维数猜想蕴含雅可比界猜想

Taylor Dupuy、David Zureick-Brown

Abstract. 我们证明，维数猜想蕴含雅可比界猜想。

arXiv:2603.17992v1 [math.AG] 18 Mar 2026

Contents

1. 引言 1 2. 背景 7 3. 维数猜想 11 4. Ritt循环技巧 14 5. Ritt 约化：保持 Jacobi 数不变的除法 15 6. 第一形式的存在性 19 7. 填补 Ritt 的空缺：第二形式的存在性 19 8. Ritt 线性情形的证明 23 9. 关于微分线性系的一般论述 25 10. Ritt 铅笔技巧 26 11. 维数猜想蕴含雅可比界猜想 28 参考文献 30

1. Introduction

本文表明，代数微分方程维数理论中的两个核心问题——维数猜想和雅可比界猜想——是等价的。本文证明了其中一个方向，即维数猜想蕴含雅可比界猜想。

这两个猜想都涉及多个因变量 $x_1(t)\ x_2(t)\ldots,x_n(t)$ 的常微分代数方程非线性系统的解的行为，其中系数取自单个复变量 t 的亚纯函数域。这些猜想基于这样一种直觉：应当界定此类非线性方程组的不可约分支的一般解所需参数的数量和类型。一类参数是解可以依赖于复变量的任意函数，另一类参数则是解可以依赖于积分常数。

虽然为了面向普通读者，我们暂且以解析的方式进行讨论，但需要明确的是，这些猜想是从代数角度而非解析角度回答这些问题的；与一般非线性方程组 Σ 相关的微分维数 $\dim^{\partial}(\Sigma)$ 和维数 $\dim(\Sigma)$，正是对经典上所称的“解所依赖的复变量任意函数的数量”和“解所依赖的积分常数的数量”给出的“正确”定义。不变量 $\dim(\Sigma)$ 是“积分常数的数量”的代数替代，而不变量 $\dim^{\partial}(\Sigma)$ 则是“复变量任意函数的数量”的代数替代。

维数猜想作为 Ritt 在其《微分代数中的一些问题》未解决问题列表中的第十个问题出现 [Rit50, Appendix]。直观地说，它指出，如果一个常微分方程组的方程数量少于因变量数量，那么任一分支的一般解都必须至少依赖于一个复变量 t 的自由亚纯函数。在严格的代数表述中，这转化为一个关于微分维数的命题。

Date: 2026年3月19日。

雅可比界猜想作为 Ritt 的第十一个问题出现在 [Rit50] 中，也作为 Kolchin 的问题 3B 出现在 Kolchin 的《微分代数中的一些问题》中；该文伴随他的 1968 年国际数学家大会报告发表 [Kol68]。[1] 这个猜想基于 Jacobi 一份手稿中的陈述 1865 [JB65, Jac09]，讨论的是因变量数量与微分方程数量相等的情形：如果

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_n = 0,$$

若 n 是关于单个复变量 t 的非线性微分方程组，其依赖函数为 $x_1(t)\ x_2(t)\ldots, x_n(t)$，那么，一个有限维不可约分支的一般解 $(x_1(t)\ x_2(t)\ldots, x_n(t))$ 所需的积分常数个数，有一个称为雅可比界 $J(u_1, \ldots, u_n)$ 的显式常数作为上界，该常数由下式给出

$$J(u_1, \ldots, u_n) = \max_{\rho \in S_n} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ord}^{\partial}_{x_i}(u_{\rho(i)}). \tag{1.1}$$

这里，S_n 是 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的置换所构成的对称群，而 $\operatorname{ord}^{\partial}_{x_i}(u_j)$ 是方程 u_j 中出现的 x_i 的最高阶导数。

后来，Ritt 在 1935 [Rit35] 中意识到，Jacobi 的说法并未对“积分常数的个数”[2] 给出严谨定义，于是提供了一种基于超越次数的定义。这就是此前讨论过的不变量 $\dim(\Sigma)$。在其论文 [Rit35], 中，Ritt 将此列为一个未解决问题，并证明了该猜想的若干情形。

按照微分代数中的惯例，我们现在转向一般的微分域，并以代数方式进行处理，以给出我们的形式化陈述。令 (K, ∂) 为一个特征零的微分域。记 $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 为 K 上的微分多项式环。

猜想 1.1（雅可比界猜想 [Kol68]）。令 K 为一个特征零的微分域。令 $u_1, u_2, \ldots, u_n \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$。令 $\Sigma = \operatorname{Spec} K\{x_1, \ldots, x_n\}/[u_1, \ldots, u_n]$. 令 Σ_1 为 Σ 的一个不可约分支。假设 $\dim^{\partial}_K(\Sigma_1) = 0$。则 $\dim_K(\Sigma) \leq J(u_1, \ldots, u_n)$。

方程 (1.1) 中给出的雅可比界 $J(u_1, \ldots, u_n)$，并且在猜想 1.1 中出现，有两种形式：弱界和强界。因此，根据我们对 $\operatorname{ord}^{\partial}_{x_i}$ 所采用的是弱约定还是强约定（它们分别给出弱界和强界），雅可比界猜想也称为弱雅可比界猜想或强雅可比界猜想；弱约定规定，在微分多项式 f 中既不出现 y，也不出现其任何导数时，$\operatorname{ord}^{\partial}_y(f) = 0$；而强约定在这种情况下规定 $\operatorname{ord}^{\partial}_y(f) = -\infty$（见第 2.3 节）。

弱雅可比界猜想和强雅可比界猜想目前都尚未解决；强雅可比界猜想蕴含弱雅可比界猜想，这仅仅是因为强雅可比界小于或等于弱雅可比界。

猜想 1.2（维数猜想 [Coh83] [Rit50, 第 178][3] 页）。设 K 是特征为零的微分域。设 $u_1, \ldots, u_m \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$。设

$$\Sigma = \operatorname{Spec} K\{x_1, \ldots, x_n\}/[u_1, \ldots, u_m].$$

若 $m < n$，则对于 Σ 的每个不可约分支 Σ_1，都有 $\dim^{\partial}_K(\Sigma_1) \geq n - m$。

已知，雅可比界猜想的强版本蕴含维数猜想 [Coh83]。[4]我们证明反向蕴含也成立。

定理 1.3. 假设 K 是一个微分闭域。假设维数猜想成立。那么雅可比界猜想成立。

[1]在 [Kol68] 第 3 节中有三个用斜体标出的题目。我们将它们称为 3A、3B 和 3C。[2]Jacobi 和 Ritt 本人用“序”一词来指称这个未定义的维数概念。此外，Jacobi 没有分支的概念，也从未使用过“雅可比界”一词。Ollivier 的精彩论文 [Oll22] 中，以现代术语对 Jacobi 所做和未做之事作了详尽说明。[3]Cohn 没有提及 Ritt 的表述，而是将其归于 Lando，因此这可能是该猜想的一个独立表述。[4] 假设强 JBC 成立，并考虑 $[u_1, \ldots, u_m] \subset K\{x_1, \ldots, x_n\}$，其中 $m < n$。设 P 是包含 $[u_1, \ldots, u_m]$ 的一个极小素理想。将 $u_{m+1} = u_{m+2} = \cdots = u_n = 0$ 添加入方程组。于是 $J(u_1, \ldots, u_n) = -\infty$；并且，如果 $\kappa(P)$ 根据 JBC 是有限维的，那么有 $\operatorname{tr\,deg}_K(\kappa(P)) < -\infty$，这不可能成立。因此 $\operatorname{trdeg}^{\partial}_K(\kappa(P)) > 0$。这种形式的维数猜想与我们陈述的形式等价。

1.1. 证明策略。雅可比界猜想的一种归纳方法如下。设 $\Sigma \subset \mathbb{A}^n_\infty$ 是由下式给出的方程组

$$\Sigma\colon \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \cdots, \quad u_n = 0$$

其中 $u_1, \ldots, u_n \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$，并令 $P \supset [u_1, \ldots, u_n]$ 为一个极小素理想，对应于一个不可约分支 $\Sigma_1 \subset \Sigma$。我们希望用一个更简单的方程组替换（或修改）它

$$\Sigma'\colon \quad v_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \cdots, \quad v_n = 0$$

使得 $J(v_1, \ldots, v_n) \leq J(u_1, \ldots, u_n)$，然后进行归纳。

为了进行归纳，我们希望 P 仍然是新系统的一个极小素理想。实现这一点的一种自然（但并非唯一）方法是使用 Ritt 除法（定义 2.18）。例如，如果 u_2 比 u_1 "低"（例如，如果 u_1 中出现的 x_1 的最高阶导数高于 u_2 中出现的 x_1 的最高阶导数），那么 Ritt 除法给出

$$su_1 = Q(u_2) + v_1, \tag{1.2}$$

其中 $s, v_1 \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$, Q 是一个微分算子，且 v_1 比 u_1 低（按照定义 2.15 的含义）。

那么，自然可以将方程组 $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ 替换为 $[v_1, u_2, \ldots, u_n]$。由于 $u_1, Q(u_2) \in P$, $v_1 \in P$也成立，因此 $P \supset [v_1, u_2, \ldots, u_n]$。

主要问题：要从这里开始归纳，我们需要以下命题成立：

(1) $J(v_1, u_2, \ldots, u_n) \leq J(u_1, u_2, \ldots, u_n)$，以及

(2) $P \supset [v_1, u_2, \ldots, u_n]$ 仍然是一个极小素理想。

Nei一般而言，这些命题都不成立；本文的大部分内容都在处理这两个问题。 s.

将 Ritt 线性情形的证明推广到非线性情形：由于 v_1 "低于" u_1，人们可能会认为雅可比数不会增加。事实远非如此；例如参见例5.2。

重新审视黎特对 JBC 线性情形的证明 [Rit35, pg 310], ，我们发现黎特采用了类似的"约化算法"，但对允许进行的除法施加了严格限制。具体而言，黎特指出了线性情形下的两种情况，在这些情况下可以进行 Ritt 除法而不增加雅可比数。本文无条件地说明了如何将这两种操作推广到非线性情形，并弥补了黎特证明中的一个重大漏洞。见命题 5.3 和 5.4。我们将这两种情况称为 Ritt 第一形式和 Ritt 第二形式（定义 5.1）。

分支的移动：更一般而言，第二个问题是，修改定义方程组的方程时，新系统的不可约分支可能会发生变化。具体来说，虽然我们所做的操作保证 P 仍是新系统的一个素理想，但 P 通常不再是新系统的极小素理想。

这比乍看之下似乎的情形要严重得多。

引理 8.2 处理了一种简单情形：如果分离子 s （即方程（1.2）中的"s"）在 Σ_1 （即 $s \notin P$）上不处处泛零，那么一切顺利：我们的运算是"局部可逆的"，而且 P 仍然是新方程组的一个极小素理想。线性微分方程组满足引理 8.2（因为它们的分离式是常数），这使我们能够恢复 Ritt 对 JBC 线性情形的证明 [Rit35，第 310] 页（见第 8 节）。

退化情形：当 $s \in P$ （即该分支上的分离子处处泛零）时，情形要困难得多。我们称之为退化情形（定义 10.1）。尽管 P 可能不再是极小的，但它仍包含新方程组的某个极小素理想 $P \supset P' \supset [v_1, \ldots, v_n]$，以及相应的不可约元 $\Sigma_1 \subset \Sigma'$，因而 $\dim\ \Sigma_1 \leq \dim\ \Sigma'$。乍看之下，使用 P'进行归纳似乎就足够了；也就是说，JBC 仍应蕴含 $\dim\ P' \leq J$（v_1, ..., v_n），这将给出

$$\dim \Sigma_1 \leq \dim \Sigma' \leq J(v_1, \ldots, v_n) \leq J(u_1, \ldots, u_n).$$

关于 JBC 的许多论证中一直存在的问题是，无法保证 P' 是有限维的（而这正是 JBC 假设的一部分）。

目前我们所知，只有少数几种情形可以直接证明 $\dim \Sigma'$ 有限。最"简单"的情形是 $n = 1$ （见引理 2.28）。

另一个相当直接的情形是阶数矩阵为“热带上三角”，即具有如下形式

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -\infty & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & -\infty & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

这一情形可通过直接归纳法得到，类似于我们证明定理11.1时内层归纳的基本情形。

圆柱技巧：一个更为特殊的情形（Ritt 在其关于 JBC[Rit35] 的二元情形的证明中指出）是， Σ_1 包含于“圆柱交”中。这里的意思是，存在仅含一个（微分）变量的多项式 $M_1(x_1)$.....、 $M_n(x_n) \in P$。在此情形下，dim Σ_1 至多等于 $[M_1(x_1)$.....、 $M_n(x_n)]$, 的不可约分支的维数，而后者显然是有限维的（相关解释见证明定理 10.6 的末尾）。

要构造出这样的多项式 M_i并不直接。Ritt 在 [Rit35] 中关于 JBC 二元情形的证明里巧妙地完成了这一点。首先，我们不再用余式替换 u_1 ，而是用其分离子替换它，并考虑方程组 $[s, u_2, \ldots, u_n]$。这样做有其优点：由于 s“显然”低于 u_1,

$$J(s, u_2, \ldots, u_n) \leq J(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

并且由于 $s \in P$（根据我们对“退化情形”的假设）， $P \supset [s, u_2, \ldots, u_n]$。

不过，问题仍然在于， P 可能不再是极小素理想。

退化与 Ritt 铅笔技巧：为处理这一问题，Ritt 引入了一种退化。与其只考虑 s，他不如确定一个自然的第三个多项式 t ，使得 $t \in P$ （见方程（10.1））。于是，对于任意 $\mu \in K$， $t + \mu s \in P$。改变 μ 便得到一族 $[t + \mu s, u_2, \ldots, u_n]$ 微分理想，它们都包含于 P中。Ritt 证明，对于大多数 μ， P 包含一个有限维的极小素理想 P_μ 。证明 P_μ 是有限维的，采用的是上述圆柱技巧；也就是说，Ritt 能够在 P_μ中产生足够的 M_i（x_i）$'s$ 。

我们将这一技巧称为 Ritt 铅笔技巧。

Ritt 铅笔技巧的推广：本文的主要贡献之一是证明，若假设维数猜想成立，那么经过大量工作，Ritt 铅笔技巧可以推广到任意多个变量，从而以类似方式绕过此类“退化情形”。

这支铅笔是 $\mathbb{A}^n_\infty$ 的微分子概形构成的微分代数铅笔，我们称之为 Ritt 铅笔Γ （定义 10.2）。本质上，它包含了将 Σ_1 的方程化简为更低阶形式的所有合理方法，而不仅仅是用分离子替换一个方程。它是一个微分代数映射

$$\Gamma \to \mathbb{A}^1_\infty = \operatorname{Spec} K\{y\}.$$

请注意，两边都是非诺特的，并且具有无限 Krull 维数。

对于 Ritt 铅笔（图1），我们可以证明，原分支 Σ_1 位于基轨迹内，且基轨迹包含于原微分代数簇 Σ 中:

$$\Sigma_1 \subset \mathrm{BS}(\Gamma) \subset \Sigma.$$

接下来，我们分析包含 Σ_1 的 Γ 分支。这个分支可能是移动的，也可能是固定的，因此需要分别处理这两种情形。相关内容见第9节和第10节。维数猜想的关键应用在于证明纤维 Γ_μ 的一个适当分支具有有限绝对维数，这同样是借助圆柱技巧实现的。

为凸显这一结果的新颖之处，我们提醒读者，在微分代数几何中，我们没有射影空间，也没有线丛理论可供依凭，没有类似塞尔消失定理的上同调消失定理，这些族也不具备平坦性，我们的环不是域上的有限型环，甚至不是诺特环。

特别值得关注的是 Σ_1 包含在一个正在移动的 Γ 分支中的情形。黎特的论证在这里非常具体地针对二元情形，他的方法无法推广到更多变量。在第11节中，我们将说明如何结合维数猜想与一些微分代数消去理论来推广这一论证。值得一提的是，在 [Rit35], 的时代，

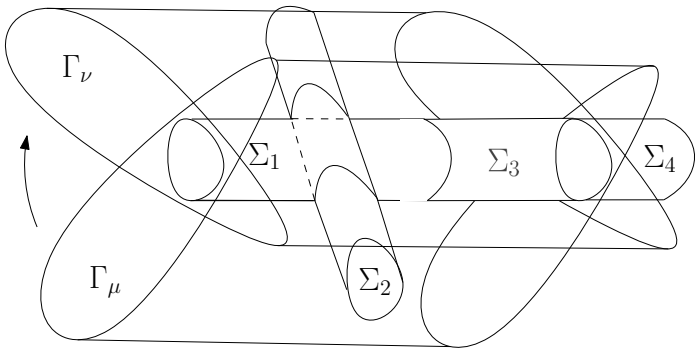


FIGURE 1.一个 Ritt 铅笔。我们已将 Σ 写成不可约分支Σ_1、Σ_2、Σ_3、Σ_4的并。铅笔 Γ 的纤维 Γ_μ和 Γ_ν的交集包含一个基轨迹。该基轨迹包含于 Σ 中，并包含 Σ_1。

特征集理论尚未发展起来；特别是，我们所使用的消元理论当时还不存在。

最后，我们想重点介绍一些我们在这一过程中发展出来的成果。

维数猜想：Ritt [Rit50，第 178]页以及 Cohn [Coh83，第 1] 页中给出的维数猜想表述并不相同。它们也不同于我们将要用于应用的猜想表述，后者与交换代数中的克鲁尔主理想定理（PIT）非常相似。由于我们找不到证明这些不同版本彼此等价的参考文献，因此在第 3 节中，我们给出证明，说明维数猜想的三个版本彼此等价。在同一节中，我们应用 PIT 版本推导出一个结论，稍后将在分析 Ritt 铅笔的移动分量时用到该结论。

Ritt 循环技巧：我们提炼出一种有用的群论工具，Ritt 在一般的非线性情形中会用到它，我们称之为“Ritt 循环技巧”（引理 4.7）。该技巧用于证明，执行某些 Ritt 除法时，雅可比界不会增大。

Ritt 线性情形的证明中的一个漏洞：最后，在将 Ritt 的线性约化应用于非线性情形的过程中，作者发现并修补了 Ritt 在[Rit35] （另见 [Rit50]）中关于线性情形的原始证明里一个相当大的漏洞。我们还在证明命题 5.3 和 5.4 时，修正了其论文中若干处较小的漏洞。

