arXiv:2603.18264v1 [math.RT] 18 Mar 2026

单模范畴上的子模分类

Hadi Salmasian、Alistair Savage 和 Yaolong Shen

摘要。我们研究幺半范畴上的模范畴的子模分类，将 Coulembier 关于幺半范畴中张量理想分类的思想加以拓展。我们建立了一个适用框架，用于研究配备扭曲圆柱扭结结构的模范畴；这一结构与扭曲反射方程和量子对称对密切相关。在较弱的假设下，我们证明模范畴 $\mathcal{M}$ 的子模与路径代数模 $\mathcal{M}(1,\ -)$的子模之间存在保序双射。我们证明这一对应与幂等完备化相容，并分析其在去范畴化到分裂格罗滕迪克群时的表现，从而给出依据不可分解对象进行分类的判据。作为应用，我们将无定向纽结图范畴视为定向 skein 范畴上的模范畴，描述其不可分解对象，并完整分类其子模。

目录

1. 引言 1
2. 圆柱扭转 3
3. 子模对应 9
4. 幂等完备化 12
5. 去范畴化映射 14
6. 宝塔 19
7. 无定向纽结图范畴中的不可分解对象 21
8. 无定向纽结图范畴的子模 26
参考文献 35

1. 引言

幺半范畴上的模范畴在现代表示论、范畴化和低维拓扑中发挥着核心作用。它们自然出现于许多不同的背景中，包括图示范畴的分圆商，例如 Brauer 范畴、Kauffman 范畴、Heisenberg 范畴及其量子类比，以及量子对称对上的模范畴。从结构角度看，模范畴为在张量范畴框架中编码边界条件、反射现象和对称性破缺提供了灵活的框架。

这一领域的一个基本问题是对给定模范畴的子模进行分类。这类问题与幺半范畴中的张量理想理论、图示范畴的结构理论以及对去范畴化不变量的分析密切相关。在幺半情形下，Coulembier [Cou18], 系统地研究了这一问题，并建立了刚性幺半范畴的张量理想与该幺半范畴路径代数上某个模的子模之间的强有力对应。这一对应将

2020 数学主题分类。 主要分类：18M15，18M30；次要分类：16D90，17B37。关键词和短语。 幺半范畴；模范畴；子模分类；辫化模范畴；张量理想；skein 范畴；量子对称对。

一个范畴分类问题化为一个更易处理的环论问题，此后已得到广泛应用。

本文受到以下方法的启发： [Cou18], 但我们的关注点有着根本性的不同。我们不再研究幺半范畴，而是研究幺半范畴上的模范畴。这一转变带来了诸多新的困难，因为模范畴缺少内部张量积，且 [Cou18]的方法无法直接应用。为适应这些思想，我们引入并系统研究配备了扭曲圆柱扭结的模范畴。这一结构推广了幺半范畴中扭结的概念，提供了恰到好处的额外相容性，从而恢复有用的图示演算，并将 Coulembier 的方法推广到模范畴的情形。这个概念与扭曲反射方程以及量子对称对理论中出现的结构密切相关 [BK19]。

第2 节至5节包含了本文最一般性的结果。在第2节中，我们回顾扭曲圆柱扭结的定义，并发展用于验证和构造此类扭结的一般工具，尤其关注刚性和带状情形。在第3 节中，我们建立主要结构性结果：在温和的假设下，模范畴 $\mathcal{M}$ 的子模与路径代数模 $\mathcal{M}(\mathbb{1}, -)$的子模之间存在保序双射。这一对应将 [Cou18] 的主要结果推广到了模范畴的情形。第4 节表明，这一对应与幂等完备化相容，因此可以在 Krull–Schmidt 情形下进行研究。在第5节中，我们研究到分裂格罗滕迪克群的去范畴化映射，并给出了一般判据，用以确定何时可以仅依据不可分解对象对子模进行分类。

在第6 节中，我们引入宝塔这一概念。宝塔是一种技术性结构，将模范畴与控制其张量理论行为的辅助数据结合起来。尽管具有一定技术性，宝塔提供了具体且可验证的条件，确保一般理论适用，并为子模带来强有限性和刚性结果。

最后，在第7 节和8节中，我们将本文发展的通用框架应用于无定向纽结图范畴$\mathcal{DS} = \mathcal{DS}(q,\ t)$。该范畴由 [SSS25], 引入，是定向 skein 范畴$\mathcal{OS} = \mathcal{OS}(q,\ t)$上的模范畴（也称为带框架的 HOMFLYPT skein 范畴），后者是 HOMFLYPT 链环不变量的基础。对于 $m,\ n \in \mathbb{N}$, $d = m - 2n$，我们有一个函子的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{DS}(q,q^d) \times \mathcal{OS}(q,q^d) & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{DS}(q,q^d) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{R}_{\mathcal{DS}} \times \mathbf{R}_{\mathcal{OS}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{R}_{\mathcal{DS}}} \\ \mathrm{U}_\sigma^\imath\text{-tmod} \times \mathrm{U}_\sigma\text{-tmod} & \xrightarrow{\otimes} & \mathrm{U}_\sigma^\imath\text{-tmod} \end{array}$$

其中 U_σ 是 $U_q(\mathfrak{gl}(m|2n))$，并带有一个图自同构 σ，而 $\mathrm{U}_\sigma^\imath = \mathrm{U}_\sigma^\imath(m|2n)$是一个余理想子代数（有时称为 i量子超代数），因此 $(\mathrm{U}_\sigma,\ \mathrm{U}_\sigma^\imath)$ 是一个 AI-II 型量子超对称对。水平箭头是模范畴作用，“-tmod”表示张量模范畴。SSS25，定理 8。1] 中已证明，函子

$$\mathbf{R}_{\mathcal{DS}} \colon \mathcal{DS}(q,q^d) \to \mathrm{U}_\sigma^\imath(m|2n)\text{-tmod} \tag{1.1}$$

is full. The results of the current paper allow us to say more. We describe the indecomposable objects of $\mathcal{DS}$, construct an explicit pagoda structure, and obtain a complete classification of its $\mathcal{OS}$-submodules. Precisely, in Corollary 8.12, we show that *every* $\mathcal{OS}$-submodule of $\mathcal{DS}$ is the kernel of (1.1) for some m, n, and these kernels form a strictly decreasing chain. In addition, each kernel is generated by a single idempotent. This allows us, in Corollary 8.13, to give a complete diagrammatic presentation of the category of tensor modules of $\mathrm{U}_\sigma^\imath(m|2n)$.

我们预计，本文的结果将广泛应用于范畴表示论中其他研究领域的张量范畴上的子模分类。具体而言，我们目前正在开展相关研究，探索 [SSS25]的结果在量子

其他类型的对称对，并希望能够运用本文的结果，对该理论中出现的模子范畴进行分类。

致谢。 A.S. 和 H.S. 的研究得到了加拿大自然科学与工程研究委员会颁发的 Discovery Grants RGPIN- 2023-03842 和 RGPIN-2024-04030 的资助。Y.S. 得到了这些资助以及菲尔兹数学科学研究所的支持。作者谨向 Linliang Song 致以谢意，感谢其富有帮助的讨论。

2. 圆柱扭转

在文献 [HO01、tD98、tDHO98]，中，tom Dieck 和 Häring-Oldenburg 提出了带有圆柱扭结的幺半范畴这一概念，它与编织模范畴的概念密切相关 [Enr07、Bro13]。本节回顾 Balagović 和 Kolb 引入的一种扭曲类比 [BK19]。随后，我们将介绍一些用于定义和验证此类结构的技巧，然后考察一个与我们相关的例子：文献 [SSS25] 中定义的无定向纽结图范畴。在本节中， $\Bbbk$ 表示任意交换环。所有范畴均假设为 $\Bbbk$-线性的。对于范畴 C，我们用 C(X,Y) 表示从 X 到 Y 的态射类，并用 1_X 表示 X 的恒等自同态。我们将使用严格幺半范畴和模范畴的通常弦图演算。我们用 $\mathbb{N}$ 表示非负整数集。

2.1. 定义与基本性质。设 C 是一个 $\Bbbk$-线性严格幺半范畴，M 是一个 $\Bbbk$-线性范畴。令 End (M) 表示 M 的 $\Bbbk$-线性自函子所成的严格幺半范畴。C 在 M 上的右作用是一个幺半函子 A : C $\to$ End (M)^{rev}，其中 D^{rev} 表示幺半范畴 D 的反范畴，即反转张量积。给定这样的右作用，我们也称 M 为右 C-模范畴，或简称 C-模；参见 [EGNO15, §7.1]。对于对象 $C \in$ Ob(C) 和 $M \in$Ob(M)，记

$$M \otimes C := \mathbf{A}(C)(M). \tag{2.1}$$

我们称 $\mathcal{C}$-模 $\mathcal{M}$是严格的，如果 $\mathbf{A}$ 是严格幺半函子。等价地，$\mathcal{M}$ 是严格的，当且仅当

$$M \otimes (C_1 \otimes C_2) = (M \otimes C_1) \otimes C_2, \qquad \text{for all } M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M}),\ C_1, C_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),$$

态射也同理。

设 ($\mathcal{M}$,$\mathcal{C}$) 是一个严格张量对。这意味着

- $\mathcal{C}$ 是一个编织严格幺半范畴，
- $\mathcal{M}$ is a strict $\mathcal{C}$-module,
- $\mathcal{C}$ is a subcategory of $\mathcal{M}$ with $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$,
- when restricted to $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, the module category action is given by the tensor product of $\mathcal{C}$.

An *involution* of $\mathcal{C}$ is an isomorphism of braided monoidal categories

$$\natural\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \qquad X \mapsto X^{\natural}, \qquad f \mapsto f^{\natural}, \qquad X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}).$$

such that

$$\natural^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}\,.$$

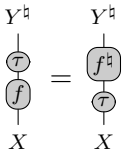
(Our $\natural$ corresponds to the braided tensor equivalence tw in [BK19, §4.2]. We make the slightly stronger assumption that $\natural$ is an isomorphism that squares to the identity.)

一族 $\tau = (\tau_X)^{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ 态射

$$\tau_X = \begin{array}{c} X^{\natural} \\ | \\ \tau \\ | \\ X \end{array} \in \mathcal{M}(X, X^{\natural})$$

称为 $\mathcal{M}$ $\natural$)-自同态，如果它是 $\mathcal{C}$ 的

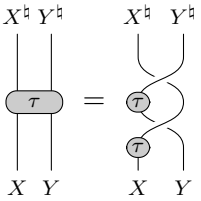
(2.2)



对所有 $f \in \mathcal{C}(X,Y)$，$X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$。换言之，$\tau$是 $\mathcal{M}$ $\natural$-端同态环的一个 $\mathcal{C}$ 自同态，当且仅当它是一个自然变换 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{M}} \Rightarrow \mathrm{Inc}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{M}} \circ \natural$，其中 $\mathrm{Inc}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{M}}$是从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{M}$的包含函子。如果对所有 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，$\tau_X$都是同构，那么我们称 τ 为 $\mathcal{M}$ $\natural$-自同构 $\mathcal{C}$。

定义 2.1 ([BK19，定义 4.6])。 设 $(\mathcal{M},\mathcal{C})$ 是一个严格张量对，并且 $\natural$ 是 $\mathcal{C}$上的对合。一个 $\natural$-圆柱扭结对于 $(\mathcal{M},\mathcal{C})$ 是一个 $(\mathcal{M}$ $\natural$)-自同构 τ，作用于 $\mathcal{C}$，满足

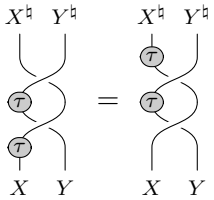
(2.3)



对所有 $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$。

如 [BK19，(4.6)]，可知，由 (2.3)以及 τ 是一个 $(\mathcal{M}$ $\natural$)-自同构这一事实可推出

(2.4)

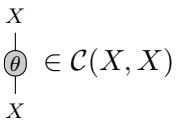


for all $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. (See also Lemma 2.5.) The equation (2.4) is a twisted version of the *reflection equation* for braided module categories.

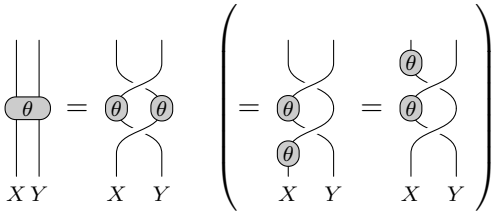
Remark 2.2. Taking $X = Y = \mathbb{1}$ in (2.3) shows that $\tau_{\mathbb{1}}^2 = \tau_{\mathbb{1}}$. Since $\tau_{\mathbb{1}}$ is invertible by assumption, this implies that $\tau_{\mathbb{1}} = 1_{\mathbb{1}}$.

The following example shows how the notion of a cylinder twist generalizes the concept of a balanced monoidal category.

Example 2.3. Recall that a *twist* on a monoidal category $\mathcal{C}$ is a natural family of isomorphisms



such that $\theta_{\mathbb{1}} = 1_{\mathbb{1}}$ and



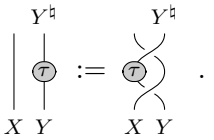
for all $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,

其中最后两个等式由编织的自然性得出。平衡幺半范畴是配备了扭结的编织幺半范畴。如果$\mathcal{C}$ 是编织严格幺半

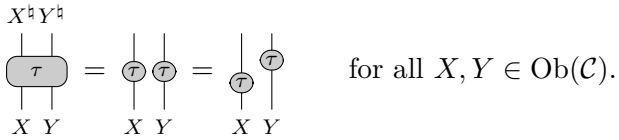
范畴，那么$\mathcal{C}$就是一个严格的$\mathcal{C}$-模，其作用由张量积给出，并且（$\mathcal{C}$，$\mathcal{C}$）是一个严格张量对。$\mathcal{C}$ 上的扭结与（$\mathcal{C}$，$\mathcal{C}$）的 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$-圆柱扭结相同。

For the remainder of this subsection, we suppose that $(\mathcal{M},\mathcal{C})$ is a strict tensor pair, that $\natural$ is an involution of $\mathcal{C}$, and that τ is a $\natural$-cylinder twist for $(\mathcal{M},\mathcal{C})$. For $X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, define

(2.5)



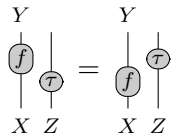
Then, by (2.3) and (2.4), we have



for all $X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

It follows from (2.5) and the naturality of the braiding on $\mathcal{C}$ that

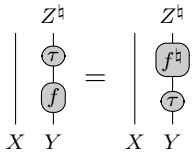
(2.6)



for all $X,Y,Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f\in\mathcal{C}(X,Y)$.

It also follows from (2.5), (2.2), and the naturality of the braiding on $\mathcal{C}$ that

(2.7)



for all $X,Y,Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f\in\mathcal{C}(Y,Z)$.

2.2. **Verifying cylinder twists.** Throughout this subsection, we suppose that $(\mathcal{M},\mathcal{C})$ is a strict tensor pair and that $\natural$ is an involution of $\mathcal{C}$. Furthermore, we fix a collection

$$\tau=(\tau_X)_{X\in\mathrm{Ob}(C)},\qquad \tau_X \text{ is an isomorphism in } \mathcal{M}(X,X^\natural) \text{ for all } X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),$$

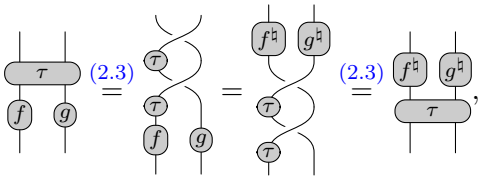
such that (2.3) is satisfied. Define the category $\mathcal{C}_\tau$ of $\mathcal{C}$ by $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\tau)=\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ and

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{C}_\tau):=\{f\in\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) : (2.2) \text{ is satisfied}\}.$$

(It is clear that $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}_\tau)$ is closed under linear combinations and composition. It is also clear that $1_X\in\mathrm{Mor}(\mathcal{C}_\tau)$ for all $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.) Then τ is a $\natural$-cylinder twist if and only if $\mathcal{C}_\tau=\mathcal{C}$. Our goal in this subsection is to develop some tools for verifying, in special cases, that τ is a $\natural$-cylinder twist.

Lemma 2.4. *The category $\mathcal{C}_\tau$ is a monoidal subcategory of $\mathcal{C}$.*

Proof. We must show that $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}_\tau)$ is closed under tensor product. Suppose $f,g\in\mathrm{Mor}(\mathcal{C}_\tau)$. Then,



其中第二个等式由编织的自然性以及f，$g\in\mathrm{Mor}(\mathcal{C}_\tau)$的假设得出。□

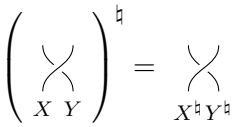
引理2.4 的实用之处在于，要验证 τ 是一个 $\natural$-圆柱扭结，我们只需检查(2.2) 对 f 中生成$\mathcal{C}$ 作为幺半范畴的一组态射中的所有元素均成立。

Lemma 2.5. *For $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, the subcategory $\mathcal{C}_\tau$ contains the braiding morphism*

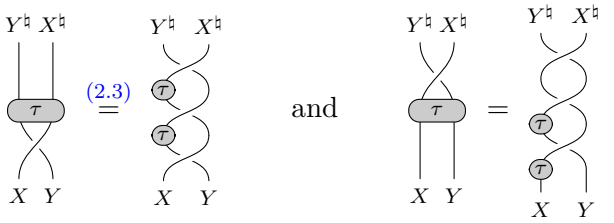


if and only if τ satisfies the twisted reflection equation (2.4). In particular, $\mathcal{C}_\tau$ is a braided monoidal subcategory of $\mathcal{C}$ if and only if τ satisfies the twisted reflection equation (2.4) for all $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Proof. The subcategory $\mathcal{C}_\tau$ is a braided monoidal subcategory of $\mathcal{C}$ if and only if it contains all the braiding morphisms. Since $\natural$ is an isomorphism of braided monoidal categories, we have



Then the result follows from the fact that



□

2.3. **构造圆柱扭结。** 在本小节中，我们假设 $(\mathcal{M},\mathcal{C})$ 是一个严格张量对，并且 $\natural$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个对合。在本小节中，我们讨论为 $(\mathcal{M},\mathcal{C})$ 定义 $\natural$-圆柱扭结的一些一般策略。

假设 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 在张量积下由一组对象 S 自由生成。对于$X_1, \dots, X_r \in S$，我们称对象 $X = X_1 \otimes \cdots \otimes X_r$的长度 为 r，记作 $\ell(X)$。定义 $\tau_{\mathbb{1}} = 1_{\mathbb{1}}$ 并假设我们有同构

$$\tau_X \in \mathcal{M}(X, X^\natural), \qquad X \in S,$$

使得 (2.4) 对所有 $X, Y \in S$均成立。然后，我们按如下方式递归地扩展 τ 的定义：假设 τ_X 已对长度为 r的对象定义，我们根据（2.3）对 $Y \in S$,$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\ell(X) = r$来定义 $\tau_{X\otimes Y}$。

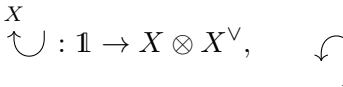
Lemma 2.6. *For τ defined as above, the twisted reflection equation (2.4) holds for all $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.*

Proof. By assumption and Lemma 2.5, $\mathcal{C}_\tau$ contains the braidings for objects in S. By Lemma 2.4, $\mathcal{C}_\tau$ is a monoidal subcategory of $\mathcal{C}$. Since arbitrary braidings are built from the braidings of the generating objects via tensor product and composition, it follows that $\mathcal{C}_\tau$ contains all the braidings. Then the result follows by another application of Lemma 2.5. □

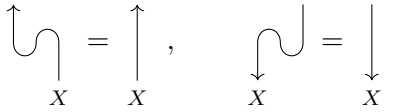
2.4. **The ribbon setting.** Throughout this subsection, we suppose that $(\mathcal{M},\mathcal{C})$ is a strict tensor pair and that $\mathcal{C}$ is *rigid*. We also assume that $\natural$ is an involution of $\mathcal{C}$ that is an isomorphism of *rigid* braided monoidal categories.

