arXiv:2603.18224v1 [math.AC] 18 Mar 2026

多参数持久性中的对偶性

Ulrich Bauer*、Fabian Lenzen†、Michael Lesnick‡

2026年3月20日

摘要

在持久同调理论中，一参数单纯复形过滤的绝对同调与相对上同调的条形码之间存在一种众所周知的对偶关系。受计算多参数 Rips 过滤的（上）同调的自由表示这一问题启发，我们给出了这一对偶关系的多参数推广。考虑多参数持久模上的两个对偶函子 *pointwise dual* $(-)^*$ 和 *global dual* $(-)^\dagger$，我们证明，对于余极限无环的自由 $H_q(C)^* \cong H^{N+q}(C^\dagger$参数持久模链复形 C，有 N。我们给出一种基于长正合列论证的初等且易于理解的证明，并另给一种证明，将这一结果视为多重分次 Grothendieck 局部对偶的特例。作为推论，我们得到持久模 M 与其逐点对偶 M^*的极小自由分解之间的简单对应关系；这一结果此前已由 Miller 通过 [31, 定理 4.5(3)]得出。这些结果构成了一种最先进算法的基础，该算法用于计算 Vietoris–Rips 双过滤的同调的自由分解，相关描述将在一篇即将发表的论文中给出。

目录

1 引言 **2**

2 背景 **5**

2.1 持久模.5 2.2 分次矩阵.7 2.3 链复形与同调.8 2.4 分解.9

3 多参数持久性的对偶性 **11**

3.1 全局对偶性与矩阵.12 3.3 主要结果.13 3.4 示例.17

*慕尼黑工业大学（TUM）数学系、TUM计算、信息与技术学院、慕尼黑数据科学研究所（MDSI）和慕尼黑机器学习中心（MCML），德国

†柏林工业大学数学研究所，德国

‡纽约州立大学奥尔巴尼分校数学系，美国。FL获得了德国研究基金会（DFG）在德国卓越战略框架下提供的资助——柏林数学研究中心 MATH+ (EXC-2046/1，项目编号：390685689)。UB和FL获得了德国研究基金会（DFG）通过SFB/TRR 109几何与动力学离散化协同研究中心提供的资助（项目编号：195170736）。FL和ML也感谢西蒙斯基金会提供的资助（奖项编号：963845）。

4 与 Grothendieck 和 Greenlees–May 对偶的关系 18
4.1 导出函子.184.2 分次 Grothendieck 局部对偶性.214.3 分次 Greenlees–May 对偶.24

5 最终无环条件 25
5.1 最终无环条件的必要性.255.2 使其 C 最终无环.27

1 引言

持久同调为过滤单纯复形提供了一种称为条形码的可计算不变量：给定一个由$\mathbf{Z}$索引的过滤

$$K\colon \cdots \hookrightarrow K_{-1} \hookrightarrow K_0 \hookrightarrow K_1 \hookrightarrow \cdots$$

有限单纯复形 $\cup K \coloneqq \bigcup_z K_z$ 的一个过滤，标准结构定理 [7] 告诉我们，$H_d(K)$， K 在固定域 $\Bbbk$ 上系数的第 d 个约化同调，可唯一地（差一个同构）分解为直和

$$H_d(K) \cong \bigoplus_{I \in \operatorname{barc} H_d(K)} \Bbbk_I. \tag{1}$$

的区间模 $\Bbbk_I$，由区间多重集 barc $H_d(K)$ 编号，区间端点属于 $\mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}$。多重集 barc $H_d(K)$ 称为 条形码，它对应于 $H_d(K)$ [37； 41]。计算这些条形码的经典算法 [16; 41； 15]对链复形的边界矩阵$C_\bullet(K)$ 应用列约化方案，该方案类似于高斯消元 K。

除了绝对同调 $H_d(K)$，还可以考虑 K 的绝对上同调$H^d(K)$，以及相对同调 $H_d(\cup K, K)$ 和相对上同调$H^d(\cup K, K)$。与本文其他部分一样，我们使用系数取自 $\Bbbk$ 的过滤的约化（上）同调。同一结构定理为它们各自给出条形码，而这四类条形码之间存在简单的相互确定关系 [13; 4]。绝对同调与相对上同调之间的对应关系，尤其对持久同调计算十分重要。该对应关系的精确表述如下：

定理 1.1 ([13, 命题 2.3 和 2.4； 4，定理 6。2])。若 K 是一个有限的$\mathbf{Z}$-指标单纯滤过，则存在 $H_\bullet(K)$ 的持久性条形码与 $H^\bullet(\cup K, K)$ 之间的双射对应，使得

- 条形码 I 中的每个有界区间都对应于$\operatorname{barc} H_d(K)$ 中的有界区间 $-I$，并且
- 条形码 J 中的每个无界区间都对应于$\mathbf{Z} \setminus (-J)$ 中的无界区间$\operatorname{barc} H^d(\cup K, K)$。

当 $\cup K$ 无挠时，这种对应关系可以表述为函子之间的自然同构，如下述定理所示；该定理可由对偶 $(\cup K, K)$ 的长正合列轻易推出。

定理 1.2 ([4, 定理 6。2])。 如果 K 是一个有限的 $\mathbf{Z}$-索引单纯滤过，且$H_d(\cup K) = H_{d+1}(\cup K) = 0$，那么存在一个 $\mathbf{Z}$-持久模的自然同构

$$H_d(K)^* \cong H^{d+1}(\cup K, K).$$

这里，$(-)^*$ 表示一个持久模的逐点对偶；参见定义 2.2(i)。定理 1.1 和 1.2 对未约化（上）同调也同样成立，但约化情形与本文的主要结果更为相关。

定理 1.1 意味着，barc $H_d(K)$ 可通过计算 $H^d(\cup K, K)$ 和 $H^{d+1}(\cup K, K)$ 的条形码得到。这为计算有限度量空间的 Vietoris–Rips 滤子的持久性条形码提供了一种高效得多的算法。为作说明，回顾一下，计算持久同调的经典矩阵约化算法 [41] 以任意由自由分级 $\Bbbk[x]$-模组成的（上）链复形作为输入。由于与 K 相关联的绝对滤链复形 $C_\bullet(K)$ 和相对滤上链复形 $C^\bullet(\cup K, K)$ 都是这类滤复形，因此标准算法既可应用于 $C_\bullet(K)$，从而得到 barc $H_\bullet(K)$，也可应用于 $C^\bullet(\cup K, K)$，从而得到 barc $H^\bullet(\cup K, K)$。对于 K Vietoris–Rips 过滤，后者与一种称为清除 [12]的简单约化算法优化相结合时，速度比前者快几个数量级。这种方法对于高效实现 Vietoris–Rips 持久性计算 [33; 36; 5; 23; 1] 至关重要。

与单参数情形不同，为多参数过滤的同调定义条形码存在代数上的障碍 [11]。因此，实践中通常通过不完备不变量来研究多参数过滤的同调，例如 Hilbert 函数、秩不变量或多重分次 Betti 数等[11; 8]。为了计算这类不变量，通常最有效的做法是先计算多参数持久同调的最小自由表示 。对于双参数持久性，Lesnick 和 Wright [26] 以及 Fugacci、Kerber 和 Rolle [19]最近提出了一种立方时间算法，用于计算单纯双滤子的同调 K （或任意自由双持久性模链复形）的最小自由表示（或分解），其性能足以满足实际数据分析的需求。该算法是一种矩阵约化方案，与计算持久同调的标准算法类似。

类比单参数情形，人们或许会希望通过应用 K [8] 算法 [26; 19] 来加速计算子水平 Rips 双滤子同调的极小表示或分解的相对上链复形 $C^\bullet(\cup K,\ K)$。然而，不能简单地这样做，因为尽管定理 1.2 中的自然同构对任意数量的持久性参数都成立，但当参数多于一个时，$C^\bullet(\cup K,\ K)$ 的上链模并非自由模。

为绕开这一问题，自然的第一步是为自由双参数持久模的（上）链复形确定一个对偶性结果，以推广定理 1.2；这正是本文的主要目标。事实上，这一对偶性结果适用于任意数量的参数。在一篇配套论文中 [2], 我们应用这一对偶性的双参数情形，推导出一种算法，以高效计算子水平 Rips 双过滤的最小分解。我们希望未来，这一对偶性结果也能帮助更高效地计算其他类型的 Vietoris–Rips 型多重过滤的分解，例如度数 Rips 双过滤 [27; 6], 层间 Rips 三重过滤 [8], 以及动态度量空间的 Rips 三重过滤 [24]。

结果陈述

为将定理 1.2 推广到多参数情形，我们考虑 $-$ 和 $^*\ -^\dagger$ 这两个定义在 $\mathbf{Z}^N$-持久模范畴上的逆变自函子，我们称它们为逐点（或$Matlis$）和全局对偶函子。由于这两个函子都是逆变的，它们会将 $\mathbf{Z}^N$-持久模的链复形映为 $\mathbf{Z}^N$-持久模的上链复形，反之亦然。下文中，C 表示一个由自由 $\mathbf{Z}^N$-持久模构成的链复形。这样的链复形 C 例如可以由单纯复形的一个$\mathbf{Z}^N$-指标过滤产生。然而，以下结果纯属代数性质，并不依赖于单纯过滤。一个 $\mathbf{Z}^N$-持久模 M

若其支撑 *supp*$\operatorname{supp} M := \{z \in \mathbf{Z}^N \mid M_z \neq 0\}$ M 的上界有限，则会最终消失；参见定义 3.6。我们的主要对偶结果如下：

定理 1.3 （见第 16页）。 若 C 是由有限秩自由 $\mathbf{Z}^N$-持久模组成的链复形，且模 H_d（C） $\ldots, H_{d+N}$（C）最终都消失，则存在自然同构

$$H_d(C)^* \cong H^{d+N}(C^\dagger).$$

若 $N = 1$，则有 $C_\bullet(K)^\dagger \cong C^\bullet(\cup K, K)$；见命题 3.2。因此，我们可以将定理 1.3 视为定理 1.2的多参数扩展。

我们通过证明该结果一个稍强的导出形式——定理 1.3 ——来得到定理 3.8；我们对其给出了一个自成一体的初等证明，采用了长正合列论证。在第 4节中，我们还给出了另一种证明，将该陈述视为 Grothendieck 局部对偶的多重分次导出形式的一个特例。感谢 Ezra Miller 向我们解释了这一替代证明。这里所需的多重分次局部对偶形式，在经典文献中隐含出现 [20, 定理 2.2。2], 也曾以更一般的形式明确出现，即 多重分次 *Greenlees–May* 对偶 [30,定理 5。3]。虽然这种替代证明或许并不比我们直接的初等论证简单多少，但它阐明了我们的结果与交换代数中经典对偶思想之间的联系。

作为定理 1.3 的推论，我们得到了一个关于最终消失的 $\mathbf{Z}^N$-持久模的自由分解的对偶性结果，该结果此前曾出现在 Miller[31, 定理 4.5(3)]的工作中。为陈述这一结果，回顾一下，持久模 M 的自由分解是一个自由模的链复形 G，其非零分量仅位于非负次数，并满足 $H_0(G) \cong M$ 且 $H_d(G) = 0$，其中 $d > 0$。注意，我们可以将链复形 C视为分量为 $C^d = C_{-d}$ 的上链复形。对于一个（上）链复形 C，定义移位复形 $C[N]$，其分量分别为 $C[N]_d = C_{d+N}$或 $C[N]^d = C^{d+N}$。

推论 1.4 (见第 16页)。 设 M 是一个有限生成且最终消失的 $\mathbf{Z}^N$- 持久模。那么

(i) M的任意自由分解长度至少为 N，且当其为极小自由分解时取等号，

(ii) 若 G 是 M 的（极小）自由分解，长度为 N，则将 $G[N]^\dagger$ 视为链复形后，它是 M^* 的（极小）自由分解。

Miller [31] 指出，推论 1.4 是多重分次 Grothendieck 局部对偶性的一个特例。我们将在第 4节对此作出解释。

结合定理 1.3和推论 1.4，我们得到：

推论 1.5。 若 C 如定理 *1.3* 所述，且 G 是 $H^{d+N}(C^\dagger)$的极小自由分解，则 $G[N]^\dagger$ 是 $H_d(C)$的极小自由分解。

在促使我们得到这些结果的计算应用中，我们遇到的链复形往往并不具有最终消失的同调。例如，若 K 是一个函数-Rips 双滤过，那么 $H_d(C_\bullet(K))$ 沿函数参数的余极限未必为零。幸运的是，我们的结果可以轻易推广到不要求同调最终消失的版本：在第 5.2 节中，给定一个由有限总秩的自由$\hat{}N$-参数持久模构成的链复形 C，我们构造一个具有最终消失同调的链复形 $C\hat{}$，使得 C 是 C 沿某个偏序集映射 $r\colon \mathbf{Z}^N \to \mathbf{Z}^N$ 的限制。该构造相当于在充分大的 $\mathbf{Z}^N$-指标处对 C 进行锥化。随后，我们可以将对偶结果推广到 C：将其应用于 $\hat{}C$，再沿 r 进行限制即可。特别地，令 R 表示沿 r 的限制，我们得到以下推论 1.5 的变体，它对同调不要求任何最终消失假设。

推论 1.6 (见第 5.2节)。 若 C是一个有限总秩的自由链复形，且 G是 $H^{d+N}(\hat{}C^{\dagger})$ 的极小自由分解，则 $R(G[N]^{\dagger})$ 是$H_d(C)$的极小自由分解。

在我们的配套论文中 [2], , 我们应用推论 1.6 ，开发了一种高效的上同调算法，用于计算 $H_d(C)$，即 $C = C_\bullet(K)$ 有限单纯双滤子的单纯链复形的极小自由分解 K。

本文及其即将发表的配套论文 [2]都拓展了早期一篇会议论文 [3], 中的结果，并显著改进了论述。

概要

我们在第 2.1 节总结有关持久模和分解的必要背景。在第 3 节，我们证明定理 3.8，它直接推出我们的主要结果——定理 1.3 和推论 1.4。为求完整，我们还在定理 3.8 中陈述其对偶版本，即定理 3.8′。本节最后给出若干示例，特别说明我们的论述如何将定理 1.2推广到多参数情形。第 3.8 节中定理 3 的证明是一个初等的长正合列论证，而在第 4 节中，我们通过 Grothendieck 局部对偶给出另一种证明。为使证明易于理解，我们简要回顾交换代数和导出函子理论中的相关概念。作为全文的收尾，我们构造 C，即自由链复形 C 的消失同调替代对象，并证明推论 1.6。

致谢

感谢 Ezra Miller 分享对本文早期版本的宝贵意见，尤其感谢他向我们解释了我们的主要对偶性与 Grothendieck 局部对偶和 Greenlees–May 对偶之间的关系。我们还感谢 Steffen Oppermann 就表示论中的对偶性展开有益讨论，并感谢本工作的早期会议版本的审稿人 [3] 提出宝贵意见。

2 背景

本节回顾有关持久模、交换代数和同调代数的相关背景。本节中的大部分内容都是标准的；例如，参见 Miller[31], , 其中给出了许多相同的定义。

2.1 持久模

固定一个域 $\Bbbk$，令 **vec** 表示有限维 $\Bbbk$-向量空间的范畴。对于$N \in \mathbf{N}$，我们考虑带有乘积偏序的偏序集 $\mathbf{Z}^N$ 。偏序集 $\mathbf{Z}^N$ 是一个格，其中对于 $z, z' \in \mathbf{Z}^N$，我们分别用 $z \vee z'$ 和 $z \wedge z'$ 表示逐分量最大值和最小值。

A $\mathbf{Z}^N$*-persistence module* is a functor $M\colon \mathbf{Z}^N \to \mathbf{vec}$, $z \mapsto M_z$, $(z \le z') \mapsto M_{z'z}$. We call the vector spaces M_z *components* and the morphisms $M_{z'z}\colon M_z \to M_{z'}$ *structure maps* of M.