本文中的修补工作以命题 7.1 的形式跨越数页展开。主要漏洞在于，他假设某种特定形状的阶数矩阵总能化为一种标准形式，我们称之为 Ritt 第二形式。修补这一漏洞耗费了大量工作，过程中出人意料地运用了图论中的霍尔匹配定理的巧妙应用。Ritt 在 [Rit35, P. 309]的第一段末尾写道

“.....(c) 可以实现这一点，如今已显而易见。”

其中，loc. cit. 中的 (c) 表示该矩阵可以化为 Ritt 第二形式。文中没有进一步解释。

霍尔匹配定理的出现尤其有趣：尽管 Ritt 的工作早于 Hall 匹配定理，但一种称为 Egerv´ary 定理的变体与霍尔匹配定理等价 [Die25, 第 2 节。1], ，它出现在 Ollivier 关于雅可比界猜想的工作中 [Oll22, 第 2] 节，以及 Cohn 的工作中 [Coh83, 第 5] 节。Ollivier 在计算雅可比界的算法中使用了 Egerv´ary 定理；据 Ollivier 在 [Oll22], 所述，Jacobi 在其原始手稿中也研究过 Egerv´ary 定理。我们在命题 7.1 中的应用与这些其他应用有何关联尚不清楚；值得注意的是，这一组合学内容似乎在多个不同场合重新出现在雅可比界猜想的语境中。

1.2. Rosenfeld–Gr¨obner 算法。本文采用的约化过程与 Rosenfeld–Gr¨obner 算法 [GKMO07，算法 1] 类似。对于给定的方程组 $[u_1, \ldots, u_n]$，该算法

会为每个极小素理想 $P \supset [u_1, \ldots, u_n]$ 生成一个特征集[5]（定义见第2.4小节） $G = (g_1, \ldots, g_s)$，对应于 P。

在我们的情形中，考虑给定分支 Σ_1 的特征集很有意思；在 [DZB26b 的推论 1.8] 中，我们证明，若 $G = (g_1, \ldots, g_n)$ 是 Σ_1 的特征集，则 $\dim(\Sigma_1) = J(g_1, \ldots, g_n)$。可以设想一种证明 JBC 的方法：分析算法的每一步，并希望例如雅可比数永不增加。

遗憾的是，初步粗略的考察表明，这种方法似乎注定会失败。这里存在几个问题。首先，在 Rosenfeld–Gr¨obner 算法中，可能从一个含有 n 个方程的情形，转到一个含有多于 n 个方程的情形；雅可比界猜想不适用于在 n 个变量中含有多于 n 个方程的方程组。其次，该算法涉及的 Ritt 除法并非 Ritt第一或第二形式；即使在线性情形中，也存在雅可比界增加的例子，如例1.4所示。

例1.4。考虑微分方程组

$$\begin{cases} u_1 = x^{(100)} + y' + z', \\ u_2 = x^{(50)} + y + z, \\ u_3 = x' + y' + 1. \end{cases}$$

可以执行 Rosenfeld–Gr¨obner 算法，并在每次完成除法后追踪所得方程组的 Jacobi 界。[6] 初始 Jacobi 界为 $J_0 = 101$，随后我们发现，在每个阶段都有 $J_1 = 150$、$J_2 = 101$、$J_3 = 101$，此后它稳定在 101。

虽然分支问题似乎是一个根本性问题，但不断增大的 Jacobi 界问题似乎可以通过转而使用强雅可比界得到改善。这里，如果一个变量不出现在微分多项式中，则声明该微分多项式关于该微分变量的序为$-\infty$（记号见§2.3）。转而使用强界时，我们要求一个更紧的不等式，这本应使问题更加困难。反直觉的是，强界使归纳法的限制更加严格，因而更容易进行归纳。

例1.5。考虑方程组 $u = x' + y^{(18)}$、$v = (y')^2 + y$。于是，在弱约定与强约定下，我们分别得到如下序矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -\infty & 1 \end{pmatrix}.$$

在第一种情况下，雅可比界为 18；而在第二种情况下，由于第一列中出现了 $-\infty$，雅可比界被迫降为 2。

遗憾的是，即使改用强界，也无法解决约化导致雅可比界增大的问题。在例5.2中，我们给出了更多例子，说明即使在强界的情况下，除法也可能使雅可比数增大（我们围绕这一点进行了许多 Magma 实验）。这基本上使得追踪 Rosenfeld–Gr¨obner 算法中的除法这一思路行不通。

1.3. 致谢。Dupuy 得到美国国家科学基金会 DMS-2401570 号资助。Zureick- Brown 得到美国国家科学基金会 DMS-2430098 号资助。

Dupuy 感谢波利尼西亚法属大学的 GAATI实验室提供的热情接待，他在此完成了本手稿。

软件。作者在本项目的不同阶段使用了 Magma [BCP97], , 其中包含微分代数软件包 [DZB26a], 。

GPT5 [Ope26] 用于进行文献检索，并为论文中的数值示例、证明和各项具体论断的验证提供帮助，还为图表提供了初始代码。不过，本文最终的论证均由人类完成。

[5]严格来说，[GKMO07 中的算法 1] 会生成一些稍弱的自约化集，称为“正则微分系统”，但可以对该算法进行增强，使其生成特征集；就本引言而言，这并不重要。参见 [Ovc04], [Hub00，参见算法 7.1].[6]参见 `https://github.com/tdupu/magma-diff-alg` 开源 Magma 软件包。

值得注意的是，借助 GPT5 的帮助，我们想到可以使用霍尔匹配定理来弥补 Ritt 的证明中关于雅可比界猜想的线性情形（命题 7.1）的漏洞。我们向 GPT5 提供了一个不尽如人意的小子情形证明，它则运用霍尔匹配定理，对同一特殊情形给出了一个十分简洁的证明。GPT5 无法给出命题 7.1 的完整证明，但经过大量后续工作，我们最终找到了运用霍尔匹配定理给出完整证明的方法。

2. Background

在本文 中，当 $(\Gamma, <)$ 是一个有序集时，我们用 $<_{\mathrm{lex}}$ 表示 Γ 上诱导的字典序 ^{n}.

2.1. 概形的记号与约定。对于概形 X，我们用 $\mathrm{Irr}(X)$ 表示 X 的不可约分支。$\mathrm{Irr}^0(X)$ 表示极小不可约分支。若 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 且 $\sqrt{\langle 0\rangle_A} = \bigcap_{i\in I} P_i$ 是极小素理想的一个不可约交，则可将 $Q_i = \mathrm{sat}^{P_i}(\langle 0\rangle_A)$ 记作相应的 P_i-主分量，此时 $\mathrm{Irr}^0(X) = \{V(Q_i) : i \in I\}$。本文只讨论与理想的极小关联素理想对应的极小不可约分支，而不讨论嵌入素理想。等价地说，这些是底层约化概形的分支；从代数角度看，它们是底层根理想的极小素理想。

若 X_1 是 X 的一个不可约分支，则我们用 $\kappa(X_1)$ 表示 $(X_1)_{\mathrm{red}}$ 的函数域，其中 $_{\mathrm{red}}$ 是底层约化不可约概形（从代数角度看，若 $X = \mathrm{Spec}(B)$，则 $X_{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}(B/\sqrt{\langle 0\rangle_B})$ ）。同样，若 R 是一个环且 P 是一个素理想，则用 $\kappa(P)$ 表示 R/P 的分式域。若 $\mathrm{Spec}(R)$ 不可约，我们也可将 $\kappa(R)$ 记作 $\kappa(\mathrm{Spec}(R))$。

现在，我们可以用超越次数或 Krull维数来定义维数。对于有限型于某个域上的概形，这两个概念是一致的。一般而言，我们的环是可数生成的，因此通常不是诺特的。由于我们最关注的环具有有限型局部化 [DZB26b，命题 3.2] ，我们通过超越次数来定义维数。

定义 2.1. 设 X 是域 K 上的一个概形。X 在 K 上的维数定义为

$$\dim_K(X) = \max\{\mathrm{trdeg}_K(\kappa(X_1)) : X_1 \in \mathrm{Irr}^0(X)\}.$$

我们通常省略 K，直接写作 $\dim(X)$。

注 2.2. 注意：如果 R 是一个整环，且 P 是一个素理想，那么 $\dim(\mathrm{Spec}(R_P)) = \dim(\mathrm{Spec}(R))$，但一般而言，$\mathrm{Krull}(\mathrm{Spec}(R_P)) \neq \mathrm{Krull}(\mathrm{Spec}(R))$。特别地，我们对维数的定义通常不等同于 Krull维数。

2.2. 微分概形的记号与约定。关于微分代数几何中的术语，我们遵循 [Bui94，第 3] 章。设 (K, ∂) 是一个微分域。

定义 2.3. 称在微分域 K 上的 D-概形为满足其结构层 $\mathcal{O}_X$ 是微分 K-代数层的概形 X。

我们将“微分概形”和“ D-概形”这两个术语互换使用。在 K 上的 D-概形之间的态射，是指在 K 上的概形态射，且其诱导的层映射是微分 K-代数层之间的态射。代数几何中用于对象和态射的常见形容词（例如约化、射影、仿射、满射等），适用于底层概形或概形态射。

若 Σ 是由理想 $I \subset K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 定义的 ∂-有限型仿射 D-概形，则称不可约分支 $\Sigma_1 \in \mathrm{Irr}^0(\Sigma)$ 为 $\Sigma_1 = V(Q_1)$，其中 $Q_1 = \mathrm{sat}^{S_{P_1}}(I)$ 是 I 关于 S_{P_1} 的饱和化，而 S_{P_1} 是与一个在 I 上方极小的微分素理想 $P_1 \supset I$ 相关联的乘法集。这自动是一个 D- 概形，因为局部化映射 $K\{x_1, \ldots, x_n\}/I \to S_{P_1}^{-1}($ $K\{x_1, \ldots, x_n\}/I)$ 是微分 K-代数之间的态射，且其核为 Q_1。对于微分环 R，我们用 $\mathrm{Spec}^\partial(R)$ 表示微分素理想的集合。

如果 Σ 是不可约的 D 概形，那么 $\kappa(\Sigma)$ 是一个 ∂ 域。特别地，如果 P 是 ∂ 环 R 中的素理想，那么 $\kappa(P)$ 是一个 ∂ 域。

定义 2.4. 设 R 是一个微分域。若存在一个整数 m 以及一个微分 R-代数之间的满射态射 $R\{x_1, \ldots, x_m\} \to A$，则称微分 R-代数 A 是微分有限型的。

我们将在域上进行讨论，并在 A 在微分域 K上是 ∂-有限型时，简写为“A 是 ∂-有限型”。

定义 2.5. 设 R 是一个微分 K-整环。R 关于 K的微分超越次数记为 $\mathrm{trdeg}_K^{\partial}(R)$，它是满足存在微分 K-代数 $K\{x_1,\dots,x_n\}\to R$的单射的最大 n。

定义 2.6. 对于一个微分域 K 上的 D-概形 Σ，若其局部为 ∂-有限型，我们定义其微分维数为

$$\dim_K^{\partial}(\Sigma)=\max\{\mathrm{trdeg}_K^{\partial}(\kappa(\Sigma_1))\colon \Sigma_1\in \mathrm{Irr}^0(\Sigma)\}.$$

维数 $\dim_K(\Sigma)$ =dim(Σ) 就是底层概形的维数（通过各分支的超越次数定义）。

定义 2.7. 我们称 D-概形 Σ 的一个微分点为 D-概形态射 $\mathrm{Spec}(R)\to\Sigma$，其中 R 是一个微分环，而 $\mathrm{Spec}(R)$赋予其 D-概形结构。

微分点对应于微分环中的微分方程解。

给定 $n\geq 0$，我们将符号 $\mathbb{A}^n_{K,\ \infty}$ 视为 K 上的一个 D-概形，使得

$$\mathbb{A}^n_{K,\infty}=\mathrm{Spec}(K\{x_1,\dots,x_n\}).$$

这就是 $\mathbb{A}^n_K=$Spec $K[x_1,\dots,x_n]$的无限喷射丛（也称为弧空间）。对于概形 X，无限喷射丛记作 $\mathcal{L}(X)$ [CNS11], X_∞ [dFMta15], 或 $J^\infty(X)$，或者 X^∞ [Bui94]。如果 R 是微分K代数，且 $\mathbb{A}^n_{K,\infty}(R)$ 表示 D-概形 $\mathrm{Spec}(R)\to\mathbb{A}^n_\infty$ 的态射集合，那么 $\mathbb{A}^n_{K,\infty}(R)=R^n$。因此，我们将 $\mathbb{A}^n_{K,\infty}$ 视为微分代数背景下的仿射空间。

2.3. 雅可比界猜想。设 K 是一个特征零微分域。设 $K\{x_1,\dots,x_n\}$ 是 K 上的微分多项式环。

定义 2.8。设 $u\in K\{x_1,\dots,x_n\}$。我们将 u 的序定义为

$$\mathrm{ord}_{x_j}^{\partial}(u)=\max\{r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\colon \partial u/\partial x_j^{(r)}\neq 0\}.$$

在强约定下，空集的最大值定义为 $-\infty$；在弱约定下，空集的最大值定义为 0。

定义 2.9. 设 u_1、u_2、……、$u_n\in K\{x_1,\dots,x_n\}$ 为微分多项式。(u_1，……，u_n) 的阶数矩阵是矩阵 $A=(a_{i,\ j})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$，其中 $a_{i,\ j}=\mathrm{ord}_{x_j}^{\partial}(u_i)$。

定义 2.10. $n\times n$ 矩阵 A 的一个横截是形如 $\sum_{i=1}^n a_{i,\ \rho(i)}$ 的和，其中 $\rho\in S_n$。

定义 2.11. 设 u_1、u_2、……、$u_n\in K\{x_1,\dots,x_n\}$ 为微分多项式。我们将雅可比界 $J(u_1,\ \dots\dots,\ u_n)$ 定义为 tdet(A), 其中 tdet 表示矩阵 $A\in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0}\cup\{-\infty\})$ 的热带行列式。它由 $\mathrm{tdet}(A)=\max_{\rho\in S_n}\sum_{i=1}^n a_{i,\ \rho(i)}$ 给出，即一个极大横截。

根据针对变量的微分多项式的阶所采用的是弱约定还是强约定，我们将雅可比界称为弱雅可比界或强雅可比界。

猜想 2.12（雅可比界猜想）。设 K 是一个特征零的微分域。设 u_1、u_2、……、$u_n\in K\{x_1,\dots,x_n\}$。设 $\Sigma=$Spec $K\{x_1,\dots,x_n\}/[u_1,\dots,u_n]$。设 Σ_1 是 Σ 的一个不可约分支。如果 $\dim(\Sigma_1)<\infty$，则 $\dim(\Sigma_1)<J(u_1$、……、$u_n)$。

根据采用雅可比界的弱约定还是强约定，雅可比界猜想分为弱雅可比界猜想和强雅可比界猜想。弱雅可比界猜想和强雅可比界猜想目前都尚未解决；强雅可比界猜想蕴含弱雅可比界猜想，这仅仅是因为强雅可比界小于或等于弱雅可比界。

2.4. 特征集。

定义 2.13. 无限多项式环 $K\{x_1,\dots,x_n\}$ 上的项序 $\prec$ 称为排序，若其满足以下性质：

(1) 对每个 i，若有 $1\le i\le n$，以及每个 r，若有 $r\ge 0$，我们都有 $x_i^{(r+1)}\succ x_i^{(r)}$。(2) 对每个 i、j，若有 $1\le i$、$j\le n$，且有 r、$s\ge 0$，若 $x_i^{(r)}\succ x_j^{(s)}$，则 $x_i^{(r+1)}\succ x_j^{(s+1)}$。

我们称排序 $\prec$ 为消去序，如果存在对 $X=\{x_1,\dots,x_n\}=Y\amalg Z$ 的一个划分，使得对所有 $y\in Y$、所有 $z\in Z$ 以及所有 r、$s\ge 0$，都有 $y^{(r)}\prec z^{(s)}$。这与通常多项式环的情形相同，只不过我们的块是无限的。这种排序具有如下性质：如果 $f\in K\{X\}$ 的首项单项式属于 $K\{Y\}$，那么 $f\in K\{Y\}$。

定义 2.14. 设 $u\in K\{x_1,\dots,x_n\}$。本文中，若 $\mathrm{ord}_{x_j}^{\partial}(u)=r_j\ge 0$，则称 $x^{(r_j)}{}_j$ 为 u 关于变量 x_j 的首领，称 $\partial u/\partial x^{(r_j)}{}_j$ 为 u 关于变量 x_j 的分离子。若未指定变量 x_i，则元素 u 的首领是满足 $\partial u/\partial x_i^{(r)}\neq 0$ 的项序中最大的 $x_i^{(r)}$。记作 ℓ_u。若 $\ell_u=x_i^{(r)}$，则 u 的首变量为 x_i。若未指明变量而使用“首领”或“分离子”一词，我们总是指相对于首变量的首领和分离子。

定义 2.15. 设 $f,g\in K\{x_1,\dots,x_n\}$。若且唯若 $\mathrm{ord}_{x_i}^{\partial}(f)>\mathrm{ord}_{x_i}^{\partial}(g)$，或 $\mathrm{ord}_{x_i}^{\partial}(f)=\mathrm{ord}_{x_i}^{\partial}(g)$（即 ℓ 是 f 和 g 关于变量 x_i 的共同首领），并且记 $f=\sum_{i=1}^{d_f}a_i\ell^i$ 和 $g=\sum_{i=1}^{d_g}b_i\ell^i$ 时，有 $d_f>d_g$，我们称 f 在微分不定元 x_i 中大于 g，记作 $f\succ_i g$。

如果没有提及变量，并且说 f 大于 g，我们的意思是在 $\prec(f)$ 中，$\succ$ 在 $\prec(g)$ 中，其中 $\mathrm{in}_{\prec}$ 表示项序下的首项单项式。

定义 2.16. 设 R 是一个 ∂-环。R 的魏尔代数是唯一的结合代数 $R[\partial]$，它是一个左 R-代数；作为左 R-模，它是直和 $R[\partial]=\bigoplus_{i\ge 0}R\partial^i$，并且对于每个 $r\in R$，都有交换关系 $\partial r=\partial(r)+r\partial$。