我们采用刚性幺半范畴中常见的线股定向约定。对于 $X \in \mathcal{C}$，我们用 $X^\vee$ 表示其左对偶。这意味着我们有如下态射

(2.8)



使得

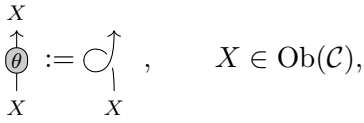
(2.9) 

where the final string diagram denotes the identity morphism of $X^\vee$. Our assumption on $\natural$ implies that

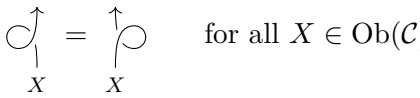
$$(X^\vee)^\natural = (X^\natural)^\vee, \qquad \left(\begin{array}{c} X \\ \uparrow \cup \end{array} \right)^\natural = \begin{array}{c} X^\natural \\ \uparrow \cup \end{array}, \qquad \text{and} \qquad \left(\begin{array}{c} \cap \\ X \end{array} \right)^\natural = \begin{array}{c} \cap \\ X^\natural \end{array},$$

for all $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

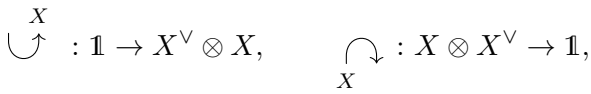
Recall that a pivotal braided monoidal category is the same as a balanced rigid monoidal category; see [Sel11, Cor.4.21]. If $\mathcal{C}$ is a pivotal braided monoidal category, then the balanced structure of $\mathcal{C}$ is given by the twist



We assume for the remainder of this subsection that $\mathcal{C}$ is a *ribbon category*, which means that $\mathcal{C}$ is a pivotal braided monoidal category and

(2.10) 

We will assume that the pivotal structure is *strict*, which implies that left and right duals coincide. (Recall that every pivotal category is equivalent, as a pivotal category, to a strict pivotal category.) Thus, we also have morphisms

(2.11) 

such that

(2.12) 

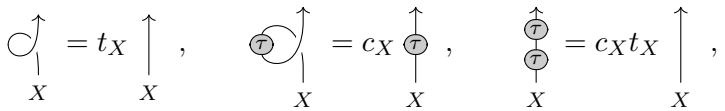
We also assume, as in Section 2.3, that $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ is freely generated, under tensor product, by a set S of objects.

Define $\tau_{\mathbb{1}} = 1_{\mathbb{1}}$ and suppose that we have isomorphisms

$$\tau_X \in \mathcal{M}(X, X^\natural), \qquad X \in S,$$

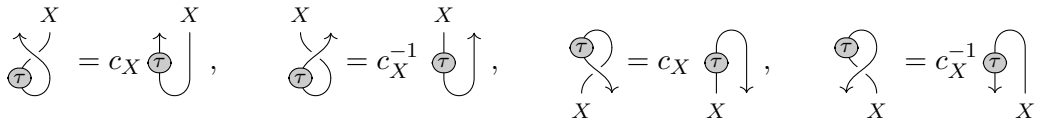
such that (2.4) is satisfied for all $X, Y \in S$. We then define $\tau = (\tau_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ as explained in Section 2.3. Furthermore, we assume that $X^\vee, X^\natural \in S$ for all $X \in S$.

假设 2.7。 假设存在 t_X, $c_X \in \Bbbk^\times$, $X \in S$, 使得对于所有 $X \in S$,

(2.13) 

(2.14) $$c_X = c_{X^\vee} = c_{X^\natural}.$$

由假设 2.7可得

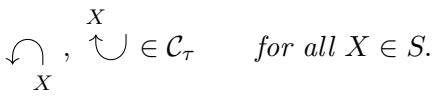
(2.15) 

Lemma 2.8. *If Assumption 2.7 holds, then*

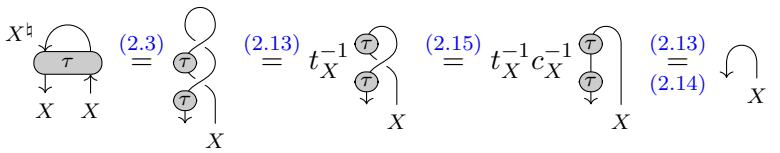
$$t_X = t_{X^\vee} = t_{X^\natural} \qquad \text{for all } X \in S. \tag{2.16}$$

Proof. Rotating the first equation in (2.13) by 180°, then applying (2.10), gives the first equality in (2.16). Applying $\natural$ to the first equation in (2.13) gives the second equality in (2.16). □

Lemma 2.9. *If Assumption 2.7 holds, then*



Proof. For $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, we have

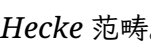


Since $\tau_{\mathbb{1}} = 1_{\mathbb{1}}$, it follows that  The proof that  是类似的。 □

2.5. **无定向纽结图范畴**。我们固定元素 q、 $t \in \Bbbk^\times$、 $\delta \in \Bbbk$ 使得

$$\delta(q - q^{-1}) = t - t^{-1}. \tag{2.17}$$

设$\mathcal{OS} = \mathcal{OS}(q, t)$ 为 [SSS25 §2 中定义的定向 skein 范畴，1], 但将 [SSS25（2.3）中的最后一个关系] 替换为关系

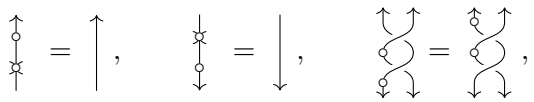


$$= \delta 1_{\mathbb{1}}. \tag{2.18}$$

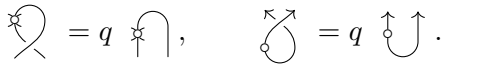
该范畴最早由 [Tur89§52], 引入，当时称为*Hecke* 范畴。在[QS19定义 2 中，1]称为量子化有向 *Brauer* 范畴。 [Bru17]对其进行了深入研究。令$\mathcal{DS} = \mathcal{DS}(q, t)$为 [SSS25定义 2 中的无定向 skein 范畴1]。这是由以下态射生成的$\mathcal{OS}(q, t)$-模



我们将其称为切换，并令其满足以下关系



(2.19)



(2.20)

详细讨论该范畴的内容，请读者参阅 [SSS25§2。2] 。

注 2.10. 如果 $q - q^{-1}$ 可逆，那么 δ 由(2.17)确定，而(2.18) 等价于[SSS25, (2.3)]。因此，我们不会在记号$\mathcal{OS}(q, t)$中明确写出 δ。如果$q = \pm 1$，那么(2.17) 就要求 $t = \pm 1$。容易验证，我们有一个$\sim$的 $\Bbbk$-线性范畴同构$\mathcal{DS}(q, t) \xrightarrow{\sim} \mathcal{DS}(-q, -t)$，它通过将每个图乘以$(-1)^c$给出，其中

c 是图中的交叉数。也容易验证，我们有一个$\tilde{}$的同构 $\Bbbk$-线性范畴 $\mathcal{DS}(q,t) \xrightarrow{=} \mathcal{DS}(q,-t)$ 它通过将向右的盖和杯乘以 -1给出。因此，假设 $q=t=1$不失一般性。于是， $\delta \in \Bbbk$ 是任意的，而定向 skein 范畴等价于 [BCNR17]中所讨论的定向 Brauer 范畴。容易验证， [SSS25第 2–4] 节的结果在此处讨论的稍一般设定下仍然成立。

这一对 $(\mathcal{DS},\mathcal{OS})$ 是一个严格张量对。令 $\natural$为 ΘSSS25中的辫编幺半同构，(2.12)]。特别地，$\uparrow^{\natural}=\downarrow$ 且 $\downarrow^{\natural}=\uparrow$。我们定义

$$\tau_{\mathbb{1}} = 1_{\mathbb{1}}, \qquad \tau_{\uparrow} = \ \ , \qquad \tau_{\downarrow} = q^{-1}t \ \ ,$$

并将 τ 按第 2.3 节所述扩展到任意对象。将 [SSS25, (2.3),(2.20)]与 (2.13) 和 (2.15) 对比可知，假设 2.7 在 $S=\{\uparrow,\downarrow\}$ 下成立，

$$t_{\uparrow}=t_{\downarrow}=t \qquad \text{and} \qquad c_{\uparrow}=c_{\downarrow}=q^{-1}.$$

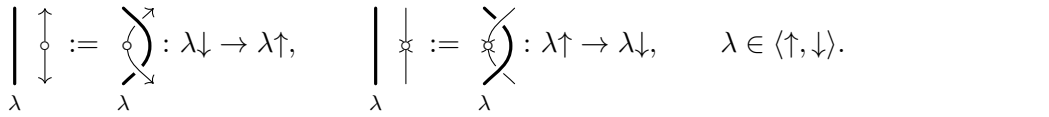
因此，由引理 2.9，

$$\curvearrowleft\!\!\!\!\cap,\ \cup\!\!\!\!\cup,\ \cap\!\!\!\!\curvearrowright,\ \cup\!\!\!\!\curvearrowleft \in \mathcal{OS}_{\tau}.$$

由引理 2.5，(2.19) 中的第三个关系意味着 $\in \mathcal{OS}_{\tau}$。因此 $=(\ )^{-1} \in \mathcal{OS}_{\tau}$。于是，由引理 2.4，$\mathcal{C}_{\tau}=\mathcal{C}$，所以 τ 是 $\mathcal{OS}$ 上的一个 $\natural$-圆柱扭结。

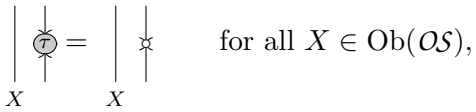
注 2.11。 请注意，约定 (2.5) 与我们关于任意线股上的切换 $\circ$ 的约定 [SSS25, (2.22)] 不一致：

(2.21) $\quad \underset{\lambda}{\uparrow\!\!\!\!\updownarrow} := \underset{\lambda}{\circ} : \lambda\downarrow \to \lambda\uparrow, \qquad \underset{\lambda}{\uparrow\!\!\!\!\times} := \underset{\lambda}{\times} : \lambda\uparrow \to \lambda\downarrow, \qquad \lambda \in \langle\uparrow,\downarrow\rangle.$



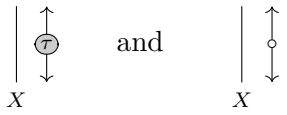
The convention in [SSS25, (2.22)] was chosen so that $\updownarrow$ is inverse to $\times$ on arbitrary strands. On the other hand, (2.5) is forced by the axioms of a $\natural$-cylinder braiding. Thus, while

$$\underset{X}{\uparrow\!\!\!\!\overset{\tau}{\circ}} = \underset{X}{\uparrow\!\!\!\!\times} \qquad \text{for all } X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{OS}),$$



the morphisms

$$\underset{X}{\uparrow\!\!\!\!\overset{\tau}{\circ}} \qquad \text{and} \qquad \underset{X}{\uparrow\!\!\!\!\circ}$$



are different in general. (They are equal when $X=\mathbb{1}$.)

3. Submodule correspondence

Throughout this section $\Bbbk$ is an arbitrary commutative ring. If $\mathcal{M}$ is a right $\mathcal{C}$-module category, then a *$\mathcal{C}$-submodule of $\mathcal{M}$* is a collection

$$\mathcal{N} = (\mathcal{N}(X,Y))_{X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{M})}$$

of $\Bbbk$-submodules $\mathcal{N}(X,Y) \subseteq \mathcal{M}(X,Y)$ that is closed under composition with morphisms in $\mathcal{M}$ and the action of morphisms in $\mathcal{C}$. In other words, it is a collection such that

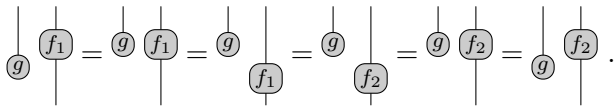
- $f\circ g \in \mathcal{N}(W,Y)$ for all $f\in\mathcal{N}(X,Y)$, $g\in\mathcal{M}(W,X)$;
- $g\circ f \in \mathcal{N}(X,Z)$ for all $f\in\mathcal{N}(X,Y)$, $g\in\mathcal{M}(Y,Z)$;
- $f\otimes 1_Z \in$ 自然数集 $(X\otimes Z,\ Y\otimes Z)$ 对所有 $f\in$ 自然数集$(X,\ Y)$，$Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$。

在本节中，我们将分类$\mathcal{C}$-模$\mathcal{M}$ 的问题转化为分类$\mathcal{M}$的路径代数上某个模的子模的问题。本节中，我们固定以下数据和假设。

假设 3.1. 我们假设

(a) ($\mathcal{M}$,$\mathcal{C}$) 是一个严格张量对，$\natural$是$\mathcal{C}$上的一个对合，且 τ是($\mathcal{M}$,$\mathcal{C}$)的一个 $\natural$-圆柱扭结；(b) $\mathcal{C}$ 是刚性的；(c) $\mathcal{M}$ 作为$\mathcal{C}$-模由态射 τ_X, $X \in$ Ob($\mathcal{C}$)生成。

注 3.2. 由于范畴 M 不是幺半范畴，因此无法对 M 中的态射任意取张量积。不过，我们可以进行如下操作。设 f 是 M 中的一个态射。根据假设 3.1(c)，我们可以为 f 选取一个代表图，它由 C 中的态射以及态射 τ_X, $X \in$ Ob(C)构成。令 f_1 和 f_2 为两个这样的代表。对于 M 中任意一个态射g，利用 (2.5)，$g \otimes f_1$ 和 $g \otimes f_2$ 都有定义，但未必相等。不过，如果$g \in$ M(1, X)，其中 $X \in$ Ob(C)，那么利用 (2.6)，我们有



因此，$g \otimes f$ 是定义良好的。这表明，我们可以在图中放置$\mathcal{M}$ 的态射，只要它们向图的左侧暴露。这一事实将在下文的论证中用到，也是作出假设3.1(c)的动机。

令 Submod$_{\mathcal{C}}$($\mathcal{M}$) 表示$\mathcal{C}$-子模的集合。注意，M 的$\mathcal{C}$-子模不一定是$\mathcal{C}$ 上的模范畴，因为它可能不是一个范畴。（例如，它不一定包含所有对象的恒等态射。）这类似于幺半范畴的张量理想可能不是一个范畴这一事实。

对于任意 $\mathcal{N}$ $\in$Submod$_{\mathcal{C}}$($\mathcal{M}$)，令

$$\mathcal{N}_{\mathbb{1}} := \mathcal{N}(\mathbb{1}, -) = \bigoplus_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})} \mathcal{N}(\mathbb{1}, X),$$

它自然地是路径代数上的一个左模

$$P(\mathcal{M}) := \bigoplus_{X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})} \mathcal{M}(X, Y).$$

对于非幺环 R 和左 R-模 M，令 Submod$_R$(M) 表示 M 的子模集合，并按包含关系排序。对于任意 $N \in$Submod$^{P(\mathcal{M})}$($\mathcal{M}_{\mathbb{1}}$)，有

$$N = \bigoplus_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})} N(X), \qquad \text{where } N(X) = 1_X N \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{1}, X).$$

Theorem 3.3 (cf. [Cou18, Th. 3.1.1]). *If* ($\mathcal{M}$,$\mathcal{C}$) *satisfies Assumption 3.1, then the mapping*

$$\Psi\colon \mathrm{Submod}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Submod}_{P(\mathcal{M})}(\mathcal{M}_{\mathbb{1}}), \qquad \mathcal{N} \mapsto \mathcal{N}_{\mathbb{1}},$$

is an isomorphism of partially ordered sets.

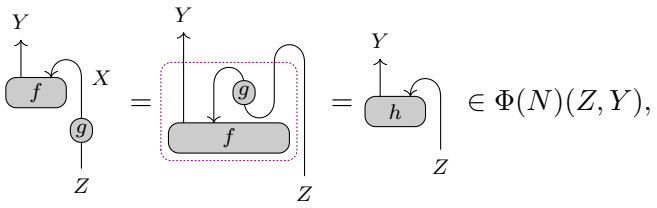
在证明定理 3.3之前，我们需要一些预备结果。定理 $\mathcal{M} = \mathcal{C}$ 中的 3.3还原了 [Cou18，定理 3.1。1] （不过，我们对 $\mathcal{C}$作了额外假设；当 $\mathcal{M}$ $= \mathcal{C}$时则不需要这些假设。）该定理基于 [AK02，§6]的思路。我们的证明与 [Cou18，定理 3.11], 非常相似，唯一实质性的区别在于我们使用了弦图语言。

对于 $N \in \mathsf{Submod}^{P(\mathcal{M})}(\mathcal{M}_{\mathbb{1}})$ 和 X， $Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{M})$，定义

$$\Phi(N)(X,Y) := \left\{ \begin{array}{c} Y \\ \uparrow \\ \boxed{f} \\ \uparrow \\ X \end{array} : f \in N(Y \otimes X^\vee) \right\}. \tag{3.1}$$

Proposition 3.4 (cf. [Cou18, Prop. 3.2.1(a)]). *For all $N \in \mathrm{Submod}_{P(\mathcal{M})}(\mathcal{M}_{\mathbb{1}})$, we have $\Phi(N) \in \mathrm{Submod}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$.*

Proof. First we show that $\Phi(N)$ is closed under composition from below. For $f \in N(Y \otimes X^\vee)$, $g \in \mathcal{M}(Z,X)$, we have, using Remark 3.2,



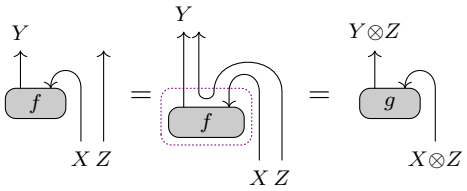
$\in \Phi(N)(Z,Y)$,

for h equal to the composite

$$\mathbb{1} \xrightarrow{f} Y \otimes X^\vee \xrightarrow{1_Y \otimes 1_{X^\vee} \otimes \cup_Z} Y \otimes X^\vee \otimes Z \otimes Z^\vee$$
$$\xrightarrow{1_Y \otimes 1_{X^\vee} \otimes g \otimes 1_{Z^\vee}} Y \otimes X^\vee \otimes X \otimes Z^\vee \xrightarrow{1_Y \otimes \cap_X \otimes 1_{Z^\vee}} Y \otimes Z^\vee,$$

which is the morphism enclosed in the dotted rectangle. It follows that $\Phi(N)$ is closed under composition from below.

The fact that $\Phi(N)$ is closed under composition from above is straightforward. It remains to show that $\Phi(N)$ is closed under the right action of $\mathcal{C}$. Since $\Phi(N)$ is closed under composition, it suffices to check closure under the action of identity morphisms. For $f \in N(Y \otimes X^\vee)$ and $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, we have



for g equal to the composite

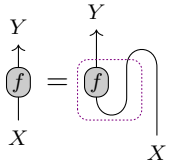
$$\mathbb{1} \xrightarrow{f} Y \otimes X^\vee = Y \otimes \mathbb{1} \otimes X^\vee \xrightarrow{1_Y \otimes \cup_Z \otimes 1_{X^\vee}} Y \otimes Z \otimes Z^\vee \otimes X^\vee,$$

which is the morphism enclosed in the dotted rectangle. Since $N \in \mathrm{Submod}_{P(\mathcal{M})}(\mathcal{M}_{\mathbb{1}})$, we have $g \in N$.

□

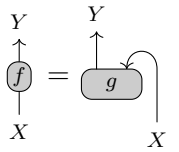
Proposition 3.5 (cf. [Cou18, Prop. 3.2.1(b)]). *The mappings Φ and Ψ are mutually inverse.*

证明。 假设 自然数集 $\in \mathsf{Submod}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$。对于 $f \in$ 自然数集$(X,\ Y)$，我们有



$\in \Phi(\mathcal{N}_{\mathbb{1}})(X,Y) = (\Phi \circ \Psi(\mathcal{N}))(X,Y)$.