态射 $\gamma\colon L \to M$是$\mathbf{Z}^N$-持久模之间的函子自然变换；我们用 Hom(L, M) 表示从 L 到 M的所有态射构成的向量空间。配备这些态射后，$\mathbf{Z}^N$-持久模构成一个范畴，记作 **$\mathbf{Z}^N$-持久模**。它是一个阿贝尔范畴，其中（余）核、像和有限直和都是逐分量给出的。

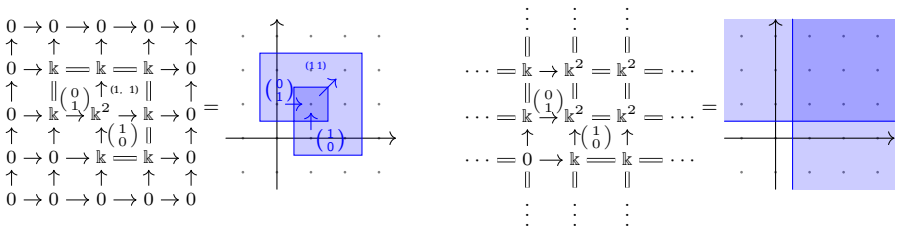


图 1：$\mathbf{Z}^2$-持久模 M示意图。必要时，图中会显示相对于某个基表示结构映射 $M_z \to M_{z+e_i}$ 的矩阵。如果结构映射是等号，或是典范嵌入或投影，则省略该矩阵。在这些图中，每个网格点对应一个元素 $z \in \mathbf{Z}^2$。阴影深浅表示 $\dim M_z$ 的值；对于满足 $\dim M_z = 0$ 的点 z，则不加阴影。区域之间的边界表示逐点维数发生变化。

注 2.1. 范畴 $\mathbf{Z}^N$-**持久模** 等价于由有限维齐次分量 [11]构成的 $\mathbf{Z}^N$-分级 $\Bbbk[x_1, \dots, x_N]$-模。

为了说明我们的论述和证明，我们使用 $\mathbf{Z}^2$-持久模的示意图，如图 1所示。

若存在 $s_1 \in M_{g_1}, \dots, s_r \in M_{g_r}$，使得对每个 $z \in \mathbf{Z}^N$，集合 $\{M_{z,g_i}(s_i) \mid g_i \le z\}$ 张成向量空间 M_z，则称持久模 M有限生成。

对于 $z \in \mathbf{Z}^N$，持久模 M沿 z平移 后得到的模为 $M\langle z\rangle$，其分量为 $M\langle z\rangle_w = M_{z+w}$。若 $z \ge 0$，则 M 的结构映射诱导出一个态射$M \to M\langle z\rangle$。

定义2.2。设 L，$M \in \mathbf{Z}^N$-**pers**。我们定义以下持久模，其结构映射由 L 和 M的结构映射诱导：

(*i*) M的逐点或*Matlis* 对偶 M^*是一个$\mathbf{Z}^N$-持久模，其分量为$(M^*)_z = (M_{-z})^*$，结构映射为$(M^*)_{z'z} = (M_{-z',\,-z})^*$，其中$V^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,\ \Bbbk)$表示 $\Bbbk$-向量空间 V的对偶。

(*ii*) $\mathsf{Hom}(L,\ M)$是一个$\mathbf{Z}^N$-持久模，其分量为

$$\mathsf{Hom}(L, M)_z = \mathrm{Hom}(L, M\langle z\rangle) = \mathrm{Hom}(L\langle -z\rangle, M).$$

(*iii*) The *tensor product* $L \otimes M$ is the $\mathbf{Z}^N$-persistence module with components

$$(L \otimes M)_z = \Big(\bigoplus_{x+y=z} L_x \otimes_{\Bbbk} M_y \Big) / \sim,$$

where $L_{x+w,x}(l) \otimes m \sim l \otimes M_{y+w,y}(m)$ for all $x, y \in \mathbf{Z}^N$, $l \in L_x$, $m \in M_y$ and $w \ge 0$.

These definitions extend to an exact functor

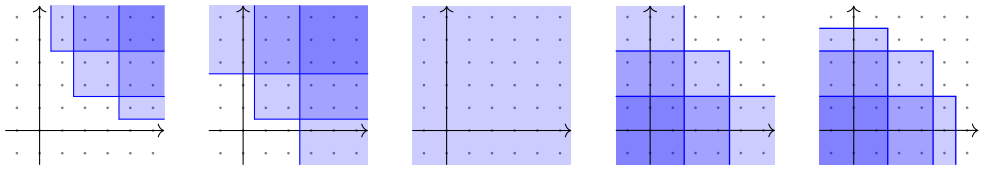
$$(-)^* \colon (\mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers},$$

a left exact bifunctor

$$\mathsf{Hom} \colon (\mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers} \to \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers},$$

以及一个右正合双函子

$$\otimes \colon \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers} \times \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers} \to \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers}.$$



(a) free (b) flat (c) flat-injective (d) injective (e) cofree

Figure 2: Free, flat (equivalently, projective), injective and cofree modules. Each quadrant, half plane or entire plane corresponds to one free, flat, injective or cofree indecomposable summand.

请回忆，阿贝尔范畴之间的函子若是左正合或右正合的，则该函子是可加的，也就是说，它保有限直和。对于任意 M，函子 $M \otimes -$和 $\mathsf{Hom}(M, -)$ 互为伴随。由于我们只考虑分量有限维的持久模，$(-)^*$ 是一个等价；特别地，典范嵌入

$$\mathsf{Hom}(L, M) \to \mathsf{Hom}(M^*, L^*) \tag{2}$$

是一个同构。

设 $\overline{\mathbf{Z}} := \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ 和 $\underline{\mathbf{Z}} := \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$。对于 $z \in \mathbf{Z}^N$ 和 $z' \in \mathbf{Z}^N$，令 $F(z)$ 和 $I(z')$ 为持久模，其

$$F(z)_v = \begin{cases} \Bbbk & \text{if } z \le v, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad I(z')_v = \begin{cases} \Bbbk & \text{if } v \le z', \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

在非零分量之间以恒等映射作为结构映射。若一个持久模 M 存在同构 $b\colon \bigoplus_{z \in R} F(z) \to M$，其中 $R \subseteq \mathbf{Z}^N$ 是一个多重集，则称其为平坦的；若存在同构 $b\colon \bigoplus_{z \in R} I(z) \to M$，其中 $R \subseteq \mathbf{Z}^N$，则称其为内射的。无论哪种情形，多重集 R 均由 M 唯一确定，称为 M 的分次秩，记作 $\mathsf{rk}\ M$。同构 b 是 M 的广义基。若平坦（分别地，内射）模 M 满足 $\mathsf{rk}\ M \subseteq \mathbf{Z}^N$，则称其为自由（分别地，余自由）；见图 2。注意，M 平坦当且仅当 M^* 内射，而 M 自由当且仅当 M^* 余自由。

这些关于平坦模和内射模的定义与通常的定义一致，即，M 是平坦的（分别地，是内射的），当且仅当函子 $M \otimes -$（分别地，$\mathsf{Hom}(M, -)$）是正合的 [32,引理 11.23, 定理 11.30]。类似地，对于自由模，广义基的定义等价于通常的基的定义。

注 2.3。记 $\mathbf{Z}^N$-Pers 为持久模的范畴 M，不限制 $\dim M_z$。虽然 $\mathbf{Z}^N$-pers 中的平坦模和内射模，分别恰好是属于 $\mathbf{Z}^N$-pers 的 $\mathbf{Z}^N$-Pers 中的平坦模和内射模，但投射模并非如此。特别地，并非 $\mathbf{Z}^N$-pers 中所有投射模都是平坦模的直和项（而在 $\mathbf{Z}^N$-Pers 中情况确实如此）。相反，由 (2) 和 [32, 定理 11.30] 中内射模的分类可知，$\mathbf{Z}^N$-pers 中的投射对象与平坦模一致。

注记 2.4。通过范畴等价 $\mathbf{Z}^N$-**Pers** $\simeq R$-**gMod**（对应于 $R = \Bbbk[x_1, \dots, x_N]$），$z \in \mathbf{Z}^N$ 上的不可分解平坦模 $F(z)$ 对应于乘法系 S（由 $\{x_i \mid z_i = -\infty\}$ 生成）下的局部化 $S^{-1}R\langle \tilde{z} \rangle$，而 $\tilde{z} \in \mathbf{Z}^N$ 是满足 $\tilde{z}_i = z_i$（当 z_i 有限时）且在其他情况下满足 $\tilde{z}_i = 0$ 的向量。类似地，$z \in \mathbf{Z}^N$ 上的内射模 $I(z)$ 对应于内射包 $E(R/\mathfrak{p})\langle \tilde{z} \rangle$（对应于 $\mathfrak{p} = (x_i)^{z_i \neq \infty}$）。

2.2 分次矩阵

A $\mathbf{Z}^N$-分次 $m \times n$-矩阵 M 由一个底层矩阵 $\mathsf{u}(M) \in \Bbbk^{m \times n}$ 以及
wi第 th 行次数 $\mathsf{rg}^M \in (\mathbf{Z}^N)^m$ 和列次数 $\mathsf{cg}^M \in (\mathbf{Z}^N)^n$。更一般地，$\mathbf{Z}^N$-

分次且 $\mathbf{Z}^N$-分次矩阵的定义方式相同。令 $\boldsymbol{r} = \mathrm{rg}^M$ 和$\boldsymbol{c} = \mathrm{cg}^M$，我们也称 M 为一个 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{c}$-矩阵。我们用 $\Bbbk^{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}}$ 表示 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{c}$-矩阵的向量空间。若满足以下条件，则称分次矩阵为有效的：$M_{ij} = 0$ 只要 $\mathrm{rg}_i^M \not\leq \mathrm{cg}_j^M$。有效分次矩阵在 中称为单项式矩阵 [31]。我们有

$$\mathrm{Hom}(F(z), F(z')) \cong \begin{cases} \Bbbk & \text{if } z' \leq z, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad \text{for } z, z' \in \underline{\mathbf{Z}}^N, \text{ and}$$

$$\mathrm{Hom}(I(z), I(z')) \cong \begin{cases} \Bbbk & \text{if } z' \leq z, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \text{for } z, z' \in \overline{\mathbf{Z}}^N,$$

其中， $\lambda \in \Bbbk$ 被视为分量中的线性映射 $x \mapsto \lambda x$ 。因此，对于元素取自$\mathbf{Z}^N$的向量 $\boldsymbol{r}$和 $\boldsymbol{c}$ ，有

$$\mathrm{Hom}\big(\bigoplus_j F(c_j), \bigoplus_i F(r_i)\big) \cong \{M \in \Bbbk^{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}} \mid M \text{ is valid}\}.$$

类似地，对于元素取自$\mathbf{Z}^N$的向量 $\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{c}'$ ，有

$$\mathrm{Hom}\big(\bigoplus_j I(c'_j), \bigoplus_i I(r'_i)\big) \cong \{M \in \Bbbk^{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{c}'} \mid M \text{ is valid}\}.$$

因此，如果 L 和 M 都是有限广义秩的平坦（分别为自由、余自由或内射）模，那么在为 L 和 M选取有序广义基后，我们可以将从 L 到 M 的态射与有效分次矩阵对应起来。

例 2.5。 设 $\boldsymbol{r} = \big((0,1),(1,0)\big)$ 和 $\boldsymbol{c} = \big((0,2),(1,1),(2,0)\big)$。则

$$\mathrm{Hom}\big(\bigoplus_{g\in\boldsymbol{c}} F(g), \bigoplus_{g\in\boldsymbol{r}} F(g)\big) \cong \mathrm{Hom}\big(\bigoplus_{g\in\boldsymbol{c}} I(g), \bigoplus_{g\in\boldsymbol{r}} I(g)\big) = \left\{ \begin{smallmatrix}(0,1)\\(1,0)\end{smallmatrix} \begin{pmatrix} (0,2) & (1,1) & (2,0) \\ * & * & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\},$$

其中星号表示来自 $\Bbbk$的任意元素。

2.3 链复形与同调

如果 C 是持久模的链复形，则对于每个 d，其 d-圈 $Z_d(C)$、 d-边界 $B_d(C)$ 和 d-同调 $H_d(C)$ 都是持久模。类似地，如果 C 是持久模的上链复形，则对于每个 d，其 d- 余圈 $Z^d(C)$、 d-余边界 $B^d(C)$ 和 d-上同调 $H^d(C)$ 都是持久模。每个逆变自函子（$\mathbf{Z}^N$-**pers**）$^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Z}^N$-**pers** 都会将链复形变为上链复形，反之亦然；特别地，逐点对偶（–）*也具有这一性质。由于（–）* 是一个正合函子，对于所有 d，存在一个自然同构

$$H^d(C^*) \xrightarrow{\cong} H_d(C)^* \tag{3}$$

对于每个持久模的链复形 C 。

设 **simp** 表示有限单纯复形的范畴，并设 $N \in \mathbf{N}$。一个单纯 $\mathbf{Z}^N$-过滤 是一个函子 $K\colon \mathbf{Z}^N \to \mathbf{simp}$， $z \mapsto K_z$， $(z \leq z') \mapsto K_{z'z}$ ，其所有态射 $K_{z'z}\colon K_z \to K_{z'}$ 都是包含映射。若 $\cup K \coloneqq \bigcup_z K_z$ 是有限的，我们称 K 有限 。如果对于每个 $\sigma \in \cup K$，集合 $\{z \mid \sigma \in K_z\}$ 具有唯一的极小元素 $g(\sigma)$，则称过滤 K 是单临界 的。对于每个单纯复形 K_z，令 $K_z^{(d)}$表示 K_z中的d-单纯形所组成的集合。

如引言中所述，我们始终研究单纯复形的约化（上）同调：若 L 是一个非空单纯复形，我们记 $C_\bullet(L)$ 为 L 的增广链复形，其中 $C_d(L)$ 是以 $L^{(d)}$ 为 $d \geq 0$ 的基的 $\Bbbk$-向量空间， $C_{-1}(L) = \Bbbk$

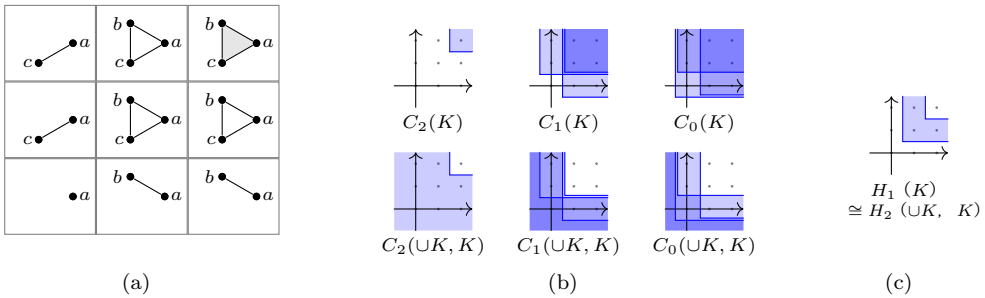


图3：（a）一个单临界$\mathbf{Z}^2$-指标单纯滤过 K，（b）相应的绝对与相对过滤链复形 $C_\bullet(K)$ 和 $C_\bullet(\cup K, K)$，（c） K的唯一非零绝对/相对（约化）持久同调模。

以及 $C_d(L) = 0$ 为 $d < -1$。若 K 是一个非空的单纯 $\mathbf{Z}^N$-过滤，我们定义 K 的绝对过滤链复形 $C_\bullet(K)$，其中 $C_d(K)_z = C_d(K_z)$，并将 K 的绝对过滤余链复形定义为 $C^\bullet(K) := C_\bullet(K)^*$。此外，若 $\cup K$ 是有限的，我们定义相对过滤链复形 $C_\bullet(\cup K, K)$，其中 $C_d(\cup K, K)_z = C_d(\cup K)/C_d(K_z)$，并将 K 的相对过滤余链复形定义为 $C^\bullet(\cup K, K) := C_\bullet(\cup K, K)^*$。相应的（上）同调持久模 $H_d(K)$、$H^d(K)$、$H_d(\cup K, K)$ 和 $H^d(\cup K, K)$ 称为 K 的绝对与相对持续（余）同调。