定义 2.17. 设 R 是一个微分环。若一个 R-模 M 是一个 D-模，我们称之为 D-模，当且仅当它是一个左 $R[\partial]$-模。

环 R 本身是一个 D-模，而理想 $I\subset R$ 若是 D-子模，则为微分理想。给定 $L\in R[\partial]$ 和 $r\in R$，我们将 $L(r)$ 记作 D-模乘法。在 D-模文献中，作者通常写作 $\mathcal{D}=R[\partial]$，这样一来，D-模便名副其实地成为左 $\mathcal{D}$-模。

定义 2.18. 给定两个微分多项式 f 和 g，它们属于 $K\{x_1,\dots,x_n\}$，以及一个变量 x_i，使得 g 在变量 x_j 中低于 f，我们可以进行 Ritt 除法。这将得到如下形式的表达式

$$sf=Q(g)+r \tag{2.1}$$

其中 $Q\in K\{x_1,\dots,x_n\}[\partial]$，$s$ 属于由 g 关于变量 x_i 的初式和分离子生成的乘法集，并且 r 在变量 x_i 中低于 g（Bui94，第 2 章，第 2 节，第25页）。

还有 Ritt ∂ 除法（读作“Ritt 部分除法”），这种除法不会“完全约化”，而只求出满足 $\mathrm{ord}_{x_i}^{\partial}(r)\le\mathrm{ord}_{x_i}^{\partial}(g)$ 的 r。在这种情况下，方程 (2.1) 中的 s 可以取为属于由 g 关于变量 x_i 的分离子生成的乘法集（因此不使用初式）。参见 [Hub00，算法 2.2]。

如前所述，如果未提及变量且有 $f\succ g$，则假定除法是关于 $\prec$ 的 g 的首变量除法。

定义 2.19。如果在将 f 除以 g（分别为 ∂ 除法、关于 x_i 的除法、分别为关于 x_i 的 ∂ 除法）后，发现（2.1）中的 $r=0$，则称 f 关于 g 是 Ritt 约化的（分别为 Ritt∂- 约化的、在 x_i 中 Ritt 约化的、在 x_i 中 Ritt ∂- 约化的）。

定义 2.20. 自约化序列（也称为自约化集）是一个序列 $g_1\prec g_2\prec\cdots\prec g_s$，满足 $g_i\in K\{x_1,\dots,x_n\}$，使得对于所有满足 $1\le i$、$j\le s$ 和 $i\neq j$ 的 i 和 j，我们有 g_i 关于 g_j 是 Ritt 约化的。我们将这样的序列记作 $G=(g_1,\dots,g_s)$。

对于自约化序列，存在类似的 Ritt 除法概念，带有各种修饰语，我们称之为按 G 进行的 Ritt 除法。参见 [Bui94，第 25 页，第 2 章，§2]。在这些情况下，除法算法会得到如下表达式

$$sf = Q_1(g_1) + \cdots + Q_r(g_r) + r \tag{2.2}$$

其中 Q_1、……、$Q_r \in K\{x_1, \ldots, x_n\}[\partial]$ 和 $s \in S_G$，其中 S_G 是由 G 的初式和分离式生成的乘法集（在 ∂ 除法的情形下，S_G 可以仅由 G 中元素的分离式生成），并且 r 关于 G 中的每个 g_i 都是 Ritt 约化的。我们用记号 $r = \mathsf{rem}_G(f)$ 表示通过 G 进行 Ritt 除法后的 Ritt 余式。

定义 2.21。设 $\prec$ 是 $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的一个排序。设 $G = (g_1, \ldots\ldots, g_s)$ 和 $H = (h_1, \ldots\ldots, h_{s+t})$ 是两个自约化集，其中 $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。自约化集上的诱导序 $\prec$ 定义如下：

$$G \prec H \iff (g_1, \ldots, g_s) \prec_{\text{lex}} (h_1, \ldots, h_s)$$

and

$$H \prec G \iff (h_1, \ldots, h_s) \prec_{\text{lex}} (g_1, \ldots, g_s) \text{ or } ((g_1, \ldots, g_s) \not\prec_{\text{lex}} (h_1, \ldots, h_s) \text{ and } t > 0).$$

定义 2.22。固定 $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的一个排序 $\prec$。设 $P \subset K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 是一个素微分理想。P 在项序 $\prec$ 下的特征序列（也称为特征集）是一个自约化序列 $G = (g_1, \ldots\ldots, g_s)$，满足 $g_i \in P$，且在自约化集上的诱导序中极小。

定义 2.23. 设 R 是一个环，I 是 R 中的一个理想。若 $S \subset R$ 是一个乘法封闭集，且 $\ell_S\colon R \to R_S = S^{-1}R$ 是关于 S 的局部化映射，则 I 关于 S 的饱和化是理想

$$\mathrm{sat}_S(I) = \ell_S^{-1}(IR_S) = \{r \in R\colon \exists s \in S, sr \in I\}.$$

We m利用特征集和素理想的以下基本性质。

定理 2.24. 设 $P \subset K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 是一个素理想。

(1) 对于 $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上任意的排序 $\prec$，都存在一个关于 P 的特征序列 $G = (g_1, \ldots, g_s)$。(2) 若 $G = (g_1, \ldots, g_s)$ 是关于 P 的特征序列，则 $P = \mathsf{sat}_S([g_1, \ldots, g_s])$。(3) 设 $f \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$。我们有 $f \in P$ 当且仅当 $\mathsf{rem}_G(f) = 0$。

参考文献。第一条陈述见 Kolchin 的著作 [Kol73, I.10, Proposition 3]。第一条和第二条陈述的算法见 Hubert 的手稿 [Hub00, Theorem 4.5, Theorem 5.2, and Algorithm 7.1]。第三条也见 Kolchin 的著作 [Kol73, III.8, Lemma 5]。它通常被称为 Rosenfeld 引理（见 [KO06, below Theorem 1]）。□

作者为本手稿作者所撰写、用于处理微分多项式环和特征集并用于实验的微分代数软件包，可在 GitHub 上获取 [DZB26a]。

命题 2.25。若 P是 $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 中的一个素微分理想，其关于某种排序的特征集为 $(g_1, \ldots, g_s)$，则 $\mathsf{trdeg}^{\partial}(\kappa(P)) = n - s$。特别地，对于所有排序以及 P 关于该排序的所有特征集，该特征集都将含有 s 个元素。

证明。这是 [CH03，第 4.1 节、第 4.2 节，尤其是定理 4.5]。

我们给出一个直接证明。设 P 是某个排序 $\prec$ 下的素微分理想，其特征集为 $G = (g_1, \ldots, g_s)$。g_i 的首变量彼此不同，否则该序列就不是自约化的。写作 $\{x_1, \ldots, x_n\} = \{z_1, \ldots, z_s\} \amalg \{y_1, \ldots, y_t\}$，其中 $\{z_1, \ldots, z_s\}$ 是 $(g_1, \ldots, g_s)$ 的首变量，而 $y_1, \ldots, y_t$ 是其他变量。在这种情况下，我们有 $s + t = n$。对于每个满足 $1 \leq i \leq t$ 的 i，以及每个 $j \geq 0$，都有 $y_i^{(j)} \notin P$，并且 $y_i^{(j)}$ 关于 G 是 Ritt-约化的。这证明了 $K\{y_1, \ldots, y_t\} \to K\{x_1, \ldots, x_n\}/P$ 是单射；特别地，$\mathsf{trdeg}^{\partial}_K(K\{x_1, \ldots, x_n\}/P) \geq t$。

现在，在函数域 $F = K(\{y_1, \ldots, y_t\})$ 上，集合 $G = (g_1, \ldots, g_s)$ 是一个极小自约化集，$[g_1, \ldots, g_s] \subset F\{z_1, \ldots, z_s\}$，因此是特征集，其素理想为 $P = \mathsf{sat}_G([g_1, \ldots, g_s])$，其中 $F\{z_1, \ldots, z_s\}$ 上的排序由 $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的排序诱导。由于将 $g_1, \ldots, g_s$ 视为在 $F^{\sim}$ 上的方程时，它们现在是关于 s 个变量的 s 个方程，根据 DZB26b，推论 1.8]，，$\mathsf{trdeg}_F(F\{z_1, \ldots, z_s\}/P) \leq J(g_1, \ldots, g_s)$，因此 $\mathsf{trdeg}^{\partial}_F(F\{z_1, \ldots, z_s\}/\widetilde{P}) = 0$。由于 $\kappa(P) = \kappa(\widetilde{P})$，我们有

$$\mathrm{trdeg}^{\partial}_K(\kappa(P)) = \mathrm{trdeg}^{\partial}_F(\kappa(P)) + \mathrm{trdeg}^{\partial}_K(F) = t. \tag{2.3}$$

由于公式（2.3）与排序无关，因此也可得出 s 与排序 $\prec$ 及特征集的选择无关。□

命题 2.26（素微分理想成员判定）。设 P 是 $K\{x_1,\ldots,x_n\}$ 中的一个素微分理想，其在某种序下的特征集为 $(A_1,\ldots,A_s)$。设 $f\in K\{x_1,\ldots,x_n\}$。当且仅当 f 关于 $(A_1,\ldots,A_n)$ 进行 Ritt 除法所得的余数为零时，$f\in P$。

证明。参见 Ovc04，定义 2] 下方的讨论。 □

以下结果众所周知，但我们没有找到明确陈述这一结果的参考文献。 ly.

命题 2.27（特征集消去定理）。考虑 $S=K\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m\}$ 上的一个块序，使得 x_i 及其所有导数都高于任意 y_j 的任意导数（即，对于所有 i、j、a、b，都有 $y_j^{(b)}\prec x_i^{(a)}$）。设 $P\subset K\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m\}$ 是一个素理想。若 $(B_1,\ldots,B_s,A_1,\ldots,A_t)$ 是 P 的一个特征集，且 $B_i\in K\{y_1,\ldots,y_m\}$ 和 $A_i\in K\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m\}\setminus K\{x_1,\ldots,x_n\}$，则 $(B_1,\ldots,B_s)$ 是 $P\cap K\{y_1,\ldots,y_m\}$ 的一个特征集。

证明。令 $Q=P\cap K\{y_1,\ldots,y_m\}$。令 $f\in K\{y_1,\ldots,y_m\}$。首先，我们断言（$B_1,\ldots,B_s$）是 Q 的一个极小自约化子集。否则，我们同样可以将自约化集（$B_1,\ldots,B_s,A_1,\ldots,A_t$）修改为一个更大的自约化集。现在我们来证明成员关系。假设 $f\in Q$。于是 $f\in P$，因此根据成员判定（命题 2.26），其关于（$B_1,\ldots,B_s,A_1,\ldots,A_t$）的 Ritt-余式为零。但是，相对于（$A_1,\ldots,A_t$），$f$ 是 Ritt 约化的，因为这些首领高于 f 的首领。这意味着除法算法只会涉及（$B_1,\ldots,B_s$），因此 f 关于（$B_1,\ldots,B_s$）的除法余式为零。□

下面这个引理也广为人知，但我们找不到合适的参考文献。

引理 2.28. 设 $T\subset K\{x\}\setminus\{0\}$ 是一个有限子集，$[T]$ 是由 T 生成的微分理想，且 $P\supset[T]$ 是一个极小素理想。那么 $K\{x\}/P$ 的维数有限。

证明. 证明通过对 T 中元素的最小序进行归纳法得出。若最小元素 $u\in T$ 的序为 $-\infty$，那么 $u\in K$ 和 $[T]=K\{x\}$，几何上对应于空集。

现在假设 T 的每个元素的序都非负，且最小元素的序为 r。我们假设对于所有含有序小于 r 的元素的 T，该引理都成立。设 $u\in T$ 是序最小的元素。只需证明对于极小的 $P\supset[u]$，$K\{x\}/P<\infty$ 的维数.....（因为 T 中所有其他元素只会施加额外的关系）。

只需将 u 分解为不可约因子，然后对每个因子证明该引理即可，因此不失一般性，假设 u 不可约。我们知道 $[u]=P_0\cap[u,s_u]$，其中 $P_0=\mathrm{sat}_{s_u}([u])$，且 s_u 是 u 的分离子（参见 [Kap76，第 30 节，第 49] 页及定理 2.24 (2)），而 P 要么是 P_0，要么是 $[u,s_u]$ 之上的一个极小素理想（依据 [Kap76，第 49]页）。

在第一种情形下，由于 $s_u\notin P_0$，维数 $K\{x\}/P_0=$维数 $(K\{x\}/P_0)\left[\frac{1}{s_u}\right]$。根据定理 2.24 (3) 和方程 (2.1)，$(K\{x\}/P_0)\left[\frac{1}{s_u}\right]$ 由序不超过 u的序的元素生成，因此特别是有限维。在第二种情形下，由于 s_u 的序小于 u的序，该引理由归纳法成立。□

3. The Dimension Conjecture

相对于维数猜想证明雅可比界猜想，首先需要从微分理想 $[u_1,\ldots,u_n]\subset K\{x_1,\ldots,x_n\}$ 开始，然后在失去一个方程后，估计 $[u_2,\ldots,u_n]$ 上不可约分支的微分维数。为进行这一估计，我们需要以猜想 3.3 的形式应用维数猜想。实际应用见定理 10.5。

维数猜想有好几种形式。我们没有找到清晰证明所有不同版本等价的参考文献，因此在此给出证明。

- 最弱的一个版本见于 Cohn 的论文 [Coh83，第 1] 页。他将其归于 Lando。该猜想断言：如果一个方程组中的方程数少于变量数，那么它的微分维数必为正。这就是猜想 3.1。
- Ritt 的著作 [Rit50 第 178] 页中给出了一个看起来稍强一些的版本。该猜想根据变量数与方程数之差，对微分维数给出了一个下界。这就是猜想 3.2。
- 最后，还有一个与克鲁尔主理想定理的表述类似、可用于归纳论证的版本。这就是猜想 3.3。

现在我们正式陈述这些猜想。

猜想 3.1（Cohn维数猜想 [Coh83，第 1] 页）。考虑 $u_1, \ldots, u_i \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$。假设 $[u_1, \ldots, u_i]$ 不是单位理想。若 P是位于 $[u_1, \ldots, u_i]$ 和 $i < n$之上的极小素理想，则 $\operatorname{trdeg}_K^{\partial}(\kappa(P)) > 0$。

猜想 3.2（里特维数猜想 [Rit50，第 178] 页）。考虑 $u_1, \ldots, u_i \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$。假设 $[u_1, \ldots, u_i]$ 不是单位理想。若 P是位于 $[u_1, \ldots, u_i]$ 和 $i < n$之上的极小素理想，则 $\operatorname{trdeg}_K^{\partial}(\kappa(P)) \geq n - i$。

猜想 3.3（PIT 维数猜想）。设 A 是微分有限生成的微分 K-整环。设 $f \in A$ 是一个非单位元。设 P 是 $[f]$ 上的一个极小素理想。

$$\operatorname{trdeg}_K^{\partial}(A/P) \geq \operatorname{trdeg}_K^{\partial}(A) - 1. \tag{3.1}$$

命题 3.4。猜想 3.1、3.2 和 3.3 等价。

证明。（3.2） $\Longrightarrow$ （3.1）：Ritt 版本给出了下界，而 Cohn 版本没有。 .

（3.1） $\Longrightarrow$（3.2）：假设 Cohn 版本成立。设有 m 个方程 u_1、.....、u_m，涉及 $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 个变量，且满足 $m < n$。令 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$。我们将对 $K(\{Z\})$ 作基变换，其中我们以满足 $u_i \notin K\{Z\}$ 的方式对 $X = Y \amalg Z$ 作了划分。为此，我们可以设想为每个方程“保护”一个变量，不对其求逆。由于有 m 个方程，因此有 m 个禁用变量（可能有重复）。为每个方程选取一个出现在其支撑中的变量。这样还剩下 $n - m$ 个可以求逆的变量。我们只对 $n - m - 1$ 个变量求逆。将这些变量称为 Z 变量。现在我们有 u_1、.....、$u_m \in F\{Y\}$，其中 $F = K(\{Z\})$，且 $|Y| = m + 1$。根据 Cohn 版本的维数猜想，我们有

$$\operatorname{trdeg}_F^{\partial}(F\{Y\}/[u_1, \ldots, u_m]) \geq 1.$$

现在，由于微分超越次数在塔中具有可加性，我们有

$$\operatorname{trdeg}_K^{\partial}(F\{Y\}/[u_1, \ldots, u_m]) = \operatorname{trdeg}_F^{\partial}(F\{Y\}/[u_1, \ldots, u_m]) + \operatorname{trdeg}_K^{\partial}(F) \geq 1 + (m - n) - 1 = m - n$$

由此便证明了这一断言。关于微分域塔中微分超越次数的结论见 [Kol73，第 107 页，第 112] 页。当 A 是 ∂ 有限型但不是域时，我们使用

$$\operatorname{trdeg}_F^{\partial}(A) = \max\{\operatorname{trdeg}_F^{\partial} \kappa(P) : P \text{ minimal } \partial\text{-prime of } A\},$$

此时结果随即成立，因为每个 $\kappa(P)$ 都是 F 的扩张，因此我们可以应用参考文献中所述的定理。

(3.3) $\Longrightarrow$ (3.2) 假设 PIT 版本成立。设 $P \supset [u_1, \ldots, u_i]$ 是关于此包含关系极小的素理想。我们将假设 PIT 维数猜想成立，并证明 Cohn维数猜想，即 $\operatorname{trdeg}_K^{\partial}(\kappa(P)) > 0$，若 $i < n$。

证明对 i 使用归纳法。设 $A = K\{x_1, \ldots, x_n\}$。在 $i = 1$ 的情形下，我们有 $n \geq 2$。由于 u_1 不是单位元，PIT 维数猜想蕴含 $\operatorname{trdeg}_K^{\partial}(A/P) = \operatorname{trdeg}_K^{\partial}(A) - 1 = n - 1 \geq n - 1$。

令 P_0 为 $[u_1, \ldots, u_{i-1}]$ 上的一个极小素理想。令 $A = K\{x_1, \ldots, x_n\}/P_0$。根据归纳假设，我们有 $\operatorname{trdeg}_K^{\partial}(A) \geq n - (i - 1)$。考虑 $f = \bar{u}_i$ $\bar{u}_i$ 在 A 中的像。令 P 为 A 中 $[f]$ 上的一个极小素理想。由于我们假设 $[u_1, \ldots, u_i]$ 不是单位理想，因此 f 不是单位元。根据 PIT 维数猜想，我们有 $\operatorname{trdeg}_K^{\partial}(A/P) \geq \operatorname{trdeg}_K^{\partial}(A) - 1 \geq n - (i - 1) - 1 = n - i$，从而证明了 Ritt 版本。