因此，自然数集 $\subseteq \Phi\circ\Psi$(自然数集)。现在假设 $f \in (\Phi\circ\Psi$(自然数集))$(X,\ Y) = \Phi$(自然数集$_{\mathbb{1}}$)$(X,\ Y)$。那么存在$g \in$ 自然数集$(\mathbf{1},\ Y \otimes X^\vee)$使得



这立即推出 $f \in$ 自然数集，因为自然数集 在复合和$\mathcal{C}$的右作用下封闭。因此 $\Psi\circ\Phi$(自然数集) $\subseteq$ 自然数集，从而 $\Phi\circ\Psi$(自然数集) = 自然数集，如所求。对所有$N \in \mathrm{Submod}^{P(\mathcal{M})}(\mathcal{M}_{\mathbb{1}})$，$\Psi\circ\Phi(N) = N$这一事实显然。□

定理 *3.3*的证明。 不难验证 Ψ 保持偏序。因此，结论由命题3.5得出。 □

推论 *3.6*（参见 [*Cou18*，推论 *3.1*。3]）。假设 *(M, C)* 和 *(M′, C)* 均满足假设 *3.1*。预加性范畴之间的等价 *F: M* $\to$ *M′*，且 *F(1)* $= \mathbb{1}$，诱导出偏序集的同构 *F: Submod$_{\mathcal{C}}$(M′)* $\to$ *Submod$_{\mathcal{C}}$(M)*，其中

$$\mathbf{F}(\mathcal{N})(X,Y) = \left\{ \begin{array}{c} Y \\ \uparrow \\ g \\ \uparrow \\ X \end{array} : g \in \mathbf{F}^{-1}\Big(\mathcal{N}(\mathbb{1}, \mathbf{F}(X^\vee \otimes Y))\Big) \right\}.$$

证明。 证明与 [Cou18，推论 3.1 中的证明相同。3]。 □

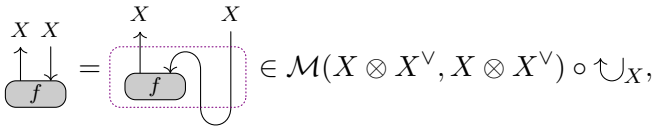
推论 3.7。 假设 $(\mathcal{M},\mathcal{C})$ 满足假设 *3.1*，且 $\mathcal{M}(\mathbb{1},\mathbb{1}) = \Bbbk 1_{\mathbb{1}} \cong \Bbbk$ 是一个域，且 $\mathcal{M}$ 是半单的。那么，$\mathcal{C}$-子模$\mathcal{M}$ 只有 $\mathcal{M}$和零子模。

证明。由于 M(1, 1) $\cong \Bbbk$，我们看到 1 是 M 的一个简单对象。设 N 是 M 的非零 C-子模。由定理 3.3，存在 $X \in$ Ob(M)，使得 N $(\mathbf{1}, X) \neq 0$。由于 M 是半单的，这意味着 X 包含一个与 1 同构的直和项。将投影复合到该直和项上，我们看到 $1_{\mathbb{1}} \in$ N，这意味着 $\mathrm{N}_{\mathbb{1}} = \mathrm{M}_{\mathbb{1}}$。由定理 3.3，我们有 N =M。□

The following lemma will be used later on.

Lemma 3.8 (cf. [Cou18, §2.3.2]). *For every $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathcal{M}(\mathbb{1}, X \otimes X^\vee)$ is generated by $\curvearrowleft_X$ as an $\mathcal{M}(X \otimes X^\vee, X \otimes X^\vee)$-module.*

Proof. Suppose $f \in \mathcal{M}(\mathbb{1}, X \otimes X^\vee)$. Then



as desired. □

4. Idempotent completion

本节讨论我们感兴趣的各种概念与对范畴进行幂等完备化这一操作之间的相容性。在本节中，$\Bbbk$是一个任意的交换环。回忆一下，范畴$\mathcal{D}$ 的幂等完备化，或*Karoubi* 包络，是范畴 Kar($\mathcal{D}$)，其对象为对 $X = (X_0, e_X)$，其中 $X_0 \in$ Ob($\mathcal{D}$)，且 $e_X \in \mathcal{D}(X_0, X_0)$ 是一个幂等元；其态射定义为

$$\mathrm{Kar}(\mathcal{D})(X,Y) = e_Y \mathcal{D}(X_0, Y_0) e_X.$$

我们将$\mathcal{D}$ 视为 $\mathbf{Kar}(\mathcal{D})$ 的子范畴，方法是将 $X_0 \in \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$ 与 $(X_0, 1_{X_0}) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Kar}(\mathcal{D}))$ 等同起来。设$\mathcal{M}$ 是一个右$\mathcal{C}$-模范畴。那么 $\mathbf{Kar}(\mathcal{M})$ 是一个右 $\mathbf{Kar}(\mathcal{C})$-模范畴，其在对象上的作用定义为

$$X \otimes Y = (X_0 \otimes Y_0, e_X \otimes e_Y), \qquad X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M})),\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Kar}(\mathcal{C})),$$

and action on morphisms the same as for the action of $\mathcal{C}$ on $\mathcal{M}$.

Suppose $\mathcal{N} \in \mathrm{Submod}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$. For $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M}))$, define

$$\mathrm{Kar}(\mathcal{N})(X, Y) = e_Y \mathcal{N}(X_0, Y_0) e_X \subseteq \mathrm{Kar}(\mathcal{M})(X, Y). \tag{4.1}$$

It is straightforward to verify that $\mathrm{Kar}(\mathcal{N}) = \big(\mathrm{Kar}(\mathcal{N})(X, Y)\big)_{X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M}))}$ is a $\mathrm{Kar}(\mathcal{C})$-submodule of $\mathrm{Kar}(\mathcal{M})$.

Proposition 4.1. *If $\mathcal{M}$ is a right $\mathcal{C}$-module category, then the map*

$$\mathrm{Kar}\colon \mathrm{Submod}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Submod}_{\mathrm{Kar}(\mathcal{C})}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M}))$$

is an isomorphism of partially ordered sets.

证明。显然，映射 $\mathbf{Kar}$ 保持偏序。为证明它是同构，我们将描述其逆映射。对于 $\mathcal{N} \in \mathbf{Submod}^{\mathrm{Kar}(\mathcal{C})}(\mathbf{Kar}(\mathcal{M}))$，定义

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}) = \big(\mathrm{Res}_{\mathcal{M}}(\mathcal{N})(X, Y)\big)_{X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})}, \quad \text{where} \quad \mathrm{Res}_{\mathcal{M}}(\mathcal{N})(X, Y) = \mathcal{N}(X, Y).$$

直接验证可得，对于所有 $\mathcal{N} \in \mathbf{Submod}^{\mathrm{Kar}(\mathcal{C})}(\mathbf{Kar}(\mathcal{M}))$，均有 $\mathbf{Res}_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}) \in \mathbf{Submod}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$；并且对于所有 $\mathcal{N} \in \mathbf{Submod}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$，均有 $\mathbf{Res}_{\mathcal{M}}(\mathbf{Kar}(\mathcal{N})) = \mathcal{N}$。

现在设 $\mathcal{N} \in \mathbf{Submod}^{\mathrm{Kar}(\mathcal{C})}\,\mathbf{Kar}(\mathcal{M})$。对于 $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Kar}(\mathcal{M}))$，

$$\mathrm{Kar}(\mathrm{Res}_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}))(X, Y) = e_Y\, \mathrm{Res}_{\mathcal{M}}(\mathcal{N})(X_0, Y_0) e_X = e_Y \mathcal{N}(X_0, Y_0) e_X.$$

另一方面，由于 $e_Z = 1_Z$ for $Z \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Kar}(\mathcal{M}))$，我们有

$$\mathcal{N}(X, Y) = e_Y \mathcal{N}(X, Y) e_X = e_Y \big(e_Y \mathcal{N}(X, Y) e_X\big) e_X \subseteq e_Y \mathcal{N}(X_0, Y_0) e_X,$$

其中，包含关系利用了以下事实：$e_X \in \mathbf{Kar}(\mathcal{M})(X_0, X)$ 以及 $e_Y \in \mathbf{Kar}(\mathcal{M})(Y, Y_0)$，再结合 $\mathcal{N}$ 在与 $\mathbf{Kar}(\mathcal{M})$ 中的态射进行复合运算下的闭性。我们还有反向包含关系

$$e_Y \mathcal{N}(X_0, Y_0) e_X = e_Y \big(e_Y \mathcal{N}(X_0, Y_0) e_X\big) e_X \subseteq e_Y \mathcal{N}(X, Y) e_X,$$

since $e_X \in \mathrm{Kar}(\mathcal{M})(X, X_0)$ and $e_Y \in \mathrm{Kar}(\mathcal{M})(Y_0, Y)$. Thus, we have $\mathrm{Kar}(\mathrm{Res}_{\mathcal{M}})(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$, as desired. □

For $N \in \mathrm{Submod}_{P(\mathcal{M})}(\mathcal{M}_{\mathbb{1}})$, define

$$\mathrm{Kar}(N) = \bigoplus_{X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M}))} \mathrm{Kar}(N)(X), \quad \text{where} \quad \mathrm{Kar}(N)(X) = e_X N(X_0). \tag{4.2}$$

It is straightforward to verify that $\mathrm{Kar}(N) \in \mathrm{Submod}_{P(\mathrm{Kar}(\mathcal{M}))}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M})_{\mathbb{1}})$.

Proposition 4.2. *The map*

$$\mathrm{Kar}\colon \mathrm{Submod}_{P(\mathcal{M})}(\mathcal{M}_{\mathbb{1}}) \to \mathrm{Submod}_{P(\mathrm{Kar}(\mathcal{M}))}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M})_{\mathbb{1}})$$

is an isomorphism of partially ordered sets.

Proof. It is clear that the map respects the partial order. To show it is an isomorphism, we will describe the inverse map. For $N \in \mathrm{Submod}_{P(\mathrm{Kar}(\mathcal{M}))}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M})_{\mathbb{1}})$, define

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{M}}(N) = \bigoplus_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})} \mathrm{Res}_{\mathcal{M}}(N)(X), \quad \text{where} \quad \mathrm{Res}_{\mathcal{M}}(N)(X) = N(X).$$

不难验证，对于所有 $N \in \mathbf{Submod}^{P(\mathrm{Kar}(\mathcal{M}))}(\mathbf{Kar}(\mathcal{M})_{\mathbb{1}})$，$\mathbf{Res}_{\mathcal{M}}(N) \in \mathbf{Submod}^{P(\mathcal{M})}(\mathcal{M}_{\mathbb{1}})$，并且对于所有 $N \in \mathbf{Submod}^{P(\mathcal{M})}(\mathcal{M}_{\mathbb{1}})$，$\mathbf{Res}_{\mathcal{M}}(\mathbf{Kar}(N)) = N$。证明 $\mathbf{Kar}(\mathbf{Res}_{\mathcal{M}}(N)) = N$

对于所有 $N \in \mathrm{Submod}^{P(\mathrm{Kar}(\mathcal{M}))}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M})_{\mathbb{1}})$ 与命题4.1证明的最后一段类似。 □

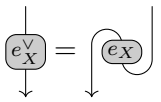
For $\mathcal{N} \in \mathrm{Submod}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$, we have

$$\mathrm{Kar}(\mathcal{N})_{\mathbb{1}} = \bigoplus_{X \in \mathrm{Kar}(\mathcal{M})} \mathrm{Kar}(\mathcal{N})(\mathbb{1}, X) \overset{(4.1)}{=} \bigoplus_{X \in \mathrm{Kar}(\mathcal{M})} e_X \mathcal{N}(\mathbb{1}, X_0) \overset{(4.2)}{=} \mathrm{Kar}(\mathcal{N}_{\mathbb{1}}).$$

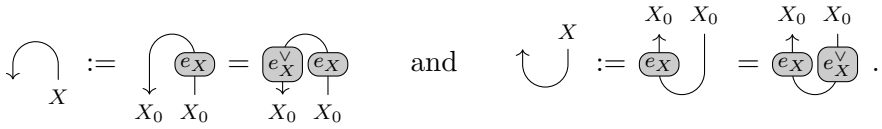
Thus, the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Submod}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathrm{Submod}_{P(\mathcal{M})}(\mathcal{M}_{\mathbb{1}}) \\ {\scriptstyle \mathrm{Kar}}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \mathrm{Kar}}\downarrow{\scriptstyle \cong} \\ \mathrm{Submod}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M})) & \xrightarrow{\Psi} & \mathrm{Submod}_{P(\mathrm{Kar}(\mathcal{M}))}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M})_{\mathbb{1}}) \end{array} \tag{4.3}$$

If $\mathcal{D}$ is a left rigid monoidal category, then $\mathrm{Kar}(\mathcal{D})$ is also left rigid. The left dual of $X = (X_0, e_X) \in \mathrm{Kar}(\mathcal{D})$ is $X^\vee = (X_0^\vee, e_X^\vee)$, where $X_0^\vee$ is the left dual of X_0 in $\mathcal{D}$ and



is the left mate of e_X. The unit and counit are given by

(4.4)


Corollary 4.3. *If $(\mathcal{M}, \mathcal{C})$ satisfies Assumption 3.1, then the mapping*

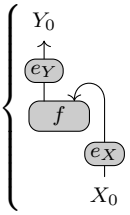
$$\Psi\colon \mathrm{Submod}_{\mathrm{Kar}(\mathcal{C})}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M})) \to \mathrm{Submod}_{P(\mathrm{Kar}(\mathcal{C}))}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M})_{\mathbb{1}}), \qquad \mathcal{N} \to \mathcal{N}_{\mathbb{1}},$$

是偏序集同构，其逆映射

$$\Psi^{-1}\colon \mathrm{Submod}_{P(\mathrm{Kar}(\mathcal{C}))}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M})_{\mathbb{1}}) \to \mathrm{Submod}_{\mathrm{Kar}(\mathcal{C})}(\mathrm{Kar}(\mathcal{M}))$$

定义为

$$\Psi^{-1}(N)(X, Y) := \left\{ \quad : f \in N(Y_0 \otimes X_0^\vee) \right\}. \tag{4.5}$$



证明。 这由定理 3.3 以及 (4.3)的交换性得出。 □

注记 4.4. 推论 4.3 的重要性在于，它拓展了定理 3.3 的适用范围。对于满足假设 3.1 的 (M, C)，并不能推出 (Kar(M),Kar(C)) 满足假设 3.1。特别地，C 中的本原幂等元可能在 M 中分裂，这意味着 Ob(Kar(M)) ≠ Ob(Kar(C))，因此 (Kar(M),Kar(C)) 不是严格张量对。

5. 去范畴化映射

现在我们从范畴数据转向格罗滕迪克群，并研究子模在去范畴化下的行为。本节的目标是将 [Cou18, §4] 的结果推广到模范畴的情形。我们将使用以下记号：

- calligraphic characters $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$, etc. for categories and submodules of module categories,
- 范畴的路径代数上的模所用的罗马体字符 N, M 等,

- 格罗滕迪克环上的模所用的打字机字体 $\mathtt{N}, \mathtt{M}$ 等。

加法范畴 $\mathcal{D}$ 是 *Krull–Schmidt* 的，当且仅当 $\mathcal{D}(X,X)$ 对每个不可分解对象都是局部环X，并且每个对象都是不可分解对象的有限直和。此时 $\mathcal{D}$ 是幂等完备的，并且每个对象都可唯一分解（在同构和重排意义下）为不可分解对象的有限直和。若 $\mathcal{D}$ 是一个加法 $\Bbbk$-线性范畴，其底域为某个域 $\Bbbk$，且自同态代数有限维，则 $\mathrm{Kar}(\mathcal{D})$ 是 Krull-Schmidt 范畴。这由[Kra15，推论 4.4] 以及有限维代数是半完美的这一事实得出。本节其余部分中， $\Bbbk$除非另有说明，均表示任意交换环。

假设 5.1。 我们假设 $\mathcal{M} = \mathrm{Kar}(\mathcal{M}_0)$ 和 $\mathcal{C} = \mathrm{Kar}(\mathcal{C}_0)$ 对于某一对 $(\mathcal{M}_0,\mathcal{C}_0)$加法 $\Bbbk$-线性范畴，它们满足假设 3.1。我们还假设$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{C}$ 均为 Krull–Schmidt 范畴。如上所述，若 $\Bbbk$是一个域，且 $\mathcal{M}$ 和$\mathcal{C}$ 的态射空间有限维，则此条件成立。

Throughout this section, we make Assumption 5.1. By Corollary 4.3,

$$\Psi\colon \mathrm{Submod}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Submod}_{P(\mathcal{M})}(\mathcal{M}_{\mathbb{1}})$$

is an isomorphism of partially ordered sets.

A *thick Ob-submodule* of $\mathcal{M}$ is an isomorphism-closed subset I of $\mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ such that

- $X \oplus Y \in I$ if and only if $X, Y \in I$;
- $X \in I$ implies $X \otimes Y \in I$ for all $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

对于任意 Krull–Schmidt 范畴$\mathcal{D}$，记其分裂格罗滕迪克群为 $K_{\oplus}(\mathcal{D})$。由于$\mathcal{C}$是幺半范畴， $K_{\oplus}(\mathcal{C})$ 是一个环，其乘法由$\mathcal{C}$中的张量积诱导。$\mathcal{C}$ 在$\mathcal{M}$ 上的右作用诱导了 $K_{\oplus}(\mathcal{C})$ 在 $K_{\oplus}(\mathcal{M})$上的右作用。我们称 $K_{\oplus}(\mathcal{C})$-子模 $K_{\oplus}(\mathcal{M})$ 为厚的，如果它由不可分解对象的类张成。记 $\mathbf{Thick}(K_{\oplus}(\mathcal{M}))$ 为 $K_{\oplus}(\mathcal{M})$ 的厚 $K_{\oplus}(\mathcal{C})$-子模构成的集合。集合 $\mathbf{Thick}(K_{\oplus}(\mathcal{M}))$ 按包含关系排序。我们常将 $\mathbf{Thick}(K_{\oplus}(\mathcal{M}))$ 的元素与其所包含的类对应的对象集合等同起来。

对于$\mathcal{M}$的任意$\mathcal{C}$-子模$\mathcal{N}$，我们定义集合

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{N}) = \{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M}) : 1_X \in \mathcal{N}(X,X)\} = \{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M}) : \mathcal{N}(X,X) = \mathcal{M}(X,X)\}.$$

于是，$\mathbf{Ob}(\mathcal{N})$ 是$\mathcal{M}$ 的一个厚 Ob-子模，并且我们有相应的偏序集态射

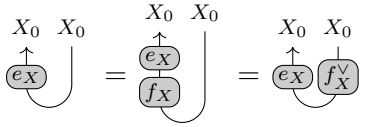
$$\mathrm{Ob}\colon \mathrm{Submod}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Thick}(K_{\oplus}(\mathcal{M})). \tag{5.1}$$

我们将 Ob称为去范畴化映射。

对于 $X \in \mathbf{Ob}(\mathbf{M})$，存在 $X = (X_0, e_X)$，其中某个 $X_0 \in \mathbf{M}_0$，且 $e_X \in \mathbf{M}_0(X_0, X_0)$ 是一个幂等元。对于 X，$Y \in \mathbf{Ob}(\mathbf{M})$，若 Y 是 X 的直和项，我们记作 $Y \Subset X$；也就是说，存在某个 $Z \in \mathbf{Ob}(\mathbf{M})$，使得 $X \cong Y \oplus Z$。为了在下文中（见 (P1)）有更大的灵活性，我们对每个 $X \in \mathbf{Ob}(\mathbf{M})$，固定一个 $X_1 \in \mathbf{Ob}(\mathbf{C})$，使得

$$X \Subset X_1 \Subset X_0 \qquad \text{and} \qquad (X \otimes Y)_1 = X_1 \otimes Y_1 \text{ for all } X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M}),\ Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}). \tag{5.2}$$

（这样的对象总是存在，因为我们可以取 $X_1 = X_0$。）我们有 $X_1 = (X_0, f_X)$，其中某个幂等元 $f_X \in \mathcal{C}_0$（X_0，X_0）满足 $f_X e_X = e_X f_X = e_X$。因此，回顾（4.4），我们可以将其视为

$\circlearrowleft_X :=$  $=$ $=$

作为 $\mathcal{M}(\mathbb{1}, X \otimes X_1^{\vee})$中的一个元素。（对偶 $X_1^{\vee}$存在，因为 $X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$。）我们也将 e_X 视为 X_1 的一个自同态，其像为 X。推论 4.3 表明

$$\mathrm{Ob} \circ \Psi^{-1}(N) = \left\{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M}) : \circlearrowleft_X \in N(X \otimes X_1^{\vee})\right\}. \tag{5.3}$$

我们有以下对引理 3.8 的推广。

引理 5.2. 对于所有 $X \in M$，$M(\mathbb{1}, X \otimes X_1^\vee)$ 都由 x 作为 $M(X \otimes X_1^\vee, X \otimes X_1^\vee)$- 模生成。

证明。 证明与引理3.8的证明相同，只需使用注记3.2。 □

对于任意子集 $S \subseteq \mathsf{Ob}(\mathcal{M})$，我们定义迹子模

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}_S \mathcal{M}_{\mathbb{1}} \in \mathrm{Submod}_{P(\mathcal{M})}(\mathcal{M}_{\mathbb{1}}), \\ &\mathrm{Tr}_S \mathcal{M}_{\mathbb{1}}(X) = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{f \circ g : f \in \mathcal{M}(Z, X),\ g \in \mathcal{M}(\mathbb{1}, Z),\ Z \in S\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

对于 $Z \in \mathsf{Ob}(\mathcal{M})$，我们将用 Tr_Z 代替 $\mathrm{Tr}^{\{Z\}}$。

定理 5.3 （参见 [Cou18，定理 4.1。2]）。 *(a)* 映射 Ob 是偏序集之间的满态射 *(b)* 对于 $\mathtt{N} \in \mathrm{Thick}(K_\oplus(\mathcal{M}))$，纤维 $\mathrm{Ob}^{-1}(\mathtt{N})$ 中的最小元是具有如下态射空间的 $\mathcal{C}$-子模

$$\mathcal{N}_{\mathtt{N}}^{\min}(X, Y) = \{f \in \mathcal{M}(X, Y) : \exists\ Z \in \mathtt{N} \text{ such that } f \text{ factors as } X \to Z \to Y\}.$$

(c) 对于 $\mathtt{N} \in$ 厚子范畴$(K_\oplus(M))$，$\Psi(\mathrm{Ob}^{-1}(\mathtt{N})) \subseteq M_{\mathbb{1}}$ 中的最小元是迹子模$\mathrm{Tr}_{\mathtt{N}} M_{\mathbb{1}}$。

证明。 (a) 假设 $\mathtt{N} \in \mathsf{Thick}(K_\oplus(\mathcal{M}))$。显然，$\mathcal{N}_{\mathtt{N}}^{\min}$在与$\mathcal{M}$中的态射复合后仍保持封闭。由于 $\mathtt{N}$ 是 $K_\oplus(\mathcal{M})$ 的 $K_\oplus(\mathcal{C})$-子模，我们看到$\mathcal{N}_{\mathtt{N}}^{\min}$在 1_Z, $Z \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ 的作用下也保持封闭。因此它是一个$\mathcal{C}$-子模。

现在假设 $X \in \mathsf{Ob}(\mathsf{N}_{\mathtt{N}}^{\min})$。因此， $X \in \mathsf{Ob}(\mathsf{M})$，且 $1_X \in \mathsf{N}\ \mathrm{min}_{\mathtt{N}}(X, X)$。于是存在$Z \in \mathtt{N}$, $f \in \mathsf{M}(X, Z)$ 和 $g \in \mathsf{M}(Z, X)$，使得 $1_X = g \circ f$。由于 M 是幂等完备的，这意味着存在 $Y \in \mathsf{Ob}(\mathsf{M})$，使得 $Z \cong X \oplus Y$。由于 $\mathtt{N}$ 是厚的，我们得出$X \in \mathtt{N}$。因此，$\mathsf{Ob}(\mathsf{N}\ \mathrm{min}_{\mathtt{N}}) \subseteq \mathtt{N}$。另一方面，根据定义可知 $\mathtt{N} \subseteq \mathsf{Ob}(\mathsf{N}_{\mathtt{N}}^{\min})$。因此，$\mathsf{Ob}(\mathsf{N}_{\mathtt{N}}^{\min}) = \mathtt{N}$。故 Ob 是满射。显然，Ob 是偏序集之间的态射。

(b) Suppose $\mathtt{N} \in \mathrm{Thick}(K_\oplus(\mathcal{M}))$. Any $\mathcal{C}$-submodule in $\mathrm{Ob}^{-1}(\mathtt{N})$ must contain 1_Z for all $Z \in \mathtt{N}$. Thus, by construction, $\mathcal{N}_{\mathtt{N}}^{\min}$ is minimal in the fibre over $\mathtt{N}$.