例 2.6。设 K 为图 3a 所示的 $\mathbf{Z}^2$-指标单纯滤过。我们得到图 3b 所示的绝对与相对过滤链复形 $C_\bullet(K)$ 和 $C_\bullet(\cup K, K)$。绝对与相对同调 $H_1(K) \cong H_2(\cup K, K)$ 如图 3c 所示；所有其他（绝对或相对）同调模均为零。绝对与相对上链复形 $C^\bullet(K)$ 和 $C^\bullet(\cup K, K)$ 的图示可通过将图 3b 关于原点翻转得到。由 (3) 还可通过将图 3c 关于原点翻转得到 $H^\bullet(K)$ 和 $H^\bullet(\cup K, K)$。

我们注意到，对于非空的 K，复形 $C^\bullet(K)$ 和 $C_\bullet(\cup K, K)$ 从来都不是自由模的复形，而 $C^\bullet(\cup K, K)$ 只有在 K 是一个$\mathbf{Z}^1$-过滤时才是自由模的复形。

2.4 分解

模 M 的自由（或平坦）分解是一个由自由（分别为平坦）模组成、集中于非负次数的链复形 G，并配有一个增广态射ε：$G_0 \to M$，使得增广自由（分别为平坦）分解

$$\cdots \to G_1 \to G_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

是一个正合序列。类似地，M 的内射（或余自由）分解是一个由内射（分别为余自由）模组成的上链复形 I，并配有一个增广态射ε：$M \to I^0$，使得增广内射（分别为余自由）分解 $0 \to M \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \to I^1 \to \cdots$是一个正合序列。由 $(-)^*$ 的正合性可知，如果 $\cdots \to G_1 \to G_0 \to M$ 是一个增广自由（或平坦）分解，那么 $M^* \to G_0^* \to G_1^* \to \cdots$ 是一个增广余自由（或内射，分别）分解。平坦分解的长度 $\ell(G)$ G是满足 $G_d \neq 0$ 的最大指标 d。

A *(co)homological d-ball* is a (co)chain complex of (co)free modules of the form

$$\cdots \to 0 \to F(z) \xrightarrow{\mathrm{id}} F(z) \to 0 \to \cdots \qquad \text{resp.} \qquad \cdots \to 0 \to I(z) \xrightarrow{\mathrm{id}} I(z) \to 0 \to \cdots$$

对于某个 $z \in \mathbf{Z}^N$，其中两个模分别出现在（上）同调次数 d和 $d-1$中。一个由有限秩（余）自由模构成的（上）链复形 C 若同构于平凡 复形，则称其为平凡复形

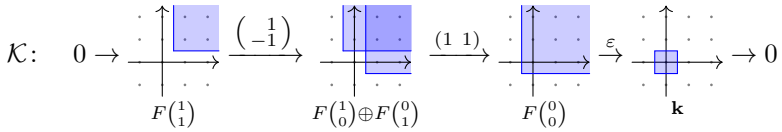


Figure 4: Augmented minimal free resolution of the simple $\mathbf{Z}^2$-persistence module $\mathbf{k}$.

若它是若干个（上）同调球的直和；若它不含有任何作为直和项的（余）自由（余）同调球，则称其为极小 复形。若一个（余）自由分解作为（上）链复形是极小的，则称其为极小 分解。我们使用 MFR 作为"极小自由分解"的缩写。

例 2.7. 假设 M 是一个有限生成的$\mathbf{Z}$-持久模，其 barc $M = \{[b_i, d_i) \mid i = 1, \dots, m\}$满足：对于某个 $0 \le n \le m$，有 $d_1, \dots, d_n < \infty$且$d_{n+1}, \dots, d_m = \infty$。那么 barc M给出了一个极小自由分解

$$0 \to \bigoplus_{i \le n} F(d_i) \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_{i \le m} F(b_i) \tag{4}$$

M，其中分次的 $(b_1, \dots, b_m) \times (d_1, \dots, d_n)$ 矩阵 Φ的元素为 $\Phi_{ij} = \delta_{ij}$。该分解确实是极小的，因为 barc M中不存在满足 $b_i = d_i$的区间。

例 2.8. 令$\mathbf{k}$ 表示具有分量$\mathbf{k}_0 = \Bbbk$ 和$\mathbf{k}_z = 0$ 的$\mathbf{Z}^N$-持久模，其中 $z \neq 0$。它是一个简单持久模，也就是说，它没有真子模。其极小自由分解为

$$\mathcal{K}: \qquad 0 \to \bigoplus_{S \in \binom{[N]}{N}} F(e_S) \xrightarrow{\partial_N} \cdots \xrightarrow{\partial_1} \bigoplus_{S \in \binom{[N]}{0}} F(e_S) \tag{5}$$

其中 $e_S \in \mathbf{Z}^N$ 表示这样的向量：当 $(e_S)_i = 1$ 时取该值，若 $i \in S$ 则取 $(e_S)_i = 0$，而边界映射 ∂_k 的非零分量为

$$(\partial_k)_{S, S\setminus\{s_j\}} = (-1)^j \colon F(e_S) \to F(e_{S\setminus\{s_j\}})$$

若 $S = \{s_1 \le \cdots \le s_k\}$；参见图 4。这个复形也称为 *Koszul* 复形。增广映射 $\varepsilon \colon F(0) \to \mathbf{k}$ 按分量定义为 $\varepsilon_0 = \mathrm{id}_\Bbbk$ 以及 $\varepsilon_z = 0$ 当 $z \neq 0$时。

定理 2.9 ([17, 推论 19.7 和定理 20.2])。 设 M 是一个有限生成的$\mathbf{Z}^N$-持久模。那么

(*i*) M 有一个长度至多为 N 的 *MFR* G （希尔伯特零化子定理），并且

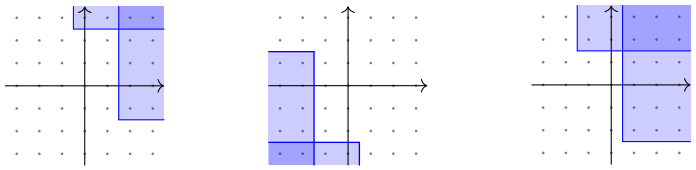
(*ii*) M 的每个自由分解都同构于 G 与一个平凡复形的直和。

特别地， M 存在一个 MFR，且在链复形同构意义下唯一，因此下述定义是良定义的：

Definition 2.10. The *graded Betti numbers* of a finitely generated $\mathbf{Z}^N$-persistence module M are the graded ranks $\beta_d(M) := \operatorname{rk} G_d$, where G is any MFR of M.

Remark 2.11. The *graded dimension* $\dim M$ of a persistence module M is the multiset of elements of $\mathbf{Z}^N$ that, for each $z \in \mathbf{Z}^N$, has $\dim M_z$ copies of z. It is well known that the graded Betti numbers satisfy $\beta_d(M) = \dim H_d(M \otimes \mathcal{K})$, where $\mathcal{K}$ is the Koszul complex from (5).

备注 2.12。 回忆一下，对于所有 $M_{ij} \neq 0$，若 $\mathrm{rg}_i^M \le \mathrm{cg}_j^M$，则分次矩阵$M$ 是有效的。对于所有 $M_{ij} \neq 0$，若 $\mathrm{rg}_i^M < \mathrm{cg}_j^M$，则分次矩阵$M$ 是极小的 。有限秩（余）自由模的链复形是极小的，当且仅当表示它的分次矩阵（相对于任意广义基）是极小的。



(a) M (b) M^* (c) $M^\dagger$

Figure 5: A free module M, its pointwise dual M^*, and its global dual $M^\dagger$.

3 Dualities for multiparameter persistence

本节的目标是在多参数情形下建立持久同调与上同调之间的联系。具体而言，我们证明定理1.3 和推论 1.4，二者共同构成定理1.2的多参数版本。

3.1 The global dual $(-)^\dagger$

回顾定义–的逐点对偶函子* 以及定义Hom中的函子 2.2。我们定义如下的持久模全局对偶函子：

定义3.1。 令 $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbf{Z}^N$。全局对偶 $(-)^\dagger$ 是一个可加函 r

$$(-)^\dagger \coloneqq \mathsf{Hom}(-, F(\mathbf{1})) \colon (\mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers}.$$

在 $(-)^\dagger$ 的定义中加入平移$\mathbf{1}$ 后，我们便可以在不使用任何平移的情况下陈述主要结果。与 $(-)^*$一样，函子 $(-)^\dagger$ 是逆变的，因此将链复形映射为上链复形。不同于 $(-)^*$，函子 $(-)^\dagger$ 不是正合的。它保持有限秩自由模，这是因为

$$F(z)^\dagger \cong F(\mathbf{1} - z). \tag{6}$$

这特别意味着，如果 K 是一个有限的单临界单纯形$\mathbf{Z}^N$-过滤，则 n

$$C_d(K)^\dagger = \Big(\bigoplus_{\sigma \in \cup K^{(d)}} F(g(\sigma))\Big)^\dagger = \bigoplus_{\sigma \in \cup K^{(d)}} F(\mathbf{1} - g(\sigma)) \tag{7}$$

是一个自由模。

命题 3.2。 对于有限的$\mathbf{Z}$--索引过滤 K，上链复形 $C_\bullet(K)^\dagger$和 $C^\bullet(\cup K, K)$ 自然同构（其中自然性是相对于 K而言的）。

Proof. By definition, an element $\kappa \in (C_d(K)^\dagger)_z$ is a morphism $\kappa \colon C_d(K) \to F(1-z)$; note that $\kappa_w(C_d(K)_w) = 0$ whenever $w \leq -z$. By definition of $C^\bullet(\cup K, K)$ and exactness of $(-)^*$, the cochain complex $C^\bullet(\cup K, K)$ has components

$$\begin{aligned} C^d(\cup K, K)_z &\overset{\text{def}}{=} \operatorname{coker}\big(C_d(K_{-z}) \hookrightarrow C_d(\cup K)\big)^* \\ &\cong \ker\big(C_d(\cup K)^* \twoheadrightarrow C_d(K_{-z})^*\big) \\ &= \big\{\lambda \in C_d(\cup K)^* \;\big|\; \lambda\big(C_d(K_{-z})\big) = 0\big\}; \end{aligned}$$

换句话说， $C^d(\cup K, K)_z$ 中的一个元素是一个线性映射 $C_d(\cup K) \to \Bbbk$ ，它将$C_d(K_{-z})$映射为零。因此，我们得到一个定义良好的态射

$$\phi_z^d \colon (C_d(K)^\dagger)_z \longrightarrow C^d(\cup K, K)_z$$

with

$$\phi_z^d(\kappa) \colon C_d(\cup K) = \operatorname{colim}_w C_d(K_w) \xrightarrow{\operatorname{colim}_w \kappa_w} \operatorname{colim}_w F(1-z)_w = \Bbbk$$

对于 $\kappa \in (C_d(K)^\dagger)_z$。容易验证，$\phi_z^d$ 具有一个逆映射

$$\psi_z^d \colon C^d(\cup K, K)_z \longrightarrow (C_d(K)^\dagger)_z$$

with

$$\psi_z^d(\lambda)_w \colon C_d(K_w) \hookrightarrow C_d(\cup K) \xrightarrow{\lambda} \Bbbk \twoheadrightarrow F(1-z)_w,$$

并且 ϕ_z^d 和 ψ_z^d 关于 z 和 K 是自然的，且与相应的余边界映射可交换。因此，我们得到一对互逆的链复形自然同构，它们关于 K是自然的：

$$\phi \colon C_\bullet(K)^\dagger \rightleftarrows C^\bullet(\cup K, K) : \psi. \qquad \square$$

另请参见备注 3.10，其中给出了对该命题更具概念性的处理方法。

3.2 对偶性与矩阵

定义 3.3。设 M是一个有限秩平坦模，且 $b\colon \bigoplus_{i=1}^n F(z_i) \to M$是 M的一个广义基，其中 $z_i \in \mathbf{Z}^N$。与 b对偶的 M^*的广义基由诱导同构给出

$$\bigoplus_{i=1}^n I(-z_i) \cong \bigoplus_{i=1}^n F(z_i)^* \xrightarrow{(b^{-1})^*} M^*.$$

与 b 对偶的 $M^\dagger$ 的广义基由诱导同构给出

$$\bigoplus_{i=1}^n F(\mathbf{1} - z_i) \cong \bigoplus_{i=1}^n F(z_i)^\dagger \xrightarrow{(b^{-1})^\dagger} M^\dagger.$$

分次 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{c}$-矩阵 M 的分次转置 是分次的 $(-\boldsymbol{c}) \times (-\boldsymbol{r})$-矩阵 M^T，满足 $\mathrm{u}(M^T) = \mathrm{u}(M)^T$。对于分次矩阵 M，令 $M\langle z \rangle$ 为一个分次矩阵，其元素为 $\mathrm{u}(M\langle z \rangle) = \mathrm{u}(M)$，对所有 i、j，其行次数为 $\mathrm{rg}_i^{M\langle z \rangle} = \mathrm{rg}_i^M - z$，列次数为 $\mathrm{cg}_j^{M\langle z \rangle} = \mathrm{cg}_j^M - z$。分次矩阵 M 有效，当且仅当 M^T 有效；当且仅当 $M\langle z \rangle$有效。以下命题的证明显然，故略去；另见 [31, 引理 3.18、3.25]:

Lemma 3.4. *If a valid graded matrix Φ represents a morphism $\phi\colon F \to G$ of free modules, then with respect to the dual generalized bases,*

(i) Φ^T表示余自由模的态射 $\phi^*\colon G^* \to F^*$，而(ii) $\Phi^T\langle \mathbf{1} \rangle$ 表示自由模的态射 $\phi^\dagger\colon G^\dagger \to F^\dagger$。

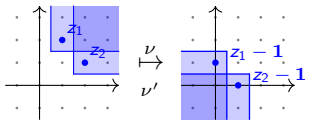


Figure 6: A free module $F = F(z_1) \oplus F(z_2)$ (left) and its image $\nu F = I(z_1 - \mathbf{1}) \oplus I(z_2 - \mathbf{1})$ under the Nakayama functor (right).