(3.2) $\Longrightarrow$ (3.3)：设 Ritt 版本成立。设 $A = K\{x_1, \ldots, x_n\}/P_0$，其中 P_0 是 $[g_1, \ldots, g_h]$ 上的极小素理想，且 $\mathrm{ht}^\partial(P_0) = h$，从而 $\mathrm{trdeg}^\partial_K(A) = n - h$。

现在我们将证明 PTT 维数猜想。令 $\bar{f} \in A$ 为非零非单位元。令 $\bar{P}$ 素理想。那么 f 可提升到某个 $f \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$，而 P 可提升到某个素理想 P，其中 $P = P/P_0$ 是 $[g_1, \ldots, g_h, f]$ 之上的极小理想。然后应用 Ritt 版本可得 $\dim^\partial(A/\bar{P}) = \dim^\partial(K\{x_1, \ldots, x_n\}/P) \geq n - (h+1) = \dim^\partial(A) - 1$。□

从现在起，我们将把猜想 3.1、猜想 3.2 或猜想 3.3 中的任意一个称为“维数猜想”，并将这些形式视为相同。应用中我们将使用猜想 3.3。

命题 3.5. 假设维数猜想（猜想 3.3）成立。设 P 是 $[u_1, u_2, \ldots, u_n] \subset K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的一个极小素理想。假设 P 的微分维数为零。设 $P' \supset [u_2, \ldots, u_n]$ 是一个包含于 P 中的素理想，并且相对于这一性质，它是 $[u_2, \ldots, u_n]$ 上的极小素理想。我们断言，这个族的微分维数至多为一，即

$$\mathrm{trdeg}^\partial(\kappa(P')) \leq 1,$$

并且 当 u_1 不属于 P' 且模 P' 不为单位时，它的微分维数恰为 1。

证明. 与维数猜想的设定一样，令 $R = K\{x_1, \ldots, x_n\}/P'$。令 $f = \overline{u}_1$ 为 u_1 在 P' 中的像，我们假设该像非零；令 $Q = P$ 为其上方的极小素理想。

根据维数猜想（猜想 3.3）。

$$\mathrm{trdeg}^\partial(\kappa(P)) \geq \mathrm{trdeg}^\partial(\kappa(P')) - 1.$$

但是 $\mathrm{trdeg}^\partial_K(\kappa(P)) = 0$，这意味着 $\mathrm{trdeg}^\partial(\kappa(P')) \leq 1$。 □

命题 3.6。假设维数猜想（猜想 3.3）成立。设 P 是 $[u_1, \ldots, u_n] \subset K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上的一个极小素理想。以下条件等价：

(1) $\mathrm{trdeg}^\partial(\kappa(P)) = 0$。 (2) 对每个 i，都存在一个素理想 $P_{i-1} \subset P$，使得 (a) $[u_i, \ldots, u_n] \subset P_{i-1}$，(b) $\mathrm{trdeg}^\partial_K(\kappa(P_i)) = i$，且 (c) u_i 在 $K\{x_1, \ldots, x_n\}/P_i$ 中非零且不是单位，并且 P_{i-1} 关于这些性质是极小的。

证明。我们做一些准备：现在考虑素理想链 $0 = P_n \subset P_{n-1} \subset \cdots \subset P_0$，其中 $P_0 = P$, P_1 是 $[u_2, \ldots, u_n]$ 上的极小素理想，而 $[u_2, \ldots, u_n]$ 包含于 P_0；对于 $i > 0$，我们归纳地进行，称 P_i 是 $[u_i, \ldots, u_n]$ 上的极小素理想，而 $[u_i, \ldots, u_n]$ 包含于 P_{i-1}，依此类推。图示如下：

$$\begin{array}{ccccccccc} P_{n-1} & \hookrightarrow & P_{n-2} & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & P_1 & \hookrightarrow & P_0 = P \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\ [u_n] & \hookrightarrow & [u_{n-1}, u_n] & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & [u_2, \ldots, u_n] & \hookrightarrow & [u_1, \ldots, u_n]. \end{array}$$

我们将证明，若 $\mathrm{trdeg}^\partial(\kappa(P)) = 0$，则所有中间的超越次数都必须按照本命题所述呈现可预测的变化。从 $\kappa(P_n) = K(\{x_1, \ldots, x_n\})$ 到 $\kappa(P_0)$ 的微分超越次数起始为 n，并降至零。根据 维数猜想，每个阶段最多只能下降一。事实上，由于 P_i 是 $P_{i-1} + [u_1, \ldots, u_i]$ 上的极小素理想，我们知道 $P_i \subset R_{i-1} = R/P_{i-1}$ 是 $\bar{u}_i \in R/P_{i-1}$ 上的极小素理想，其中 $\bar{u}_i$ 是 u_i 在 R/P_{i-1} 中的像。这意味着 P_i 的高度至多为一；根据维数猜想，$\mathrm{trdeg}^\partial_K(R/P_i) \geq \mathrm{trdeg}^\partial_K(R/P_{i-1}) - 1$。由此可知，微分超越次数在每个可能的步骤中都恰好下降一，并且 $\mathrm{trdeg}^\partial(\kappa(P_i)) = i$。

反过来，正是这些非退化性假设保证微分超越次数在每一步都减少一。□

4. Ritt's Cycle Trick

下面这个初等引理有助于固定我们的记号（也可用于检验推导是否合理）。后面的许多章节都涉及对矩阵和横截的精细操作。该引理主要说明，行运算和列运算分别等同于左乘和右乘初等矩阵，并阐明矩阵重排如何改变横截。我们相信，许多读者可以自行推导出这些结论，但为方便起见，我们仍将其列出。

引理 4.1. 假设 $A=(a_{i,\ j})$ 是方程组 $u_1=0,\ \ldots,\ u_n=0$ 的阶数矩阵，其变量为 $x_1,\ \ldots,\ x_n$。假设 $\mathrm{tdet}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,\ \rho(i)}$. 那么，若按 $\sigma\in S_n$ 对方程进行置换，并按 $\tau\in S_n$ 对变量进行置换，我们得到一个新系统 $v_1,\ \ldots,\ v_n$，其变量为 $y_1,\ \ldots,\ y_n$，阶数矩阵为 $B=(b_{i,\ j})$，最大横截线为 $\mathrm{tdet}(B)=\sum_{i=1}^{n}b_{i,\ \rho'(i)}$ 其中

$$\rho'=\tau^{-1}\rho\sigma. \tag{4.1}$$

在该引理中，τ 对应行运算，σ 对应列运算。

证明. 假设 $\rho\in S_n$ 定义了阶数矩阵 A 的横截，使得

$$\mathrm{tdet}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,\rho(i)}=\sum_{j=1}^{n}a_{\rho^{-1}(j),j}.$$

令 B 为通过置换方程使 $b_{i,\ j}=a_{\sigma(i),\ j}$ 所得到的矩阵。那么 $a_{i,\ j}=b_{\sigma^{-1}(i)\ j}$ 并且

$$\mathrm{tdet}(B)=\mathrm{tdet}(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{\rho^{-1}(j),j}=\sum_{i=1}^{n}b_{\sigma^{-1}(\rho^{-1}(j)),j}$$

使得 $\sigma^{-1}\rho^{-1}=(\rho\sigma)^{-1}$ 和 $\rho\mapsto\rho\sigma$。

同样地，如果我们置换变量，使得 $b_{i,\ j}=a_{i,\ \tau(j)}$ 和 $b_{i,\ \tau^{-1}(j)}=a_{i,\ j}$，那么

$$\mathrm{tdet}(B)=\mathrm{tdet}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,\rho(i)}=\sum_{i=1}^{n}b_{i,\tau^{-1}(\rho(i))}$$

并且我们有 $\rho\mapsto\tau^{-1}\rho$。 □

注记 4.2。上述引理定义了置换在阶数矩阵对角线上的右作用。如果我们使用行的置换来定义热带行列式的横截，仍然会得到一个逆变作用。为说明这一点，假设 $\mathrm{tdet}(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{\lambda(j),\ j}$. 在这种情况下 $\lambda=\rho^{-1}$，于是 $\lambda'=(\rho')^{-1}=(\tau^{-1}\rho\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\rho^{-1}\tau=\sigma^{-1}\lambda\tau$，使得

$$\lambda'=\sigma^{-1}\lambda\tau. \tag{4.2}$$

下面的定义将极大地方便我们对横截的处理。

定义 4.3。设 $A=(a_{i,\ j})$ 是一个元素属于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}\cup\{-\infty\}$ 的 $n\times n$ 矩阵。设 $\tau=(i_1i_2\ldots i_s)\in S_n$是一个环。则我们定义

$$a_\tau=a_{i_1,i_2}+a_{i_2,i_3}+\cdots+a_{i_s,i_1}. \tag{4.3}$$

注 4.4. 每个热带行列式都可以写成这类循环因子的和。事实上，如果 $\mathrm{tdet}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,\ \rho(i)}$ for $\rho\in S_n$ and $\rho=\tau_1\tau_2\ldots\tau_c$ 是其不相交循环的乘积，那么

$$\mathrm{tdet}(A)=\sum_{j=1}^{c}a_{\tau_j}, \tag{4.4}$$

其中，a_{τ_j} 是式（4.3）中定义的循环和。

定义 4.5. 我们将（4.4）称为该横截的循环和分解。

我们的约定是对称群从左侧作用，因此置换从右向左读（即 (12)(13) =(132)）。

例 4.6. 假设我们有 $A = (a_{i,\ j})$，这是一个元素属于 $\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$ 的 5×5 矩阵。假设 $\mathrm{tdet}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,\ \rho(i)}$ 其中 $\rho \in S_5$ 写成不相交循环的乘积为 $\rho = (13)(245)$。那么我们有

$$\mathrm{tdet}(A) = a_{1,3} + a_{2,4} + a_{3,1} + a_{4,5} + a_{5,2}.$$

我们可以将这个热带行列式重新整理为分别对应其循环 (13) 和 (245) 的因子。

$$\mathrm{tdet}(A) = (a_{1,3} + a_{3,1}) + (a_{2,4} + a_{4,5} + a_{5,2}) = a_{(13)} + a_{(245)}.$$

在我们的约化过程中，我们广泛运用 Ritt循环技巧；它能高效地表述处理横截时常见的重排操作。

引理 4.7（Ritt循环技巧）。设 $A = (a_{i,\ j})$ 是一个元素取自 $\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$ 的 $n \times n$ 矩阵。假设 $\mathrm{tdet}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,\ i}$. 若 $\tau \in S_n$ 是一个环，则

$$a_\tau \leq \sum_{i \in \mathrm{supp}(\tau)} a_{i,i}.$$

证明。由于横截 A_τ 小于或等于 $\mathrm{tdet}(A)$，因此有

$$a_\tau + \sum_{i \notin \mathrm{supp}(\tau)} a_{i,i} = A_\tau \leq \mathrm{tdet}(A) = \sum_{i \in \mathrm{supp}(\tau)} a_{i,i} + \sum_{i \notin \mathrm{supp}(\tau)} a_{i,i}.$$

消去不在 τ 支撑中的项，即得所求结果。 □

5. Ritt's Reductions: Divisions That Preserve Jacobi numbers

现在我们介绍 Ritt 第一约化和第二约化（分别见命题 5.3 和命题 5.4）。这是 Ritt 证明线性情形下的雅可比界猜想的关键步骤 [Rit35, pg 310]，而且是在特征集理论发展起来之前发现的。反思 Ritt 的证明后，我们意识到，他关于 Jacobi 数的论断对非线性系统仍然成立。由于这一观察对证明我们的主定理至关重要（见第 10 节和第 11 节），我们将在接下来的几节中阐述他的证明，并着重弥补其中几个小的漏洞和一个主要漏洞（第 7 节）。

现在我们给出 Ritt 第一约化（命题 5.3）和 Ritt 第二约化（命题 5.4）的假设名称。我们分别称它们为 Ritt 第一形式和 Ritt 第二形式。

定义 5.1. 设 $R = K\{x_1, \ldots, x_n\}$。设 $I = [u_1, u_2, \ldots, u_n] \subset R$，其阶数矩阵为 $A = (a_{i,\ j})$，其中$a_{i,\ j} = \mathrm{ord}^{\partial}_{x_j}(u_i)$。我们称该方程组处于 Ritt 第一形式，如果

$$\mathrm{tdet}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \quad \text{and} \quad a_{2,1} \geq a_{1,1} \neq -\infty, \tag{5.1}$$

并且在 Ritt 第二形式下，如果

$$\mathrm{tdet}(A) = a_{1,n} + \left(\sum_{i=2}^{n-1} a_{i,i} \right) + a_{n,1}, \tag{5.2}$$

$$\mathrm{tdet}(\widetilde{A}_{n,n}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i} \neq -\infty, \text{ and} \tag{5.3}$$

$$a_{n,1} = \max\{a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1}\}. \tag{5.4}$$

我们注意到，5.3 和 5.4 意味着 $a_{1,\ 1}$，$a_{n,\ 1} \neq -\infty$。

如果一个方程组不属于 Ritt 第一或第二形式，我们报告称，在 Magma 中进行的大量实验表明，任何 Ritt 除法都很可能会增加强 Jacobi 数；参见例5.2。特别是，据我们所知，Ritt 精确指出了两种情形，在这两种情形下，Ritt 除法不会增加方程组的 Jacobi 数。

例5.2。考虑微分方程组

$$\begin{cases} u_1 = x + x' + y^{(2)} + z^{(3)}, \\ u_2 = x' + y' + z', \\ u_3 = x^{(2)} + y' + z'. \end{cases}$$

其阶数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 1 & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

且雅可比数为 6；方框中的项构成一个极大横截。该方程组满足 (5.3) 和 (5.2) 的第一部分，但不满足 (5.3) 的第二部分。用第一条方程对第三条方程进行 Ritt 除法，得到方程组

$$\begin{cases} u_1 = x + x' + y^{(2)} + z^{(3)}, \\ u_2 = x' + y' + z', \\ v_3 = x' + y' - y^{(3)} + z' - z^{(4)}. \end{cases}$$

其阶数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 3 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

且雅可比数为 7。

命题 5.3（从 Ritt 第一形式出发的约化）。设 $R = K\{x_1, \dots, x_n\}$。设 $I = [u_1, u_2, \dots, u_n] \subset R$，其阶数矩阵为 $A = (a_{i,j})$，其中 $a_{i,j} = \mathrm{ord}^{\partial}_{x_j}(u_i)$。假设该方程组处于 Ritt 第一形式（定义 5.1）。令 $h = su_2 - Qu_1$ 为对 u_2 关于变量 x_1 用 ∂进行除法后得到的 Ritt 余式（因此只使用分离子，且 s 属于由 $s_{1,1}$ 和 $Q \in R[\partial]$生成的乘法集）。

那么 $J(u_1, h, u_3, \dots, u_n) \le J(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$。

证明。假设 $J(u_1, h, u_3, \dots, u_n) > J(u_1, u_2, \dots, u_n)$。令 $B = (b_{i,j})$ 为 $(u_1, h, u_3, \dots, u_n)$ 的阶数矩阵。令 $\rho \in S_n$ 为一个置换，使得

$$J(u_1, h, u_3, \dots, u_n) = \mathrm{tdet}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,\rho(i)}.$$

注意，由于我们只修改第二个方程，因此对于 $i \neq 2$，有 $b_{i,j} = a_{i,j}$。此外，对于 $i = 2$，我们总有

$$b_{2,j} \le \max\{a_{2,j}, a_{1,j} + a_{2,1} - a_{1,1}\}, \tag{5.5}$$

因为在 Ritt 除法中我们需要取 $a_{2,1} - a_{1,1}$ 个导数。我们可以假设存在某个 j，使得 $a_{2,j} < b_{2,j} \le a_{1,j} + a_{2,1} - a_{1,1}$（否则证明是平凡的），并且 $\rho(2) = j$ 与这个特定的 j 相关（否则 $b_{2,j}$ 永远不会出现，我们也就无需考虑它）。

现在，我们将置换 $\rho \in S_n$ 写成若干环的乘积，并基于置换的支集进行论证。回顾一下，置换的支集是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中不被 ρ 固定的元素集合，我们将 ρ 的支集记作 $\mathrm{supp}(\rho)$。

此外，对于置换 $\tau \in S_n$，我们用 $A_\tau = \sum_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)}$ 表示与 τ关联的横截。根据假设，我们总有 $A_\tau \le J(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$。

在第一种情况下，我们假设 $1 \notin \mathrm{supp}(\rho)$，即 $\rho(1) = 1$。在这种情况下，我们得到一些抵消：

$$\begin{aligned} \mathrm{tdet}(B) &= \sum_{i=1}^{n} b_{i,\rho(i)} \\ &= a_{1,\rho(1)} + (a_{1,\rho(2)} + a_{2,1} - a_{1,1}) + a_{3,\rho(3)} + \cdots + a_{n,\rho(n)} \\ &= a_{1,\rho(2)} + a_{2,1} + a_{3,\rho(3)} + \cdots + a_{n,\rho(n)} \\ &= a_{1,\tau(1)} + a_{2,\tau(2)} + a_{3,\tau(3)} + \cdots + a_{n,\tau(n)} = A_\tau \le \mathrm{tdet}(A) \end{aligned}$$

其中 $\tau = \rho\rho'$，$\rho' = (1\rho(2))$ 是交换 $\rho(2)$ 与 1 的换位。

在第二种情况下，我们假设 $1 \in \mathrm{supp}(\rho)$，且在 ρ 下，1 不属于 2 的轨道。在这种情况下，我们可以应用 Ritt循环技巧。写作 $\rho = \tau_1\tau_2\cdots\tau_s$，其中 τ_i 是不相交循环。不失一般性，我们假设 $1 \in \mathrm{supp}(\tau_1)$。利用方程 (4.4)，我们有

$$\mathrm{tdet}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,\rho(i)} = \sum_{j=1}^{s} b_{\tau_j}.$$

然后，我们结合 τ_1 （引理 4.7）中的环不等式和除法不等式（方程 (5.5)），得到 $a_{1,\ 1}$ 项的类似消去:

$$\begin{aligned}\mathrm{tdet}(B) = b_{\tau_1} + \sum_{j=2}^{s} b_{\tau_j} &\le \left(\sum_{j\in\mathrm{supp}(\tau_1)} a_{j,j}\right) + \left(a_{1,\rho(2)} + a_{2,1} - a_{1,1}\right) + \left(\sum_{j\notin\mathrm{supp}(\tau_1),j\neq 2} a_{j,\rho(j)}\right)\\ &= \left(\sum_{j\in\mathrm{supp}(\tau_1),j\neq 1} a_{j,j}\right) + \left(a_{1,\rho(2)} + a_{2,1}\right) + \left(\sum_{j\notin\mathrm{supp}(\tau_1),j\neq 2} a_{j,\rho(j)}\right) = A_\sigma.\end{aligned}$$