(c) This follows immediately from the definition of Ψ. □

Let $\mathrm{indec}(\mathcal{M})$ denote the set of isomorphism classes of indecomposable objects of $\mathcal{M}$, and define

$$\mathbf{B}_{\mathcal{M}} := \{X \in \mathrm{indec}(\mathcal{M}) : \mathcal{M}(\mathbb{1}, X) \neq 0\}.$$

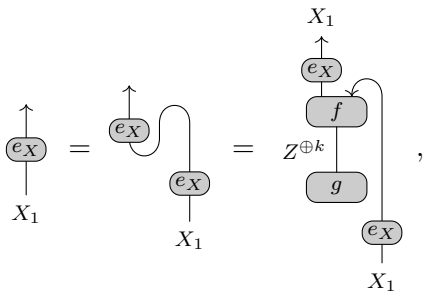
Let $\mathrm{add}(X)$ denote the class of objects of $\mathcal{M}$ that are direct sums of direct summands of X.

Lemma 5.4 (cf. [Cou18, Lem. 4.2.5]). *Suppose that the $\mathcal{M}(X, X)$-module $\mathcal{M}(\mathbb{1}, X)$ is simple for every $X \in \mathbf{B}_{\mathcal{M}}$. Then every submodule of $\mathcal{M}_{\mathbb{1}}$ is a trace submodule.*

Proof. Suppose N is a submodule of $\mathcal{M}_{\mathbb{1}}$. For $Y \in \mathbf{B}_{\mathcal{M}}$, since $\mathcal{M}(\mathbb{1}, Y)$ is simple, either $N(Y) = 0$ or $N(Y) = \mathcal{M}(\mathbb{1}, Y)$. Let S be the subset of $\mathbf{B}_{\mathcal{M}}$ containing those $Y \in \mathbf{B}_{\mathcal{M}}$ with $N(Y) = \mathcal{M}(\mathbb{1}, Y)$. Then $N = \mathrm{Tr}_S \mathcal{M}_{\mathbb{1}}$. □

引理 5.5 （参见 [Cou18，引理 4.2。6]）。 设 $Z \in \mathbf{B}_{\mathcal{M}}$， $X \in \mathrm{indec}(\mathcal{M})$，且 x 是一个复合态射 $\mathbb{1} \to Z^{\oplus k} \to X \otimes X_1^\vee$对于某个 $k > 0$。则 $X \in Z \otimes X_1$。

证明。 设 $_X = f \circlearrowleft g$ 对于某个 $g\colon \mathbb{1} \to Z^{\oplus k}$ 和 $f\colon Z^{\oplus k} \to X \otimes X_1^\vee$。则



因此， $e_X = 1_X$ 是一个复合 $X \to Z^{\oplus k} \otimes X_1 \to X$。于是， $X \in Z^{\oplus k} \otimes X_1$。由于 X 不可分解，可得 $X \in Z \otimes X_1$，证毕。□

引理 5.6 （参见 [Cou18，引理 4.2。7]）。 若 $Z \in \mathbf{B}_{\mathcal{M}}$ 且 $X \in \mathrm{indec}(\mathcal{M})$ 满足 *fy*

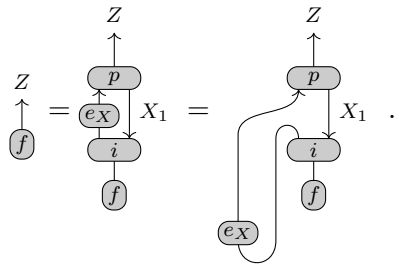
$$\mathrm{add}\left(X \otimes X_1^\vee\right) \cap \mathbf{B}_{\mathcal{M}} = \{Z\},$$

则以下结论成立：

(a) x 是某个 $k > 0$的复合 $\mathbb{1} \to Z^{\oplus k} \to X \otimes X_1^\vee$。*(b)* $\mathrm{Tr}_Z M_{\mathbb{1}}$ 作为 $M_{\mathbb{1}}$, 的子模由x生成。*(c)* $\Psi^{-1}(\mathrm{Tr}_Z M_{\mathbb{1}})$ 由 e_X生成。*(d)* $\mathrm{Ob} \circ \Psi^{-1}(\mathrm{Tr}_Z M_{\mathbb{1}})$ 作为厚 $K_\oplus(\mathcal{C})$-模由 X 生成。*(e)* $\mathrm{Ob} \circ \Psi^{-1}(\mathrm{Tr}_Z M_{\mathbb{1}})$ 作为厚 $K_\oplus(\mathcal{C})$-模由 Z 生成。

证明。 (a) 由于 Z 是 $X \otimes X_1^\vee$中唯一一个存在从 $\mathbb{1}$ 到它的非零态射的不可分解直和项，因此可知 x 必经由某个 $k > 0$分解，其中 $Z^{\oplus k}$。

(b) 根据 (a)，x 包含于 $\mathrm{Tr}_Z \mathcal{M}_{\mathbb{1}}$中。现在令 $i\colon Z \to X \otimes X_1^\vee$和 $p\colon X \otimes X_1^\vee \to Z$分别表示其中一个 Z-直和项的包含映射和投影映射 $X \otimes X_1^\vee$。那么，如果 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{1}, Z)$，利用备注 3.2，我们有：



因此， f 属于由 x生成的$\mathcal{M}_{\mathbb{1}}$ 的子模。

(c) 由推论 4.3 和 (b) 可知， $\Psi^{-1}(\mathrm{Tr}_Z \mathcal{M}_{\mathbb{1}})$ 是由 x生成的 $\mathcal{C}$-子模 $\mathcal{M}$。根据 (2.9)，任何包含 x M-子模 也包含 $e_X = 1_X$，反之亦然。这就证明了 (c)部分。

(d) This follows immediately from part (c).

(e) By assumption, $Z \in X \otimes X_1^\vee$. Thus, Z is in the thick $K_\oplus(\mathcal{C})$-module generated by X. On the other hand, by Lemma 5.5, X is contained in the thick $K_\oplus(\mathcal{C})$-module generated by Z. Thus, part (e) follows from part (d).

□

Theorem 5.7 (cf. [Cou18, Th. 4.3.1]). *Suppose that $\mathcal{M}$ and $\mathcal{C}$ satisfy Assumption 5.1 and that, for each $Z \in \mathbf{B}_{\mathcal{M}}$,*

(a) the $\mathcal{C}(Z,Z)$-module $\mathcal{M}(\mathbb{1}, Z)$ is simple;

(b) there exists $X_Z \in \mathrm{indec}(\mathcal{M})$ with $\mathrm{add}(X_Z \otimes (X_Z)_1^\vee) \cap \mathbf{B}_{\mathcal{M}} = \{Z\}$.

Then the map Ob*, defined in (5.1), is an isomorphism of partially ordered sets.*

Proof. By Corollary 4.3 and Theorem 5.3(c), it suffices to prove that every submodule of $\mathcal{M}_{\mathbb{1}}$ is of the form $\mathrm{Tr}_{\mathtt{N}}\mathcal{M}_{\mathbb{1}}$ for some $\mathtt{N} \in \mathrm{Thick}(K_{\oplus}(\mathcal{M}))$. Let N be a submodule of $\mathcal{M}_{\mathbb{1}}$. By Lemma 5.4, we have $N = \mathrm{Tr}_S \mathcal{M}_{\mathbb{1}}$ for some subset S of $\mathbf{B}_{\mathcal{M}}$. Let $\mathtt{N} \in \mathrm{Thick}(K_{\oplus}(\mathcal{M}))$ be the thick $K_{\oplus}(\mathcal{C})$-submodule of $K_{\oplus}(\mathcal{M})$ generated by S. We will prove that $\mathrm{Tr}_S \mathcal{M}_{\mathbb{1}} = \mathrm{Tr}_{\mathtt{N}} \mathcal{M}_{\mathbb{1}}$.

取 $Z \in \mathtt{N} \cap \mathbf{B}_{\mathcal{M}}$，并令 $X = X_Z$。根据 $\mathtt{N}$ 的定义，存在 $Z' \in S$ 和 $Y' \in \mathsf{Ob}(\mathsf{C})$，使得 $Z \in Z' \otimes Y'$。由于 $Y' \notin Y'_1$，不失一般性地，设 $Y' = Y'\mathbb{1}$。令 $X' = X_{Z'}$。因此， $Z' \in X' \otimes (X')_1^{\vee}$。由 (b) 和引理 5.6(a) 可知，$x$ 可经由某个 $k > 0$ 分解为 $Z^{\oplus k}$。因此，由引理 5.5 得 $X \in Z \otimes X_1$。所以，

$$X \in Z \otimes X_1 \in Z' \otimes Y' \otimes X_1 \in X' \otimes (X')_1^{\vee} \otimes Y' \otimes X_1 = X' \otimes Y,$$
$$\text{where } Y = (X')_1^{\vee} \otimes Y' \otimes X_1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}).$$

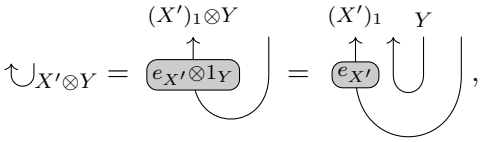
由于 $Z \in X \otimes X_1^{\vee}$ 由 (b)，我们有

$$Z \in X' \otimes Y \otimes (X' \otimes Y)_1^{\vee} \overset{(5.2)}{=} X' \otimes Y \otimes \big((X')_1 \otimes Y\big)^{\vee} = X' \otimes Y \otimes Y^{\vee} \otimes (X')_1^{\vee}. \tag{5.5}$$

引理5.6(a) 蕴含

$$\curvearrowleft_{X'} \in \mathrm{Tr}_{Z'} \mathcal{M}_{\mathbb{1}}(X' \otimes (X')_1^{\vee}) \subseteq \mathrm{Tr}_S \mathcal{M}_{\mathbb{1}}.$$

由于



我们有 $\curvearrowleft_{X'\otimes Y} \in \mathrm{Tr}_S \mathcal{M}_{\mathbb{1}}(X' \otimes Y \otimes Y^{\vee} \otimes (X')_1^{\vee})$。因此，由引理 5.2 可知

$$\mathrm{Tr}_S \mathcal{M}_{\mathbb{1}}(X' \otimes Y \otimes Y^{\vee} \otimes (X')_1^{\vee}) = \mathcal{M}(\mathbb{1}, X' \otimes Y \otimes Y^{\vee} \otimes (X')_1^{\vee}).$$

因此，由 (5.5) 可得 $\mathrm{Tr}_S \mathsf{M}_{\mathbb{1}}(Z) = \mathsf{M}(\mathbb{1}, Z)$。由于 $Z \in \mathtt{N} \cap \mathbf{B}_{\mathcal{M}}$ 是任意的，这意味着 $\mathrm{Tr}_{\mathtt{N}} \mathsf{M}_{\mathbb{1}} \subseteq \mathrm{Tr}_S \mathsf{M}_{\mathbb{1}}$。由于反向包含关系显然成立，我们得到 $\mathrm{Tr}_S \mathsf{M}_{\mathbb{1}} = \mathrm{Tr}_{\mathtt{N}} \mathsf{M}_{\mathbb{1}},$，如所求。□

推论 5.8 (参见 [Cou18，定理 4.3。4])。 假设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{C}$ 满足假设 *5.1* 且 $\Bbbk$是一个域。假设对于每个 $Z \in \mathbf{B}_{\mathcal{M}}$，存在 $X_Z \in \mathrm{indec}(\mathcal{M})$ 使得

$$Z \in X_Z \otimes (X_Z)_1^{\vee} \qquad \textit{and} \qquad \dim_{\Bbbk} \mathcal{M}\big((X_Z)_1, X_Z\big) = 1.$$

那么，映射 Ob，定义于 *(5.1)*，是偏序集同构。

证明。 根据假设，对于每个 $Z \in \mathbf{B}_{\mathcal{M}}$，我们有

$$0 < \dim_{\Bbbk} \mathcal{M}(\mathbb{1}, Z) \leq \dim_{\Bbbk} \mathcal{M}\big(\mathbb{1}, X_Z \otimes (X_Z)_1^{\vee}\big) = \dim_{\Bbbk} \mathcal{M}\big((X_Z)_1, X_Z\big) = 1.$$

因此，$\mathcal{M}(\mathbb{1}, Z)$ 是一维的，这意味着定理 (a) 5.7 的条件成立。此外，事实 $\dim_{\Bbbk} \mathcal{M}\left(\mathbb{1}, X_Z \otimes (X_Z)_1^{\vee}\right) = 1$ 意味着 $X_Z \otimes (X_Z)_1^{\vee}$恰好包含一个位于 $\mathbf{B}_{\mathcal{M}}$中的直和项。因此，定理(b) 5.7的条件也成立。□

我们以一个将在定理 6.4 的证明中用到的结果结束本节。

引理 5.9。 设 $Z, Z' \in \mathbf{B}_{\mathcal{M}}$，$M(\mathbb{1}, Z)$ 是一个单 $M(Z, Z)$-模，并且 $M(\mathbb{1}, Z')$ 是一个单 $M(Z', Z')$-模。那么，$\mathrm{Tr}_Z M_{\mathbb{1}} = \mathrm{Tr}_{Z'} M_{\mathbb{1}}$ 当且仅当 $Z \cong Z'$。

证明。假设 $\mathrm{Tr}_{Z'} \mathsf{M}_{\mathbb{1}} = \mathrm{Tr}_Z \mathsf{M}_{\mathbb{1}}$。取一个非零的 $f \in \mathsf{M}(\mathbb{1}, Z)$。由于 $\mathsf{M}(\mathbb{1}, Z)$ 作为 $\mathsf{M}(Z, Z)$-模是单的， f生成 $\mathsf{M}(\mathbb{1}, Z)$ 作为 $\mathsf{M}(Z, Z)$-模，因此 f也生成 $\mathrm{Tr}_Z \mathsf{M}_{\mathbb{1}}$ 作为 $P(\mathsf{M})$-模。因为 $f \in \mathrm{Tr}_{Z'} \mathsf{M}_{\mathbb{1}},$，所以存在某个 $r \in \mathbb{N}$, $h \in \mathsf{M}(\mathbb{1}, (Z')^{\oplus r})$ 和 $g \in \mathsf{M}((Z')^{\oplus r}, Z)$，使得 $f = g \circ h$。于是 $h \in \mathrm{Tr}_{Z'} \mathsf{M}_{\mathbb{1}} = \mathrm{Tr}_Z \mathsf{M}_{\mathbb{1}},$，它由 f 生成。因此，存在某个 $a \in \mathsf{M}(Z, (Z')^{\oplus r})$，使得 $h = a \circ f$。于是我们有 $f = b \circ f$，其中 $b = g \circ a \in \mathsf{M}(Z, Z)$ 经由

$(Z')^{\oplus r}$。由于 $(1_Z - b) \circ f = 0$，态射 $1_Z - b$ 不是同构。因此，由于 $\mathcal{M}(Z, Z)$ 是局部的，b 是同构，这意味着 $Z \cong Z'$。□

6. 宝塔

本节旨在提出一些充分条件，以保证去范畴化映射是同构，并能够精确描述 $K_\oplus(\mathcal{C})$-子模 $K_\oplus(\mathcal{M})$。这里的结果是 [Cou18，§4 中结果的模范畴类比。4]在本节中，$\Bbbk$ 是一个域。

定义 6.1 ([Cou18，定义 4.4。1])。分层幺半范畴 是一个二元组，即 $(\mathcal{S}\ \ell)$，其中 S 是一个 *Krull–Schmidt* 幺半范畴，且 端同态环$_{\mathcal{S}}(\mathbb{1}) = \Bbbk 1_{\mathbb{1}} \cong \Bbbk$，并且 ℓ:indec$(\mathcal{S}) \to \mathbb{N}$是一个满足以下条件的集合映射：

(T1) $\ell^{-1}(0) = \{1\}$；**(T2)** 对于 κ，λ，$\mu \in$ indec$(\mathcal{S})$，$\kappa \Subset \mu \otimes \lambda$ 蕴含 $\ell(\kappa) = \ell(\mu) + \ell(\lambda)$。

If $(\mathcal{S}\ \ell)$ is a tiered monoidal category, then we define a binary relation $\preceq$ on indec$(\mathcal{S})$ by setting

$$\lambda \preceq \mu \iff \mu \Subset \lambda \otimes \nu \text{ for some } \nu \in \operatorname{indec}(\mathcal{S}). \tag{6.1}$$

Note that

$$\lambda \preceq \mu \implies \lambda = \mu \text{ or } \ell(\lambda) < \ell(\mu). \tag{6.2}$$

Note that $\preceq$ is a partial order.

Definition 6.2 (cf. [Cou18, §4.4])**.** A *pagoda* is a tuple $(\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{S}\ \ell, \phi, \mathbf{T})$, where

- $(\mathcal{M}, \mathcal{C})$ satisfies Assumption 5.1,
- $\mathcal{M}(\mathbb{1}, \mathbb{1}) = \Bbbk 1_{\mathbb{1}} \cong \Bbbk$,
- $(\mathcal{S}\ \ell)$ is a tiered monoidal category,
- $\phi\colon \Lambda \to \Lambda$ is a set involution, with $\Lambda := \operatorname{indec}(\mathcal{S})$, and
- $\mathbf{T}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ is a monoidal functor,

such that the following conditions are satisfied:

(P1) We have a bijection $R\colon \Lambda \to \operatorname{indec}(\mathcal{M})$ such that, for all $\lambda \in \Lambda$, $\mathbf{T}(\lambda) \cong R(\lambda) \oplus X$ (isomorphism in $\mathcal{M}$) for some $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{M})$ such that $R(\mu) \Subset X \implies \mu \prec \lambda$. In particular, this means that we can assume (in the notation of (5.2)) that

$$R(\lambda)_1 = \mathbf{T}(\lambda) \qquad \text{for all } \lambda \in \Lambda.$$

(P2) We have $\mathbf{T}(\lambda)^\vee \cong \mathbf{T}(\phi(\lambda))$ (isomorphism in $\mathcal{M}$) for all $\lambda \in \Lambda$.