3.3 主要结果

中山函子是可加协变函子 $\nu := ((-)^\dagger)^* : \mathrm{Z}^N\text{-pers} \to \mathrm{Z}^N\text{-pers}$。将其限制在有限秩自由模上时，$\nu$ 可逆，其逆为 $\nu' = ((-)^*)^\dagger$，其中 $\nu\colon F(z) \mapsto I(z-1) : \nu'$；见图 6。本节将借助下面的定理 3.8 证明定理 1.3 和推论 1.4，该定理给出了 C 与 νC 的同调之间的自然同构。

对于 C 一个链复形和 $i \in \mathbf{Z}$，（同调意义上的）移位复形 $C[i]$ 是满足 $C[i]_d = C_{i+d}$ 的链复形。类似地，对于 C 一个上链复形和 $i \in \mathbf{Z}$，我们定义 $C[i]$ 为满足 $C[i]^d = C^{i+d}$ 的上链复形。同调移位 $[-]$ 不应与分次移位 $\langle -\rangle$ 混淆；前者适用于持久模的（上）链复形，并对（上）同调次数进行移位，而后者适用于持久模，并对 $\mathbf{Z}^N$-等级进行移位。我们使用记号 $[\![N]\!] := \{1, \dots, N\}$。

定义 3.5. 对于 $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq [\![N]\!]$，令 $q_S\colon \mathbf{Z}^N \to \mathbf{Z}^{N-|S|}$ 为遗忘以 S 为索引的分量的偏序集映射。我们定义加性函子

$$\begin{aligned}
\operatorname{colim}_S &\colon \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers} \to \mathbf{Z}^{N-|S|}\text{-}\mathbf{pers}, \quad (\operatorname{colim}_S M)_z = \operatorname{colim}_{w \in q_S^{-1}(z)} M_w, \\
\Delta_S &\colon \mathbf{Z}^{N-|S|}\text{-}\mathbf{pers} \to \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers}, \qquad (\Delta_S L)_w = L_{q_S(w)} \\
\lim_S &\colon \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers} \to \mathbf{Z}^{N-|S|}\text{-}\mathbf{pers}, \quad (\lim_S M)_z = \lim_{w \in q_S^{-1}(z)} M_w,
\end{aligned}$$

其中，$\operatorname{colim}_S M$ 和 $\lim_S M$ 的结构映射由（上）极限的函子性得到。因此，$\lim_S M$ 是通过对 M 关于由 S 索引的参数取极限而得到的（$N - |S|$）参数持久模；类似地，$\operatorname{colim}_S M$ 也是如此，而 $\Delta_S L$ 则是通过沿着由 S 索引的参数复制 L 而得到的 N 参数持久模。此外，我们令 $\mathrm{Lim}_S := \Delta_S \lim_S$，以及 $\mathrm{Colim}_S := \Delta_S \operatorname{colim}_S$。

模 $\Delta_S M$ 沿着由 S 指定的参数保持不变。因此，$\mathrm{Colim}_S M$ 和 $\mathrm{Lim}_S M$ 也具有相同性质。函子 Δ_S 是正合的，是 colim_S 的右伴随，也是 $\lim_S$ 的左伴随。函子 colim_S（因此 Colim_S 也如此）同样是正合的，因为它是通过对向量空间的有向系统逐点取余极限构造而成的，而有向系统上的余极限是正合的 [38, 定理 2.6.15]。特别地，colim_S、Δ_S，以及因此 Colim_S，都与（上）链复形的（上）同调交换。

定义 3.6. 如果支撑 $\operatorname{supp} M := \{z \in \mathbf{Z}^N \mid M_z \neq 0\}$ 的上方有界，则 $\mathbf{Z}^N$-持久模 M 最终消失。如果对于所有 d，链复形 C 在 $\mathbf{Z}^N$-$\mathbf{pers}$ 中满足 $H_d(C)$ 最终消失，则称其最终无环。如果 $C_\bullet(K)$ 是最终无环，则称 $\mathbf{Z}^N$-滤过单纯复形 K 是最终无环。

注 3.7. 有限生成持久模 M 最终消失，当且仅当对所有非空 $S \subseteq [\![N]\!]$ 都有余极限 $_S M = 0$（等价地：对所有满足 $|S| = 1$ 的 S 都成立），因此采用“最终消失”这一说法。用交换代数的语言来说，有限生成持久模 M，视为分次 $\Bbbk[x_1, \dots, x_N]$-模时，最终消失当且仅当 M 是 $\mathfrak{m}$-挠的，其中 $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_N)$。等价地，$M$ 具有有限长度；也就是说，每个严格递降的子模链 $M \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots$ 都是有限的。

回顾一下，导出范畴 $\mathcal{D}(\mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers})$ 是范畴 $\mathbf{Ch}(\mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers})$ 的局部化，其中该范畴由 $\mathbf{Z}^N$-模的链复形构成，并以拟同构 [38,§10.4] 为局部化对象。因此，其对象是 $\mathbf{Z}^N$-持久模的链复形，而态射则通过形式上将拟同构取逆得到。事实上，$C \to D$ 在 $\mathcal{D}(\mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers})$ 中的任意态射，都可以表示为 $\mathbf{Ch}(\mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers})$ 中态射的一个之字形 $C \xleftarrow{\sim} Z \to D$，其中 Z，且 $Z \xrightarrow{\sim} C$ 是一个拟同构。

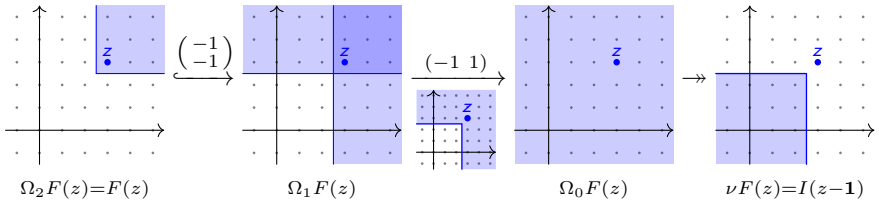


Figure 7: The augmented flat resolution $\Omega F(z)$ of $\nu F(z) = I(z - \mathbf{1})$ for $N = 2$. The module below the arrow denotes the image of that morphism.

定理 3.8。 设 C 是一个有限秩自由 $\mathbf{Z}^N$-持久模的链复形。在导出范畴 $\mathcal{D}(\mathbf{Z}^N\text{-pers})$ 中，存在一个自然态射 $\varphi\colon\ \nu C[N] \to C$，使得

(*i*) *if each module* $H_d(C)\ \ldots, H_{d+N}(C)$ *eventually vanishes, then*

$$H_d(\varphi)\colon H_{d+N}(\nu C) \to H_d(C)$$

是一个同构。

(*ii*) 若 C 最终无环，则 φ 是 $\mathcal{D}(\mathbf{Z}^N\text{-pers})$ 中的一个同构。

证明。 为构造 φ，对每个 $0 \le i \le N$ 定义正合函子

$$\begin{aligned}\Omega_i\colon \mathbf{Z}^N\text{-pers} &\longrightarrow \mathbf{Z}^N\text{-pers},\\ M &\longmapsto \bigoplus_{S\in\binom{[\![N]\!]}{N-i}} \operatorname{Colim}_S M,\end{aligned}$$

其中 $\binom{[\![N]\!]}{i} := \{S \subseteq [\![N]\!] \mid |S| = i\}$。对于每个 $S' \subseteq S$ 和 $M \in \mathbf{Z}^N\text{-pers}$，存在自然态射 $c^M_{S,S'}$：余极限$_{S'}$ $M \to$余极限$_S$ M。由此得到自然态射

$$\omega_i^M\colon \Omega_i M = \bigoplus_{S'\in\binom{[\![N]\!]}{N-i}} \operatorname{Colim}_{S'} M \longrightarrow \bigoplus_{S\in\binom{[\![N]\!]}{N-i+1}} \operatorname{Colim}_S M = \Omega_{i-1}M,$$

由它们的非零分量定义

$$(-1)^j c^M_{S,S\setminus\{s_j\}}\colon\ \operatorname{Colim}_{S\setminus\{s_j\}} M \to \operatorname{Colim}_S M$$

对于 $S = \{s_1 < \cdots < s_j < \cdots < s_{N-i}\}$。符号规则确保映射 ω_i^M构成一个链复形

$$\Omega M\colon\quad 0 \longrightarrow \underbrace{\Omega_N M}_{M} \xrightarrow{\omega_N^M} \Omega_{N-1}M \xrightarrow{\omega_{N-1}^M} \cdots \xrightarrow{\omega_1^M} \Omega_0 M \longrightarrow 0. \tag{8}$$

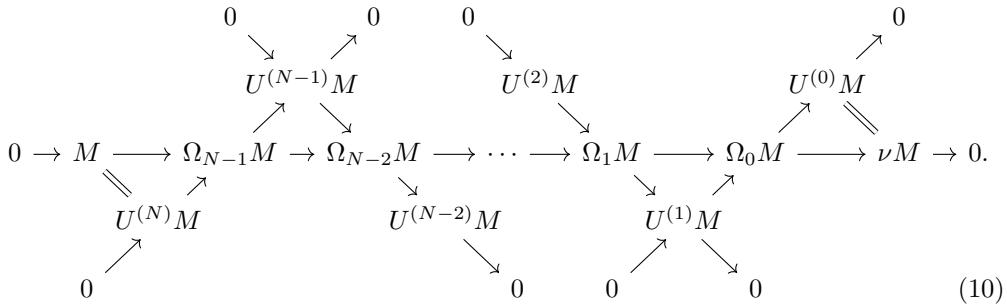
In fact, Ω is an additive functor from $\mathbf{Z}^N$-**pers** to $\mathbf{Ch}(\mathbf{Z}^N$-**pers**$)$. If M is free, then ΩM is a flat resolution of νM, whose augmentation morphism ε^M is the canonical morphism

$$\Omega_0 M = \operatorname{Colim}_{[\![N]\!]} M \cong \Delta_{[\![N]\!]}\Bbbk^{|\operatorname{rk} M|} \cong \operatorname{Lim}_{[\![N]\!]} \nu M \longrightarrow \nu M;$$

参见图 7 示意。记 $\mathcal{F}(\mathbf{Z}^N\text{-pers})$ 为 $\mathbf{Z}^N$-pers中由自由模组成的全子范畴。对于 $0 \le i \le N$，定义函子

$$U^{(i)}\colon \mathcal{F}(\mathbf{Z}^N\text{-pers}) \to \mathbf{Z}^N\text{-pers},\quad M \mapsto \operatorname{im}\omega_i^M. \tag{9}$$

注意， $U^{(i)}$ 仅在唯一自然同构意义下定义。对象 $U_{(i)}M$构成增广平坦分解 $\Omega M \to \nu M$ 按函子性解拼接得到的以下短正合列：



(10)

逐次将其应用于自由模的链复形 C，得到一个由平坦模链复形构成的长正合列 ΩC，并将其拆分为短正合列

$$0 \longrightarrow U^{(i+1)}C \longrightarrow \Omega_i C \longrightarrow U^{(i)}C \longrightarrow 0$$

在 **Ch(Z^N-pers)** 中，对于 $0 \le i < N$。每个这样的短正合列都延拓为一个正合三角

$$U^{(i+1)}C \longrightarrow \Omega_i C \longrightarrow U^{(i)}C \xrightarrow{\partial^{(i)}} U^{(i+1)}C[-1] \tag{11}$$

在导出范畴中 $\mathcal{D}$(**Z^N-pers**)；详见 [38, §10.4。9] 将这些态射作适当的平移后进行复合，$\partial^{(i)}$ 即可得到所需的态射

$$\varphi\colon \quad \nu C[N] = U^{(0)}C[N] \xrightarrow{\partial^{(0)}[N]} \cdots \xrightarrow{\partial^{(N-1)}[1]} U^{(N)}C = C.$$

该态射的自然性源于构造中的所有步骤都是函子性的这一事实。

现在证明 φ 具有所声称的性质。对于 (*i*)，注意到这些三角给出长正合列 (11)

$$\cdots \to H_{d+N-i}(\Omega_i C) \to H_{d+N-i}(U^{(i)}C) \to H_{d+N-i-1}(U^{(i+1)}C) \to H_{d+N-i-1}(\Omega_{i+1}C) \to \cdots \tag{12}$$

在 **Z^N-pers** 中，对于 $0 \le i < N$；见 [38, 推论 **10.1**。4]。回顾一下，余极限$_S$是一个正合函子，因此与同调交换。这意味着 $H_d(\Omega_i C) \cong \bigoplus_{S\in\binom{[\![N]\!]}{N-i}}$ 余极限$_S$ $H_d(C)$。由假设可得

$$H_{d+N-i}(\Omega_i C) = H_{d+N-i-1}(\Omega_{i+1}C) = 0$$

for $0 \le i < N$. Therefore, the long exact sequences (12) show that for each i, the connecting homomorphism $\partial^{(i)}$ from (11) induces an isomorphism

$$H_{d+N-i}(U^{(i)}C) \xrightarrow{\cong} H_{d+N-i-1}(U^{(i+1)}C).$$

Thus, φ induces an isomorphism

$$H_{d+N}(\nu C) \xrightarrow{\cong} H_d(C).$$

对于(*ii*)，回想一下，在 $\mathcal{D}$(**Z^N-pers**) 中，若一个态射在所有次数上都诱导出同调同构，则它是同构。若 C 最终无环，那么根据定义，$H_q(C)$ 对所有 q都最终消失。因此，(*ii*) 可直接由(*i*)得出。 □

将上链复形的同调次数取反，从而把上链复形视为链复形，便可直接得到定理3.8的如下对偶版本：

Theorem 3.8′. *Let C be a cochain complex of finite rank free $\mathbf{Z}^N$-persistence modules. There exists a natural morphism $\varphi\colon \nu C \to C[N]$ in the derived category $\mathcal{D}(\mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers})$ such that*

(*i*) *if each module $H^d(C)\ \dots, H^{d+N}(C)$ eventually vanishes, then*

$$H^d(\varphi)\colon H^d(\nu C) \to H^{d+N}(C)$$

is an isomorphism.

(*ii*) *If C is eventually acyclic, then φ is an isomorphism in $\mathcal{D}(\mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers})$.*

Remark 3.9. A careful scrutiny of the proof of Theorem 3.8 reveals that Theorems 3.8(*i*) and 3.8′(*i*) hold under weaker hypotheses, as follows:

(*i*) In Theorem 3.8(*i*), for $H_d(\varphi)\colon H_{d+N}(\nu C) \to H_d(C)$ to be an isomorphism, it suffices to assume only that

$$\operatorname{colim}_S H_{d+i}(C) = \operatorname{colim}_S H_{d+i-1}(C) = 0$$

对所有 $i = 1, \dots, N$ 以及所有 $S \in \binom{[\![N]\!]}{i}$。

(*ii*) 在定理 3.8′(*i*)中，要使 $H^d(\varphi)\colon H^d(\nu C) \to H^{d+N}(C)$ 成为同构，只需假设

$$\operatorname{colim}_S H^{d+i}(C) = \operatorname{colim}_S H^{d+i+1}(C) = 0$$

对所有 $i = 0, \dots, N-1$ 以及所有 $S \in \binom{[\![N]\!]}{N-i}$。

现在我们可以证明定理 1.3 和推论 1.4：

定理 *1.3*的证明。 设 C 是由自由持久模构成的链复形，且每个模 $H_d(C) \dots, H_{d+N}(C)$ 最终消失。由 $C^\dagger = (\nu C)^*$、(3) 和定理 3.8(*i*) 可得自然同构

$$H^{d+N}(C^\dagger) = H^{d+N}((\nu C)^*) \cong H_{d+N}(\nu C)^* \cong H_d(C)^*. \qquad \square$$

推论 *1.4* 的证明。 设 M 为一个有限生成且最终消失的持久模，并设 G 为 M 的一个长度为 $\ell \le \infty$的自由分解。于是， $G^\dagger[N]$ 是一个集中在次数 $-N, \dots, \ell(G) - N$上的自由模上链复形。定理 1.3 蕴含

$$H^d(G^\dagger[N]) \cong H^{d+N}(G^\dagger) \cong H_d(G)^* \cong \begin{cases} M^* & \text{if } d = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这表明 $(G^\dagger[N])_0 = (G_N)^\dagger \neq 0$，因此 $\ell(G) \ge N$。若 G是极小的，则希尔伯特零化子定理（定理 2.9(*i*)）蕴含 $\ell(G) = N$，从而证明了(*i*)。

对于 (ii)，假设 $\ell(G) = N$。那么 $G^\dagger[N]$ 集中于（上同调）次数 $-N, \dots, 0$，因此存在一个满射 $\varepsilon\colon (G^\dagger[N])^0 \twoheadrightarrow H^0(G^\dagger[N]) \cong M^*$。我们看到，将复形 $\nu G^\dagger[N]$ 视为集中于（同调）次数 $0, \dots, N$ 的链复形时，它是 M^* 的自由分解，其增广映射为 ε。由于 $(-)^*$ 和 $(-)^\dagger$，从而 ν 也与有限直和可交换，并保持（上）同调球，因此极小性得以保留。 $\square$

回顾命题 3.2，在单参数情形下，对于 K 一个有限的 Z 索引过滤，我们有一个自然同构 $C_\bullet(K)^\dagger \cong C^\bullet(\cup K, K)$。因此，当 $H_d(\cup K) = H_{d+1}(\cup K) = 0$ 时，定理 1.3 得到定理 1.2 的同构 $H_d(K)^* \cong H^{d+1}(\cup K, K)$。

备注 3.10（相对上链）。设 $C := C_\bullet(K)^\dagger$ 为有限单纯形 Z^N-过滤K，并回顾由 (9) 给出的函子 $U^{(i)}\colon \mathcal{F}(\mathsf{Z}^N\text{-pers}) \to \mathsf{Z}^N\text{-pers}$。注意到 $\Omega_0 C \cong C^\bullet(\cup K)$ 和 $\nu C \cong C^\bullet(K)$，可以证明 $U^{(1)}C \cong C^\bullet(\cup K, K)$。特别地，在 $N = 1$ 的情形下，这就得到了命题 3.2 中的自然同构 $C_\bullet(K)^\dagger \cong C^\bullet(\cup K, K)$。

3.4 示例

下面的示例展示了定理 1.3 在双参数情形下的应用。

示例 3.11。对于 $N = 2$，令 C 为如下链复形：

$$C_{-1} = F\binom{0}{0} \qquad C_0 = F\binom{0}{1} \oplus F\binom{1}{0} \qquad C_d = F\binom{d}{d+1} \oplus F\binom{d+1}{d},$$
$$\partial_0 = (1\ 1) \qquad \partial_d = \begin{pmatrix} (-1)^d & 1 \\ 1 & (-1)^d \end{pmatrix}$$

对于 $d > 0$ 和 $C_d = 0$ 对于 $d < -1$。然后

$$H_d(C) = \begin{cases} \mathbf{k}\langle -d-1\rangle & \text{for } d \geq -1, \\ 0 & \text{for } d < -1, \end{cases} \qquad H^d(C^\dagger) = \begin{cases} \mathbf{k}\langle d-1\rangle & \text{for } d \geq 1, \\ 0 & \text{for } d < 1, \end{cases}$$

where $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^N$**-pers** is the simple module concentrated at degree 0 from Example 2.8. Therefore,

$$H^{d+2}(C^\dagger)^* = \mathbf{k}\langle d+1\rangle^* = \mathbf{k}\langle -d-1\rangle \cong H_d(C)$$

for all d, as claimed by Theorem 1.3.