其中 $\sigma = \tau_1^{-1}\cdot\rho\cdot(1\rho(2))$，因此 $\sigma(1) = \rho(2)$，且 $\sigma(2) = 1$。

在第三种情况下，我们假设 $1 \in \mathrm{supp}(\rho)$，并且 1 和 2 在 ρ 作用下属于同一轨道。[7] 我们将 $\rho = \tau_1\tau_2\cdots\tau_s$ 写成循环分解。假设 $1, 2 \in \mathrm{supp}(\tau_1)$。于是，对于某个 i，有 $\rho^i(1) = 2$；对于某个 j，有 $\rho^j(2) = 1$。于是

$$\begin{aligned}b_{\tau_1} &= b_{1,\rho(1)} + b_{\rho(1),\rho^2(1)} + \cdots + b_{\rho^{i-1}(1),2} + b_{2,\rho(2)} + b_{\rho(2),\rho^2(2)} + \cdots + b_{\rho^i(2),1}\\ &\le a_{1,\rho(1)} + a_{\rho(1),\rho^2(1)} + \cdots + a_{\rho^{i-1}(1),2} + (a_{1,\rho(2)} + a_{2,1} - a_{1,1}) + a_{\rho(2),\rho^2(2)} + \cdots + a_{\rho^{j-1}(2),1}\\ &= (a_{1,\rho(1)} + a_{\rho(1),\rho^2(1)} + \cdots + a_{\rho^{i-1}(1),2} + a_{2,1}) + (a_{1,\rho(2)} + a_{\rho(2),\rho^2(2)} + \cdots + a_{\rho^{j-1}(2),1}) - a_{1,1}\\ &= a_{\sigma_1} + a_{\sigma_2} - a_{1,1}\end{aligned}$$

其中 $\sigma_1 = (1\rho(1)\rho^2(1)\cdots\rho^{i-1}(1)2)$，且 $\sigma_2 = (\rho(2)\rho^2(2)\cdots\rho^{j-2}(2)1)$；第二行由 $b_{2,\ \rho(2)} \le a_{1,\ \rho(2)} + a_{2,\ 1} - a_{1,\ 1}$ 得出。应用引理 4.7 得

$$a_{\sigma_1} + a_{\sigma_2} - a_{1,1} \le \left(\sum_{i\in\mathrm{supp}(\sigma_1)} a_{i,i}\right) + \left(\sum_{i\in\mathrm{supp}(\sigma_2)} a_{i,i}\right) - a_{1,1}.$$

由于 $\mathrm{supp}\ \sigma_1 \cup \mathrm{supp}\ \sigma_2 = \mathrm{supp}\ \tau_1$ 且 $\mathrm{supp}\ \sigma_1 \cap \mathrm{supp}\ \sigma_2 = \{1\}$（即，$a_{1,\ 1}$ 在每个和式中各出现一次），最后这个表达式等于 $\sum_{i\in\mathrm{supp}(\tau_1)} a_{i,\ i}$。我们得出 $b_{\tau_1} \le \sum_{i\in\mathrm{supp}(\tau_1)} a_{i,\ i}$，特别是

$$\mathrm{tdet}(B) = \sum_{j=1}^{s} b_{\tau_j} = b_{\tau_1} + \sum_{j=2}^{s} a_{\tau_j} \le \sum_{i\in\mathrm{supp}(\tau_1)} a_{i,i} + \sum_{j=2}^{s} a_{\tau_j} = A_{\tau_1^{-1}\rho} \le \mathrm{tdet}(A).$$

□

命题 5.4（从 Ritt 第二形式的约化）。设 $R = K\{x_1, \ldots, x_n\}$。设 $I = [u_1, u_2, \ldots, u_n] \subset R$，其阶数矩阵为 $A = (a_{i,\ j})$，其中 $a_{i,\ j} = \mathrm{ord}^{\partial}_{x_j}(u_i)$。假设该方程组处于 Ritt 第二形式（定义 5.1）。令 $h = su_n - Qu_1$ 为 u_n 关于变量 x_1经过 ∂-除法后的 Ritt 余式（因此仅使用分离式，并且 s 属于由 $s_{1,\ 1}$ 和 $Q \in R[\partial]$生成的乘法集）。

那么 $J(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, h) \subseteq J(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)$。

注 5.5. 这与命题 5.3 的一个区别在于，A 的极大横截不要求沿对角线。因此，Ritt循环技巧（引理 4.7）并不适用于所有 τ 的 a_τ。但是，假设 $\mathrm{tdet}(\widetilde{A}_{n,\ n}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,\ i}$，则对任意满足 $n \notin \mathrm{supp}\ \tau$ 的 τ，将引理 4.7$\widetilde{}$ 应用于子矩阵 $A_{n,\ n}$，仍可得到

$$a_\tau \le \sum_{i\in\mathrm{supp}(\tau)} a_{i,i}.$$

[7] Ritt 在其原始论文 [Rit35] 中遗漏了这种情况。在第 308 页的公式 19 中，似乎隐含地假设了在给定置换作用下，2 不在 1 的轨道中。

命题 5.4 的证明。由于 $a_{n,\ 1}$ 是其所在列的最大值，$a_{n,\ 1} \neq -\infty$；事实上，否则整列都将由 $-\infty$ 组成，也就是说，变量 x_1 及其导数将不会出现在方程中，因此所有分支的维数都将是无限的。

令 $B = (b_{i,\ j})$ 为新系统的阶数矩阵。我们有 $b_{i,\ j} = a_{i,\ j}$，对于 $i \neq n$ 和 $b_{n,\ j} \leq \max\{a_{n,j}, a_{1,j} + a_{n,1} - a_{1,1}\}$。如果对于所有 j，都有 $b_{n,\ j} = a_{n,\ j}$，那么 $A = B$，无需证明。类似地，如果存在 j 使得 $b_{n,\ j} = a_{n,\ j}$，且 $b_{n,\ j}$ 是某个极大横截的一部分，那么 $\operatorname{tdet}(A) = \operatorname{tdet}(B)$，无需证明。

因此，我们假设对于某个 j，$b_{n,\ j}$ 是某个极大横截的一部分，且 $b_{n,\ j} > a_{n,\ j}$。在这种情况下，我们仍有 $b_{n,\ j} \leq a_{1,\ j} + a_{n,\ 1} - a_{1,\ 1}$。令 ρ 为一个置换，使得 $\operatorname{tdet}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,\ \rho(i)}$，从而

$$b_{n,\rho(n)} \leq a_{1,\rho(n)} + a_{n,1} - a_{1,1}.$$

于是我们有

$$\operatorname{tdet}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,\rho(i)} \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,\rho(i)}\right) + (a_{1,\rho(n)} + a_{n,1} - a_{1,1}).$$

我们将其分成与命题 5.3 类似的几种情况。

假设 $\rho(1) = 1$。那么 $a_{1,\rho(1)}$ 且 $a_{1,1}$ 约去后得到

$$\begin{aligned} a_{1,\rho(1)} + a_{2,\rho(2)} + \cdots + a_{n-1,\rho(n-1)} + (a_{1,\rho(n)} + a_{n,1} - a_{1,1}) = \\ a_{1,\rho(n)} + a_{2,\rho(2)} + \cdots + a_{n-1,\rho(n-1)} + a_{n,1} = A_\tau \end{aligned}$$

其中 $\tau = \rho\sigma$ 其中 $\sigma = (1n)$。这意味着 $\operatorname{tdet}(B) \leq \operatorname{tdet}(A)$。

接下来，将 ρ 写成不相交循环的乘积，使得

$$\rho = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s.$$

我们假设 $1 \in \operatorname{supp}(\tau_1)$（现在我们始终处于 $\rho(1) \neq 1$ 的情形）。

首先，假设 n 不在 1 在 ρ 下的轨道中（即 $n \notin \operatorname{supp}(\tau_1)$）。我们假设 $n \in \operatorname{supp}(\tau_s)$。由于 $n \notin \operatorname{supp} \tau_1$，根据注 5.5，$a_{\tau_1} \leq \sum_{i \in \operatorname{supp}(\tau_1)} a_{i,i}$。这意味着

$$\begin{aligned} b_{\tau_1} + \left(\sum_{j=2}^{s-1} b_{\tau_j}\right) + b_{\tau_s} &= a_{\tau_1} + \left(\sum_{j=2}^{s-1} a_{\tau_j}\right) + b_{\tau_s} \\ &\leq a_{\tau_1} + \left(\sum_{j=2}^{s-1} a_{\tau_j}\right) + \left(b_{\tau_s} - b_{n,\rho(n)}\right) + \left(a_{1,\rho(n)} + a_{n,1} - a_{1,1}\right) \\ &\leq \left(\left(\sum_{i \in \operatorname{supp}(\tau_1)} a_{i,i}\right) - a_{1,1}\right) + \left(\sum_{j=2}^{s-1} a_{\tau_j}\right) + \left(\left(\sum_{i \in \operatorname{supp}(\tau_s)} b_{i,\rho(i)}\right) - b_{n,\rho(n)}\right) + a_{1,\rho(n)} + a_{n,1} \\ &= \left(\sum_{i \in \operatorname{supp}(\tau_1), i \neq 1} a_{i,i}\right) + \left(\sum_{j=2}^{s-1} a_{\tau_j}\right) + a_{1,\rho(n)} + \left(\sum_{i \in \operatorname{supp}(\tau_s), i \neq n} a_{i,\rho(i)}\right) + a_{n,1} \\ &= \left(\sum_{i \in \operatorname{supp}(\tau_1), i \neq 1} a_{i,i}\right) + \left(\sum_{j=2}^{s-1} a_{\tau_j}\right) + a_{\tau_s(1n)} \\ &= A_\tau \end{aligned}$$

其中 $\tau = \tau_2 \cdots \tau_s(1n)$。（注意，$\tau(1) = \rho(n)$ 且 $\tau(n) = 1$。）根据引理 4.7，$A_\tau \leq \operatorname{tdet}(A)$；由于 $\operatorname{tdet}(B) \leq A_\tau$，我们得出 $\operatorname{tdet}(B) \leq \operatorname{tdet}(A)$。

现在假设 1 和 n 都在 τ_1 的支撑中。那么我们有

$$\operatorname{tdet}(B) = b_{\tau_1} + b_{\tau_2} + \cdots + b_{\tau_s} = b_{\tau_1} + a_{\tau_2} + \cdots + a_{\tau_s},$$

接下来只需利用 $b_{n,\rho(n)} = a_{1,\rho(n)} + a_{n,1} - a_{1,1}$ 对 b_{τ_1} 进行界定。我们将 b_{τ_1} 分解，注意到存在某个 i，使得 $\rho^i(1) = n$，并且存在某个 j，使得 $\rho^j(n) = 1$。于是

$$\begin{aligned} b_{\tau_1} =& (b_{1,\rho(1)} + b_{\rho(1),\rho^2(1)} + \cdots + b_{\rho^{i-1}(1),n}) + b_{n,\rho(n)} + (b_{\rho(n),\rho^2(n)} + \cdots + b_{\rho^{j-1}(n),1}) \\ =& (a_{1,\rho(1)} + a_{\rho(1),\rho^2(1)} + \cdots + a_{\rho^{i-1}(1),n}) + (a_{1,\rho(n)} + a_{n,1} - a_{1,1}) + (a_{\rho(n),\rho^2(n)} + \cdots + a_{\rho^{j-1}(n),1}) \\ =& (a_{1,\rho(1)} + a_{\rho(1),\rho^2(1)} + \cdots + a_{\rho^{i-1}(1),n} + a_{n,1}) + (a_{1,\rho(n)} + a_{\rho(n),\rho^2(n)} + \cdots + a_{\rho^{j-1}(n),1}) - a_{1,1}. \end{aligned}$$

若令 $\sigma_1 = (1\rho(1)\rho^2(1) \cdots \rho^{i-1}(1)n)$ 和 $\sigma_2 = (1\rho(n)\rho^2(n) \cdots \rho^{j-1}(n))$，则

$$b_{\tau_1} = a_{\sigma_1} + a_{\sigma_2} - a_{1,1}.$$

由于 $n \notin \operatorname{supp}\sigma_2$，由注 5.5 可得

$$b_{\tau_1} \le a_{\sigma_1} + \sum_{i \in \operatorname{supp}(\sigma_2), i \neq 1} a_{i,i}.$$

由此可得

$$\operatorname{tdet}(B) = b_{\tau_1} + a_{\tau_2} + \cdots + a_{\tau_s} \le a_{\sigma_1} + \left(\sum_{i \in \operatorname{supp}(\sigma_2), i \neq 1} a_{i,i} \right) + a_{\tau_2} + \cdots + a_{\tau_s} = A_{\sigma_1 \tau_1^{-1} \rho} \le \operatorname{tdet}(A),$$

证明至此完成。 □

6. Existence of the First Form

命题 6.1（[Rit35]）。设 A 是一个元素取自 $\mathbb{Z}_{\ge 0} \cup \{-\infty\}$ 的 $n \times n$。假设对于 A 的每个横截 ρ，$a_{1,\rho(1)} \neq -\infty$ 和 $a_{1,\rho(1)}$ 都不是第一列的最大值。此外，假设第一列中至少还有一个元素不等于 $-\infty$。那么，A 可以通过不涉及第一列的行交换和列交换化为 Ritt 第一形式（定义 5.1）。

证明。假设 $\operatorname{tdet}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,\rho(i)}$。在引理 4.1 中取 $\tau = \rho$（即重新排列 A 的行），得到矩阵 B，满足 $\operatorname{tdet}(B) = \sum_{i=1}^n b_{i,i}$。我们没有重新排列任何列，因此根据假设，$b_{1,1} \le \max\{b_{1,1}, b_{2,1}, \ldots, b_{n,1}\}$，并且存在某个 i 使得 $b_{1,1} \le b_{i,1}$。再次应用引理 4.1，取 $\tau = \sigma = (2i)$，得到矩阵 C，满足 $\operatorname{tdet}(C) = \sum_{i=1}^n c_{i,i}$ 且 $c_{1,1} \le c_{2,1}$，也就是说，C 属于 Ritt 第一形式。□

7. Filling Ritt's Gap: Existence Of The Second Form

撰写本文时，作者注意到 Ritt 在 [Rit35] 中关于雅可比界猜想线性情形的证明存在一个非平凡的漏洞。这个漏洞出现在他的证明中：任何满足特定假设、且元素属于 $\mathbb{Z}_{\ge 0} \cup \{-\infty\}$ 的 $n \times n$ 矩阵，都可以化为 Ritt 第二形式（定义 5.1）。Ritt 在证明结尾声称这一点显而易见；我们发现，要证明这一结果，必须借助霍尔匹配定理。

我们现在将这个间隙表述为一个命题，并在本节末尾搭建好适当的组合工具后给出证明。

命题 7.1（[Rit35]的间隙）。设 A 是一个元素取自 $\mathbb{Z}_{\ge 0} \cup \{-\infty\}$的 $n \times n$。假设对于 A的每个横截 ρ，$a_{1,\rho(1)} \neq -\infty$ 且 $a_{1,\rho(1)}$ 是第一列中的最大值。此外，假设第一列中至少有另一个元素不等于 $-\infty$。那么，可以通过不涉及第一列或最后一行的行交换和列交换，将 A 化为 Ritt 第一形式（定义 5.1）。

我们采用一种精妙的反证法，其论证依赖于霍尔匹配定理。

定义 7.2。对于一个具有 $V = X \amalg Y$的二部多重图 $G = (V, E)$，饱和匹配是大小为 $|X|$ 的边子集，它将 X 中的每个元素与 Y中的一个元素配对。

描述匹配的另一种方式是将其视为 1-正则二部子图。

在下文中，对于 S X 的子集，我们将用 $N(S) = \{y \in Y\colon \exists x \in S \text{ with } (x,y) \in E\}$ 表示 S 在 Y 中的邻域

定理 7.3（霍尔匹配定理 [Wes96，第 110 页，定理 3.1.11]）。设 $G=(V,E)$ 是一个划分为 $V=X\amalg Y$ 的二分图。那么， G 存在饱和匹配，当且仅当

$$\forall S\subseteq X,\qquad |N(S)|\geq |S|.$$

注 7.4. 注意，正则二部图满足霍尔匹配定理的假设，因此有一个完美匹配。事实上，设 $G=(V,E)$ 是一个具有 $V=X\amalg Y$ 的二分 k-正则图。令 $S\subset X$。那么，由于 G 是 k-正则的，我们知道有 $k|S|$ 条边与 $N(S)$ 相 incident。如果 $|N(S)|<|S|$，那么根据鸽巢原理，至少会存在一条度数大于 k 的边，这就产生了矛盾。

引理 7.5. 设 G 是一个有 n 个顶点且没有自环的有向图。假设每个顶点的出度均为 1。那么 G 有一个有向环。

证明. 我们将在图上构造一条游走。从一个顶点出发，然后沿着唯一一条指向外部的边前进。最终，它会再次到达一个曾经访问过的顶点，或者形成一个长度恰为 n 的环。从先前的顶点出发的一条路径定义了一个环。□