(P3) If $\nu, \nu' \in \Lambda$, $\nu \neq \nu'$, and $R(\nu)\ R(\nu') \in \mathbf{B}_{\mathcal{M}}$, then $\ell(\nu) \neq \ell(\nu')$. Let

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{0, 1, 2, \dots, n\} & \text{if } n+1 = |\mathbf{B}_{\mathcal{M}}| < \infty, \\ \mathbb{N} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then we define $\nu^{(j)}$, $j \in \mathbb{L}$, by setting $\mathbf{B}_{\mathcal{M}} = \{R(\nu^{(j)}) : j \in \mathbb{L}\}$, where

$$0 = \ell(\nu^{(0)}) < \ell(\nu^{(1)}) < \ell(\nu^{(2)}) < \cdots.$$

(P4) For each $j \in \mathbb{L}$, the set

$$\Lambda_j := \{\lambda \in \Lambda : \nu^{(j)} \Subset \lambda \otimes \phi(\lambda)\}$$

is nonempty, and

$$\dim_{\Bbbk} \mathcal{M}(\mathbf{T}(\lambda), R(\lambda)) = 1 \qquad \text{for all } \lambda \in \Lambda_j.$$

(P5) If $j, j' \in \mathbb{L}$ with $j' < j$, then, for each $\lambda \in \Lambda_j$, there exists $\lambda' \in \Lambda_{j'}$ such that $\lambda' \prec \lambda$.

(P6) If $\nu^{(j)} \preceq \kappa \Subset \lambda \otimes \phi(\lambda)$ for some $\lambda, \kappa \in \Lambda$ and $j \in \mathbb{L}$, then there exists $\mu \in \Lambda_j$ such that $\mu \preceq \lambda$.

Lemma 6.3 (cf. [Cou18, Lem. 4.4.3]). *Suppose $(\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{S}\ \ell, \mathbf{T})$ is a pagoda and $\lambda, \mu, \kappa \in \Lambda$.*

(a) If $\ell(\kappa) = \ell(\lambda) + \ell(\mu)$, then the multiplicity of $R(\kappa)$ as a direct summand of $R(\lambda) \otimes \mathbf{T}(\mu)$ is equal to the multiplicity of κ as a direct summand of $\lambda \otimes \mu$.

(b) If $\lambda \preceq \mu$, and $R(\lambda) \in \mathtt{N} \in \mathrm{Thick}(K_\oplus(\mathcal{M}))$, then $R(\mu) \in \mathtt{N}$.

Proof. (a) Let $l = \ell(\lambda) + \ell(\mu)$. By (T2), we have

$$\lambda \otimes \mu = \bigoplus_{\kappa : \ell(\kappa) = l} \kappa^{\oplus c^\kappa_{\lambda,\mu}} \qquad \text{for some } c^\kappa_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}.$$

Since $\mathbf{T}$ is a monoidal functor, this implies that

$$\mathbf{T}(\lambda) \otimes \mathbf{T}(\mu) = \bigoplus_\kappa \mathbf{T}(\kappa)^{\oplus c^\kappa_{\lambda,\mu}}. \tag{6.3}$$

By (P1), we have

$$\mathbf{T}(\lambda) \otimes \mathbf{T}(\mu) = (R(\lambda) \oplus X) \otimes \mathbf{T}(\mu) \cong (R(\lambda) \otimes \mathbf{T}(\mu)) \oplus (X \otimes \mathbf{T}(\mu))$$

对于某个 $X \in \mathsf{Ob(M)}$，使得 $R(\nu) \notin X \implies \nu \prec \lambda$。根据 (T2) 和 (P1)， $X \otimes T(\mu)$ 是对象 $R(\nu)$ 的和，其中 $\ell(\nu) < l$。因此，对于 $\kappa \in \Lambda$ 满足 $\ell(\kappa) = l$ 的情形，$\mathsf{T}(\lambda) \otimes \mathsf{T}(\mu)$ 中 $R(\kappa)$ 的重数等于 $R(\lambda) \otimes \mathsf{T}(\mu)$ 中 $R(\kappa)$ 的重数。结合 (P1)、(6.2) 和 (6.3)，这意味着 $R(\lambda) \otimes \mathsf{T}(\mu)$ 中 $R(\kappa)$ 的重数等于 $c^\kappa_{\lambda,\mu}$，如所要求。

(b) 假设 $\lambda \preceq \mu$ 且 $R(\lambda) \in \mathtt{N} \in \mathsf{Thick}(K_\oplus(\mathsf{M}))$。那么 $\mu \notin \lambda \otimes \nu$ 对于某个 $\nu \in \Lambda$ 成立。因此，根据 (a) 部分， $R(\mu) \notin R(\lambda) \otimes \mathsf{T}(\nu)$，从而 $R(\mu) \in \mathtt{N}$，如所要求。□

定理 6.4 （参见 [Cou18，定理 4.4。4]）。设 $(\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{S}\ \ell, \mathbf{T})$ 是一个宝塔。对于 $j \in \mathbb{L}$，定义

$$N_j := \mathrm{Tr}_{R(\nu^{(j)})} \mathcal{M}_{\mathbb{1}}, \qquad \mathcal{N}_j := \Psi^{-1}(N_j), \qquad \mathtt{N}_j := \mathrm{Ob}(\mathcal{N}_j). \tag{6.4}$$

(a) 去范畴化映射 $\mathrm{Ob}\colon \mathrm{Submod}_{\mathcal{C}}(M) \to \mathrm{Thick}(K_\oplus(M))$ 是偏序集同构。

(b) 我们有 $\mathrm{Thick}(K_\oplus(M)) = \{\mathtt{N}_i : i \in \mathbb{L}\}$，其中 $\mathrm{Ob}(M) = \mathtt{N}_0 \supsetneq \mathtt{N}_1 \supsetneq \mathtt{N}_2 \supsetneq \cdots$ 且

$$R(\mu) \in \mathtt{N}_j \iff \lambda \preceq \mu \text{ for some } \lambda \in \Lambda_j. \tag{6.5}$$

(c) 对于 $i, j \in \mathbb{L}$，

$$\mathcal{N}_i\left(\mathbb{1}, R(\nu^{(j)})\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } j < i, \\ \mathcal{M}\left(\mathbb{1}, R(\nu^{(j)})\right) \cong \Bbbk & \text{if } j \geq i. \end{cases}$$

证明。令 $j \in \mathbb{L}$ 并选取 $\lambda \in \Lambda_j$。根据 Λ_j 的定义，我们有 $\nu^{(j)} \notin \lambda \otimes \phi(\lambda)$。于是，由 (T2)、(P2) 和引理 6.3(a)，可得 $R(\nu^{(j)}) \notin R(\lambda) \otimes \mathsf{T}(\lambda)^\vee$。由 (P4) 以及 $R(\lambda)_1 = \mathsf{T}(\lambda)$ 这一事实，推论 5.8 的假设均得到满足。因此，(a) 得证。与推论 5.8 的证明相同，我们还可得 $\dim_{\Bbbk} \mathsf{M}(1, R(\nu^{(j)})) = 1$，并且 $R(\nu^{(j)})$ 是 $\mathsf{B}_{\mathcal{M}}$ 中唯一以直和项形式出现在 $R(\lambda) \otimes \mathsf{T}(\lambda)^\vee$ 中的元素，其中 $\lambda \in \Lambda_j$。因此，根据引理 5.6(d)，对于所有 $\lambda \in \Lambda_j$， $\mathtt{N}_j$ 都由 $R(\lambda)$ 作为厚 $K_\oplus(\mathsf{C})$-模生成。

The trace submodules N_j, $j \in \mathbb{L}$, are pairwise distinct by Lemma 5.9. By (P5) and Lemma 6.3(b), this implies that, for $j' < j$, we have $\mathtt{N}_j \subseteq \mathtt{N}_{j'}$, hence also $N_j \subseteq N_{j'}$. By Lemma 5.4 (which can be applied since $\dim_{\Bbbk} \mathcal{M}(\mathbb{1}, R(\nu^{(j)})) = 1$) and the above discussion, we see that $\mathrm{Submod}_{P(\mathcal{M})}(\mathcal{M}_{\mathbb{1}}) = \{N_j : j \in \mathbb{L}\}$. Part (c) is now clear.

剩下要证明 (6.5)。由于对于所有 $\lambda \in \Lambda_j$，都有 $R(\lambda) \in \mathtt{N}_j$，引理 6.3(b) 表明 (6.5) 中的反向蕴含 $\Leftarrow$ 成立。为了证明正向蕴含，设 $R(\mu) \in \mathtt{N}_j$。由 (5.3)，有 $R(\mu) \in N_j$。根据 (c) 部分，这意味着对于某个 $j' \geq j$，有 $R(\nu^{(j')}) \notin R(\mu) \otimes \mathsf{T}(\mu)^\vee$。由 (P1) 和 (P2)，这意味着 $R(\nu^{(j')}) \notin \mathsf{T}(\mu \otimes \phi(\mu))$。由于 $R(\nu^{(j')})$ 是不可分解的，这意味着对于某个满足 $\nu \notin \mu \otimes \phi(\mu)$ 的 $\nu \in \Lambda$，有 $R(\nu^{(j')}) \notin \mathsf{T}(\nu)$。由 (P1)，有 $\nu^{(j')} \preceq \nu$。因此，根据 (P6)，存在 $\lambda' \in \Lambda_{j'}$ 使得 $\lambda' \preceq \mu$。接着，根据 (P5)，存在 $\lambda \in \Lambda_j$ 使得 $\lambda \preceq \lambda' \preceq \mu$。证明完毕。□

7. Indecomposable objects in the disoriented skein category

本节中，我们始终假设 $\Bbbk$ 是一个域。我们固定元素 q、$t \in \Bbbk^\times$、$\delta \in \Bbbk$，使得(2.17)成立。我们还假设量子特征为 ∞，也就是说，要么

- q is not a root of unity, or
- $q = 1$ and the characteristic of $\Bbbk$ is zero.

Recall the categories $\mathcal{OS}(q,t)$ and $\mathcal{DS}(q,t)$ from Section 2.5. Our goal in this section is to classify the indecomposable objects in the additive Karoubi envelope $\mathrm{Kar}(\mathcal{DS}(q,t))$, up to isomorphism. We follow the approach of [CH17, §4]. For an idempotent e in a category $\mathcal{C}$, we let $\mathrm{im}(e)$ denote the corresponding object in $\mathrm{Kar}(\mathcal{C})$.

It follows from the basis theorem [SSS25, Th. 7.1] that

- 端同态环$_{\mathcal{DS}(q,\ t)}(\mathbf{1}) = \Bbbk 1_{\mathbb{1}} \cong \Bbbk$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{DS}(q,\ t)}(X,\ Y)$ 对所有 $X,\ Y \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{DS}(q,\ t)$ 都是有限生成的 $\Bbbk$-模。

正如第5节开头所指出的，$\mathrm{Kar}(\mathcal{DS}(q,\ t))$ 是 Krull–Schmidt 范畴。由于$\mathcal{DS}(q,\ t)$ 的态射空间是有限维的，要分类$\mathcal{DS}(q,\ t)$ 中的不可分解对象，只需将$\mathcal{DS}(q,\ t)$ 中的本原幂等元按共轭分类。

由于$\mathcal{DS}(q,\ t)$ 的每个对象都同构于 $\uparrow^r$ for some $r \in \mathbb{N}$，因此只需考虑以下对象中的本原幂等元

$$\mathrm{DS}_r = \mathrm{DS}_r(q,t) := \mathrm{End}_{\mathcal{DS}(q,t)}(\uparrow^r), \qquad r \in \mathbb{N}. \tag{7.1}$$

我们的方法是对 r 进行归纳，依据下文的命题7.1。该命题似乎广为人知——例如，在 [CO11，引理 3 中3] 在稍强的假设下陈述了它。由于我们在文献中未能找到证明，因此在此给出证明。回顾一下，环称为半完全环，当且仅当其单位元1 可以写成两两正交的局部幂等元之和；关于这一刻画，见[Lam01，定理 23。6]关于这一刻画及 [Lam01，第 8] 章中半完全环的更多性质。每个阿廷环都是半完全环。特别地，域上的有限维代数都是半完全环。

Proposition 7.1. *Suppose that A is a semiperfect ring and that $\xi \in A$ is an idempotent. There is a bijection of sets*

$$\varphi\colon \left\{\begin{matrix}\text{conjugacy classes of}\\ \text{primitive idempotents}\\ \text{in } A\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cong} \left\{\begin{matrix}\text{conjugacy classes of}\\ \text{primitive idempotents}\\ \text{in } \xi A\xi\end{matrix}\right\} \sqcup \left\{\begin{matrix}\text{conjugacy classes of}\\ \text{primitive idempotents}\\ \text{in } A/(A\xi A)\end{matrix}\right\}$$

given by

$$\varphi(X) = \begin{cases} X \cap (\xi A \xi) & \text{if } X \subseteq A\xi A, \\ \{e + A\xi A : e \in X\} & \text{if } X \not\subseteq A\xi A. \end{cases}$$

Before giving the proof, we note that, if X is the conjugacy class of a primitive idempotent e in a ring A, then

$$X \not\subseteq A\xi A \iff X \cap (A\xi A) = \varnothing.$$

Proof. Let

- I be the set of conjugacy classes of primitive idempotents in A,
- J be the set of conjugacy classes of primitive idempotents in $\xi A\xi$, and
- K be the set of conjugacy classes of primitive idempotents in $A/A\xi A$.

For a ring R, let $\mathrm{PI}(R)$ denote the set of primitive idempotents in R. For $e, f \in \mathrm{PI}(R)$, we write $e \sim_R f$ if e and f are conjugate in R.

Since A is semiperfect, we may choose decompositions

$$\xi = e_1 + \cdots + e_m \qquad \text{and} \qquad 1 - \xi = f_1 \cdots + f_n \tag{7.2}$$

into sums of mutually orthogonal primitive idempotents. (This follows, for example, by taking the projective module $R\xi$ in the left-module analogue of [Lam01, Cor. 24.14(1)].) Then

$$1 = e_1 + \cdots + e_m + f_1 + \cdots + f_n$$

是一个由两两正交的本原幂等元构成的分解。A 中的每个本原幂等元都与 $e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_n$中的某一个共轭。如有必要，重新排列 f_i，我们可以假设 $f_1, \ldots, f_l$ 各自与某个e_j共轭，且 $f_{l+1}, \ldots, f_n$ 中没有任何一个与任何e_j共轭。（我们允许 $l = 0$ 或 $l = n$。）因此，我们有

$$I = I_1 \sqcup I_2, \qquad I_1 = \{e_1, \ldots, e_m\}/\sim_A, \qquad I_2 = \{f_{l+1}, \ldots, f_n\}/\sim_A .$$

由于 ξ 是角环 $\xi A\xi$ 的单位元（根据(7.2)，该环也是半完美的），并且 e_i 在此环中仍是本原的，因此由 ξ 在(7.2) 中的分解可知， $\xi A\xi$ 的每个本原幂等元都与某个 e_i共轭。因此，我们有

$$\begin{aligned}\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subseteq \mathrm{PI}(\xi A\xi) = \{e \in \mathrm{PI}(\xi A\xi) : e \sim_{\xi A\xi} e_i \text{ for some } 1 \le i \le m\} \\ \subseteq \{e \in \mathrm{PI}(A) : e \sim_A e_i \text{ for some } 1 \le i \le m\}.\end{aligned}$$

显然，

$$e_i \sim_{\xi A\xi} e_j \implies e_i \sim_A e_j.$$

反过来，

$$\begin{aligned} e_i \sim_A e_j &\implies Ae_i \cong Ae_j \text{ as } A\text{-modules} \\ &\implies \xi Ae_i \cong \xi Ae_j \text{ as } \xi A\xi\text{-modules} \\ &\implies e_i \sim_{\xi A\xi} e_j. \end{aligned}$$

因此，我们得到一个双射

$$I_1 \xrightarrow{\cong} J, \qquad X \mapsto X \cap (\xi A\xi).$$

设 $B = A/A\xi A$。由于对于所有 $1 \le i \le m$， $e_i = e_i\xi \in A\xi A$ ，我们有一个分解

$$B \cong \bigoplus_{j=l+1}^{n} Af_j/(A\xi A)f_j \tag{7.3}$$

的 B 为不可分解射影 B-模之和。我们断言 (7.3)中的每个直和项都非零。为导出矛盾，假设 $Af_j/(A\xi A)f_j = 0$对某个 $l < j \le n$成立。于是$f_j \in A\xi Af_j \subseteq A\xi A$。因此，由 (7.2)，我们可以写成

$$f_j = \sum_{r=1}^{N} a_r e_{i_r} b_r \quad \text{for some } N \in \mathbb{N},\ a_r, b_r \in A,\ 1 \le i_r \le m,\ 1 \le r \le N.$$

映射

$$\bigoplus_{r=1}^{N} Ae_{i_r} \to Af_j, \qquad (x_r)_r \mapsto \sum_{r=1}^{N} x_r e_{i_r} b_r f_j,$$

是一个 A-模的满同态，因为对于所有 $c \in A$，我们有

$$(ca_r)_{r\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{r=1}^{N} ca_r e_{i_r} b_r f_j = cf_j^2 = cf_j.$$

由于 Af_j 是射影的，这个同态可分裂，因此 Af_j 是 $\bigoplus_r Ae_{i_r}$ 的一个直和项。由于 e_{i_r} 和 f_j 是本原的，这意味着对于某个 i， $Af_j \cong Ae_i$ 作为 A-模同构。于是 $f_j \sim_A e_i$，这与我们对 l 的选取以及 $j > l$ 这一事实相矛盾。由此证明了该断言。

It follows from (7.3) that every primitive idempotent of B is conjugate to one of the $f_j + (A\xi A)$, $l < j \le n$. We claim that, for $l < i, j \le n$,

$$f_i \sim_A f_j \iff (f_i + A\xi A) \sim_B (f_j + A\xi A).$$

The forward implication is clear. For the reverse implication, suppose $(f_i + A\xi A) \sim_B (f_j + A\xi A)$. Then the indecomposable projective left B-modules

$$B(f_i + A\xi A) \cong Af_i/A\xi Af_i \qquad \text{and} \qquad B(f_j + A\xi A) \cong Af_j/A\xi Af_j \tag{7.4}$$

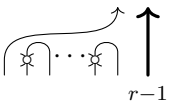
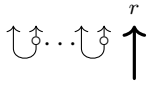
are isomorphic. Let S be their simple top. Viewing S as an A-module via the quotient map $A \to B$, the natural maps $Af_i \to S$, $Af_j \to S$, are projective covers of S as A-modules. (By [Lam01, Prop. 24.12], every finitely-generated module over a semiperfect ring has a projective cover.) By uniqueness of projective covers, $Af_i \cong Af_j$ as A-modules, which implies that $f_i \sim_A f_j$. This proves the claim.

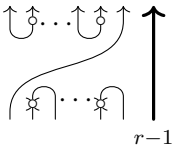
It follows from the above discussion that we have a bijection

$$I_2 \xrightarrow{\cong} K, \qquad X \mapsto \{e + A\xi A : e \in X\},$$

completing the proof of the proposition. □

For $r, i \in \mathbb{N}$, let

$\eta_{r,i} :=$  $\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{DS}}(\uparrow^{r+2i}, \uparrow^r)$, $\qquad \mu_{r,i} :=$  $\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{DS}}(\uparrow^r, \uparrow^{r+2i})$, (7.5)

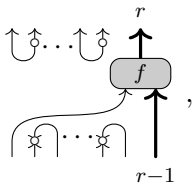
$$\xi_{r,i} := \mu_{r,i}\eta_{r,i} = \text{  } \in \mathrm{DS}_{r+2i}. \tag{7.6}$$

It is straightforward to verify that

$$\eta_{r,i}\mu_{r,i} = 1_r := 1_{\uparrow^{\otimes r}} \qquad \text{for all } r, i \in \mathbb{N}. \tag{7.7}$$

It follows that $\xi_{r,i}$ is idempotent.

Lemma 7.2. *For $r, i \in \mathbb{N}$, the map*

$$\gamma_{r,i} \colon \mathrm{DS}_r \mapsto \mathrm{DS}_{r+2i}, \qquad f \mapsto \mu_{r,i} f \eta_{r,i} = \text{  },$$

is an injective homomorphism of nonunital algebras. Furthermore, $\gamma_{r,i}(\mathrm{DS}_r) = \xi_{r,i}\mathrm{DS}_{r+2i}\xi_{r,i}$.

