格斯新泽西州立大学新不伦瑞克分校。MR 2612691[Gre59] , *A bound for the orders of the components of a system of algebraic difference equations*, 《太平洋数学杂志》**9** （1959—473 486 109153 ），–。MR Har Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, 《数学研究生教材》第 52 号，施 [77] 普林格出版社，纽约—海德堡，1977 463157 。MR Hru Ehud Hrushovski, [04] *The elementary theory of the Frobenius automorphisms*, arXiv 预印本 math/0406514（2004）。

[Hub00] Evelyne Hubert, *Factorization-free decomposition algorithms in differential algebra*, 第 29 卷，2000，代数、分析与几何中的符号计算（加利福尼亚州伯克利，1998）, 641–662, 1769659）, 第 – 页。MR Jac 卡尔·古斯塔夫·雅各布·雅可比, [09] *The reduction to normal form of a non-normal system of differential equations. De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando*, 《应用代数、工程、通信与计算》20（2009）, 第 1 期，33–64，由Fran.cois Ollivier根据拉丁文手稿译出，Sigismund Cohn、C. W. Borchardt 和 A. Clebsch 编。MR 2496660[JB65] C. G. J. Jacobi 和 C. W. Borchardt, *De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque*, **64** 1865, 297–320, 《纯粹与应用数学杂志》（）, –。MR 1579301[69] *Kähler differentials and differential algebra*, Joh a Joseph Johnson, , 《数学年刊》（2）, **89** 1969, 92–98, 238823）（）, –。MR Joh b , , [69] *A notion of Krull dimension for differential rings*, **44** 1969, 207–216, 《日内瓦数学评论》（）, –。MR 242800[74] *Kähler differentials and differential algebra in arbitrary characteristic*, **192** 1974, Joh , , 《美国数学会汇刊》（）, 201–208。MR 335482[Kap76] Irving Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, 第二版，南卡冈戈大学数学研究所出版物，第 V 卷，Hermann，巴黎，1976，《科学与工业实用丛书》第 1251 号。[ ] 460303 当前科学与工业专题。MR KMPe M. V. Kondratrieva、A. V. Mikhalev 和 E. V. Pankratprime ev, [08] *Jacobi's bound for systems of algebraic differential equations*, **14** 2008, 4, 151–166, 2482039, 《基础与应用数学》（）, 第 – 期。MR [KO06] Marina Kondratieva 和 Alexey Ovchinnikov, *On Computation of Kolchin Characteristic Sets: Ordinary and Partial cases*, 0606124 2006, , arXiv 预印本 math/（）。[Kol68] E. R. Kolchin, *Some problems in differential algebra*, 国际数学家大会论文集（莫斯科，1966）, Izdat. "Mir", 莫斯科，1968，第 269–276 页。MR 237476[Kol73] , *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press，纽约—伦敦，1973，《纯粹与应用数学》，第 54 卷。MR 0568864[Kol86] , *Differential algebraic groups*, 《群论》, 北京 1984，《数学讲义》，第 1185 卷，Springer，柏林，1986，第 155–174 页。MR 842443[Lan69] Barbara A. Lando, *Jacobi's bound for the otder of systems of first order differential or difference equations*, ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，1969，博士论文——罗格斯新泽西州立大学新不伦瑞克分校。MR 2618170[Lan70] , *Jacobi's bound for the order of systems of first order differential equations*, 《美国数学会汇刊》152（1970, 119–135, 279079）, –。MR Lan , [72] *Jacobi's bound for first order difference equations*, **32** 1972, 8–12, 289474 , 《美国数学会会刊》（）, –。MR LL Wei Li 和 Ying-Hong Li, , 《应用数学进展》, **72** 2016, 77–112, 3424597 （）, –。MR Oll [16] *Computation of differential Chow forms for ordinary prime differential ideals*, Francois Ollivier, [09] *Jacobi's bound and normal forms computations. A historical survey*, arXiv 预印本 arXiv:0911.2674（2009）。[Oll22] , *Jacobi's Bound: Jacobi's results translated in Kőnig's, Egerváry's and Ritt's mathematical languages*, 《工程、通信与计算中的应用代数》（2022）, 1–93。[OS07] Fran.cois Ollivier 和 Brahim Sadik, *La borne de Jacobi pour une diffiété définie par un système quasi régulier*, 《巴黎科学院数学报告》, **345** 2007, 3, 139–144, 2344812 （）, 第 – 期。MR PZ Anand Pillay 和 Martin Ziegler, [03] *Jet spaces of varieties over differential and difference fields*, 《精选数学》（新系列）, **9** 2003, 4, 579–599, 2031753 （）, 第 – 期。MR Rit J. F. Ritt, [35] *Jacobi's problem on the order of a system of differential equations*, 2 **36** 1935, 2, , 《数学年刊》（）（）, 第 – 期。MR [Tom76] Joseph Stephen Tomasovic Jr., 303–312, 1503224, *A generalized Jacobi conjecture for arbitrary systems of algebraic differential equations*, 1976, , 2626353, ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，博士论文——哥伦比亚大学。MR [Vak25] Ravi Vakil, *The rising sea—foundations of algebraic geometry*, 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，[2025] ©2025。MR 4942570