在填补证明中的缺口时，我们会用到一种“第三”形式（它实际上等价于第二形式）。为使论述更易于理解，我们现在介绍这种形式。

注 7.6（Ritt 的“第三”形式）。设 A 是一个处于 Ritt 第二形式的矩阵（特别地，$\mathrm{tdet}(A)=a_{n,1}+a_{1,n}+\sum_{i=2}^{n-1}a_{i,i}$）。那么，通过循环置换第 2、3、...、$n$ 列，我们得到矩阵 B，满足

$$\mathrm{tdet}(B)=b_{n,1}+\sum_{i=2}^{n}b_{i,i+1}. \tag{7.1}$$

明确地说，$b_{i,j}=a_{i,\rho(j)}$，其中 ρ 是置换 $2\mapsto 3\mapsto\cdots\mapsto n\mapsto 2$ 的逆置换。注意，在这种情况下，要使 A 处于 Ritt 第二形式，我们要求 $\mathrm{tdet}(\widetilde{A}_{n,n})=\sum_{i=1}^{n-1}a_{i,i}$。在上述变换下，由于 A 的第 n 列对应于 B 的第 2 列，这等价于

$$\mathrm{tdet}(B_{n,2})=b_{1,1}+\sum_{i=2}^{n-1}b_{i,i+1}. \tag{7.2}$$

因此，满足 (7.1) 和 (7.2) 的矩阵 B 可以称为处于 Ritt 的第三形式，这等价于矩阵处于第二形式。这一点对下文会有帮助。

在填补这个空缺之前，还有最后一件事。我们想记录一个公式（方程 (7.3)），用于求 A 的余子式矩阵的横截$\widetilde{}$。在矩阵 $A_{r,c}$ 中，我们省略第 r 行和第 c 列。这意味着热带行列式现在将对函数 ρ: $\{1,2,\dots,n\}\setminus\{r\}\to\{1,2,\dots,n\}\setminus\{c\}$ 取最大值，而对于这样的 ρ，横截现在具有如下形式

$$\mathrm{tdet}(\widetilde{A}_{r,c})=a_{1,\rho(1)}+\cdots+a_{r-1,\rho(r-1)}+a_{r+1,\rho(r+1)}+\cdots+a_{n,\rho(n)}. \tag{7.3}$$

我们注意到，j 位置上的 c 和 i 位置上的 r 必须省略。值得注意的是，每个这样的函数都可以扩展为一个满足 $\widetilde{\rho}(r)=c$ 的置换 $\widetilde{\rho}\in S_n$。

现在我们可以证明，任意矩阵都能化为第二形式，从而补上 Ritt 线性情形证明中的缺漏。

命题 7.1 的证明。设 $A=(a_{i,j})$ 为阶数矩阵。交换行和列后，我们总可以假设 $a_{n,1}$ 是其所在列的最大值，且 $a_{2,2}+\cdots+a_{n-1,n-1}+a_{1,n}$ 是 $A_{n,1}$ 的一个极大横截$\widetilde{}$。应用置换 $2\mapsto 3\mapsto\cdots\mapsto n-1\mapsto n$ 的逆置换，得到矩阵 B，使得$\sim$$b_{1,2}+b_{2,3}+\cdots+b_{n-1,n}$ 是 $B_{n,1}$ 的一个极大横截。将 A 替换为 B 后，不失$\widetilde{}$一般性，可假设 $a_{1,2}+a_{2,3}+\cdots+a_{n-1,n}$ 是 $A_{n,1}$ 的一个极大横截。

令 D 为通过交换 A的第 1 行与第 i 行以及第 2 列与第 $i+1$ 列得到的矩阵。我们声称，D 处于 Ritt 的第三形式，即横截

$$d_{1,1}+d_{2,3}+\cdots+d_{i-1,i}+d_{i,i+1}+d_{i+1,i+2}+\cdots+d_{n-1,n} \tag{7.4}$$

~的$D_{n,\ 2}$是最大的，当且仅当

$$(a_{1,2}+a_{2,3}+\cdots+a_{i-1,i})+a_{i,1}+(a_{i+1,i+2}+\cdots+a_{n-1,n}) \tag{7.5}$$

~是子矩阵$A_{n,\ i+1}$的极大横截。为证明这一点，设 C 为通过交换 A的第 1 行和第 i 行得到的矩阵，即，

$$c_{rs}=\begin{cases}a_{is} & \text{if } r=1\\ a_{1s} & \text{if } r=i\\ a_{rs} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

那么 D 是通过交换 C的第 2 列和第 $i+1$ 列得到的矩阵，即，

$$d_{rs}=\begin{cases}c_{r(i+1)} & \text{if } s=2\\ c_{r2} & \text{if } s=i+1\\ c_{rs} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

结合这两个公式可得

$$d_{1,1}+d_{2,3}+\cdots+d_{i-1,i}+\boxed{d_{i,i+1}}+d_{i+1,i+2}+\cdots+d_{n-1,n}$$

等于

$$\underline{c_{1,1}}+c_{2,3}+\cdots+c_{i-1,i}+\boxed{c_{i,2}}+c_{i+1,i+2}+\cdots+c_{n-1,n},$$

这等于

$$\underline{a_{i,1}}+a_{2,3}+\cdots+a_{i-1,i}+\boxed{a_{1,2}}+a_{i+1,i+2}+\cdots+a_{n-1,n}$$

（为清晰起见，我们对发生变化的项加了下划线并用方框标出）。交换 $a_{i,\ 1}$ 和 $a_{1,\ 2}$，重新排列该和式中各项的顺序，得到

$$\left(\boxed{a_{1,2}}+a_{2,3}+\cdots+a_{i-1,i}\right)+\underline{a_{i,1}}+(a_{i+1,i+2}+\cdots+a_{n-1,n})\,.$$

特别地，由于我们的操作将方程（7.5）变为方程（7.4），方程（7.4）是~$D_{2,\ n}$（即， D 处于 Ritt 的第三形式）的极大横截，当且仅当方程（7.5）是~$A_{n,\ i+1}$的极大横截，正如所要证明的。

~现在只需证明，对于某个 i，方程（7.5）是 $A_{n,\ i+1}$的极大横截。我们采用反证法。假设对于所有 $i\in\{1,\ldots,n-1\}$，方程（7.5）都不是~$A_{n,\ i+1}$的极大横截。这意味着，对于每个 i，都存在一个更大的横截，即存在一个双射 $\rho_i\colon\ \{1,2,\ldots,n-1\}\to\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i\}$，使得

$$(a_{1,2}+a_{2,3}+\cdots+a_{i-1,i})+a_{i,1}+(a_{i+1,i+2}+\cdots+a_{n-1,n})<\sum_{r=1}^{n-1}a_{r,\rho_i(r)}. \tag{7.6}$$

考虑一个有向图，其顶点为整数 1，...，$n-1$；若 i到 j之间满足以下条件，则从 i到 j有一条边：$a_{i,}$ 1</style}出现在方程（7.6）的左侧，而，1 </style}出现在方程（7.6）的右侧。由于 ρ_i 是一个双射，且 1 在其像中，因此存在唯一的 r，使得 $\rho_i(r)=1$；特别地，每个顶点都有唯一的出边。根据引理 7.5，该图包含一个环 $C=i_1i_2\ldots i_ki_1$。令 $\sigma\in S_n$为由下式给出的循环置换：当 i 不在该环的支撑中时， $\sigma(i)=i$； $\sigma(i_k)=i_1$；对于 $i<k$， $\sigma(i_j)=i_{j+1}$。

从这里开始，我们只考虑支撑中 i 的方程（7.6）。为简化记号，我们对 A的行和列应用置换$(1i_1)(2i_2)\cdots(ki_k)$，且不失一般性，可以假设$\sigma=(12\ldots k)$（并且仍然有$a_{n,\ 1}$是其所在列中的最大值，且$a_{1,\ 2}+a_{2,\ 3}+\cdots+a_{n-1,\ n}$是$A_{n,\ 1}$的一个极大横截）。

现在考虑方程（7.6）中对应于 $i=1$、.....、 k的不等式之和，并将$a_{1,\ 2}+\cdots+a_{k,\ k+1}$加到两边。于是，该和式的左边为

$$(a_{1,1}+\cdots+a_{k,1})+k(a_{1,2}+a_{2,3}+\cdots+a_{n-1,n});$$

~我们注意到，第二项是给定的$A_{n,\ 1}$极大横截的 k 倍。

右侧更为复杂，它是以下各项之和

$$\left(\sum_{r=1}^{k} a_{r,r+1}\right) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{n-1} a_{r,\rho_i(r)}. \tag{7.7}$$

我们将用二分图来表示这个和，通过消去不等式两边的项，将该图化为一个 k-正则图，从而得到一个 k-正则二部图。然后，我们使用霍尔匹配定理证明剩余部分是横截之和，接着用 Ritt循环技巧对其进行界定，由此导出矛盾。

我们首先构造一个二分图 G_0。我们构造 G_0，其顶点为 $X = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ 和 $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$；若 $a_{i,\ j}$ 出现在左边，则在 G_0 中添加一条边 (x_i, y_j)。用这种记号，我们有

$$\left(\sum_{r=1}^{k} a_{r,r+1}\right) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{n-1} a_{r,\rho_i(r)} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n} c^0_{i,j} a_{i,j} \tag{7.8}$$

其中 $c^0_{i,\ j}$ 是 G_0 中从 x_i 到 y_j 的边数。

现在，我们可以计算每个 $x \in X$ 的出度以及每个 $y \in Y$ 的入度。由于 $\rho_i\colon \{1, \ldots, n-1\} \to \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ 是双射，我们知道，对于每个 $x \in X$，ρ_i 对 x 的出度贡献 1；对于每个 $y \in Y$（y_j 除外），它对 y 的入度贡献 1。仅考虑这些贡献时，每个 $x \in X$ 的出度将为 k，每个 $y \in Y$ 的入度将为 $k-1$。但我们还有额外的贡献 $\sum_{r=1}^{k} a_{r,\ r+1}$，它对每个 $x_1, \ldots, x_k$ 的出度贡献 1，并对 $y_2, \ldots, y_{k+1}$ 的入度贡献 1。

因此

$$\deg_{\text{out}}(x_i) = \begin{cases} k+1, & 1 \le i \le k \\ k, & k < i \le n-1 \end{cases}, \qquad \deg_{\text{in}}(y_j) = k, \quad 1 \le j \le n.$$

由于我们对 σ 的选择，项 $a_{1,\ 1}$、……、$a_{k,\ 1}$ 在求和的右边（即 $c^0_{1,\ 1} = c^0_{2,\ 1} = \cdots = c^0_{k,\ 1} = 1$）中恰好各出现一次。它们在不等式的左边也恰好各出现一次。因此，$a_{1,\ 1} + \cdots + a_{k,\ 1}$ 可从所得不等式两边约去。

用图论的语言来说，这相当于删去顶点 y_1，得到一个新图 G，其中 $\deg_{\text{out}}(x_i)$ 对 $1 \le i \le k$ 降低 1（而其他所有顶点的度保持不变）。这样就得到一个 G 正则二部图。

现在令 $c_{i,\ j}$ 表示在 G 中从 i 到 j 的边数，于是我们现在有

$$k(a_{1,2} + a_{2,3} + \cdots + a_{n-1,n}) \le \sum_{(i,j)\in E(G)} c_{i,j} a_{i,j}.$$

根据霍尔匹配定理，G 存在一个完美匹配 M_1。从 G 中移除 M_1 的边后，可得到另一个正则二部图；该图同样存在一个完美匹配 M_2。归纳可得，存在完美匹配 M_1、……、M_k，使得 $E(G) = \cup_i^k M_l$。

对于每个匹配 M_l，我们定义了双射 $\tau_l\colon \{1, \ldots, n-1\} \to \{2, \ldots, n\}$ 由 $\tau_l(i) = j$ 若 $x_i y_j \in M_l$ 定义。于是我们有

$$\sum_{(i,j)\in E(G)} c_{i,j} a_{i,j} = \sum_{l=1}^{k}\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,\tau_l(i)}.$$

每个加项 $\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,\ \tau_l(i)}$ 都是 $\widetilde{A}_{n,\ 1}$ 的横截，因此根据 Ritt循环技巧（引理 4.7），

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,\tau_l(i)} \le a_{1,2} + a_{2,3} + \cdots + a_{n-1,n}.$$

综合以上各点，我们得到

$$\begin{aligned} k(a_{1,2}+a_{2,3}+\cdots+a_{n-1,n}) &< \sum_{(i,j)\in E(G)} c_{i,j}a_{i,j} \\ &= \sum_{l=1}^{k}\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,\tau_l(i)} \\ &\le \sum_{l=1}^{k} (a_{1,2}+a_{2,3}\cdots+a_{n-1,n}) \\ &= k\,(a_{1,2}+a_{2,3}\cdots+a_{n-1,n})\,. \end{aligned}$$

这就产生了矛盾。 □

8. Ritt's Proof of The Linear Case

我们对变量的数量和阶数矩阵进行双重归纳。令 $\mathbb{R}=\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$。

定义 8.1。我们按如下方式定义 Ritt 矩阵序。

(1) 对于 $a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$，我们将 a 中各项的置换记为 $\widetilde{a}\in\mathbb{R}^n$，使各项按非递减顺序排列。当且仅当 $\widetilde{a}<_{\text{lex}}\widetilde{b}$ 时，我们称 $a\prec b$。[8] (2) 令 $A,B\in M_n(\mathbb{R})$。将矩阵写成列向量的向量 $A=[a_1|\cdots|a_n], B=[b_1|\cdots|b_n]$，使得 $\prec$，即 $A,B\in(\mathbb{R}^n)^n$。当且仅当 $A\prec_{\text{lex}}B$ 时，我们记为 $A\prec B$。

注意，如果将矩阵视为由列向量组成的向量，那么 Ritt 定义的矩阵序与各列上的字典序相同（其中各列按 $\prec$ 排序）。

引理 8.2. 设 $u_1,u_2,\ldots,u_n\in K\{x_1,\ldots,x_n\}$. 设 $P\supset[u_1,u_2,\ldots,u_n]$ 是一个极小素理想，对应于一个分支 Σ_1。设 $h=su_2-Qu_1$ 是在变量 x_1 上用 u_1 对 u_2 作 ∂ 除法后得到的 Ritt 余式。假设 $s\notin P$（即，S 在 Σ_1 上不为零）。

那么 $P\supset[u_1,h,u_3,\ldots,u_n]$ 是一个极小素理想。

换句话说，如果我们进行 Ritt 除法，且分离子 s 在 Σ_1 上不为零，那么 Σ_1 仍然是新系统的一个不可约分支。

证明。首先注意到 $h\in[u_1,u_2,\ldots,u_n]\subset P$，因此 $[u_1,h,u_3,\ldots,u_n]\subset[u_1,u_2,\ldots,u_n]\subset P$。假设$P$不是 $[u_1,h,u_3,\ldots,u_n]$上的极小素理想，并且存在某个素理想 P'，使得 $[u_1,h,u_3,\ldots,u_n]\subset P'\subsetneq P$。我们有 $h+Qu_1=su_2\in[u_1,h,u_3,\ldots,u_n]$，且由于 $s\in R\setminus P=S_P$，这意味着 $u_2\in\mathrm{sat}_{S_P}([u_1,h,u_3,\ldots,u_n])$。特别地，$\mathrm{sat}_{S_P}([u_1,h,u_3,\ldots,u_n])=\mathrm{sat}_{S_P}([u_1,u_2,\ldots,u_n])$；由于 $\mathrm{sat}_{S_P}(P)$（分别地，$\mathrm{sat}_{S_P}(P')$）仍是 $\mathrm{sat}_{S_P}([u_1,u_2,\ldots,u_n])$（分别地，$\mathrm{sat}_{S_P}([u_1,h,\ldots,u_n])$）上的极小理想，我们必有 $\mathrm{sat}_{S_P}(P')=\mathrm{sat}_{S_P}(P)$。由于 $s\notin P$，我们得出 $P'=P$。□

借助新增的关键要素，我们现在可以证明雅可比界猜想的线性情形。这是我们约化过程的一个推论。

推论 8.3. 雅可比界猜想在线性情形下成立。

证明。证明采用嵌套归纳法。外层归纳针对 n，也就是方程的数量，该数量等于变量的数量。内层归纳则依据 Ritt 排序（定义 8.1）对阶数矩阵进行。

思路是，我们总能通过约化降低方程组，同时保持不可约分支不变，并且可以一直进行下去，直到得到具有形式 (8.1) 的阶数矩阵。达到这一步后，我们就可以对变量的数量进行归纳。

基本情形（外层归纳）：如果 $n=1$，根据 Ritt 界 [Rit35]，JBC 已知成立。

[8] 在 [Rit35], Ritt 将这些称为“特征集”，当然，这与 2.22 中的现代定义不一致。

归纳步骤（外层归纳）：我们通过归纳法证明归纳步骤。

基本情形（内层归纳）：假设 A 的某一列恰有一个非 $-\infty$ 项。此时可以如下应用外层归纳假设。交换行和列后，不妨设 A 具有如下形式

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -\infty & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

并且 $a_{1,\ 1} \neq -\infty$。

假设我们有一个约化系统，其阶数矩阵如（8.1）所示。设 $P_1 \supset [u_1, \ldots, u_n]$ 是一个极小素理想，且 $\mathrm{trdeg}_K(\kappa(P_1)) < \infty$。我们将说明如何得出 $\mathrm{trdeg}_K(\kappa(P_1)) \leq J(u_1, u_2, \ldots, u_n)$。令 $F = \kappa(P_1)$，并设 $\bar{x}_1$ 是 x_1 在 $\kappa(F)$ 中的像。现在考虑 $F_1 = K(\{\bar{x}_1\}) \subset F$ ∂-域，它由 $\bar{x}_1$ 在 K 上生成。设 $w_2, \ldots, w_n \in F_1\{x_2, \ldots, x_n\}$ 由 $w_i = u_i(\overline{x}_1, x_2, \ldots, x_n)$ 给出。设 P_1' 是映射 $\xi\colon F_1\{x_2, \ldots, x_n\} \to \kappa(P_1)$ 的核。

我们有 $\kappa(P_1) = \kappa(P_1')$，因此 $\mathrm{trdeg}_K(P_1') < \infty$。我们声称 $P_1' \supset [w_2, \ldots, w_n]$ 是极小的。由于 u_2、……、u_n 不涉及 x_1 或其导数，方程组 w_2、……、w_n 的阶数矩阵为

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

对 n 作归纳法，并且我们知道，只要能证明 $P_1 \supset [w_2, \ldots, w_n]$ 是极小的，JBC 对这个方程组就成立。

假设 $P_1' \supset [w_2, \ldots, w_n]$ 不是极小的，并且存在某个 Q_1' 使得 $P_1' \supsetneq Q_1' \supset [w_2, \ldots, w_n]$。考虑映射

$$\varphi\colon K\{x_1, \ldots, x_n\} \to F_1\{x_2, \ldots, x_n\}/Q_1', \quad \psi\colon F_1\{x_2, \ldots, x_n\} \to F_1\{x_2, \ldots, x_n\}/Q_1'.$$
$$\sigma\colon K\{x_1, \ldots, x_n\} \to F_1\{x_2, \ldots, x_n\}, \quad \psi\sigma = \varphi.$$