Proof. The map $\gamma_{r,i}$ is clearly $\Bbbk$-linear. For $f, g \in \mathrm{DS}_r$, we have

$$\gamma_{r,i}(fg) = \mu_{r,i}(fg)\eta_{r,i} \overset{(7.7)}{=} \mu_{r,i} f \eta_{r,i}\mu_{r,i} g \eta_{r,i} = \gamma_{r,i}(f)\gamma_{r,i}(g).$$

Hence, $\gamma_{r,i}$ is a homomorphism of nonunital algebras. Since

$$\eta_{r,i}\gamma_{r,i}(f)\mu_{r,i} \overset{(7.7)}{=} f \qquad \text{for all } f \in \mathrm{DS}_r,$$

the homomorphism $\gamma_{r,i}$ is also injective. We also have

$$\xi_{r,i}\mathrm{DS}_{r+2i}\xi_{r,i} \overset{(7.6)}{=} \mu_{r,i}\eta_{r,i}\mathrm{DS}_{r+2i}\mu_{r,i}\eta_{r,i} \subseteq \gamma_{r,i}(\mathrm{DS}_r)$$

and

$$\gamma_{r,i}(\mathrm{DS}_r) = \mu_{r,i}\mathrm{DS}_r\eta_{r,i} \underset{(7.7)}{\overset{(7.6)}{=}} \xi_{r,i}\mu_{r,i}\mathrm{DS}_r\eta_{r,i}\xi_{r,i} \subseteq \xi_{r,i}\mathrm{DS}_{r+2i}\xi_{r,i},$$

proving the final statement in the lemma. □

Bases for the morphism spaces of $\mathcal{DS}$ are described in [SSS25, Th. 7.1]. In particular, DS_r has basis given by a set $M_{\mathcal{DS}}(\uparrow^{\otimes r}, \uparrow^{\otimes r})$ of *reduced diagrams*. We refer the reader to [SSS25, §7.1] for the precise definition.

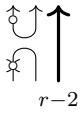
Lemma 7.3. *Suppose $r \in \mathbb{N}$. The following subspaces of DS_r are equal:*

(a) the two-sided ideal of DS_r generated by morphisms that factor through $\uparrow^{\otimes(r-2)}$ (interpreted as the zero ideal if $r \leq 1$),

(b) the two-sided ideal of DS_r generated by morphisms that factor through $\uparrow^{\otimes s}$ for some $s < r$ (interpreted as the zero ideal if $r = 0$),

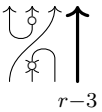
(c) the span of the elements of $M_{\mathcal{DS}}(\uparrow^{\otimes r}, \uparrow^{\otimes r})$ with at least one cup or cap.

If $r \geq 2$, then these spaces are also equal to the two-sided ideal of DS_r generated by the element

(7.8) 

$\in \mathrm{DS}_r.$

If $r \geq 3$, then these spaces are also equal to the two-sided ideal of DS_r generated by the idempotent

$\xi_{r-2,1} =$ 

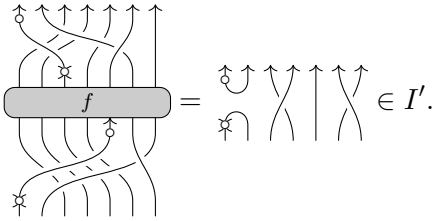
$\in \mathrm{DS}_r.$

证明。 证明 (a)、(b) 和 (c) 中所述的空间相等是直接的。令 I表示这个理想。令 I' 表示由元素 (7.8)生成的双边理想，并令 I'' 表示由 $\xi_{r-2,1}$生成的双边理想。显然 $I', I'' \subseteq I$。

设 f是 $M_{\mathcal{DS}}(\uparrow^{\otimes r}, \uparrow^{\otimes r})$ 中一个至少含有一个杯或盖的元素。那么 f至少含有一个杯*and* 和至少一个盖。在顶部和底部与仅包含切换和交叉的图复合 f ，我们可以将一个杯和一个盖移到图的左边缘，从而得到 I'中的一个元素。例如，如果

$f =$ 

then



$\in I'.$

由于仅包含切换和交叉的图是可逆的，这意味着 $f \in I'$。因此， $I \subseteq I'$。证明 $I \subseteq I''$ 是类似的。□

For $r \in \mathbb{N}$, let J_r denote the two-sided ideal of DS_r defined by any of the equivalent descriptions given in Lemma 7.3. In particular,

$$J_r = \mathrm{DS}_r \xi_{r-2,1} \mathrm{DS}_r \qquad \text{if } r \geq 3.$$

Let $\mathrm{H}_r = \mathrm{H}_r(q)$ be the Iwahori–Hecke algebra of type A_{r-1}. It follows from the basis theorem [SSS25, Th. 7.1] that the natural algebra homomorphism

$$\mathrm{H}_r \to \mathrm{DS}_r$$

is injective. We use this homomorphism to view H_r as a subalgebra of DS_r. This subalgebra is spanned by the elements of $M_{\mathcal{DS}}(\uparrow^{\otimes r})$ with no cups, caps, or toggles. This discussion implies the following result.

Lemma 7.4. *For all $r \in \mathbb{N}$, we have an isomorphism of algebras*

$$\mathrm{H}_r \xrightarrow{\cong} \mathrm{DS}_r/J_r, \qquad f \mapsto f + J_r.$$

Let

$$\pi_r \colon \mathrm{DS}_r \twoheadrightarrow \mathrm{DS}_r/J_r \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}_r$$

是由引理中所述的同构导出的满射代数同态7.4。 H_r 的本原幂等元由 r的分拆参数化（相差共轭）。对于$\lambda \vdash r$，令 $\tilde{e}_\lambda$ 表示H_r 中属于对应 λ共轭类的一个本原幂等元。幂等元 $\tilde{e}_\lambda$ 作为DS_r的元素时，可能不再是本原元。

令$\tilde{e}_\lambda = \tilde{e}_{\lambda,1} + \tilde{e}_{\lambda,2} + \cdots + \tilde{e}_{\lambda,k}$是 $\tilde{e}_\lambda$ 在 DS_r 中分解为两两正交的本原幂等元的分解。于是

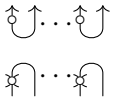
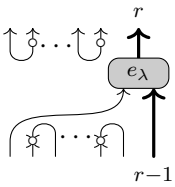
$$\tilde{e}_\lambda = \pi_r(\tilde{e}_\lambda) = \pi_r(\tilde{e}_{\lambda,1}) + \cdots + \pi_r(\tilde{e}_{\lambda,k})$$

是 $\tilde{e}_\lambda$ 在 H_r 中表示为两两正交幂等元之和的分解。由于 $\tilde{e}_\lambda$ 在 H_r中是本原元，因此存在唯一的 i、$1 \le i \le k$，使得 $\pi_r(\tilde{e}_{\lambda,i}) \neq 0$。我们定义

$$e_\lambda := \tilde{e}_{\lambda,i}. \tag{7.9}$$

e_λ 的定义取决于将 $\tilde{e}_\lambda$ 分解为 DS_r 中彼此正交的本原幂等元。不过，这种分解中出现的幂等元的共轭类是唯一的。因此， e_λ 是 DS_r 中一个在共轭意义下唯一确定的本原幂等元。

对于 $\lambda \vdash r \ge 1$ 和 $i \in \mathbb{N}$，定义

$$e_\varnothing^{(i)} := \frac{1}{\delta^i}$$  $$\in \mathrm{DS}_{2i} \text{ if } \delta \neq 0, \qquad e_\lambda^{(i)} := \gamma_{r,i}(e_\lambda) =$$  $$\in \mathrm{DS}_{r+2i}, \tag{7.10}$$

其中两个图都包含 i个杯和 i个盖。注意，除 $\lambda = \varnothing$ 和 $\delta = 0$的情形外，我们已对所有分拆 λ 和 $i \in \mathbb{N}$定义了 $e_\lambda^{(i)}$ 。容易验证，只要 $e_\lambda^{(i)}$ 有定义，它就是一个幂等元。

命题 7.5。设 $r \in \mathbb{N}$， $r \ge 2$。

(a) 若 $\delta \neq 0$，则 $\{e_\lambda^{(i)} : \ 0 \le i \le \frac{r}{2}, \ \lambda \vdash r - 2i\}$ 是 DS_r 中两两不共轭的本原幂等元的一个完全集。***(b)*** 若 $\delta = 0$，则 $\{e_\lambda^{(i)} : \ 0 \le i < \frac{r}{2}, \ \lambda \vdash r - 2i\}$ 是 DS_r 中两两不共轭的本原幂等元的一个完全集。

Proof. We prove the result by induction on r. Suppose $r = 2$. If $\delta \neq 0$, then it is straightforward to verify that

$$\mathrm{DS}_2/\mathrm{DS}_2 e_\varnothing^{(1)} \mathrm{DS}_2 \cong \mathrm{H}_2 \qquad \text{and} \qquad e_\varnothing^{(1)} \mathrm{DS}_2 e_\varnothing^{(1)} \cong \Bbbk e_\varnothing^{(1)} \cong \Bbbk,$$

as algebras. Thus, the result follows from Proposition 7.1. On the other hand, if $\delta = 0$, then

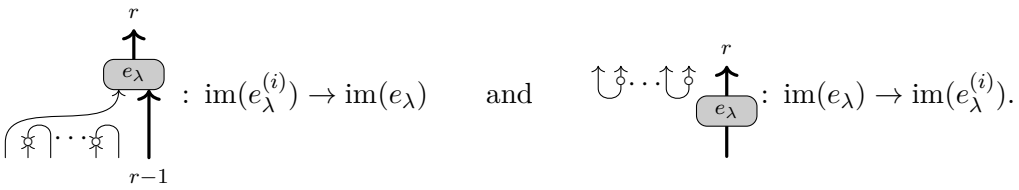
$$f =$$ 

generates a nilpotent ideal $\mathrm{DS}_2 f \mathrm{DS}_2$, and $\mathrm{DS}_2/\mathrm{DS}_2 f \mathrm{DS}_2 \cong \mathrm{H}_2$ as algebras, by Lemma 7.4. Thus, the result follows.

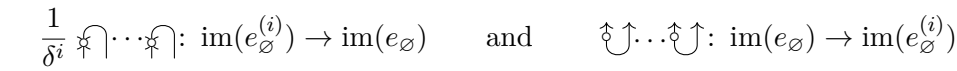
Now suppose that $r \ge 3$. Taking $\xi = \xi_{r-2,1}$ in Proposition 7.1, the result follows by induction, using Lemmas 7.2 and 7.4. (For the case $r = 3$, we use the identification $\mathrm{DS}_1 \cong \Bbbk$ in the induction step.) □

Lemma 7.6. *Suppose λ is a partition and $i \in \mathbb{N}$, such that $e_\lambda^{(i)}$ is defined. Then* $\mathrm{im}(e_\lambda)$ *and* $\mathrm{im}(e_\lambda^{(i)})$ *are isomorphic in* $\mathrm{Kar}(\mathcal{DS}(q,t))$.

Proof. If $\lambda \neq \varnothing$, we have mutually inverse isomorphisms



If $\lambda = \varnothing$, then



are mutually inverse. □

Theorem 7.7. *A complete set of pairwise-nonisomorphic representatives of the isomorphism classes of indecomposable objects in* $\mathrm{Kar}(\mathcal{DS}(q,t))$ *is given by*

$$\mathrm{im}(e_\lambda), \qquad \lambda \in \mathrm{Par},$$

where Par *denotes the set of all partitions.*

证明。由命题7.5 和引理 7.6 可知，每个不可分解对象都同构于 $\mathrm{im}(e_\lambda)$，其中 $\lambda \in \mathrm{Par}$。现在假设 $\lambda, \mu \in \mathrm{Par}$，$\lambda \neq \mu$。若 $|\lambda| - |\mu|$ 为奇数，则 $\uparrow^{\otimes|\lambda|}$ 与 $\uparrow^{\otimes|\mu|}$之间不存在态射。另一方面，若 $|\lambda| - |\mu|$ 为偶数，则不失一般性，设 $i = (|\lambda| - |\mu|)/2 > 0$。于是

$$\mathrm{im}(e_\mu) \cong \mathrm{im}\left(e_\mu^{(i)}\right) \ncong e_\lambda$$

由命题 7.5可知。两种情况下都有 $\mathrm{im}(e_\lambda) \ncong \mathrm{im}(e_\mu)$，定理得证。 □

8. 无定向纽结图范畴的子模

本节对 $\mathrm{Kar}(\mathcal{OS}(q,t))$-子模进行分类，其中 $\mathrm{Kar}(\mathcal{DS}(q,t))$。当 $q = 1$时，这相当于对 Brauer 范畴的 Karoubi 包络中的幺半子范畴进行分类（该范畴是 Deligne 为正交群构造的插值范畴）；参见注记 2.10。由于这已在 [Cou18，定理 7.1], 中完成，因此本节中我们始终假设 $\Bbbk$ 是一个域，并固定元素 $q, t \in \Bbbk^\times$，使得 $q \neq 1$。于是 $\delta \in \Bbbk$ 由 (2.17)唯一确定。（下文将对 $\Bbbk$ 作出其他假设。）

Proposition 8.1. *The category* $\mathrm{Kar}(\mathcal{DS}(q,t))$ *is semisimple if and only if the following conditions are satisfied:*

- *q is not a root of unity;*
- *for all $a \in \mathbb{Z}$, $t \neq \pm q^a$.*

证明。由于 Kar(DS (q,t)) 是 Krull–Schmidt 范畴，当且仅当其所有自同态代数都是半单时代数。一个 $\Bbbk$-代数 A 是半单的，当且仅当对于所有幂等元 $e \in A$，eAe 都是半单的。因此，Kar(DS(q,t)) 是半单的，当且仅当 DS(q,t) 的所有自同态代数都是半单的。根据 [SSS25，命题 7.5],，DS (q,t) 的自同态代数同构于 [RSS24] 的 q-Brauer 代数。因此，若 e 是 q的量子特征，则 [RSS24，定理 7.2] 表明，DS$_n(q,t)$ 是半单的，当且仅当 $e > n$ 和 $t \neq \pm q^a$ 对于

$$a \in \{i \in \mathbb{Z} : 4 - 2n \leq i \leq n - 2\} \setminus \{i \in 2\mathbb{Z} + 1 : 4 - 2n < i \leq 3 - n\}.$$

因此，当 $e=\infty$ 且 $t\neq\pm q^a$ 对于所有 n 时，$\mathsf{DS}_n(q,\ t)$ 是半单的

$$a\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\{i\in\mathbb{Z}:4-2n\leq i\leq n-2\}\setminus\{i\in 2\mathbb{Z}+1:4-2n<i\leq 3-n\}\right)=\mathbb{Z}. \qquad \square$$

由命题 8.1 和推论 3.7 可知，若 q 不是单位根，且对于所有 $a\in\mathbb{Z},\ t\neq\pm q^a$，则 $\mathsf{Kar}(\mathsf{OS}\ (q,t))$-子模只有平凡的那些，即 $\mathsf{Kar}(\mathsf{DS}(q,t))$ 的平凡子模。这里我们不讨论单位根的情形，而是着重研究一般的 q 且 $\mathsf{char}(\Bbbk)=0$.~因此，鉴于注 2.10 中所述的同构 $\mathsf{DS}\ (q,t)\ \xrightarrow{\sim}\mathsf{DS}\ (q,-t)$，在本节余下部分中，我们假设

$$\Bbbk \text{ is a field extension of } \mathbb{Q}(q) \quad \text{and} \quad t=q^d \text{ for some } d\in\mathbb{Z},$$

其中 q 在 $\mathbb{Q}$ 上超越。为简化记号，我们令

$$\mathcal{OS}=\mathcal{OS}(q,q^d) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{DS}=\mathcal{DS}(q,q^d).$$

注 8.2. 我们预期本节的结果也适用于 $\Bbbk$ 任意域（不必具有特征零），q 不是单位根，且 $t=q^d$ 对于某个 $d\in\mathbb{Z}$。之所以采用上述更强的假设，是因为证明命题8.6时需要这些假设。

8.1. 宝塔结构。本小节旨在按照 [Cou18, §6.1] 的方法，为无定向纽结图范畴赋予定义 6.2 中的宝塔结构。设 $\mathsf{C}_0:=\mathsf{OS}$ 且 $\mathsf{M}_0:=\mathsf{DS}$。那么 $(\mathsf{M}_0,\mathsf{C}_0)$ 满足假设 3.1，其圆柱扭转结构来自第 2.5 节。令 $\mathsf{C}\ =\mathsf{Kar}(\mathsf{C}_0)$ 且 $\mathsf{M}\ =\mathsf{Kar}(\mathsf{M}_0)$。它们满足假设 5.1。

令$\mathcal{S}_0$ 为$\mathcal{OS}$ 中以对象 $\uparrow^{\otimes r}$ 为对象的全幺半子范畴。我们有$\mathcal{S}_0(\uparrow^{\otimes r},\uparrow^{\otimes s})\ =0$ 当且仅当$r\neq s$，并且

$$\mathcal{S}_0(\uparrow^{\otimes r},\uparrow^{\otimes r})\cong \mathrm{H}_r,$$

其中，与第 7 节中一样，H_r 表示 A_{r-1} 型岩堀–赫克代数。于是 $\mathcal{S}:=\mathrm{Kar}(\mathcal{S}_0)$ 是一个 Krull–Schmidt 单模范畴，且其 端同态环$_{\mathcal{S}}(\mathbb{1})=\Bbbk 1_{\mathbb{1}}\cong\Bbbk$。如第 7 节所述，我们有一个双射

$$\Lambda:=\mathrm{Par}\to\mathrm{indec}(\mathcal{S}),\qquad \lambda\mapsto\left(\uparrow^{\otimes|\lambda|},\tilde{e}_\lambda\right).$$

定义

$$\ell\colon\Lambda\to\mathbb{N},\qquad \ell(\lambda)=|\lambda|,$$

由此可见，$(\mathcal{S}\ \ell)$ 是一个分层幺半范畴。我们有包含幺半函子

$$\mathbf{T}\colon\mathcal{S}\to\mathcal{C}.$$

引理 8.3。 对于 S 中的所有对象 X，有 $\mathbf{T}(X)^\vee\cong\mathbf{T}(X)$ 属于 M。

证明。 由于 $\mathcal{S}$ 是 Krull–Schmidt 范畴，只需考虑 X 不可分解的情形。设 f 是 $\mathsf{End}_{\mathcal{S}}(\uparrow^{\otimes r})\ =\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(\uparrow^{\otimes r})$ 中的一个本原幂等元。$\mathcal{C}$ 上的对偶函子将 f 映射为其 180° 旋转 $f^\vee$。我们需要证明

$$(\uparrow^{\otimes r},f)\cong(\downarrow^{\otimes r},f^\vee)\qquad \text{in } \mathcal{M}.$$

令 $h=\mathsf{rev}_r\circ\ \updownarrow^{\otimes r}\in\mathcal{DS}(\downarrow^{\otimes r},\uparrow^{\otimes r})$，其中 $\mathsf{rev}_r\in\mathsf{End}_{\mathcal{S}}(\uparrow^{\otimes r})\ =\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(\uparrow^{\otimes r})\ \cong\mathrm{H}_r$ 是对应于魏尔群最长元素的态射。例如，

$\mathrm{rev}_3=$ 

Then

$$(\downarrow^{\otimes r},f^\vee)\cong(\uparrow^{\otimes r},h\circ f^\vee\circ h^{-1})\qquad \text{in } \mathcal{M}.$$

Recall that, in a cellular algebra, every primitive idempotent is conjugate to its image under the cellular involution. (See [GL96, Theorem 3.7(i)] or [KX98, Prop. 5.1].) Thus,

$$(\uparrow^{\otimes r},f)\cong(\uparrow^{\otimes r},f^*),$$

其中 f^* is the image of f under the cellular involution of the Iwahori–Hecke algebra.