We next give a matrix formulation of Corollary 1.4, along with two examples illustrating it.

Proposition 3.12. *Let M be a finitely generated, eventually vanishing $\mathbf{Z}^N$-persistence module. For valid graded matrices $\boldsymbol{\Phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Phi}_N$, the following are equivalent:*

(i) $0 \to G_N \xrightarrow{\boldsymbol{\Phi}_N} \cdots \xrightarrow{\boldsymbol{\Phi}_1} G_0$ *is a free resolution of M,*

(ii) $0 \to G_0^\dagger \xrightarrow{\boldsymbol{\Phi}_1^T\langle -\mathbf{1}\rangle} \cdots \xrightarrow{\boldsymbol{\Phi}_N^T\langle -\mathbf{1}\rangle} G_N^\dagger$ *is a free resolution of M^*.*

Proof. This follows from Lemma 3.4 and Corollary 1.4. □

Example 3.13. Let M be a finitely generated, eventually vanishing $\mathbf{Z}$-persistence module. Recall that M has a barcode decomposition $M \cong \bigoplus_{i=1}^n \Bbbk_{[b_i, d_i)}$ with b_i, $d_i \in \mathbf{Z}$ for all i. With $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ and $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_n)$, the graded $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}$-matrix $\boldsymbol{\Phi}$ with $\boldsymbol{\Phi}_{ij} = \delta_{ij}$ is valid and represents the following MFR of M:

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^n F(d_i) \xrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} \bigoplus_{i=1}^n F(b_i).$$

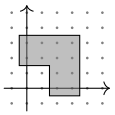
The pointwise dual module M^* has the barcode decomposition

$$M^* \cong \bigoplus_{i=1}^n \Bbbk_{(-d_i, -b_i]} = \bigoplus_{i=1}^n \Bbbk_{[1-d_i, 1-b_i)},$$

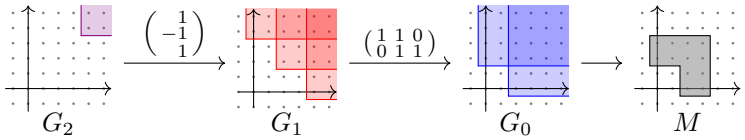
where the equality simply swaps open and closed ends of the intervals. This decomposition corresponds to the following MFR of M^*:

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} F(1-b_i) \xrightarrow{\Phi^T\langle -1\rangle} \bigoplus_{i=1}^{n} F(1-d_i).$$

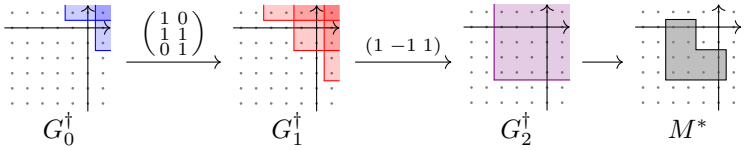
Example 3.14. Let $M \in \mathbf{Z}^2$-**pers** be the module

$M =$ 

with components $M_z = \Bbbk$ if z lies in the shaded region above, and $M_z = 0$ otherwise. All structure maps between nonzero components of M are identities. The sequence



is an augmented free resolution of M. By Proposition 3.12, the sequence



is an augmented free resolution of M^*.

4 Relation to Grothendieck and Greenlees–May duality

本节给出定理 3.8 的另一种证明，将该结果表述为多分次导出 Grothendieck 局部对偶的一个特例。回忆定理 3.8 蕴含了我们的主要结果——定理 1.3 和推论 1.4；参见第 16 页。

我们先对这种形式的局部对偶作几点背景说明。在非分次情形下，尽管许多参考文献陈述的是 Grothendieck 局部对偶的非导出形式，但更强的导出形式同样是经典结果，至少可以追溯到 Hartshorne[22, 第 278] 页。在多分次情形下，局部对偶的非导出形式由 Goto 和 Watanabe [20, 定理 2.2.2], 给出，而导出形式则隐含在他们的证明中。此外，Miller 还将导出形式明确表述为更一般的多分次 *Greenlees–May* 对偶，见 [30, 定理 5.3]。

In what follows, we introduce these graded duality results and discuss their relation to Theorem 3.8. We begin with a brief review of the construction of derived functors. For standard definitions from ring and module theory, we refer to the textbooks [28; 10].

4.1 Derived functors

Let $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ be abelian categories. Recall the construction of the derived category $\mathcal{D}(\mathbf{C})$ of $\mathbf{C}$ from Section 3.3. Denote by $q_{\mathbf{C}}\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{C}) \to \mathcal{D}(\mathbf{C})$ the localization functor. Recall that we may identify chain complexes with cochain complexes via $C^i = C_{-i}$.

Definition 4.1. Let $G\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Ch}(\mathbf{D})$ be an additive functor.

(*i*) G的左全导出函子记为 $\mathbb{L}G\colon \mathcal{D}(\mathbf{C}) \to \mathcal{D}(\mathbf{D})$，它是沿 $q_{\mathbf{C}}$ 对 $q_{\mathbf{D}} \circ G$ 的右 Kan 延拓。上同调 $H_d(\mathbb{L}G(-))$ 称为 G 的第 d 个左导出函子。(*ii*) G的右全导出函子记为 $\mathbb{R}G\colon \mathcal{D}(\mathbf{C}) \to \mathcal{D}(\mathbf{D})$，它是沿 $q_{\mathbf{C}}$ 对 $q_{\mathbf{D}} \circ G$ 的左 Kan 延拓。上同调 $H^d(\mathbb{R}G(-))$ 称为 G 的第 d 个右导出函子。

下文中，我们常常省略局部化函子的显式记法。如果 C 有足够多的投射对象或内射对象（例如，若 $\mathsf{C} = R$-Mod，其中 R 是某个环；或 $\mathsf{C} = \mathsf{Z}^N$-pers），则左或右全导出函子总是存在，并且分别可通过 K-投射分解和 K-内射分解计算。我们对左全导出函子作出说明；右全导出函子的对偶情形完全类似。对于任意两个链复形 C, D，令 $\mathrm{Hom}(C, D)$ 为由阿贝尔群组成的链复形，其中 $\mathrm{Hom}(C, D)_d = \prod_i \mathrm{Hom}(C_i, D_{i+d})$。若一个复形 P使得函子 $\mathrm{Hom}(P, -)$ 将无环复形映为无环复形，则称其为 K-投射复形。 C 的 K-投射分解是一个拟同构 $P \to C$，且 P 为 K-投射复形。若 C 有足够多的投射对象，则每个复形都有一个 K-投射分解 [35, Corollary 3.5]。若 C 集中于单个次数，则 K-投射分解就是通常意义下的投射分解 [40, Proposition 4.3]。对于 C 的任意 K-投射分解 P，由自然变换 $\mathbb{L}G \circ q_{\mathbf{C}} \Rightarrow q_{\mathbf{D}}G$ 导出的自然映射 $\mathbb{L}G(C) \to G(P)$ 是 $\mathcal{D}(\mathrm{D})$ 中的同构 [40, Theorem 4.2]。若 G 是右正合的，且对 $d < 0$ 有 $C_d = 0$，则$H_0(\mathbb{L}G(C)) \cong G(C)_0$。类似地， $\mathbb{R}G(C)$ 可通过对 C 作 K-内射分解来计算。若 G 是左正合的，且对 $d < 0$ 有 $C^d = 0$，则 $H^0(\mathbb{R}G(C)) \cong G(C)^0$。

注记 4.2. 范畴 $\mathbf{Ch}(\mathbf{C})$ 带有两种模型结构，分别称为投射 模型结构和内射模型结构，二者都以拟同构作为弱等价。在前一种结构中，余纤维对象是 K-投射对象。因此，K-投射分解就是余纤维替换。由于 K-投射对象之间的拟同构是同伦等价 [35, 命题 1.4(d)], ，每个函子 $G\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Ch}(\mathbf{D})$ 都保持 K-投射对象之间的拟同构。对于任意 K-投射分解 P of C， $\mathbb{L}G(C) \cong G(P)$ 这一事实，随即由模型范畴框架下关于导出函子的一般结果得出 [14, 定理 9.3]。类似地， K-内射分解是内射模型结构中的纤维替换。

注记 4.3（反变函子）. 考虑一个反变函子 $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}$。范畴 $\mathbf{Ch}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})$ 与 $\mathbf{Ch}(\mathbf{C})^{\mathrm{op}}$ 通过同调分次取负有典范同构。在此框架下，$\mathbf{Ch}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}}) \cong \mathbf{Ch}(\mathbf{C})^{\mathrm{op}}$ 中复形 B 的 K-内射分解，实际上是$\mathbf{Ch}(\mathbf{C})$ 中 B 的 K-投射分解。因此，要计算 $\mathbb{R}F(B)$，可在 $\mathbf{Ch}(\mathbf{C})$ 中选取 B 的 K-投射分解；计算 $\mathbb{L}F(B)$ 时也同理。

Derived bifunctors of *Hom* Let

$$G\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{B}) \times \mathbf{Ch}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Ch}(\mathbf{D})$$

是一个双函子。可以将 $\mathbf{Ch}(\mathbf{B}) \times \mathbf{Ch}(\mathbf{C})$ 与 $\mathbf{Ch}(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 典范地识别。在此识别下，$\mathbf{Ch}(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 中的拟同构是一对拟同构，K-投射分解或 K-内射分解也同样如此。因此，范畴 $\mathcal{D}(\mathbf{B}) \times \mathcal{D}(\mathbf{C}) \cong \mathcal{D}(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 之间存在典范同构，并且有自然同构$q_{\mathbf{B}} \times q_{\mathbf{C}} \cong q_{\mathbf{B} \times \mathbf{C}}$。这种识别给出了左导出函子和右导出函子

$$\mathbb{L}G, \mathbb{R}G\colon \mathcal{D}(\mathbf{B}) \times \mathcal{D}(\mathbf{C}) \to \mathcal{D}(\mathbf{D}),$$

它们事实上分别是 $q_{\mathbf{D}} \circ G$ 沿 $q_{\mathbf{B}} \times q_{\mathbf{C}}$ 的右 Kan 延拓和左 Kan 延拓。计算 $\mathbb{L}G(B,C)$ 时，可以将 G 作用于 B 和 C的 K-投射分解，并且 $\mathbb{R}G(B,C)$ 的计算也类似。定理 9.3.11 和 9.3.16]。

现在考虑双函子

$$Hom\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{C})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Ch}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$$

如上所定义。其 d阶右导出函子记为 $\mathrm{Ext}^d := H^d \circ \mathbb{R}Hom$。由于备注 4.3 适用于 Hom 的逆变参数，因此导出函子 $\mathbb{R}Hom(B,C)$ 对于 $B, C \in \mathbf{Ch}(\mathbf{C})$ 可以通过选取 B (在 $\mathbf{Ch}(\mathbf{C})$ 中) 的 K-投射分解以及 C 的 K-内射分解来计算。事实上，只需选取相应的分解，即 B 或 C:

命题 4.4 ([40, 例 4.10；参见 38，定理 2.7。2])。给定复形 B、$C \in \mathbf{Ch}(\mathbf{C})$，一个 K-投射分解 $p\colon\ P \to B$，以及一个 K-内射分解 $i\colon\ C \to I$，我们有自然同构

$$\mathbb{R}Hom(B,C) \cong Hom(P,C) \cong Hom(B,I) \cong Hom(P,I)$$

在 $\mathcal{D}(\mathbf{Ab})$ 中。

证明。函子性给出了 $\mathcal{D}(\mathbf{Ab})$ 中如下形式的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{R}Hom(B,C) & & \\
 & \overset{p^*}{\swarrow} & & \overset{i_*}{\searrow} & \\
\mathbb{R}Hom(P,C) & & & & \mathbb{R}Hom(B,I) \\
\uparrow & \overset{i_*}{\searrow} & & \overset{p^*}{\swarrow} & \uparrow \\
Hom(P,C) & & \mathbb{R}Hom(P,I) & & Hom(B,I) \\
 & \underset{i_*}{\searrow} & \uparrow & \underset{p^*}{\swarrow} & \\
 & & Hom(P,I) & &
\end{array} \tag{13}$$

其中局部化函子 $q_{\mathbf{Ab}}$ 和 $q_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}}$ 未显式写出。这里，虚线态射来自普适自然变换 $q_{\mathbf{Ab}} \circ Hom \Rightarrow \mathbb{R}Hom \circ q_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}}$，该变换由 $\mathbb{R}Hom$ 作为沿着 $q_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}}$对 $q_{\mathbf{Ab}} \circ Hom$ 作左 Kan 延拓而得到。由于局部化将拟同构映为同构，$\mathbb{R}Hom$ 的函子性表明，顶部菱形中的四个映射都是同构。如 [39, 定理 12.2.1 和引理 12.2.2], 所示，虚线映射和底部对角映射也都是同构。结论得证。

□

分次情形以下，分次模的记号与上文持久模的记号一致。设 G 为有限生成阿贝尔群，R 为一个 G-分次环。

我们用 R-**grMod** 表示分次 R-模的阿贝尔范畴。其对象为分次 R-模，而 $\mathsf{Hom}(L,M)$ 由 R-线性态射 f给出，其中 $f(L_g) \subseteq M_g$对所有 $g \in G$都成立。对于分次模 M，我们用 $M\langle g\rangle$ 表示满足$M\langle g\rangle_h = M_{g+h}$的分次模。范畴 R-**grMod** 具有一个内部 Hom 双函子

$$\mathsf{Hom}\colon R\text{-}\mathbf{grMod}^{\mathrm{op}} \times R\text{-}\mathbf{grMod} \to R\text{-}\mathbf{grMod},$$

defined by $\mathsf{Hom}(L,M)_g = \mathrm{Hom}(L, M\langle g\rangle)$.