令 $\ker(\varphi) = Q_1$。我们有 $Q_1 \supset [u_1, u_2, \ldots, u_n]$。由 P_1 的极小性可知 $P_1 = Q_1$。这意味着 φ 实际上就是模 P_1 约化，因此可分解为 $\varphi = \xi\sigma$。

设 $f \in P_1' \setminus Q_1'$。将其写为 $f = \sum_\alpha (\bar{a}_\alpha/\bar{b}_\alpha) y^\alpha$，其中 $y = (x_2, \ldots, x_n)$，且 $\alpha \in \mathrm{supp}(f) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}[\partial]^{n-1}$，其中 a_α、$b_\alpha \in K\{x_1\}$ 和 $\bar{a}_\alpha$ 以及 b_α 均在 $\bar{x}_1$ 处取值。设 $b = \prod_\alpha b_\alpha \in K\{x\}$。设 $g = \sum_\alpha c_\alpha y^\alpha \in K\{x_1, \ldots, x_n\}$，其中 $c_\alpha = b(a_\alpha/b_\alpha) \in K\{x_1\}$。一方面，$0 \neq \sigma(b) = \varphi(b) \in F_1$，但 $\varphi(gb) = \psi(\sigma(g)\sigma(b)) = \psi(f/\sigma(b)) = \psi(f)/\sigma(b) \neq 0$，且 $\psi(f) \neq 0$。另一方面，$\varphi(gb) = \xi(\sigma(g)\sigma(b)) = \xi(f/\sigma(b)) = \xi(f)/\sigma(b) = 0$（$\xi(f) = 0$，因为 $f \in P_1'$），这与之矛盾，因此 P_1' 是一个极小素理想。

由于我们已通过归纳法证明，P_1' 在 F_1 上是极小的且具有有限超越次数，因此 $\mathrm{trdeg}_{F_1}(\kappa(P_1')) \leq J(u_2, \ldots, u_n)$。但是 $\mathrm{trdeg}_K(\kappa(P_1)) = \mathrm{trdeg}_{F_1}(\kappa(P_1)) + \mathrm{trdeg}_K(F_1) \leq J(u_2, \ldots, u_n) + a_{1,\ 1} = J(u_1, u_2, \ldots, u_n)$，这就证明了该结果。这里的第一个等式用到了域塔中超越次数的可加性。

归纳步骤（内层归纳）：这里按照定义 8.1 中的 Ritt 排序，对阶数矩阵进行归纳，基本情形为形如 (8.1) 的矩阵。假设该方程组的阶数矩阵为 A，并且对于在 Ritt 矩阵序中阶数矩阵为 $B \prec A$ 的任意方程组，雅可比界猜想均成立（定义 8.1）。

如果某一列至少有两个非 $-\infty$ 项，那么根据命题 6.1 和 7.1，我们可以将方程组化为 Ritt 第一或第二形式。然后，按照命题 5.3 和 5.4 进行 Ritt 除法，得到一个新方程组 v_1，……，v_n，使得 $J(v_1, \ldots, v_n) \leq J(u_1, \ldots, u_n)$，并且其阶数矩阵相对于矩阵上的 Ritt 排序而言更低。由于方程组 u_1，……，u_n 是线性的，其所有分离子都是单位。特别地，根据引理 8.2，Σ_1 仍然是新方程组的一个不可约分支，即 $P_1 \supset [v_1, \ldots, v_n]$ 是一个极小素理想。由归纳法，JBC 对新方程组成立，因此 $\dim \Sigma_1 \leq J(v_1, \ldots, v_n)$。由于 $J(v_1, \ldots, v_n) \leq J(u_1, \ldots, u_n)$，我们得出 $\dim \Sigma_1 \leq J(u_1, \ldots, u_n)$，即 JBC 对 Σ_1 成立。□

9. Generalities on Differential Linear Series

在非线性情形下，进行 Ritt 除法时，引理 8.2 的分离变量假设通常不成立。特别是，尽管 Σ_1 仍将是新方程组的一个子簇，但它可能不再是一个不可约分支，从而对进行清晰的归纳造成严重障碍。在 Ritt 关于 JBC 二元情形的证明中，他引入了一种退化，我们称之为“Ritt 铅笔技巧”。该铅笔具有一个“足够好”的纤维，可以继续进行归纳，详述如下。Ritt 的证明无法简洁地推广到两个以上变量的情形。下面我们证明，如果假设维数猜想成立，那么一种类似于 Ritt 的证明的论证适用于一般的 JBC。

类比于代数几何中的经典步骤（例如参见 [Eis95, III.2.8], [Har95, 第 4]讲），我们考虑微分代数簇族。

定义 9.1. 设 $\mathbb{A}^n_\infty = \mathrm{Spec}\ K\{x_1,\dots,x_n\}$ 和 $\mathbb{A}^m_\infty = \mathrm{Spec}\ K\{y_1,\dots,y_m\}$，并记 $x=(x_1,\dots,x_n)$ 和 $y=(y_1,\dots,y_m)$。我们将 D-概形族 $f\colon \Gamma \to \mathbb{A}^m_\infty$称为微分线性系，其中该族由 $\mathbb{A}^m_\infty$ 参数化，且其成员是 ∂-多项式的线性组合。

$$\begin{cases} v_1(x,y) = v_{1,1}(x)y_1 + \cdots + v_{1,m}(x)y_m = 0, \\ v_2(x,y) = v_{2,1}(x)y_1 + \cdots + v_{2,m}(x)y_m = 0, \\ \quad\vdots \\ v_e(x,y) = v_{e,1}(x)y_1 + \cdots + v_{e,m}(x)y_m = 0. \end{cases}$$

其中 $v_{i,j} \in K\{x\}$ 对于 $1 \le i \le e$ 和 $1 \le j \le m$成立。换言之

$$\Gamma = \operatorname{Spec} K\{x,y\}/[v_1(x,y), v_2(x,y), \dots, v_n(x,y)].$$

我们将形如 $\Gamma_0 = \Gamma_{\mathrm{red}}$、对应于 Γ 线性系的 D-概形 Γ_0 称为约化微分线性级数。

为简化术语，我们将“微分线性系”和“约化微分线性级数”分别简称为“线性系”和“约化线性系”。

例 9.2 表明，这些族通常不是平坦的。特别地，将单个系数变形掉，会把一个一般绝对维数为 3 的微分代数簇变为一个绝对维数无限的微分概形。

例 9.2。考虑由 Γ 给出的 $K\{x,y,z\}/[u,v]$，我们将其视为在 $K\{z\}$ 上的族，其中有 $u = x'' + y'$、$v = zy + x'' + y'$。我们有 $\dim(\Gamma_0) = \infty$；如果 η 是 $\mathrm{Spec}\ K\{z\}$ 的一般点，那么 $\dim(\Gamma_\eta) = 3$。

注 9.3。假设 K 是微分闭的。在 $e = 1$ 的情形下，我们有

$$v_1(x,y) = v_1(x)y_1 + \cdots + v_m(x)y_m = 0.$$

存在一个满射

$$\mathrm{Span}_K(\{v_1,\dots,v_n\}) \to \{\Gamma_b \subset K^n : b \in K^n\},$$

其中 $\mathrm{Span}_K(\{v_1,\dots,v_n\}) \subset K\{x_1,\dots,x_n\}$，而 Span 表示 K-向量空间张成，正如经典情形中一样。

类比于 [Laz04，定义 1.1.2]，我们作如下定义。

定义 9.4. 设 $f\colon \Gamma \to \mathbb{A}^m_\infty = \mathrm{Spec}\ K\{y_1,\dots,y_m\}$ 是由 $v_i = \sum_{j=1}^m v_{i,j}(x)y_j = 0$给出的线性系，其中 $1 \le i \le e$。

(1) 该线性系的基理想 $\mathfrak{b}$ 为

$$\mathfrak{b} = [v_{i,j} : 1 \le i \le e, 1 \le j \le m] \subset K\{x_1,\dots,x_n\}.$$

(2) 基轨迹 $\mathrm{BS}(\Gamma) = V(\mathfrak{b}) \subset \mathbb{A}^m_\infty$。

从几何上说，基轨迹是包含于 Γ_b 中的$\mathbb{A}^n_\infty$ 的闭 D-子概形，对所有 b均如此。我们将采用标准的记号滥用方式，把平凡族 $\mathrm{BS}(\Gamma)\times \mathbb{A}^m_\infty \subset \Gamma$ 和 $\mathrm{BS}(\Gamma) \subset \mathbb{A}^n_\infty$都称为“ Γ的基轨迹”。这样我们既可以讨论“作为 $\mathbb{A}^n_\infty$的子概形的基轨迹”，也可以讨论“包含在基轨迹中的 Γ 的一个分支”。

定义 9.5. 设 $\Gamma \to \mathbb{A}_\infty^m$ 是一个线性系。令 $\Gamma_1 \in \mathrm{Irr}(\Gamma)$。

(1) 若 $\Gamma_1 \subset \mathrm{BS}(\Gamma) \times \mathbb{A}_\infty^m$，则称 Γ_1 为固定分支。(2) 若 Γ_1 不是固定分支，则称其为移动分支。

设 $\mu \in K$。Γ_μ 的每个分支都包含在 Γ 的某个分支中。

定义 9.6。设 Γ 是一个约化线性系。我们将记 $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{fix}} \cup \Gamma_{\mathrm{move}}$，其中

(1) Γ_{fix} 是 Γ 的固定部分，定义为所有固定的不可约分支的并；(2) Γ_{move} 是移动部分，定义为 Γ 中所有移动的不可约分支的并。

就 理想而言，$I_{\Gamma_{\mathrm{fix}}}$ 是 I_Γ 上包含 $\mathfrak{b}$ 的那些极小素理想的交 .

定义 9.7. 若存在某个固定分支 $\Gamma_1 \in \mathrm{Irr}(\Gamma)$ 使得 $\Gamma_{\mu,1} \subset \Gamma_1$，则称分支 $\Gamma_{\mu,1} \in \mathrm{Irr}(\Gamma_\mu)$ 为固定分支。若不是固定分支，则称其为移动分支。

以下定理是我们在归纳证明雅可比界猜想时，用来“摆脱”退化情形的两个定理之一。我们的具体应用会是“额外退化”的：不仅分离式会在分支 Σ_1 上一般地消失，而且该分支实际上还是基轨迹的一个分支。幸运的是，这种“额外退化”行为对于雅可比界猜想而言出人意料地有利——它使我们处于这样一种情形：雅可比界降低了，而我们正试图应用雅可比界猜想的不可约微分概形则完全没有变化！

定理 9.8. 设 $\Sigma \subset \mathbb{A}_\infty^n$ 是一个 ∂-有限型微分概形，且 $\Gamma \to \mathbb{A}_\infty^1$ 是 $\mathbb{A}_\infty^n$的微分子概形的一支铅笔。设 $\Sigma_1 = V(P)$ 是 Σ的一个不可约分支。假设 $\Sigma_1 \subset \mathrm{BS}(\Gamma) \subset \Sigma$。

(1) 那么 Σ_1 是 $\mathrm{BS}(\Gamma)$ 的一个分支。(2) 固定 $\mu \in K$。如果 $\Gamma_{\mu,1}$ 是包含 Σ_1 的 Γ_μ 的分支，并且 $\Gamma_{\mu,1}$ 已固定，那么 $\Gamma_{\mu,1} = \Sigma_1$。

证明。设 Σ 由理想 $[u_1, \ldots, u_e] \subset K\{x_1, \ldots, x_n\}$定义。设 P_1 是定义 Σ_1的 $[u_1, \ldots, u_e]$上的一个极小素理想。设 Γ 由理想 $[v_1, \ldots, v_e] \subset K\{x_1, \ldots, x_n, y\}$定义。

(1) 设 $\mathfrak{b}$ 为该铅笔的基理想。根据假设，我们有 $[u_1, \ldots, u_e] \subset \mathfrak{b}$，因此原微分代数簇包含基轨迹。我们还知道，基轨迹包含原方程组的一个分支：我们有 $[u_1, \ldots, u_n] \subset \mathfrak{b} \subset P$。如果 P不是 $\mathfrak{b}^{\sim}$ 上的极小理想，则存在某个素理想 P 使得 $P \supsetneq P \supset \mathfrak{b}$. 这将推出以下包含关系

$$[u_1, \ldots, u_e] \subset \mathfrak{b} \subset \widetilde{P} \subsetneq P.$$

但这意味着 P在 $[u_1, \ldots, u_e]$之上并非极小。这是一个矛盾，因此Σ_1 必定是 $\mathrm{BS}(\Gamma)$ 的一个分支。

(2) 设 $\Gamma_1 = \Gamma_{\mu,1}$ 是包含 Σ_1 的一个分支。设 P 满足 $\Gamma_1 = V(P)$。设 $\Sigma_1 = V_\partial(P)$。这意味着 $P \subset P$，且 P在 $\mathfrak{b}$之上是极小的。我们知道 $[v_1(x,\mu)\ v_2(x,\mu) \ldots, v_e(x,\mu)] \subset \mathfrak{b} \subset P \subset P$（第一个包含关系由每个纤维都包含基轨迹这一事实得出——事实上，这就是基轨迹的定义）。由于根据前一部分，P在 $\mathfrak{b} \cap K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 之上是极小的，因此必有 $P = P$。

□

10. Ritt's Pencil Trick

定义 10.1。设 $\Sigma = V([u_1, \ldots, u_n])$，且设 Σ_1 为一般点为 η_1的不可约分支。假设我们已经对 u_1、……、u_n 以及 x_1、……、x_n 进行了排序，使得阶数矩阵处于 Ritt 第一形式或第二形式。令 ℓ 为 $x_1^{(r)}$，其中 $r = \mathrm{ord}_{x_1}^\partial(u_1)$。如果分离子在 Σ_1上一般地消失，我们称情形在 Σ_1 处退化。用方程表示：

$$s_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \ell}(\eta_1) = 0. \tag{10.1}$$

注意，如果 Σ_1 与素理想 P_1 相关联，则分离子一般地消失等价于包含关系 $s_1 \in P_1$。

定义 10.2. 令 $\Sigma = V([u_1, \ldots, u_n])$. 令 $\Sigma_1 \in \mathrm{Irr}(\Sigma)$，其一般点为 η_1. 假设我们在 η_1处对 u_1 处于退化情形。Ritt 铅笔是由下式定义的 D-概形族 $\Gamma \to \mathbb{A}^1_\infty = \mathrm{Spec}\, K\{y\}$

$$\Gamma = \mathrm{Spec}(K\{x_1, \ldots, x_n, y\}/[t_1 + ys_1, u_2, \ldots, u_n]),$$

其中 $s_1 = \partial u_1/\partial \ell$ 其中 ℓ 是 u_1 关于变量 x_1 的首领，而 t_1 由下列方程定义

$$d \cdot u_1 = t_1 + \ell s_1 \tag{10.2}$$

其中 $d = \deg_\ell u_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是 u_1 关于其首领 ℓ的次数。

注 10.3. 根据构造，在 Ritt 铅笔中， t_1 和 s_1 在变量 x_1中都低于 u_1 。

下述命题说明 Ritt 铅笔满足定理 9.8 的假设。

命题 10.4. 令 $\Sigma = V([u_1, \ldots, u_n])$. 令 $\Sigma_1 \in \mathrm{Irr}(\Sigma)$，其一般点为 η_1. 假设我们在 η_1 处对 u_1 处于退化情形，并令 Γ 为相应的 Ritt 铅笔。则

$$\Sigma_1 \subset \mathrm{BS}(\Gamma) \subset \Sigma.$$

证明。根据定义， $[u_1, u_2, \ldots, u_n] \subset P_1$。由于我们处于退化情形， $s_1 \in P_1$。根据定义（见方程 (10.2)），$t_1 = d \cdot u_1 - \ell s_1$。这意味着 $\mathfrak{b} \subset P_1$，即 $\Sigma_1 \subset \mathrm{BS}(\Gamma)$。

同理，由于 $d \cdot u_1 = t_1 + \ell s_1$，我们有 $[u_1, \ldots, u_n] \subset \mathfrak{b}$，即 $\mathrm{BS}(\Gamma) \subset \Sigma$。 □

定理 10.5。设 $\Sigma = V([u_1, \ldots, u_n])$。设 $\Sigma_1 \in \mathrm{Irr}(\Sigma)$，其一般点为 η_1。假设对于 u_1 在 η_1 处我们处于退化情形，并令 $\Gamma = V([t_1 + ys_1, u_2, \ldots, u_n])$ 为 Ritt 铅笔。

假设维数猜想成立。若 Γ_1 是 Γ的一个移动分支，则 Γ_1 的微分维数为 1。

证明。设 $\Gamma_1 = V(Q)$，且 $\Sigma_1 = V(P)$。现在我们证明 $\mathrm{trdeg}^\partial_K(\kappa(Q)) = 1$。为此，我们采用一种分块排序所诱导的字典序，该排序消去变量 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$——因此它可以是 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 中的任意排序，但 y 必须在排序中优先于所有其他变量。现在考虑 Q的一个特征集，记作

$$(B_1, B_2, \ldots, B_s, A_1, A_2, \ldots, A_t),$$

其中 $B_i \in K\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 对应 $1 \leq i \leq s$，而 $A_j \in K\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y\} \setminus K\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 对应 $1 \leq j \leq t$。注意，由于消去 y，我们必然有 $t \leq 1$ 。

根据特征集消去定理（命题 2.27），我们有（$B_1, \ldots, B_s$）是 $Q_1 = Q \cap K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的特征集。注意到 $[u_2, u_3, \ldots, u_n] \subset Q_1$，并且 $Q_1 \subset P$。

现在考虑一条素理想链 $0 = P_n \subset P_{n-1} \subset \cdots \subset P_0$，其中 $P_0 = P$， P_1 是包含于 P_0 中的 $[u_2, \ldots, u_n]$ 上的极小素理想；对于 $i > 0$，我们通过归纳继续进行，即称 P_i 是包含于 P_{i-1} 中的 $[u_{i+1}, \ldots, u_n]$ 上的极小素理想，依此类推。图示如下:

$$\begin{array}{ccccccccc} P_{n-1} & \hookrightarrow & P_{n-2} & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & P_1 & \hookrightarrow & P_0 = P \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\ [u_n] & \hookrightarrow & [u_{n-1}, u_n] & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & [u_2, \ldots, u_n] & \hookrightarrow & [u_1, \ldots, u_n]. \end{array}$$