要完成证明，只需证明 $f^* = h \circ f^\vee \circ h^{-1}$，其中 $h^{-1} = \rotatebox{180}{∞}^{\otimes r} \circ \mathrm{rev}_r^{-1}$。由于 $\mathrm{End}_{\mathcal{S}}(\uparrow^{\otimes r})$ 作为代数由交叉 $\uparrow^{\otimes i} \otimes \nwarrow\!\!\nearrow \otimes \uparrow^{r-i-2}$, $1 \le i \le r-2$ 生成，因此只需考虑 $f = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_k$ 的情形，其中每个 f_j, $1 \le j \le k$ 都是这样的交叉。岩堀–赫克代数上的细胞反演固定这些交叉，因此我们有

$$f^* = f_k \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1.$$

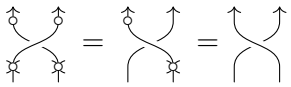
对于 $1 \le i \le r-2$,

$$\left(\uparrow^{\otimes i} \otimes \nwarrow\!\!\nearrow \otimes \uparrow^{r-i-2}\right)^\vee = \left(\downarrow^{\otimes r-i-2} \otimes \swarrow\!\!\searrow \otimes \downarrow^{i}\right)^\vee$$

and

$$\mathrm{rev}_r \circ \left(\uparrow^{\otimes (r-i-2)} \otimes \nwarrow\!\!\nearrow \otimes \uparrow^{i}\right) \circ \mathrm{rev}_r^{-1} = \uparrow^{\otimes i} \otimes \nwarrow\!\!\nearrow \otimes \uparrow^{r-i-2}.$$

由 [SSS25, (2.25)],在 $\mathcal{DS}$ （采用约定 (2.21)）我们有



由此可得

$$h \circ f^\vee \circ h^{-1} = (h \circ f_k^\vee \circ h^{-1}) \circ \cdots \circ (h \circ f_2^\vee \circ h^{-1}) \circ (h \circ f_1^\vee \circ h^{-1}) = f_k \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1,$$

正如所需。 □

以下结果给出了偏序 $\preceq$的一个明确刻画，该偏序定义于 (6.1)。尽管这是一个广为人知的结果，我们却未能在文献中找到其精确表述，因此在此给出证明。对于 $\lambda, \mu \in \mathrm{Par}$，若 $\lambda \subseteq \mu$ 的杨图包含于 λ 的杨图μ中，我们记作

$$\lambda \subseteq \mu \iff \lambda_i \le \mu_i \text{ for all } i.$$

引理 8.4. 对于 $\lambda, \mu \in \lambda$, $\lambda \preceq \mu$ 当且仅当 $\lambda \subseteq \mu$。

证明。 设 $\lambda \preceq \mu$。等价地，对于某个 ν，Littlewood–Richardson 系数 $c_{\lambda,\nu}^{\mu} > 0$ 。根据 Littlewood–Richardson 规则，存在一个斜形状为μ/λ的 Littlewood–Richardson 杨表。特别地， μ/λ 必须是一个有效的斜杨图，这迫使 $\lambda \subseteq \mu$。

反过来，假设 $\lambda \subseteq \mu$。斜舒尔函数 $s_{\mu/\lambda}$ 非零，因为至少存在一个形状为 μ/λ的半标准杨表。例如，可以在第 i行、第 j 列的方格中填入数字 i。Littlewood–Richardson展开为

$$s_{\mu/\lambda} = \sum_{\nu} c_{\lambda,\nu}^{\mu} s_\nu,$$

with each coefficient $c_{\lambda,\nu}^{\mu} \ge 0$. As $s_{\mu/\lambda} \ne 0$, at least one coefficient must be positive; hence $c_{\lambda,\nu}^{\mu} > 0$ for some μ. □

Lemma 8.5. *Let $A \to A'$ be a homomorphism of commutative rings, R be an A-algebra, P be a finitely-generated projective left R-module, and M be an arbitrary left R-module. Then the map*

$$A' \otimes_A \mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_{A' \otimes_A R}(A' \otimes_A P, A' \otimes_A M), \quad (r \otimes f) \mapsto \Big(s \otimes p \mapsto rs \otimes f(p)\Big),$$

is an isomorphism of A'-modules.

Proof. Since P is a finitely-generated projective R-module, there is a finitely-generated R-module Q such that $P \oplus Q \cong R^{\oplus n}$ for some $n \in \mathbb{N}$. It is straightforward to verify that the statement holds when $P = R^{\oplus n}$. Then,

$$\begin{aligned}&(A' \otimes_A \mathrm{Hom}_R(P, M)) \oplus (A' \otimes_A \mathrm{Hom}_R(Q, M))\\ &\cong A' \otimes_A \mathrm{Hom}_R(R^{\oplus n}, M) \overset{*}{\cong} \mathrm{Hom}_{A' \otimes_A R}(A' \otimes_A R^{\oplus n}, A' \otimes_A M)\end{aligned}$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{A'\otimes R}(A'\otimes_A P, A'\otimes_A M)\oplus \mathrm{Hom}_{A'\otimes R}(A'\otimes_A Q, A'\otimes_A M).$$

Since the restriction of the isomorphism labeled $*$ clearly sends the summand $A'\otimes_A \mathrm{Hom}_R(P,M)$ to the summand $\mathrm{Hom}_{A'\otimes R}(A'\otimes_A P, A'\otimes_A M)$, the result follows. □

Define

$$\mathrm{DS}_r = \mathrm{DS}_r(q,q^d) := \mathrm{End}_{\mathcal{DS}}(\uparrow^{\otimes r}), \qquad r\in\mathbb{N}.$$

By Theorem 7.7, we have a bijection

$$R\colon \Lambda = \mathrm{Par} \xrightarrow{\cong} \mathrm{indec}(\mathcal{M}), \qquad R(\lambda) = \mathrm{im}(e_\lambda).$$

For $j\in\mathbb{Z}_{>0}$, define

$$m_j := \begin{cases} d+2j-2 & \text{if } d>0,\\ 2j-2 & \text{if } d\in -2\mathbb{N},\\ 2j-1 & \text{if } d\in -2\mathbb{N}-1,\end{cases} \qquad n_j := \frac{m_j-d}{2} = \begin{cases} j-1 & \text{if } d>0,\\ j-\frac{d}{2}-1 & \text{if } d\in -2\mathbb{N},\\ j-\frac{d}{2}-\frac{1}{2} & \text{if } d\in -2\mathbb{N}-1,\end{cases} \tag{8.1}$$

and

$$r_j := (m_j+1)(n_j+1).$$

Proposition 8.6 (cf. [Cou18, Lem. 6.1.4]). *Define* $\Upsilon := \{\nu^{(j)} : j\in\mathbb{N}\}\subseteq \mathrm{Par}$, *where*

$$\nu^{(0)} = \varnothing \quad \textit{and} \quad \nu^{(j)} = \left((2n_j+2)^{m_j+1}\right) \quad \textit{for } j>0. \tag{8.2}$$

For $\lambda\in\mathrm{Par}$,

$$\dim_{\Bbbk} \mathcal{M}(\mathbb{1}, R(\lambda)) \le \begin{cases} 1 & \textit{if } \lambda\in\Upsilon,\\ 0 & \textit{otherwise.}\end{cases} \tag{8.3}$$

特别地，$\mathbf{B}_{\mathcal{M}}\subseteq\{R(\nu)\colon \nu\in\Upsilon\}$。

我们将在推论 8.10 中证明，不等式(8.3)实际上是等式。

证明。设 $A := \mathbb{C}[\![q-1]\!]$，其分式域为 $\mathbb{C}((q-1))$。那么 $\Bbbk\otimes_{\mathbb{Q}(q)}\mathbb{C}((q-1))$ 是一个特征零环。取 $\Bbbk\otimes_{\mathbb{Q}(q)}\mathbb{C}((q-1))$ 的一个极大理想 $\mathfrak{m}$，并定义

$$\mathbb{K} := \left(\Bbbk\otimes_{\mathbb{Q}(q)}\mathbb{C}((q-1))\right)/\mathfrak{m},$$

它是一个同时包含 $\Bbbk$ 和 $\mathbb{C}((q-1))$ 的域。我们通过 $q\mapsto 1$ 将 $\mathbb{C}$ 视为一个 A-代数。注意，A 是一个剩余域为 $\mathbb{C}$ 的完备离散赋值环。我们将这些环及其相互关系总结如下：

$$\Bbbk\hookrightarrow\mathbb{K}\hookleftarrow A=\mathbb{C}[\![q-1]\!]\xrightarrow{q\mapsto 1}\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{C}.$$

在本证明的其余部分，$\bullet$ 表示 $\{A,\Bbbk,\mathbb{K},\mathbb{C}\}$ 中的任意元素，$\mathbb{F}$ 表示 $\{\Bbbk,\mathbb{K},\mathbb{C}\}$ 中的任意元素。由于我们将在多个基环上进行讨论，我们用上标表示基环。例如，令 $\mathrm{DS}_r^\bullet = \mathrm{DS}_r^\bullet(q,q^d)$ 表示在 $\bullet$ 上定义的 (7.1) 中的代数。由基定理 [SSS25, Th. 7.1] 可知

$$\mathrm{DS}_r^{\mathbb{K}} = \mathbb{K}\otimes_A \mathrm{DS}_r^A \qquad \text{and} \qquad \mathrm{DS}_r^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\otimes_A \mathrm{DS}_r^A.$$

Recall the primitive idempotents $e_\lambda^{\mathbb{F}}$, $\lambda\vdash r$, defined as in (7.9). Since the composite

$$\mathrm{H}_r^{\mathbb{F}}\hookrightarrow \mathrm{DS}_r^{\mathbb{F}} \xrightarrow[\cong]{\pi_r} \mathrm{H}_r^{\mathbb{F}}$$

is the identity map of $\mathrm{H}_r^{\mathbb{F}}$, we have $\pi_r(e_\lambda^{\mathbb{F}}) = \tilde{e}_\lambda^{\mathbb{F}}$. The algebra homomorphism π_r induces a surjective homomorphism of $\mathrm{DS}_r^{\mathbb{F}}$-modules $\mathrm{DS}_r^{\mathbb{F}}e_\lambda^{\mathbb{F}}\to \mathrm{H}_r^{\mathbb{F}}\tilde{e}_\lambda^{\mathbb{F}}$. Since $\mathrm{H}_r^{\mathbb{F}}\tilde{e}_\lambda^{\mathbb{F}}$ is the simple $\mathrm{H}_r^{\mathbb{F}}$-module associated to λ, it follows that $\mathrm{H}_r^{\mathbb{F}}\tilde{e}_\lambda^{\mathbb{F}}$ is absolutely irreducible, and that $R^{\mathbb{F}}(\lambda) = \mathrm{DS}_r^{\mathbb{F}}e_\lambda^{\mathbb{F}}$ is its projective cover (as

a $\mathrm{DS}_r^{\mathbb{F}}$-module). Thus, the inflation of $\mathrm{H}_r^{\mathbb{F}}\tilde{e}_\lambda^{\mathbb{F}}$ is precisely the simple head $L^{\mathbb{F}}(\lambda)$ of $R^{\mathbb{F}}(\lambda)$. Therefore, for any $\mathrm{DS}_r^{\mathbb{F}}$-module M, we have

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^{\mathbb{F}}}\left(R^{\mathbb{F}}(\lambda), M\right) = \left[M : L^{\mathbb{F}}(\lambda)\right]. \tag{8.4}$$

（例如，参见 [Ben98，引理 1.7。6]。绝对不可约性意味着其中出现的 Δ_i 等于 $\mathbb{F}$。）

由于 DS_r^A在 $A = \mathbb{C}[\![q-1]\!]$上是有限秩自由模，因此它是 $(q-1)$-进完备的。因此，根据[Lam01，定理 21.31、推论 21。32], $\mathrm{DSDS}_r^A/(q-1)\,\mathrm{DS}_r^A \cong \mathbb{C}\otimes_A \mathrm{DS}_r^A$中的幂等元可提升为 DS_r^A中的幂等元。特别地，存在一个本原幂等元 $e_\lambda^A \in \mathrm{DS}_r^A$使得

$$1_{\mathbb{C}} \otimes_A e_\lambda^A = e_\lambda^{\mathbb{C}}. \tag{8.5}$$

定义

$$R^A(\lambda) := \mathrm{DS}_r^A e_\lambda^A, \quad \text{so that } R^{\mathbb{C}}(\lambda) = \mathbb{C}\otimes_A R^A(\lambda). \tag{8.6}$$

将 $\mathcal{M}_0^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}, \uparrow^{\otimes r})$ 视为左 $\mathrm{DS}_r^{\mathbb{F}}$-模，我们有

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{M}^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}, R^{\mathbb{F}}(\lambda)) &= \dim_{\mathbb{F}} e_\lambda^{\mathbb{F}}\mathcal{M}_0^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}, \uparrow^{\otimes r}) = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^{\mathbb{F}}}\left(\mathrm{DS}_r^{\mathbb{F}} e_\lambda^{\mathbb{F}}, \mathcal{M}_0^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}, \uparrow^{\otimes r})\right) \\ &= \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^{\mathbb{F}}}\left(R^{\mathbb{F}}(\lambda), \mathcal{M}_0^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}, \uparrow^{\otimes r})\right) \overset{(8.4)}{=} \left[\mathcal{M}_0^{\mathbb{F}}(\mathbb{1}, \uparrow^{\otimes r}) : L^{\mathbb{F}}(\lambda)\right].\end{aligned} \tag{8.7}$$

当 r 为奇数时，$\mathcal{M}_0^{\Bbbk}(\mathbb{1}, \uparrow^{\otimes r}) = 0$。因此，由于 $|\lambda|$ 对所有 $\lambda \in \Upsilon$均为偶数，(8.3) 在 $|\lambda|$ 为奇数时成立。因此，在证明余下部分中，我们假设 r 为偶数。

Let

$$C^\bullet(r) := \mathcal{M}_0^\bullet(\mathbb{1}, \uparrow^{\otimes r}). \tag{8.8}$$

By the basis theorem [SSS25, Th. 7.1], this is a free $\bullet$-module, and so

$$C^{\mathbb{K}}(r) = \mathbb{K}\otimes_A C^A(r) \qquad \text{and} \qquad C^{\mathbb{C}}(r) = \mathbb{C}\otimes_A C^A(r). \tag{8.9}$$

We have

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^{\mathbb{C}}}\left(R^{\mathbb{C}}(\lambda), C^{\mathbb{C}}(r)\right) \underset{(8.8)}{\overset{(8.7)}{=}} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^{\mathbb{C}}(\mathbb{1}, R^{\mathbb{C}}(\lambda)) = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda \in \Upsilon, \\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{8.10}$$

where the final equality is [Cou18, Lem. 6.1.4]. Using (8.6) and (8.9), together with Lemma 8.5 for the ring homomorphisms $A \hookrightarrow \mathbb{K}$ and $A \to \mathbb{C}$, we have

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^{\mathbb{K}}}\left(\mathbb{K}\otimes_A R^A(\lambda), C^{\mathbb{K}}(r)\right) \cong \mathbb{K}\otimes_A \mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^A}\left(R^A(\lambda), C^A(r)\right), \tag{8.11}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^{\mathbb{C}}}\left(R^{\mathbb{C}}(\lambda), C^{\mathbb{C}}(r)\right) \cong \mathbb{C}\otimes_A \mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^A}\left(R^A(\lambda), C^A(r)\right). \tag{8.12}$$

Since A is a principal ideal domain, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^A}\left(R^A(\lambda)\ C^A(r)\right)$ is a free A-module, because it is a submodule of the free module $\mathrm{Hom}_A\left(R^A(\lambda)\ C^A(r)\right)$. Thus, (8.12) implies

$$\mathrm{rank}_A \mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^A}\left(R^A(\lambda), C^A(r)\right) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^{\mathbb{C}}}\left(R^{\mathbb{C}}(\lambda), C^{\mathbb{C}}(r)\right). \tag{8.13}$$

By (8.10) and (8.13), we have

$$\mathrm{rank}_A \mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^A}\left(R^A(\lambda), C^A(r)\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda \in \Upsilon, \\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{8.14}$$

A priori, $1_{\mathbb{K}}\otimes_A e_\lambda^A$ might not be primitive in $\mathrm{DS}_r^{\mathbb{K}}$. However, the projective cover $R^{\mathbb{K}}(\lambda)$ appears as a direct summand of the projective module $\mathbb{K}\otimes_A R^A(\lambda)$. Thus,

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^{\mathbb{K}}}\left(R^{\mathbb{K}}(\lambda), C^{\mathbb{K}}(r)\right) \le \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DS}_r^{\mathbb{K}}}\left(\mathbb{K}\otimes_A R^A(\lambda), C^{\mathbb{K}}(r)\right) \tag{8.15}$$

$$\overset{(8.11)}{=} \operatorname{rank}_A \operatorname{Hom}_{\mathrm{DS}_r^A}\left(R^A(\lambda), C^A(r)\right) \overset{(8.14)}{=} \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda \in \Upsilon, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Thus,

$$\left[C^{\mathbb{K}}(r) : L^{\mathbb{K}}(\lambda)\right] \overset{\substack{(8.4)\\(8.8)}}{=} \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Hom}_{\mathrm{DS}_r^{\mathbb{K}}}\left(R^{\mathbb{K}}(\lambda), C^{\mathbb{K}}(r)\right) \overset{(8.15)}{\leq} \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda \in \Upsilon, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{8.16}$$

现在反设 $\left[C^{\Bbbk}(r) : L^{\Bbbk}(\lambda)\right] \geq 2$。那么我们可以为 $C^{\Bbbk}(r)$选取一个合成列，

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_l = C^{\Bbbk}(r), \tag{8.17}$$

其中至少有两个子商 M_i/M_{i-1} 同构于 $L^{\Bbbk}(\lambda)$。通过从 $\Bbbk$ 到 $\mathbb{K}$的标量扩张，我们由 (8.17) 得到一个 $\mathrm{DS}_r^{\mathbb{K}}$-模列

$$0 = \mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} M_0 \subset \mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} M_1 \subset \cdots \subset \mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} M_l = \mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} C^{\Bbbk}(r) = C^{\mathbb{K}}(r), \tag{8.18}$$

其中至少有两个子商同构于 $\mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} L^{\Bbbk}(\lambda) \cong L^{\mathbb{K}}(\lambda)$。（后一个同构成立，因为 $L^{\Bbbk}(\lambda)$是绝对不可约的。）但这与 (8.16)矛盾。因此，(8.3) 由 (8.7) 和 (8.16) 得出。□

对于 $a, b \in \mathbb{N}$，我们称 $\lambda, \mu \in \mathsf{Par}$ 是 $(a \times b)$-对偶的，若

$$\lambda_{a+1} = 0 = \mu_{a+1} \quad \text{and} \quad \lambda_i + \mu_{a+1-i} = b, \quad \text{for } 1 \leq i \leq a.$$

每个分拆 $\lambda \subseteq (b^a)$ 都有唯一的 $(a \times b)$-对偶。注意，若 λ 是 $(a \times b)$-自对偶的，则 $ab \in 2\mathbb{N}$和 $\lambda \vdash \frac{ab}{2}$。—

引理 8.7（参见 [Cou18，引理 6.1。7]）。假设 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 满足 维数$_{\Bbbk} \mathcal{M}(\mathbb{1}, R(\nu^{(j)})) = 1$。采用 *(P4)*中的记号，我们有

$$\Lambda_j = \{\lambda \in \mathrm{Par} : \lambda \textit{ is } ((m_j+1) \times (2n_j+2))\textit{-self-dual}\}. \tag{8.19}$$

对于 $\lambda \in \Lambda_j$，我们有 维数$_{\Bbbk} M(\mathbf{T}(\lambda) \ R(\lambda)) = 1$。

证明。在 q 不是单位根的假设下，有限维 $\mathrm{H}_r(q)$-模范畴是分裂半单范畴，并且其在抛物诱导下的格罗滕迪克环与对称函数环典范同构。结构常数是 Littlewood–Richardson 系数。因此，（8.19）由命题 8.6 以及 [Cou18，引理 1.2.3(ii)]得出。

假设 $\lambda \in \Lambda_j$。我们有 $\Bbbk$-模同构

$$\mathcal{M}(\mathbf{T}(\lambda), R(\lambda)) \cong \mathcal{M}\left(\mathbb{1}, R(\lambda) \otimes \mathbf{T}(\lambda)^{\vee}\right) \cong \mathcal{M}(\mathbb{1}, R(\lambda) \otimes \mathbf{T}(\lambda)),$$

其中第二个同构由引理 8.3 得出。将 $R(\lambda) \otimes \mathbf{T}(\lambda)$ 分解为不可分解对象之和。由引理 6.3(a)， $R(\nu)$ 在此分解中的重数是 Littlewood–Richardson 系数 $c^{\nu}_{\lambda,\ \lambda}$。因此，我们有一个 $\Bbbk$- 模同构

$$\mathcal{M}(\mathbb{1}, R(\lambda) \otimes \mathbf{T}(\lambda)) \cong \bigoplus_{\nu \in \mathrm{Par}} \mathcal{M}(\mathbb{1}, R(\nu))^{\oplus c^{\nu}_{\lambda,\lambda}} \cong \mathcal{M}\left(\mathbb{1}, R(\nu^{(j)})\right)^{\oplus c^{\nu^{(j)}}_{\lambda,\lambda}} \cong \mathcal{M}\left(\mathbb{1}, R(\nu^{(j)})\right),$$

where the second isomorphism follows from Proposition 8.6, and the third isomorphism follows from [Cou18, Lem. 1.2.3(ii)]. Therefore, $\dim_{\Bbbk} \mathcal{M}(\mathbf{T}(\lambda)\ R(\lambda)) = 1$ by Proposition 8.6. □

Proposition 8.8. *The tuple* $(\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{S}\ \ell, \mathrm{id}_{\mathrm{Par}}, \mathbf{T})$ *is a pagoda, where* $\mathrm{id}_{\mathrm{Par}}$ *denotes the identity map on the set* Par *of partitions.*

Proof. We must verify conditions (P1)–(P5) in Definition 6.2.