A graded R-module P is projective if and only if $\mathsf{Hom}(P,-)$ is exact, and analogously for injective modules. Analogously to Hom, the bifunctor Hom gives rise to a bifunctor

$$\mathit{Hom}\colon \mathbf{Ch}(R\text{-}\mathbf{grMod})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Ch}(R\text{-}\mathbf{grMod}) \to \mathbf{Ch}(R\text{-}\mathbf{grMod})$$

with $\mathit{Hom}(C,D)_d = \prod_i \mathsf{Hom}(C_i, D_{i+d})$, Its dth right derived functor is denoted by Ext. Note that $\mathsf{Ext}^d(L,M)_g = \mathrm{Ext}^d(L, M\langle g\rangle)$. The analogue of Proposition 4.4 holds for $\mathbb{R}\mathit{Hom}$ with the same proof.

4.2 分次 Grothendieck 局部对偶

From now on, let R be a G-graded local noetherian ring with graded maximal ideal $\mathfrak{m}$. We always assume that the homogeneous part R_0 equals the *residue field* $\Bbbk := R/\mathfrak{m}$ of R. All modules are assumed to be G-graded.

若 M 是有限生成的 R-模，我们令

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) := \bigcup_i \{m \in M \mid \mathfrak{m}^i m = 0\} = \operatorname{colim}_i \operatorname{Hom}(R/\mathfrak{m}^i, M)$$

为 M 中被 $\mathfrak{m}$的某个幂湮灭的元素所构成的子模。作为 M的子模，模 $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$继承了来自 M的 G-分次。函子 $\Gamma_{\mathfrak{m}}\colon R\text{-grMod} \to R\text{-grMod}$称为 $\mathfrak{m}$-挠函子。蛇引理表明 $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ 是左正合的。其第 d个右导出函子 $H^d_{\mathfrak{m}}(M) := H^d(\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M))$称为以 $\mathfrak{m}$为支撑的 M 的第 d个局部上同调。分次 R-模 M 的 Matlis 对偶是分次模 M^*，其分量为$(M^*)_g = \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(M_{-g}, \Bbbk)$。这定义了一个逆变正合函子$(-)^*\colon R\text{-grMod}^{\mathrm{op}} \to R\text{-grMod}$，因此对于分次$R$-模的上链复形 C，将 C^* 的指标取反并视为上链复形，可得

$$H^d(C)^* \cong H^{-d}(C^*) \tag{14}$$

设 $\mathbf{k}$ 表示域 $\Bbbk$，视为 R-模。可以证明 $M^* \cong \operatorname{Hom}(M, E(\mathbf{k}))$，其中内射模 $E(\mathbf{k})$ 是 内射包 $\mathbf{k}$ 的，即包含 R-模 $\mathbf{k}$ 作为子模的最小内射模 [29, 例 2.44]。称 R 是 *Cohen–Macaulay*的，如果其 ***Krull*** 维数

$$\dim R := \sup\{\ell \mid 0 \subsetneq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell \subsetneq R\},$$

其中 $\mathfrak{p}_i$ 遍历 R中的分次素理想，则其等于自身的深度

$$\operatorname{depth} R := \min\{i \mid \operatorname{Ext}^i(\mathbf{k}, R) \neq 0\}.$$

如果 R 是 Cohen–Macaulay 环，则称 $\omega_R := H^N_{\mathfrak{m}}(R)^*$ 为 R的典范模 。对于非分次环，也有类似的定义。

定理 4.5 （分次 Grothendieck 局部对偶性 [20, 定理 2.2.2；30，推论 5.5；9，定理 14.5。10]）。 如果 R 是 ***Krull*** 维数为 N 且M 是有限生成分次 R-模，则

$$H^{N-d}_{\mathfrak{m}}(M)^* \cong \operatorname{Ext}^d(M, \omega_R).$$

未分次环也有类似的结论 [22, 推论 6.3；10，定理 3.5.8；9，定理 11.2。6]。

我们称 R 为*Gorenstein*，如果 R 作为分次 R-模有有限内射分解。在这种情况下，Krull 维数 $\dim R$ 等于内射维数

$$\operatorname{inj\,dim} R := \sup\{i \mid \operatorname{Ext}^i(\mathbf{k}, R) \neq 0\},$$

并且 $\omega_R = R\langle g\rangle$ 对某个 $g \in G$ [20，推论 2.2.3]。

定理 4.5 有如下导出细化。

定理 4.6。 若 R 如定理 *4.5* 所述，且 C 是分次 R-模的上链复形，则

$$\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(C)^* \cong \mathbb{R}\mathit{Hom}(C, \omega_R)[N]$$

in the derived category $\mathcal{D}(R\text{-}\mathbf{grMod})$.

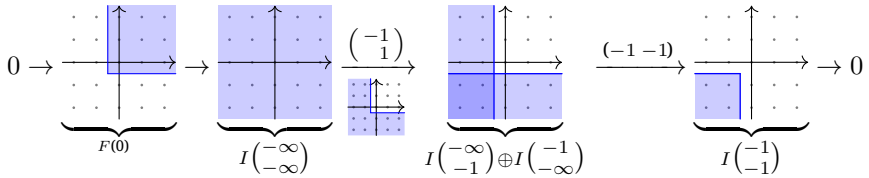


图 8： $F(\mathbf{0})$ 的增广内射分解 $J \coloneqq (\Omega F(\mathbf{1}))^*$。中间箭头下方的图示呈现了该态射的像。

Regarding a graded R-module M as a cochain complex concentrated in a single degree, we obtain Theorem 4.5 from Theorem 4.6 by taking dth cohomology:

$$H_{\mathfrak{m}}^{N-d}(M)^* \overset{\text{def.}}{=} H^{N-d}(\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M))^* \overset{(14)}{\cong} H^{d-N}\big(\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)^*\big) = H^d\big(\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)^*[-N]\big)$$
$$\overset{\text{Theorem 4.6}}{\cong} H^d\big(\mathbb{R}\mathsf{Hom}(M,\omega_R)\big) \overset{\text{def.}}{=} \mathsf{Ext}^d(M,\omega_R).$$

注 4.7。 定理4.6 的非分次版本见 [22, 第 278]页。我们的定理 4.5 明确出现在 Goto 和 Watanabe 的工作中 [20, 定理 2.2。2]。虽然定理 4.6 的分次版本似乎尚未见于文献，但不难验证， [20, 定理 2.2。2] 的证明事实上建立了定理 4.6。

与定理 3.8 的关系 我们现在解释如何从定理 4.6 得到定理 3.8。在我们的情形中 [参见 9，例 14.5。18],环 $R = \Bbbk[x_1,\dots,x_N]$ 是 $\mathbf{Z}^N$-分次局部环，且具有 $\mathfrak{m} = (x_1,\dots,x_N)$。环 R 是维数为 N [9,的分次 Gorenstein 环17]例 14.5。 R 的（Krull）维数至少为 N，这一点可由序列$0 \subset (x_1) \subset (x_1,x_2) \subset \cdots$看出。 R的（内射）维数至多为 N，这一点可由内射分解 $J \coloneqq (\Omega F(\mathbf{1}))^*$看出，其中 $\Omega F(\mathbf{1})$ 是定理 3.8 的证明中的复形；见图 8 [参见 32，定理 12。11]。由于 Krull 维数和内射维数必须相等，我们得到 R 的维数为 N。

利用该分解 J，我们还可以看出 R 具有对偶化模

$$\omega_R = H_{\mathfrak{m}}^N(R)^* = H^N(\Gamma_{\mathfrak{m}}(J))^* = F(\mathbf{1}).$$

我们将证明，如果 C 最终消失，那么 $\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(C) \cong C$ 在 $\mathcal{D}(\mathbf{Z}^N$-**分次模**中成立。为此，我们需要以下内容。对于分次模 M，回顾式（M 8）中的链复形 ΩM。这里，我们将 Ω 视为集中在 $\mathbf{0}\,N$，.....，$^{p}M = \bigoplus_{Q\in}$次的上链复形，使得 $\Omega^{[\![N]\!]}_{p}\,(_Q\,M)$ 余极限。

˜对于上链复形 C，令 ΩC 为 ΩC的全复形。由于 Ω 是由余极限函子构成的链˜复形，函子 Ω: **Ch**(R-**分次模**) $\to$ **Ch**(R-**分次模**) 是正合的˜，因此给出了 $\mathcal{D}(R$-**分次模**)的一个自函子。注意，ΩC 是 C 与ˇ*Cech* 复形 $\Omega F(\mathbf{0})$的链复形张量积，其中后者是由平坦模组成的上链复形。

Lemma 4.8. *The endofunctors* $\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}$ *and* $\tilde{\Omega}$ *of* $\mathcal{D}(R$-**grMod**$)$ *are naturally isomorphic.*

Proof. We establish a natural isomorphism $\Gamma_{\mathfrak{m}}(J) \cong \tilde{\Omega}J$ for every injective J in R-**grMod**. Given this, it follows that $\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}} \cong \mathbb{R}\tilde{\Omega} \cong \tilde{\Omega}$ in $\mathcal{D}(R$-**grMod**$)$; the first isomorphism holds because we can compute right derived functors via injective resolutions and the second isomorphism follows from exactness of $\tilde{\Omega}$.

Recall that (the persistence module corresponding to) an indecomposable graded injective R-module J is of the form $J = I(z)$ for some $z \in \overline{\mathbf{Z}}^N$. Let $Q = \{i \mid z_i = \infty\}$. Every element of J is x_i-torsion precisely for the $i \notin Q$. This implies that $\Gamma_{\mathfrak{m}}(J) = J$

if $Q = \emptyset$ and $\Gamma_{\mathfrak{m}}(J) = 0$ otherwise. On the other hand, for $S \subseteq [\![N]\!]$, we also obtain $\Omega_S J = J$ if $S \subseteq Q$, and zero otherwise. Therefore,

$$\tilde{\Omega}J = \Big[0 \to J \to \bigoplus_{\binom{Q}{1}} J \to \cdots \to \bigoplus_{\binom{Q}{N}} J \to 0\Big].$$

通过写出显式的收缩，可以轻易验证该复形是可缩的˜ ˜若 $Q \neq \emptyset$, 而对于 $Q = \emptyset$，我们得到 $\Omega J \cong J$。这表明，对于所有不可分解内射对象 J， $\Gamma_{\mathfrak{m}}(J) \cong \Omega J$ ；由于这里的函子是可加的，因此对所有内射模也成立。该同构的自然性源于整个证明都是函子性的。

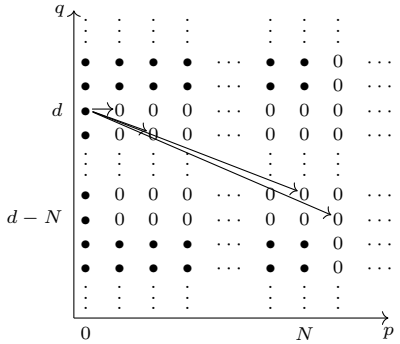
□

命题 4.9. 若 $C \in \mathbf{Ch}(R\text{-}\mathbf{grMod})$ 是一个上链复形，且 $H^{d-N}(C) \ldots, H^d(C)$ 最终都消失，那么由自然包含 $\Gamma_{\mathfrak{m}} C \hookrightarrow C$ 诱导的自然映射 $H^d(\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(C)) \to H^d(C)$ 是一个同构。

˜证明。由引理 4.8，我们有 $\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(C) \cong \Omega C = \mathsf{tot}(X)$，其中 X 是满足 $X^{pq} = \Omega^p C^q$ 的双复形。由于 X 是一个双复形，它有一个相关的X 的谱序列 E，其零页为 $\mathsf{E}_0^{pq} = X^{pq}$，并收敛到 $H^\bullet(\mathsf{tot}(X)) \cong H^\bullet(\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}} C)$ [38,§5.6]。具体而言，这意味着对于每个 d，模 $H^d(\mathsf{tot}(X))$ 都有一个穷尽过滤

$$\cdots \subseteq F^{p-1} \subseteq F^p \subseteq F^{p+1} \subseteq \cdots \subseteq H^d(\mathrm{tot}(X))$$

使得 $F^p/F^{p-1} \cong \boldsymbol{E}_\infty^{p,d-p}$。$\boldsymbol{E}$的第一页为 $\boldsymbol{E}_1^{pq} = H^q(\Omega^p C) \cong \Omega^p H^q(C)$，后一个同构由函子 Colim_Q 的正合性推出。由于 $H^q(C)$ 对 $q = d-N$、.....、d 最终消失，因此在第 $r \geq 1$ 页中，对于 $p > 0$ 和 $q = d-N$、.....、d，有 $\boldsymbol{E}_r^{pq} = 0$。换言之， $r \geq 1$ 的 $\boldsymbol{E}_r^{pq}$ 具有如下形式



其中箭头表示微分 $d_r^{0,d}: \mathsf{E}_r^{0,d} \to \mathsf{E}_r^{r,d-r+1}$，对于 $r \geq 1$，它们从 $\mathsf{E}_r^{0,d}$ 出发。由于 $\mathsf{E}_r^{r,d-r+1} = 0$ 对所有 $r \geq 1$ 都成立，微分 $d_r^{0,d}$ 对 $r \geq 1$ 也均为零，因为它们的余域为零。因此，项 $\mathsf{E}_r^{0,d}$ 自第一页起保持不变，所以 $\mathsf{E}_\infty^{0,d} = \mathsf{E}_1^{0,d} = \Omega^0 H^d(C) = H^d(C)$，且对所有 $p \geq 0$，$\mathsf{E}_\infty^{p,d-p} = 0$。由 E 的收敛性可得， $H^d(\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}} C)$ 有一个过滤，其子商同构于 $\mathsf{E}_\infty^{p,d-p}$ 模，对于 $p \in \mathbb{Z}^2$。其中，$\mathsf{E}_\infty^{0,d} = H^d,(C)$ 是唯一非零的一项，这表明 $H^d(\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}(C)) \cong H^d(\mathsf{tot}(X)) \cong H^d(C)$。

Now, let X' be the complex C, considered as double complex concentrated in the column $p = 0$. There is a morphism $\phi\colon X \to X'$ of double complexes. Let $\boldsymbol{E}'$ be defined analogously to $\boldsymbol{E}$ for X'. The morphism ϕ induces a morphism $\tilde{\phi}\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ of spectral sequences, which converges to the morphism $H^d(\mathrm{tot}(\phi))\colon H^d(\Gamma_m(C)) \to H^d(C)$. By the above reasoning, $H^d(\mathrm{tot}(\phi))$ is an isomorphism. □

To derive Theorem 3.8(*i*), let C be a chain complex with $H_d(C) \ldots, H_{d+N}(C)$ eventually vanishing; with cohomological indexing, this means that $H^{-d-N}(C) \ldots, H^{-d}(C)$

eventually vanish. As Proposition 4.9 yields an isomorphism $H^{-d}(\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}C) \cong H^{-d}(C)$, we obtain

$$H_{d+N}(\nu C) \overset{\text{def.}}{=} H_{d+N}((C^\dagger)^*) = H^{d+N}(C^\dagger)^* \overset{\text{Prop. 4.4}}{=} H^d\big(\mathbb{R}\mathit{Hom}(C,R)[N]\big)^* \overset{\text{Thm. 4.6}}{\cong} H^d((\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}C)^*)^* \cong H_d(\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}C) \overset{\text{Prop. 4.9}}{\cong} H_d(C), \quad (15)$$

这给出了定理 3.8(i)。如果 $H_d(C)$ 对所有 d都最终消失，那么同样对平移 $[-N]$采用上同调指标，我们得到

$$\nu C[-N] = (C^\dagger[N])^* \overset{\text{Prop. 4.4}}{=} \mathbb{R}\mathit{Hom}(C,R)[N]^* \overset{\text{Thm. 4.6}}{\cong} \mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}C \overset{\text{Prop. 4.9}}{\cong} C, \quad (16)$$