我们恰好处于命题 3.6 的情形中，因此 $\mathrm{trdeg}^\partial(\kappa(P_i)) = i$。

现在我们遇到了一种情况:

$$P \supset Q_1 \supset P_1 \supset [u_2, u_3, \ldots, u_n], \text{ and}$$

$$[u_2, u_3, \ldots, u_n] \subset [u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n] \subset P.$$

由于 $Q_1 \supset P_1$，$\mathrm{trdeg}^\partial(\kappa(Q_1)) \leq \mathrm{trdeg}^\partial(\kappa(P_1)) = 1$。由于 $(B_1, \ldots, B_s)$ 是 Q_1 的特征集，命题 2.25 表明 $\mathrm{trdeg}^\partial(\kappa(Q_1)) = n - s$。特别地， $n - s \leq 1$，即 $n - 1 \leq s$。

现在我们分析特征集在 t 和 s 的各种情形，并利用维数猜想导出矛盾。[9]

- 如果 $t=0$，那么 Q 具有一个特征集 $[B_1,\dots,B_s]$，满足 $B_i\in K\{x_1,\dots,x_n\}$。由于 $ys_1+t_1\in Q$，我们知道存在某个 $s_0\in S_{(B_1,\ \dots,\ B_s)}$（由 B_i 的初式和分离式生成的乘法集），使得

$$s_0(ys_1+t_1)\equiv 0 \mod [B_1,\dots,B_s].$$

这意味着

$$s_0s_1\equiv 0 \mod [B_1,\dots,B_s],\quad st_1\equiv 0 \mod [B_1,\dots,B_s]$$

根据 $K\{x_1,\dots,x_n\}$ 和 $yK\{x_1,\dots,x_n\}$的线性无关性。这意味着 s_1 和 t_1 都包含于 Q 中，因为成员关系可由除法算法刻画。这证明了 Q 包含于基轨迹中，因此不对应于移动分支（矛盾）。

- 如果 $t=1$ 且 $s=n-1$，那么我们就完成了，因为这将意味着 $\mathrm{trdeg}^{\partial}_K(\kappa(Q))=1$。
- 如果 $t=1$ 且 $s<n-1$，那么 $\mathrm{trdeg}^{\partial}(\kappa(Q))=0$，但根据维数猜想，在添加一个新方程后，我们至多可以降低 ∂ 维一维。因此这同样导致矛盾。

□

下面说明如何利用 Ritt 铅笔的移动分支，在假设维数猜想成立的情况下，从退化情形得到雅可比界猜想的一个弱化版本。

定理 10.6. 设 K 是一个特征零的微分闭域。令 $\Sigma=V([u_1,\dots,u_n])\subset\mathbb{A}^n_\infty$。设 $\Sigma_1\in\mathrm{Irr}(\Sigma)$，其一般点为 η_1。假设我们在 u_1 于 η_1 处处于退化情形，并令 $\Gamma=V([t_1+ys_1,u_2,\dots,u_n])\to\mathbb{A}^1_\infty=\mathrm{Spec}\ K\{y\}$ 为 Ritt 铅笔。

若 $\Gamma_1\in\mathrm{Irr}(\Gamma)$ 是移动的，则假设维数猜想成立，存在某个 $\mu\in K$，使得 $\Sigma_1\subset\Gamma_{1,\ \mu}$ 满足

(1) $\dim(\Gamma_{1,\ \mu})<\infty$，且 (2) $J(s_1+\mu t_1,u_2,\dots,u_n)\le J(u_1,\dots,u_n)$。

~~证明。设 $\Gamma_1=V(Q)$。设 $\Gamma_{1,\ \mu}=V(P)$，其中 P 是 Q 在 μ处的特化。

设 $Q\supset I_\Gamma$ 是一个极小移动素理想。假设维数猜想成立，则定理 10.5 蕴含 $\mathrm{trdeg}^{\partial}_K(\kappa(Q))=1$。因此，对于每个 i， y 和 x_i 在 Q中存在非平凡关系。更准确地说，存在某个 $M_i(y,x_i)\in K\{x_i,y\}\cap Q$，它不是 $K\{x_i\}\cup K\{y\}$ 的元素（因为这是一个非平凡的 ∂-代数依赖关系）。接着我们考虑理想 $[M_1(y,x_1)\ M_2(y,x_2)\ \dots,M_n(y,x_n)]\subset Q$。根据零点定理的微分代数版本 [Bui94, 第 33] 页，存在某个 μ 属于我们的微分代数闭域 K，使得 $M_1(\mu,x_1)\ M_2(\mu,x_2)\ \dots,M_n(\mu,x_n)$ 定义了一个非平凡的微分代数簇——没有一个方程为零，也没有一个方程是常数。接着我们得到某个

$$\widetilde{P}\supset I_{\Gamma_\mu}=[t_1+\mu s_1,u_2,\dots,u_n]$$

在 I_{Γ_μ} 上极小，且在特化映射 φ_μ 下的逆像为 Q： $K\{x_1,\dots,x_n,y\}\to K\{x_1,\dots,x_n\}$由 $\varphi_\mu(x_i)=x_i$和 $\varphi_\mu(y)=\mu$给出。由于 $K\{x_1,\dots,x_n\}/[M_1(\mu,x_1)\dots,M_n(\mu,x_n)]$ 具有有限绝对~~维数，我们得出 P 具有有限绝对维数。其具有有限绝对维数的原因是 $K\{x_1,\dots,x_n\}/[M_1(\mu,x_1)\dots,M_n(\mu,x_n)]\cong\bigotimes_{i=1}^n K\{x_i\}/[M_i(\mu,x_i)]$，并且每个 $K\{x_i\}/[M_i(\mu,x_i)]$都具有有限绝对维数。□

11. Dimension Conjecture Implies Jacobi Bound Conjecture

回顾定义 8.1 中矩阵上的 Ritt 排序。

定理 11.1。假设维数猜想（猜想 3.3）成立。那么雅可比界猜想（猜想 2.12）成立。

[9]这是一个令人遗憾的符号冲突。在这种情况下， s 是特征集中 B 的数量，而 t 是特征集中 A 的数量。不要将其与分离子和余分离子混淆，后两者分别是 s_1 和 t_1。

证明。考虑方程组 $[u_1, u_2, \ldots, u_n] \subset K\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$。令 $P \supset [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ 为一个极小素理想，使得 trdeg($K\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}/P$) $< \infty$。

证明采用关于 n 的归纳法。这里， n 是变量的个数，也等于方程的个数。

基本情形（外层归纳）：根据 Ritt 界，雅可比界猜想在 $n = 1$ 情形下已知成立（[Rit50，第 135] 页）。（雅可比界猜想在 $n = 2$ 情形下也是 Ritt 的一个定理 [Rit35]）。

归纳步骤（外层归纳）：假设对于满足 $m < n$ 的 m 个方程和 m 个变量，雅可比界猜想成立。归纳步骤是另一个归纳证明，这次是对阶数矩阵 A 进行归纳。

基本情形（内层归纳）：这些是形如以下形式的阶数矩阵 A

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -\infty & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ -\infty & a_{3,2} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

这里我们知道 tdet(A) $= a_{1,1} +$ tdet($A_{1,1}$)，其中 $A_{1,1}$ 是对应于元素 (1, 1) 的余子式矩阵。现在，证明归结为关于 $(n-1)$ 个变量的雅可比界猜想，根据外层归纳假设，我们假定该猜想成立。该证明与推论 8.3 的证明中基本情形（内层归纳）的证明完全相同；在那里我们证明了线性情形。

归纳步骤（内层归纳）：我们将证明，对于所有满足阶数矩阵 $[u_1, \ldots, u_n]$、极小素理想 A，且 trdeg $P \supset [u_1, \ldots, u_n]$ ($\partial_K(\kappa)$) P 的方程组 $< \infty$，都存在一个满足阶数矩阵 $[v_1, \ldots, v_n]$、极小素理想 $B \prec A$，且 trdeg $\widetilde{P} \supset [v_1, \ldots, v_n]$ ($\partial_K(\kappa)$) $\widetilde{P}$ 的方程组 $< \infty$，使得

$$P \supset \widetilde{P} \supset [v_1, \ldots, v_n], \quad J(v_1, \ldots, v_n) \leq J(u_1, \ldots, u_n).$$

一旦证明了这一点，根据归纳假设，雅可比界猜想便对带有素理想 P 的方程组 $[v_1, \ldots, v_n]$ 成立；并且注意到

$$\dim V(P) \leq \dim V(\widetilde{P}) \leq J(v_1, \ldots, v_n) \leq J(u_1, \ldots, u_n)$$

这证明 JBC 对 P 也成立

内层归纳的主要断言的证明：现在我们证明内层归纳步骤的主要断言。借鉴 Ritt 的技巧，我们将修改阶数矩阵，使其成为两种标准形式之一；在这种形式下，我们便可以通过某种 Ritt 除法约化第一列。我们的贡献之一是发现，只要相关分支上的分离子不为零，这些步骤中的 Ritt 约化仍然成立（命题 5.3 和命题 5.4）。

Ritt 第一形式（非退化）主要断言的证明：假设阶数矩阵 A 的行列式为 $A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,\,i}$。若 $a_{1,\,1}$ 不是第一列中的唯一最大值，且 $\partial u_1/\partial \ell_{x_1} \notin P$（其中 $\ell_{x_1} = x_1^{(a_{1,1})}$ 不为零，则应用 Ritt 第一约化（命题 5.3），得到一个等价方程组 $[v_1, \ldots, v_n]$，其阶数矩阵为 $B \prec A$，极小素理想为 $P = P \supset [v_1, \ldots, v_n]$。

Ritt 第二形式（非退化情形）的主要断言的证明：如果 $a_{1,\,1}$ 是唯一的最大值，那么我们可以重新排列，使第二大元素出现在 (1, 1) 项中，而 $a_{1,\,1}$ 则移至 (n, 1) 位置。如果 $\partial u_1/\partial \ell_x \notin P$，我们可以应用 Ritt 第二约化（命题 5.4），得到一个等价的方程组 $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ 阶数矩阵 $B \prec A$，其中 $P = P \supset [v_1, v_2, \ldots, v_n]$。

退化情形主要断言的证明（概述）：设 $\Sigma_1 = V(P)$，且 η_1 是其一般点。如果我们不属于前述任何一种情形，那么我们就处于退化情形（定义 10.1），并且

$$s_1 = \partial u_1/\partial \ell_x \in P.$$

等价地，s_1 在 η_1 上消失。令 $\Gamma \to \mathbb{A}^1_\infty$ =Spec($K\{y\}$) 为与这一退化情形相关联的 Ritt 铅笔，使得 Γ = Spec($K\{x_1, \ldots, x_n\}/[t_1 + ys_1, u_2, \ldots, u_n]$。

由命题 10.4 可得

$$\Sigma_1 \subset \mathrm{BS}(\Gamma) \subset \Sigma.$$

令 Γ_1 为包含 Σ_1 的 Γ 的一个不可约分支。记 $Q \subset K\{x_1, \ldots, x_n, y\}$ 为满足 $\Gamma_1 = V(Q)$ 的素微分理想。

类似地，由于对每个 μ，$\Sigma_1 \subset$ BS(Γ) $\subset \Gamma_\mu$，我们可以令 $\Gamma_{\mu,\,1}$ 为包含 $\sim\Gamma_1$ 的 Γ_μ 的一个不可约分支。记 $P \subset K\{x_1, \ldots, x_n\}$ 为满足 $\Gamma_{\mu,\,1} = V(P)$ 的素微分理想，并且不失一般性，可以假设 $\Gamma_{\mu,\,1} \subset \Gamma_1$。

我们可以用代数方法作同样的推理：$P \ni u_1, s_1$ 因此 $P \ni t_1$。由于 P 是 $[t_1 + \mu s_1, u_2, \ldots, u_n]$ 之上的一个极小素理想，我们看到 $[t_1 + \mu s_1, u_2, \ldots, u_n] \subset P$，因此可以取 $P \subset P$。（通过类似的推理，我们取$Q \subset PK\{x_1, \ldots, x_n, y\}$。）

退化情形（固定情形）的主要断言的证明：假设 Γ_1 是一个固定分支。根据定理 9.8，$\Gamma_1 \in$Irr(Γ)的任何固定分支都等于 Σ_1。这意味着$\Gamma_{\mu,\,1}$ 是固定的，并且等于 Σ_1，其阶数矩阵为 $B \prec A$。

退化情形（移动情形）的主要断言证明：假设 Γ_1 是一个移动分支。在定理 10.5 中，我们证明了 $\dim^\partial(\Gamma_1) = 1$，前提是维数猜想成立。在定理 10.6 中（假设定理 10.5 成立），我们证明了存在某个 μ，使得包含在 $\Gamma_1 \subset \Gamma \subset \mathbb{A}^n_\infty \times \mathbb{A}^1_\infty$ 中的 Γ_μ 的任意移动分支都具有有限绝对维数，且其雅可比数不大于原方程组的雅可比数。这部分证明给出了真正的变形。存在某个分支 Γ_1，满足 $\Gamma_{\mu,\,1} \supset \Sigma_1$，其中 $\dim \Gamma_{\mu,\,1} < \infty$，而方程由 $[t_1 + \mu s_1, u_2, \ldots, u_n]$ 给出，其阶数矩阵为 $B \prec A$。□

References

[BCP97] Wieb Bosma、John Cannon 和 Catherine Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, 第 24 卷，1997 年，1993–235–265，《计算代数与数论》（伦敦，），第 – 页。MR[94] *Differential algebra and Diophantine geometry* Bui Alexandru Buium，，《数学新知》。[当前数学主题], 1994 1487891 Hermann，巴黎，。MR CH Thomas [03] Cluzeau 和 Evelyne Hubert, *Resolvent representation for regular differential ideals*, 《工程、通信与计算中的应用代数》，**13** 2003 5, 395 425 1959171 （），第 – 期。MR CNS Raf Cluckers、Johannes Nicaise 和 Julien Sebag（编），[11] *Motivic integration and its interactions with model theory and non-Archimedean geometry. Volume I* 383, ，《伦敦数学会讲义系列》，第 卷，剑桥大学出版社，剑桥, 2011 2905860 。MR Coh Richard M. Cohn，，《美国数学会会刊》，[83] *Order and dimension* **87** 1983 1, 1 6 677218 （），第 – 期。MR dFMta Tommaso de [15] *The volume of a set of arcs on a variety* Fernex 和 Mircea Musta ta，，《罗马尼亚纯粹与应用数学评论》，**60** 2015 3, 375 401 3436273 （），第 – 期。MR Die Reinhard [25] *Graph theory* Diestel，，《数学研究生教材》，第六版，第 173 卷，施普林格，柏林，[2025] ©2025。MR 4874150[DZB26a] Taylor Dupuy 和 David Zureick-Brown, *magma-diff-alg*，2026 年，GitHub：tdupu/magma-diff-alg。[DZB26b]， *The Jacobi Bound Conjecture for generically reduced differential schemes*，预印本（2026 年）。[Eis95] David Eisenbud, *Commutative algebra*，《数学研究生教材》，第 150 卷，施普林格出版社，纽约，1995 年，附代数几何视角。MR 1322960[GKMQ07] Oleg Golubitsky、Marina Kondratieva、Marc Moreno Maza 和 Alexey Ovchinnikov, *Bounds for algorithms in differential algebra* 0702470 2007 ，arXiv 预印本 math/（）。[Har95] Joe Harris, *Algebraic geometry*，《数学研究生教材》，第 133 卷，施普林格出版社，纽约，1995 年，入门课程，1992 1416564 原书的修订重印本。MR Hub Evelyne Hubert, [00] *Factorization-free decomposition algorithms in differential algebra*，第 29 卷，2000 年，《代数、分析与几何中的符号计算》（加利福尼亚州伯克利，1998 641 662 1769659 ），第 – 页。MR Jac Carl Gustav Jacob Jacobi, [09] *The reduction to normal form of a non-normal system of differential equations. De*，《工程、通信与计算中的应用代数》。*aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando*

Comput. 20（2009 年），第 1 期，33–64 页，由 Fran¸cois Ollivier 从拉丁文手稿翻译，Sigismund Cohn、C. W. Borchardt 和 A. Clebsch 编校。MR 2496660[JB65] C. G. J. Jacobi 和 C. W. Borchardt, *De investigandae ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque* **64** 1865 297 320 , 《纯粹与应用数学杂志》 1579301 （），–。MR[76] *An introduction to differential algebra* Kap Irving Kaplansky，第二版，《南卡戈大学数学研究所出版物》，第 V 号，Hermann，巴黎，1976 年，《科学与工业实录》，第 1251 号。'科学与工业新知[Current Scientific and Industrial Topics]。MR 460303[KO06] Marina Kondratieva 和 Alexey Ovchinnikov, *On Computation of Kolchin Characteristic Sets: Ordinary and Partial cases* 0606124 2006 ，arXiv 预印本 math/（）。

[Kol68] E. R. Kolchin, *Some problems in differential algebra*，《国际数学家大会论文集》（莫斯科，1966 年），Izdat. “Mir”，莫斯科，1968 年，第 269–276 页。MR 237476[Kol73] , *Differential algebra and algebraic groups*，Academic Press，纽约—伦敦，1973 年，《纯粹与应用数学》，第 54 0568864 卷。MR Laz Robert Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. I*，《数学及其 [04] 边界领域成果》第 3 辑，现代数学综述系列 [数学成果及相关领域，第 3 辑，现代数学综述系列], 第 48 卷，施普林格出版社，柏林，2004 年，经典情形：线丛与线性系。MR 2095471[Oll22] Fran ¸ *Jacobi's Bound: Jacobi's results translated in Kőnig's Egerváry's and Ritt's mathematical lan-* cois Ollivier, ，《工程、*guages* 2022 1 93 通信与计算中的应用代数》（），–。[Ope26] ChatGPT OpenAI, *Large language model*，访问地址：https://chat/. openai. com/chat（2026 年）。[Ovc04] A. I. Ovchinnikov, *Characterizable radical differential ideals and some properties of characteristic sets*，《编程》（ 2004 3, 33 43 2082810 ），第 – 期。MR Rit J. F. Ritt, [35] *Jacobi's problem on the order of a system of differential equations* 2 **36** 1935 2, ，《数学年刊》（） （），303 312 1503224 第 – 期。MR [Rit50] Joseph Fels Ritt, *Differential Algebra*，《美国数学会讨论班出版物》，第 XXXIII 卷，美国数学会，纽约，N. Y.，1950 年。MR 0035763[Wes96] Douglas B. West, *Introduction to graph theory*，Prentice Hall, Inc.，上萨德尔河，NJ，1996 年。MR 1367739