这给出了定理 3.8(ii)。

4.3 分次 Greenlees–May 对偶

Greenlees–May 对偶 [21] 是 Grothendieck 局部对偶的广泛推广；关于非分次情形的概述，见 [18] 。为解释分次情形，设R 是一个 G-分次环，且 $\mathfrak{a}$ 是 R的一个分次理想。定义分次 $\mathfrak{a}$-进完备 函子 $\Lambda^{\mathfrak{a}}\colon R\text{-}\mathbf{grMod} \to R\text{-}\mathbf{grMod}$，其中 $\Lambda^{\mathfrak{a}}(M)$ 是其分次分量为 $\Lambda^{\mathfrak{a}}(M)_g = \lim_i M_g/(\mathfrak{a}^i M)_g$的模， $g \in G$ [30, §4.1]。 $\Lambda^{\mathfrak{a}}$的导出函子$H^{\mathfrak{a}}_d(M) := H_d(\mathbb{L}\Lambda^{\mathfrak{a}}(M))$ 是 M的第 d个局部同调 。

注 4.10。虽然子模 $\Gamma_{\mathfrak{a}}M \subset M$ 从 M继承了等级，但分次完备化 $\Lambda^{\mathfrak{a}}M$ 通常只是非分次完备化 $\Lambda^{\mathfrak{a}}M$ 的一个子模：$=\lim_i M/\mathfrak{a}^i M$。例如，环 $R = \Bbbk[x_1,\dots,x_N]$（带有 $\mathbb{Z}^N$-等级）视为自身上的模时，关于极大理想 $\mathfrak{m} =(x_1,\dots,x_N)$的分次完备化为 $\Lambda^{\mathfrak{m}}(R) = R$ ，而其非分次完备化 $\Lambda^{\mathfrak{m}}(R) = \Bbbk[\![x_1,\dots,x_N]\!]$是关于 x_1、…、 x_N [17, p. 181；30，例 4.1]的形式幂级数环。

分次 Greenlees–May 对偶定理现在表述如下的、介于 $\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 和 $\mathbb{L}\Lambda^{\mathfrak{a}}$之间的富化伴随：

定理 4.11 (分次 Greenlees–May 对偶 [30, §5-6])。 对于上述的 R 和 $\mathfrak{a}$ 以及 $\mathbf{Ch}(R\text{-}\mathbf{grMod})$ 中的有界上链复形 C 和 D ，存在一个自然同构

$$\mathbb{R}\mathit{Hom}(\mathbb{R}\Gamma_{\mathfrak{a}}(C), D) \cong \mathbb{R}\mathit{Hom}(C, \mathbb{L}\Lambda^{\mathfrak{a}}(D))$$

在 $\mathcal{D}(R\text{-}$**分次模**$)$。

非分次版本见 [21； 18]。我们可以从定理 4.6）推出 Grothendieck 局部对偶（定理 4.11 [30, 推论 5。5]。现在，我们在具体设定中解释这一点，其中 $R = \Bbbk[x_1,\dots,x_N]$ 和 $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$。令 $D = I(0)$，视为集中在零次的上链复形。

为证明 $\mathbb{L}\Lambda^{\mathfrak{m}}(D) \cong R$，我们需要以下结果。若一个上链复形$P \in \mathbf{Ch}(R$-**分次模**$)$上的函子是 K-平坦 ，则称其为 K-平坦，

$$P \otimes -\colon \mathbf{Ch}(R\text{-}\mathbf{grMod}) \to \mathbf{Ch}(R\text{-}\mathbf{grMod})$$

是正合的，其中 $\otimes$ 表示上链复形的张量积。平坦模的有界上链复形是 K-平坦 [34, p. 35]. 若 P 是与复形 D准同构的 K-平坦上链复形，则在 $\mathcal{D}(R$-**分次模**$)$[34, 命题 3.6][1] 中有 $\mathbb{L}\Lambda^{\mathfrak{m}}(D) \cong \Lambda^{\mathfrak{m}}(P)$。因此，要计算 $\mathbb{L}\Lambda^{\mathfrak{m}}(I(0))$，只需将 $\Lambda^{\mathfrak{m}}$ 应用于平坦分解

$$\Omega F(0)\colon \qquad 0 \to F(\underbrace{\tilde{e}_{[\![N]\!]}}_{\mathbf{1}}) \to \cdots \to \bigoplus_{S\in\binom{[\![N]\!]}{d}} F(\tilde{e}_S) \to \cdots \to F(\underbrace{e_\emptyset}_{-\infty})$$

[1] the proof for the ungraded case given in [34] applies verbatim to the graded case.

of $I(0)$, where $(\tilde{e}_S)_i = 1$ if $i \in S$, and $(\tilde{e}_S)_i = -\infty$ otherwise. From Remark 4.10, we get

$$\Lambda^{\mathfrak{m}}(F(e_{[\![N]\!]})) = \Lambda^{\mathfrak{m}}(F(\mathbf{1})) \cong F(\mathbf{1}).$$

对于 $S \neq [\![N]\!]$，可以验证 $\mathfrak{m}F(\tilde{e}_S) = F(\tilde{e}_S)$，因此 $\Lambda^{\mathfrak{m}}(F(\tilde{e}_S)) = 0$。综上可得 $\mathbb{L}\Lambda^{\mathfrak{m}}(I(0)) \cong F(\mathbf{1})[-N]$ 作为链复形成立，由此证明了定理4.6。

5 最终无挠条件

在最后这一节中，我们将详细讨论定理1.3中的条件：要求模 $H_d(C) \ldots, H_{d+N}(C)$最终消失，以获得同构$H_d(C) \cong H^{d+N}(C^\dagger)$。具体而言，我们给出一个例子来说明这一条件是必要的，并证明该条件在实践中并不构成限制。

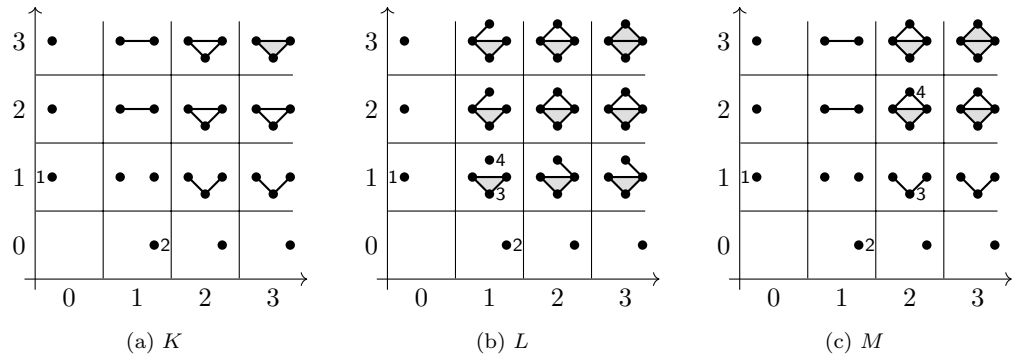
5.1 最终无挠条件的必要性

在单参数情形中，即使 $H_\bullet(K)$ 不最终消失， $H^\bullet(K)$ 和 $H^\bullet(C_\bullet(K)^\dagger) = H^\bullet(\cup K, K)$ 仍能唯一地相互确定；参见定理 1.1。然而，对于双参数情形，即使 $C = C_\bullet(K)$ 来自单纯滤过 K，且 $H_d(C)$ 和 $H^{d+2}(C^\dagger)^*$ 具有相同的 Hilbert 函数，定理 1.3 中相应的前置条件也不能省略。

例 5.1。设 $\Bbbk = \mathsf{F}_2$，并设 K、L 和 M 为图 9 中的单临界单纯滤过。我们得到 $H_0(K)$、$H_0(L)$ 和 $H_0(M)$ 的最小自由表示，如表 1 上排所列；其中，我们用表示生成元和关系的链及其等级来标注表示矩阵的行和列。类似地，我们得到模 $H^2(C_\bullet(K)^\dagger)$、$H^2(C_\bullet(L)^\dagger)$ 和 $H^2(C_\bullet(M)^\dagger)$ 的最小自由表示；见表 1 下排。关于这些模的示意图，另见图 10。注意，三个模 $H_0(-)$ 具有相同的 Hilbert 函数，三个模 $H^2(C_\bullet(-)^\dagger)$ 也具有相同的 Hilbert 函数。

我们看到，$H_0(K) \cong H_0(M)$，但 $H^2(C_\bullet(K)^\dagger) \ncong H^2(C_\bullet(M)^\dagger)$，因为前者不可分解，而后者可分解。类似地，$H^2(C_\bullet(L)^\dagger) \cong H^2(C_\bullet(M)^\dagger)$，但出于同样的原因，$H_0(K) \ncong H_0(L)$。

Similarly, one can show that $C_\bullet(K)$ and $C_\bullet(\cup K, K)$ do not determine each other uniquely in the two-parameter case; see [25, §4.6].

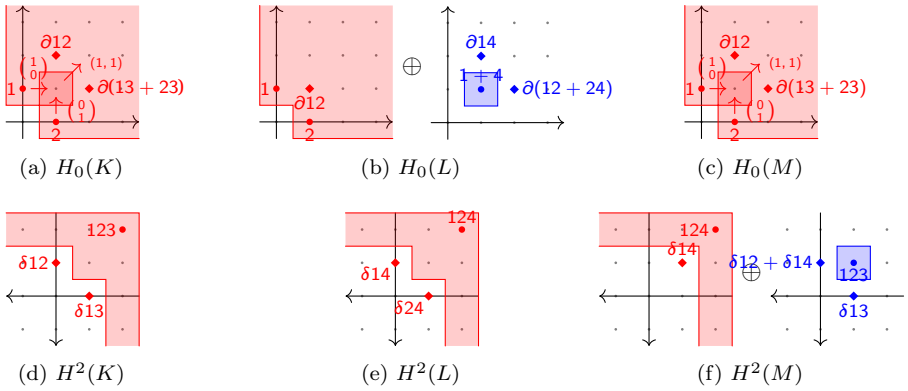


(a) K (b) L (c) M

Figure 9: The simplicial $\mathbf{Z}^2$-filtrations used in Example 5.1. The inclusions go rightward and upward. Since we consider reduced homology, all complexes contain an additional vertex not shown.

Table 1: Minimal free presentations of the homology and cohomology of the simplicial filtrations from Fig. 9. For the grades, we write $\bar{\imath}$ for $-i$. The basis element of $C_\bullet(-)^\dagger$ dual to the simplex σ is also denoted by σ.

	K	L	M
$H_0(-)$	$\begin{array}{c} \\ 1\ (01) \\ 2\ (10) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 12 & 13{+}23 \\ (02) & (20) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{c} \\ 1\ \ (01) \\ 2\ \ (10) \\ 1{+}4\ (11) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 12 & 14 & 12{+}24 \\ (11) & (02) & (20) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{c} \\ 1\ (01) \\ 2\ (10) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 12 & 13{+}23 \\ (02) & (20) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$
$H^2(C_\bullet(-)^\dagger)$	$\begin{array}{c} \\ 123\ (\bar{3}\bar{3}) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 12 & 13 \\ (\bar{1}\bar{2}) & (\bar{2}\bar{1}) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{c} \\ 124\ (\bar{3}\bar{3}) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 14 & 24 \\ (\bar{1}\bar{2}) & (\bar{2}\bar{1}) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{c} \\ 124\ (\bar{3}\bar{3}) \\ 123\ (\bar{2}\bar{2}) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 14 & 12{+}14 & 13 \\ (\bar{2}\bar{2}) & (\bar{1}\bar{2}) & (\bar{2}\bar{1}) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$



(a) $H_0(K)$ (b) $H_0(L)$ (c) $H_0(M)$

(d) $H^2(K)$ (e) $H^2(L)$ (f) $H^2(M)$

Figure 10: The modules $H_0(-)$ and $H^2(C_\bullet(-)^\dagger)$ for the simplicial filtrations from Fig. 9. Every $\bullet$ represents one generator of $H_0(-)$, and every $\blacklozenge$ represents a relation imposed by a (co)boundary. For the cohomology modules, the axes are drawn downward for better comparability, and the generator labeled, e.g., "123" really means the basis element of $C_\bullet(K)^\dagger$ of grade $\mathbf{1} - g(123)$ corresponding to the simplex 123.

5.2 构造 C 最终无环

给定由有限总秩的自由 Z^N-持久模构成的链复形 C，我们现在构造一个最终无环的链复形 C，使得 C 是沿偏序集映射 $r\colon \mathsf{Z}^N \to \mathsf{Z}^N$ 对 C 作限制所得。由于沿 r 作限制定义了 Z^N-pers 上的一个正合自函子，因此对于任意 d，$H_d(C)$ 也是沿 r 对 $H_d(\hat{}C)$ 作限制所得；对 $H_d(C)$ 和 $H_d(\hat{}C)$ 的（极小）自由分解，结论也类似；见命题 5.7。我们利用这一点证明推论 1.6，它是配套工作 [2] 中计算极小自由分解的算法的理论基础。

定义 5.2。 一个双复形 是一个以$\mathbf{Z}^2$为指标的模系统 C，其中模为 C_{ij}，带有水平 和 垂直 边界映射 $\partial^{\mathrm{h}}_{ij}\colon C_{ij} \to C_{i-1,\,j}$ 以及 $\partial^{\mathrm{v}}_{ij}\colon C_{ij} \to C_{i,\,j-1}$，满足

$$\partial^{\mathrm{h}}_{i-1,j}\partial^{\mathrm{h}}_{ij} = 0, \qquad \partial^{\mathrm{v}}_{i,j-1}\partial^{\mathrm{v}}_{ij} = 0, \qquad \partial^{\mathrm{h}}_{i,j-1}\partial^{\mathrm{v}}_{ij} = \partial^{\mathrm{v}}_{i-1,j}\partial^{\mathrm{h}}_{ij}.$$

双复形的全复形 C 是链复形 $\operatorname{tot} C$，其中 $(\operatorname{tot} C)_d = \bigoplus_{i+j=d} C_{ij}$，边界态射为 $\partial_d^{\operatorname{tot} C} = \sum_{i+j=d} \partial^{\mathrm{h}}_{ij} + (-1)^i \partial^{\mathrm{v}}_{ij}$。

例 5.3. 对于一个由有限秩自由模构成的链复形 C，定理 C 3.8 的证明中构造的 Ω 是一个双复形。其全复形有自然态射$C \leftarrow \operatorname{tot}(\Omega C)[N] \xrightarrow{\simeq} \nu C[N]$，其中后一个是拟同构。定理 3.8 表明，若 C 最终无环，则第一个映射也是拟同构。

定义 5.4. 链复形 C 的锥 记为 $\operatorname{cone} C$，它是双复形 $0 \to C \xrightarrow{\mathrm{id}} C \to 0$ 的全复形，右侧 C 位于（水平）次数零。具体地，我们有 $(\operatorname{cone} C)_d = C_d \oplus C_{d-1}$，以及 $\partial_d^{\operatorname{cone} C} = \left(\begin{smallmatrix} \partial_d & \mathrm{id} \\ 0 & -\partial_{d-1} \end{smallmatrix}\right)$。它是一个可缩链复形，并带有自然包含 $C \hookrightarrow \operatorname{cone} C$；见 [38, 练习 1.5.1]。

“锥”这一名称源于这样一个事实：如果 K 是一个单纯复形，那么 $\operatorname{cone} C_\bullet(K) \cong C_\bullet(K * \{\mathrm{pt}\})$，其中 $*$ 表示单纯复形的连接。

在本节余下部分中，设 C 是由自由 $\mathbf{Z}^N$-持久模构成的有限总秩链复形。$\hat{}C$ 的定义取决于向量 $\zeta \in \mathbf{Z}^N$的选择。$\hat{}$ 该构造使得 C 和 C 在指标 $z \le \zeta$ 上的限制相等，而 $\hat{}C$ 在指标 $z \not\le \zeta$ 上的限制是无挠的。我们首先考虑 ζ的任意选择，以强调该构造的函子性，并阐明 $\hat{}\,\hat{}$ 的哪些性质 C 对任意 ζ都成立。然而，要从 C 恢复 C，最终我们需要满足 $\zeta \ge \bigvee_d \bigvee \operatorname{rk} C_d$；见下文命题 5.7。

对于 $S \subseteq [\![N]\!]$，定义正合函子 $P_S\colon \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers} \to \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers}$如下

$$(P_S M)_z \coloneqq \begin{cases} M_z & \text{if } z_i > \zeta_i \text{ for all } i \in S, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

配备显然的结构映射。注意，$P_\emptyset$ 是恒等函子，并且对于 $S \neq \emptyset$，将 P_S限制到指标 $z \le \zeta$上得到零。对于 z，$z' \in \mathbf{Z}^N$，令 $z \vee_S z'$为满足 $(z \vee_S z')_i = \max\{z_i, z_i'\}$（若 $i \in S$）且在其他情况下为 z_i 的向量。若 M 是自由的，则 $P_S M$ 也是自由的，且

$$\operatorname{rk} P_S M = \{z \vee_S (\zeta + \mathbf{1}) \mid z \in \operatorname{rk} M\}. \tag{17}$$

对于 $S' \supseteq S$，我们有典范嵌入 $c_{S,\,S'}\colon P_{S'}M \hookrightarrow P_S M$。按照通常的符号规则，这些嵌入构成一个链复形 PM，其 $P_d M \coloneqq \bigoplus_{S \in \binom{[\![N]\!]}{d}} P_S M$。

Definition 5.5. Let $\hat{C}$ be the total complex of the double complex PC.

Explicitly, this means that the components of $\hat{C}$ are given by

$$\hat{C}_d \coloneqq \bigoplus_{\emptyset \subseteq S \subseteq [\![N]\!]} P_S C_{d-|S|}.$$

Note that there is a canonical inclusion $p\colon C \hookrightarrow \hat{C}$.

命题 5.6.

(*i*) 链复形 $\hat{}C$ 是一个由自由模组成的最终无挠链复形。

(*ii*) 我们有 $|\mathrm{rk}\,\hat{}C_d| = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} |\mathrm{rk}\; C_{d-i}|$。因此，对于常数 N，我们有

$$\sum_d |\mathrm{rk}\,\hat{C}_d| = \mathcal{O}\Big(\sum_d |\mathrm{rk}\,C_d|\Big).$$

证明。 对于 $z \in \mathbf{Z}^N$，我们将 $(\hat{}C)_z$ 记作向量空间链复形

$$\cdots \xrightarrow{(\partial_3^{\hat{C}})_z} (\hat{C}_2)_z \xrightarrow{(\partial_2^{\hat{C}})_z} (\hat{C}_1)_z \xrightarrow{(\partial_1^{\hat{C}})_z} (\hat{C}_0)_z.$$

为证明 (*i*)，注意到对于 $z \not\leq \zeta$， P_S 的定义给出

$$(\hat{C})_z = \mathrm{tot}\big(\textstyle\bigoplus_{S\in\binom{U}{|U|}}(C)_z \to \cdots \to \bigoplus_{S\in\binom{U}{0}}(C)_z\big)$$

其中 $U = \{i \mid z_i \geq \zeta_i\}$，最后一项的（水平）次数为零。可以验证

$$(\hat{C})_z = \mathrm{cone}\big(\cdots(\mathrm{cone}\,C)\cdots\big),$$

借助 $|U|$ 迭代锥运算。特别地，$(\hat{}C)^z$ 是一个锥，因此是无挠的。因此，$\hat{}C$ 最终无环。陈述 (*ii*) 由构造显然成立。 □

为了从 $\hat{}C$恢复 C，我们定义函子 $R\colon \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers} \to \mathbf{Z}^N\text{-}\mathbf{pers}$为

$$(RM)_z \coloneqq M_{z\wedge\zeta},$$

其中 $\wedge$ 表示逐分量最小值，而结构映射 RM 是显然的那些。[2] 注意， R 是沿着非内射偏序集映射 $r\colon \mathbf{Z}^N \to \mathbf{Z}^N$、 $z \mapsto z \wedge \zeta$的限制（即预合成），因此 R是正合的。此外，容易验证，对于任意 $z \in \mathbf{Z}^N$，我们有

$$RF(z) = \begin{cases} F(z) & \text{if } z \leq \zeta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{18}$$

命题 5.7。设 $\zeta \geq \bigvee_d \bigvee \mathrm{rk}\; C_d$。则

(*i*) $C \cong R\,\hat{}C.$ (*ii*) $RH_d(C) \cong H_d(C)$ 对所有 d均成立。 (*iii*) 若 G 是 $H_d(C)$的一个（极小）自由分解，则 RG 是$H_d(C)$的一个（极小）分解。

Proof. By construction, C is obtained from $\hat{C}$ by dropping all free summands $F(z)$ from $\hat{C}$ with $z \not\leq \zeta$, so (18) implies that $C = R\hat{C}$, which establishes (*i*). By exactness of R, we get $H_d(C) = H_d(R\hat{C}) \cong RH_d(\hat{C})$, yielding (*ii*). Exactness of R also shows that R sends free resolutions to free resolutions. Also, (18) implies that R sends homological balls either to homological balls, or to zero. Therefore, R preserves minimal free resolutions, which establishes (*iii*). □

[2] This functor also appears in [31, Definition 2.7], where it is called P_ζ.

Example 5.8. Let $N = 2$ and C be a chain complex of $\mathbf{Z}^2$-persistence modules C_d of finite total rank, and let $\zeta \geq \bigvee \operatorname{rk} C_d$ for all d. Then $\hat{C}$ is the chain complex of free $\mathbf{Z}^2$-persistence modules with

$$\hat{C}_d = C_d \oplus P_{\{1\}}C_{d-1} \oplus P_{\{2\}}C_{d-1} \oplus P_{\{1,2\}}C_{d-2}, \quad \hat{\partial}_d = \begin{pmatrix} \partial_d^C & \mathrm{id}_{C_{d-1}} & \mathrm{id}_{C_{d-1}} & \\ & -\partial_{d-1}^C & & \mathrm{id}_{C_{d-2}} \\ & & \partial_{d-1}^C & -\mathrm{id}_{C_{d-2}} \\ & & & \partial_{d-2}^C, \end{pmatrix}$$

where $P_S C_d$ is free of rank $\{z \vee_S (\zeta + \mathbf{1}) \mid z \in \operatorname{rk} C_d\}$. It is eventually acyclic because

$$\hat{C}_z = \begin{cases} C_z & \text{if } z \leq \zeta, \\ \operatorname{cone}(C_z) & \text{if } |\{i \mid z_i > \zeta_i\}| = 1, \\ \operatorname{cone}(\operatorname{cone}(C_z)) & \text{if } |\{i \mid z_i > \zeta_i\}| = 2, \end{cases}$$

and $\hat{C}$ satisfies $H_d(C) = RH_d(\hat{C})$.

Proof of Corollary 1.6. If C is a chain complex of finite total rank and G is a minimal free resolution of $H^{d+N}(\hat{C}^\dagger)$, then Corollary 1.5 implies that $G[N]^\dagger$ is a MFR of $H_d(\hat{C})$. Thus, by Proposition 5.7, $R(G[N]^\dagger)$ is a minimal resolution of $H_d(C)$. □

References

[1] Ulrich Bauer. “Ripser：高效计算 Vietoris–Rips 持久性条形码”。载于：J. Appl. Comput. Topol. 5 (2021)，第391–423页。 DOI：10.1007/s41468-021- 00071-5。[2] Ulrich Bauer、Fabian Lenzen 和 Michael Lesnick. 一种用于双参数持久性的高效上同调算法。准备中。[3] Ulrich Bauer、Fabian Lenzen 和 Michael Lesnick. “通过上同调进行高效的双参数持久性计算”。载于：第39届国际计算几何研讨会（SoCG 2023）。Erin W. Chambers 和 Joachim Gudmundsson 编。莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs）258。Dagstuhl：Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2023，15:1–15:17。DOI：10.4230/LIPIcs.SoCG.2023.15。[4] Ulrich Bauer 和 Maximilian Schmahl. “持久同调中的寿命函子与自然对偶性”。载于：Homology Homotopy Appl. 25.2 (2023)，第297–327页。 DOI：10.4310/hha.2023.v25.n2.a13。[5] Ulrich Bauer 等。“PHAT——持久同调算法工具箱”。载于：Journal of Symbolic Computation 78 (2017)，第76–90页。 DOI：10.1016/j.jsc.2016.03.008。软件见 https://bitbucket.org/phat-code/phat。[6] Andrew J Blumberg 和 Michael Lesnick. “双参数持久同调的稳定性”。载于：Foundations of Computational Mathematics 24.2 (2024)，第385–427页。 DOI：10.1007/s10208-022-09576-6。[7] Magnus Bakke Botnan 和 William Crawley-Boevey. “持久模分解”。载于：美国数学会会刊 148.11 (2020)，第4581–4596页。 DOI：10.1090/proc/14790。[8] Magnus Bakke Botnan 和 Michael Lesnick.《多参数持久性的导论》。载于：《代数表示及相关结构》。Aslak BakkeBuan、Henning Krause 和 Øyvind Solberg 编。EMS Congress Reports 系列第19卷。EMS Press，2023，第77–150页。 DOI：10.4171/ecr/19/4。

[9] M. P. Brodmann 和 R. Y. Sharp.《局部上同调：代数入门与几何应用》。第2版。剑桥高等数学研究丛书136。剑桥：剑桥大学出版社，2012。 DOI: 10.1017/CBO9781139044059。[10] Winfried Bruns 和 H. J¨urgen Herzog.《科恩–麦考利环》。第2版。剑桥高等数学研究丛书39。剑桥大学出版社，1998。 DOI: 10.1017/CBO9780511608681。[11] Gunnar Carlsson 和 Afra Zomorodian. “多维持久性的理论”。载于：离散与计算几何 42 (2009)，第71–93页。 DOI: 10.1007/s00454-009-9176-0。[12] Chao Chen 和 Michael Kerber. “利用扭转计算持久同调”。载于：第27届欧洲计算几何研讨会。2011。 URL: https: // eurocg11.inf.ethz.ch/abstracts/22.pdf。[13] Vin de Silva、Dmitriy Morozov 和 Mikael Vejdemo-Johansson. “持久（上）同调中的对偶性”。载于：Inverse Problems 27 (2011)，第124003页。 DOI: 10. 1088/0266-5611/27/12/124003。[14] W.G. Dwyer 和 J. Spalinski. “同伦论与模型范畴”。载于：《代数拓扑手册》。Ioan Mackenzie James 编。阿姆斯特丹、纽约：Elsevier Science B.V，1995。 ISBN: 978-0-444-81779-2。[15] Herbert Edelsbrunner 和 John Harer. “持久同调——综述”。载于：《离散与计算几何综述：二十年后》。Jacob E. Goodman、J´anos Pach 和 Richard Pollack 编。当代数学453。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学会，2008，第257–282页。DOI: 10.1090/conm/453/08802。[16] Edelsbrunner、Letscher 和 Zomorodian. “拓扑持久性与简化”。载于：离散与计算几何 28 (2002)，第511–533页。 DOI: 10.1007/s00454-002-2885-2。[17] David Eisenbud.《交换代数》。数学研究生教材150。纽约：Springer New York，1995。 DOI: 10.1007/978-1-4612-5350-1。[18] Hossein Faridian. “简明介绍 Greenlees–May 对偶”。载于：Surveys in Mathematics and its Applications 14 (2019)。 ISSN: 1842-6298。 URL: https://www.utgjiu. ro/math/sma/v14/p14_02.pdf。[19] Ulderico Fugacci、Michael Kerber 和 Alexander Rolle. “二参数持久同调的压缩”。载于：计算几何 109 (2023)，第101940页。DOI: 10.1016/j.comgeo.2022.101940。[20] Shiro Goto 和 Keiichi Watanabe. “论分次环，II（Z^n-分次环）”。载于：东京数学杂志 1.2 (1978)。 DOI: 10.3836/tjm/1270216496。[21] J. P. C Greenlees 和 J. P May. “I-进完备化和局部同调的导出函子”。载于：代数杂志 149.2 (1992)，第438–453页。 DOI: 10.1016/0021- 8693(92)90026-I。[22] Robin Hartshorne.《留数与对偶》。关于 A. Grothendieck 研究工作的研讨会讲义，1963/64 年于哈佛大学开设。数学讲义20。柏林：Springer，1966。 ISBN: 3540036032。[23] Gregory Henselman-Petrusek. Eirene. 2021。 URL: https://github.com/Eetion/ Eirene.jl（访问于 02/08/2023）。[24] Woojin Kim 和 Facundo M´emoli. “动态度量空间的时空持久同调”。载于：离散与计算几何 66 (2021)，第831–875页。DOI: 10.1007/s00454-019-00168-w。

[25] Fabian Lenzen。《多参数持久性的计算方法》。博士论文。慕尼黑工业大学，2023年。156页。 URL: https://mediatum.ub. tum.de/?id=1713777.[26] Michael Lesnick 和 Matthew Wright。《计算二参数持久同调的极小表示与双分次贝蒂数》。发表于：SIAM应用代数与几何杂志 6（2022），第267–298页。 DOI: 10.1137/20M1388425。[27] Michael Lesnick 和 Matthew Wright。《二维持久模的交互式可视化》。2015年。arXiv: 1512.00180。由 RIVET 实现。2020年。 URL: https: //rivet.readthedocs.io/en/latest/about.html.[28] Hiroyoshi Matsumura。《交换环理论》。发表于：剑桥高等数学研究丛书 8。剑桥大学出版社，1987年。 DOI: 10 . 1017 / CBO9781139171762。[29] Ezra Miller。《具有实指数的多项式环上的本质分次代数》。发表于：数学进展 485（2026），第110682页。 DOI: 10.1016/j.aim.2025. 110682。[30] Ezra Miller。《分次 Greenlees–May 对偶与 Čech 包络》。载于《局部上同调及其应用》。Gennady Lybeznik 编。纯应用数学讲义 226。佛罗里达州博卡拉顿：CRC出版社，2002年，第233–253页。 DOI: 10.1201/9781482275766。[31] Ezra Miller。《Alexander对偶函子与具有单项式支撑的局部对偶》。发表于：代数杂志 1（2000），第180–234页。 DOI: 10.1006/jabr.2000. 8359。[32] Ezra Miller 和 Bernd Sturmfels。《组合交换代数》。数学研究生教材 227。纽约：Springer，2005年。 DOI: 10.1007/b138602。[33] Dmitriy Morozov。Dionysus 2：一款专注于持久同调的计算拓扑软件包。2014–2020年。 URL: http://www.mrzv.org/software/dionysus2。[34] Marco Porta、Liran Shaul 和 Amnon Yekutieli。《论完备化与挠的同调》。发表于：代数与表示论 17.1（2014），第31–67页。 DOI: 10.1007/s10468-012-9385-8。[35] N. Spalte nstein。《无界复形的分解》。发表于：Compositio Mathematica 65.2（1988），第121–154页。 ISSN: 1570-5846。[36] GUDHI项目。《GUDHI用户与参考手册》。GUDHI编辑委员会，2015年。 URL: http://gudhi.gforge.inria.fr。[37] Cary Webb。《分次模的分解》。发表于：美国数学会会刊 94（1985），第565–571页。 DOI: 10.2307/2044864。[38] Charles A. Weibel。《同调代数导论》。剑桥高等数学研究丛书 38。剑桥：剑桥大学出版社，2003年。 ISBN: 978-0-521-55987-4。[39] Amnon Yekutieli。《导出范畴》。剑桥高等数学研究丛书 183。剑桥大学出版社，2019年。 DOI: 10.1017/9781108292825。[40] Amnon Yekutieli。《导出范畴导论》。载于《交换代数与非交换代数几何》。David Eisenbud 等编。第1卷。MSRI出版物 67。剑桥大学出版社，2015年。 ISBN: 978-1-107-06562-8。[41] Afra Zomorodian 和 Gunnar Carlsson。《计算持久同调》。发表于：离散与计算几何 33（2005），第249–274页。 DOI: 10.1007/s00454- 004-1146-y。