条件 (P1)：设 $\lambda \vdash r$。回顾第 7 节中的内容， $\tilde{e}_\lambda$ 是 H_r中与 λ相对应的本原幂等元，并且我们有如下分解

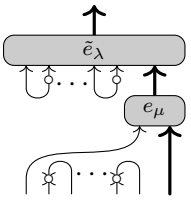
$$\tilde{e}_\lambda = e_\lambda + \sum_{j=1}^{k} e^{(i_j)}_{\mu^{(j)}}, \qquad 1 \le i_j \le \tfrac{r}{2},\ \mu^{(j)} \vdash r - 2i_j, \quad 1 \le j \le k,$$

为 DS 中两两正交的本原幂等元。由于$\mathbf{T}(\lambda)$ 是与幂等元 $\tilde{e}_\lambda$ 对应的对象，因此得到如下分解

$$\mathbf{T}(\lambda) = R(\lambda) \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} R(\mu^{(j)}).$$

固定 $j \in \{1, \dots, k\}$，并令 $i = i_j$, $\mu = \mu^{(j)}$。则

$$0 \neq e^{(i)}_\mu = \tilde{e}_\lambda e^{(i)}_\mu \overset{(7.10)}{=}$$



.

由此可得 $\tilde{e}_\lambda(1_{2i} \otimes e_\mu) \neq 0$，因此 $\tilde{e}_\lambda(1_{2i} \otimes \tilde{e}_\mu) \neq 0$，因为 $\tilde{e}_\mu e_\mu = e_\mu$。这意味着$\lambda \in \nu \otimes \mu$ 对于某个 $\nu \vdash 2i$。因此， $\mu \prec \lambda$ 根据 (6.1)。所以， (P1) 成立。

条件 (P2)：由引理 8.3可得。

条件 (P3)：由命题8.6可得。

条件 (P4)：由引理 8.7可得。

条件 (P5)：设 $j, j' \in \mathbb{N}$带有 $j' < j$，且 $\lambda \in \Lambda_j$。由引理 8.7， λ是 $((m_j+1)\times(2n_j+2))$-自对偶。设 λ' 为一个分拆，其杨图由 λ的杨图删除前 $2(j-j')$ 行和列后得到。则 λ' 是 $((m_{j'}+1)\times(2n_{j'}+2))$-自对偶，且$\lambda' \preceq \lambda$ 由引理 8.4 得出。因此，再次应用引理 8.7，可知条件 (P5) 成立。

条件(P6)：现在假设 $\nu^{(j)} \preceq \kappa \in \lambda \otimes \lambda$ 对于某个 λ， $\kappa \in \Lambda$ 且 $j \in \mathbb{N}$。应用 [Cou18，引理 1.2.3(i)]，取 $\lambda = \mu$， $\nu = \kappa$， $b = 2n_j + 2$和 $a = m_j + 1$，我们有

$$\lambda_i + \lambda_{a+1-i} \ge b \quad \text{for all } 1 \le i \le a. \tag{8.20}$$

对于 $1 \le i \le \lfloor a/2 \rfloor$，设

$$\mu_i = \min(b, \lambda_i) \qquad \text{and} \qquad \mu_{a+1-i} = b - \mu_i.$$

若 a 为奇数，我们还设 $\mu_{(a+1)/2} = b/2$。那么 $\mu \in \mathrm{Par}$， $\mu \subseteq \lambda$和 μ是$(a \times b)$-自对偶的。因此(P6)成立。□

8.2. 子模分类。对于 $m, n \in \mathbb{N}$，令 $\mathrm{U}^\imath_\sigma(m|2n)$ 为 SSS25 定义 5.1]，中所称的量子包络代数 $\mathrm{U}^\imath_\sigma$。令 $\mathrm{U}^\imath_\sigma(m|2n)$-tmod 为其张量模范畴。根据定义，这是 $\mathrm{U}^\imath_\sigma(m|2n)$-模的满子范畴，其中的对象是自然 $U_q(\mathfrak{gl}(m|2n))$-模及其对偶的张量积的限制的直和项的有限直和。固定 $d \in \mathbb{Z} \subseteq \Bbbk$。对于 m, $n \in \mathbb{N}$ 且满足 $d = m - 2n$，令

$$\mathbf{R}^{m,2n}_{\mathcal{DS}} \colon \mathcal{DS}(q, q^d) \to \mathrm{U}^\imath_\sigma(m|2n)\text{-tmod},$$

be the strict morphism of $\mathcal{OS}(q, q^d)$-modules from [SSS25, Th. 6.4]. This induces a functor

$$\mathrm{Kar}(\mathbf{R}^{m,2n}_{\mathcal{DS}}) \colon \mathrm{Kar}(\mathcal{DS}(q, q^d)) \to \mathrm{U}^\imath_\sigma(m|2n)\text{-tmod}.$$

These functors are full by [SSS25, Th. 8.1]. Recall that, to simplify notation, we set

$$\mathcal{OS} = \mathcal{OS}(q, q^d), \qquad \mathcal{DS} = \mathcal{DS}(q, q^d).$$

Theorem 8.9 (cf. [Cou18, Th. 7.1.1]). *The* $\mathrm{Kar}(\mathcal{OS})$*-submodules of* $\mathrm{Kar}(\mathcal{DS})$ *form a set* $\{\mathcal{M}_j : j \in \mathbb{N}\}$ *with*

$$\mathrm{Kar}(\mathcal{DS}) = \mathcal{M}_0 \supsetneq \mathcal{M}_1 \supsetneq \mathcal{M}_2 \supsetneq \mathcal{M}_3 \supsetneq \cdots \tag{8.21}$$

and $\mathrm{Ob}\colon \mathrm{Submod}_{\mathrm{Kar}(\mathcal{OS})}(\mathrm{Kar}(\mathcal{DS})) \to \mathrm{Thick}(K_\oplus(\mathrm{Kar}(\mathcal{DS})))$ *is an isomorphism. For* $j \in \mathbb{Z}_{>0}$*, we have the following descriptions of* $\mathcal{M}_j$*, with* m_j*,* n_j *as in (8.1):*

(a) For $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{DS})$*, the* $\Bbbk$*-module* $\mathcal{M}_j(X,Y)$ *consists of all morphisms that factor as* $X \to Z \to Y$ *for some* Z *equal to a direct sum of objects* $R(\mu)$*, with* $\mu \in \mathrm{Par}$ *satisfying*

$$\mu_i^t + \mu_{2n_j+3-i}^t > m_j \qquad \text{for all } 1 \le i \le n_j + 1. \tag{8.22}$$

(b) We have $\mathcal{M}_j = \ker \mathrm{Kar}(\mathbf{R}_{\mathcal{DS}}^{m_j,2n_j})$ *for all* $j > 0$*.*

(c) The submodule $M_j := \mathcal{M}_j(\mathbb{1}, -) \in \mathrm{Submod}_{P(\mathrm{Kar}(\mathcal{DS}))}(\mathrm{Kar}(\mathcal{DS})_{\mathbb{1}})$ *is determined by*

$$M_j(R(\nu^{(k)})) = 0 \text{ if } k < j \quad \text{and} \quad M_j(R(\nu^{(k)})) = \mathcal{DS}(\mathbb{1}, R(\nu^{(k)})) \quad \text{if } k \ge j,$$

with $\nu^{(j)}$ 如 *(8.2)*所示。

证明。由命题 8.8，我们可以应用定理 6.4。定理 8.9 的第一句可由定理 (a) 和 (b) 两部分推出。定理 6.4。定理 (c) 8.9 的 (c) 部分可由定理6.4的 (c) 部分推出。

接下来证明 (a) 部分。由定理 5.3(b)、定理 6.4(b)、引理 8.4 和引理 8.7，$\mathrm{M}j(X,Y)$ 由所有可分解为 $X \to Z \to Y$ 的态射构成，其中 Z 等于对象 $R(\mu)$ 的直和，并满足 $\lambda \subseteq \mu$，其中 λ 是 $((m_j+1)\times(2n_j+2))$-自对偶。因此，只需证明关于 μ 的这一条件等价于 (8.22)。

若 $\lambda \subseteq \mu$ 和 λ 是 $((m_j+1)\times(2n_j+2))$-自对偶的，则

$$\mu_i^t + \mu_{2n_j+3-i}^t \ge \lambda_i^t + \lambda_{2n_j+3-i}^t = m_j + 1,$$

因此 μ 满足 (8.22)。反过来，假设 μ 满足 (8.22)。定义 $\lambda \in$Par 如下：

$$\lambda_i^t = \min(\mu_i^t, m_j+1), \qquad \lambda_{2n_j+3-i}^t = m_j + 1 - \lambda_i^t \ \left(\le \mu_{2n_j+3-i}^t\right), \qquad 1 \le i \le n_j + 1.$$

于是 $\lambda \subseteq \mu$，并且根据构造，λ 是 $((m_j+1)\times(2n_j+2))$-自对偶的。

剩下需要证明 (b) 部分。我们有如下函子的交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathrm{Kar}(\mathbf{R}_{\mathcal{OS}}^{m,2n})} & U_q(\mathfrak{gl}(m|2n))\text{-tmod} \\ {\scriptstyle \mathrm{Kar}(\mathbf{T})}\downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Kar}(\mathcal{DS}) & \xrightarrow{\mathrm{Kar}(\mathbf{R}_{\mathcal{DS}}^{m,2n})} & \mathrm{U}_\sigma^\imath(m|2n)\text{-tmod} \end{array} \tag{8.23}$$

其中右侧的垂直映射是限制，左侧的垂直映射则利用了 OS 是 DS 的子范畴这一事实。将函子 R^m，^{2n}OS 限制到 S 上后，它对应于针对 $U_q(\mathfrak{gl}(m|2n))$ 的舒尔–韦尔对偶的量子类比。其像包含于多项式表示的半单范畴中；参见 [BKK00，命题 3.1]。注意，$\mathrm{Kar}(\mathrm{R}^{m_j},{}^{2n_j}\mathrm{OS})(\lambda)$ 是岩堀–赫克代数 $\mathrm{H}_{|\lambda|}$ 中幂等元 $\tilde{e}_\lambda$ 在 $U_q(\mathfrak{gl}(m_j|2n_j))$ 的标准表示的 $|\lambda|$ 重张量积中的像。根据舒尔 – 韦尔 – 谢尔盖耶夫量子对偶（例如参见 [Mit06，定理 5.1]），$\tilde{e}_\lambda$ 的像非零当且仅当 λ 是一个 $(m_j, 2n_j)$-钩形分拆。因此，对于 $\lambda \in \mathrm{Par}$，

$$\mathrm{Kar}(\mathbf{R}_{\mathcal{OS}}^{m_j,2n_j})(\lambda) = 0 \iff \lambda_{m_j+1} > 2n_j.$$

(See also [BKK00, Th. 4.14 and Th. 5.1]. See [CW12, Prop. 3.26] for an analogous statement in the non-quantum setting.) Thus, for $j \in \mathbb{N}$, we have

$$\mathrm{Kar}(\mathbf{R}_{\mathcal{OS}}^{m_j,2n_j})(\nu^{(j)}) = 0 \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Kar}(\mathbf{R}_{\mathcal{OS}}^{m_j,2n_j})(\nu^{(j')}) \ne 0 \text{ for } j' < j.$$

By commutativity of (8.23), this implies that

$$\text{(8.24)}\qquad \mathrm{Kar}(\mathbf{R}_{\mathcal{DS}}^{m_j,2n_j})(\mathbf{T}(\nu^{(j)}))=0 \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Kar}(\mathbf{R}_{\mathcal{DS}}^{m_j,2n_j})(\mathbf{T}(\nu^{(j')}))\neq 0 \text{ for } j'<j.$$

特别地，$\ker \mathrm{Kar}(\mathbf{R}^{m_j,2n_j}\mathrm{DS})$、$j\in\mathbb{N}$ 两两不同。由 (P1) 以及 (8.24) 中的等式可得 $\mathrm{Kar}(\mathbf{R}^{m_j,2n_j}\mathrm{DS})(R(\nu^{(j)}))=0$。由于根据定理 6.4，$\mathbf{M}_j=\Psi^{-1}(\mathrm{Tr}_{R(\nu^{(j)})}\mathbf{M}_{\mathbb{1}})$，因此 $\mathbf{M}_j\subseteq \ker\mathrm{Kar}(\mathbf{R}^{m_j,2n_j}\mathrm{DS})$。于是，(b) 由 (8.21) 得出。□

由定理 8.9 可知，(8.3) 中的不等式实际上是等式。

推论 8.10. 对于 $\lambda\in\mathrm{Par}$，

$$\dim_{\Bbbk}\mathcal{M}(\mathbb{1},R(\lambda))=\begin{cases}1 & \text{if } \lambda\in\Upsilon,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

特别地，$\mathbf{B}_{\mathcal{M}}=\{R(\nu):\ \nu\in\Upsilon\}$ 和 $\mathbb{L}=\mathbb{N}$。

推论 8.11. 对于 m，$n\in\mathbb{N}$，我们有 $\ker(\mathrm{Kar}(\mathbf{R}^{m,2n}{}_{\mathcal{DS}}))$ 作为一个 $\mathrm{Kar}(\mathcal{OS}(q,q^{m-2n}))$-模，由幂等元 $e_{(2n+2)^{m+1}}$ 生成，该幂等元定义如 (7.9) 所示。

证明。令 $d=m-2n$ 并设定

$$j=\begin{cases}n+1 & \text{if } d>0,\\ \frac{m+2}{2} & \text{if } d\in -2\mathbb{N},\\ \frac{m+1}{2} & \text{if } d\in -2\mathbb{N}-1,\end{cases}$$

使得

$$m=m_j,\qquad n=n_j,\qquad \nu^{(j)}=(2n+2)^{m+1}.$$

令 $\langle e_{\nu^{(j)}}\rangle$ 为由 $\mathrm{Kar}(\mathcal{OS})$-子模，它是 $\mathrm{Kar}(\mathcal{DS})$ 由 $e_{\nu^{(j)}}=1_{R(\nu^{(j)})\in\mathrm{End}_{\mathrm{Kar}(\mathcal{DS})}(R(\nu^{(j)}))}$ 生成的。根据 (8.24) 和(P1)，我们有

$$\mathrm{Kar}(\mathbf{R}_{\mathcal{DS}}^{m_j,2n_j})(R(\nu^{(j)}))=0.$$

因此，$e_{\nu^{(j)}}\in$ 核 $(\mathrm{Kar}(\mathbf{R}^{m_j,2n_j}{}_{\mathcal{DS}}))=\mathcal{M}j$ (定理 8.9(b))。因此，$\langle e_{\nu^{(j)}}\rangle\subseteq\mathcal{M}j$。由于

$$\mathcal{M}(\mathbb{1},R(\nu^{(j)}))=1_{R(\nu^{(j)})}\mathcal{M}(\mathbb{1},R(\nu^{(j)}))$$

根据推论 8.10，该对象非零；而根据定理 8.9(c)，$\mathcal{M}_{j+1}(\mathbb{1},R(\nu^{(j)}))=0$，可知 $e_{\nu^{(j)}}=1_{R(\nu^{(j)})}\notin\mathcal{M}j+1$。因此，$\langle e_{\nu^{(j)}}\rangle\not\subseteq\mathcal{M}j+1$。由于真 $\mathrm{Kar}(\mathcal{OS})$-子模构成严格下降链（8.21），可知 $\mathcal{M}j$ 中不包含于 $\mathcal{M}j+1$ 的 $\mathrm{Kar}(\mathcal{OS})$-子模只有 $\mathcal{M}j$ 本身。因此，$\langle e_{\nu^{(j)}}\rangle=\mathcal{M}j$。□

推论 8.12. $\mathcal{OS}(q,q^d)$ 中的真子模 $\mathcal{DS}(q,q^d)$ 均具有形式 核 $\left(\mathbf{R}^{m_j,2n_j\mathcal{DS}}\right)$，$j\in\mathbb{N}$，并构成一条严格下降链

$$\mathcal{DS}\supsetneq\ker(\mathbf{R}_{\mathcal{DS}}^{m_1,2n_1})\supsetneq\ker(\mathbf{R}_{\mathcal{DS}}^{m_2,2n_2})\supsetneq\ker(\mathbf{R}_{\mathcal{DS}}^{m_3,2n_3})\supsetneq\cdots.$$

此外，$\mathbf{R}^{m,2n}{}_{\mathcal{DS}}$ 的核作为一个 $\mathcal{OS}(q,q^{m-2n})$-模由 $e_{(2n+2)^{m+1}}$ 生成。

证明。这由定理8.9、推论 8.11和命题 4.1，以及以下事实可得：$\ker(\mathrm{Kar}(\mathbf{F}))=\mathrm{Kar}(\ker(\mathbf{F}))$ 对于一个 $\Bbbk$-线性函子 $\mathbf{F}$。□

现在我们可以给出 $\mathrm{U}_\sigma^\imath(m|2n)$-tmod 范畴的一个表示，其中包含 $\mathrm{U}_\sigma^\imath(m|2n)$ 的张量模。

推论 8.13. 我们有一个 $\mathcal{OS}(q,q^d)$-模范畴的等价

$$\mathrm{U}_\sigma^\imath(m|2n)\text{-tmod}\simeq\mathrm{Kar}\left(\mathcal{DS}(q,q^{m-2n})/\langle e_{(2n+2)^{m+1}}\rangle\right),$$

where $\langle e_{(2n+2)^{m+1}}\rangle$ *is the* $\mathcal{OS}(q,q^{m-2n})$*-submodule of* $\mathcal{DS}(q,q^{m-2n})$ *generated by* $e_{(2n+2)^{m+1}}$.

Proof. The functor $\mathbf{R}_{\mathcal{DS}}^{m,2n}$ is full by [SSS25, Th. 8.1]. Thus, it induces a full and faithful functor

$$\mathcal{DS}(q, q^{m-2n})/\langle e_{(2n+2)^{m+1}} \rangle \to \mathrm{U}_\sigma^\imath(m|2n)\text{-tmod}$$

by Corollary 8.12. Since the image of this functor contains the natural module and its dual, we have that $\mathrm{Kar}(\mathbf{R}_{\mathcal{DS}}^{m,2n})$ induces the stated equivalence of categories. □

References

[AK02] Y. André 和 B. Kahn。《幂零性、根基与幺半结构》。Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 108:107–291, 2002。附录由 Peter O'Sullivan 撰写。 arXiv:math/0203273。[BCNR17] J. Brundan、J. Comes、D. Nash 和 A. Reynolds。《仿射定向 Brauer 范畴及其分圆商的基定理》。Quantum Topol., 8(1):75–112, 2017。 arXiv:1404.6574, doi:10.4171/QT/87。[Ben98] D. J. Benson。《表示与上同调。I》，剑桥高等数学研究丛书第 30 卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，1998。有限群与结合代数的基础表示论。[BK19] M. Balagović 和 S. Kolb。《量子对称对的万能 K 矩阵》。J. Reine Angew. Math., 747:299–353, 2019。 arXiv:1507.06276, doi:10.1515/crelle-2016-0012。[BKK00] G. Benkart、S.-J. Kang 和 M. Kashiwara。《量子超代数 $U_q(\mathfrak{gl}(m,n))$ 的晶体基》。J. Amer. Math. Soc., 13(2):295–331, 2000。 arXiv:math/9810092, doi:10.1090/S0894-0347-00-00321-0。[Bro13] A. Brochier。《实心环面中缠结的分圆结合子与有限型不变量》。Algebr. Geom. Topol., 13(6):3365–3409, 2013。 doi:10.2140/agt.2013.13.3365。[Bru17] J. Brundan。《定向 skein 范畴的表示》。2017。 arXiv:1712.08953。[CH17] J. Comes 和 T. Heidersdorf。《Deligne 范畴 Rep(O_δ) 中的厚理想》。J. Algebra, 480:237–265, 2017。arXiv:1507.06728, doi:10.1016/j.jalgebra.2017.01.050。[CO11] J. Comes 和 V. Ostrik。《关于 Deligne 范畴 Rep(S_t) 的分块》。Adv. Math., 226(2):1331–1377, 2011。arXiv:0910.5695, doi:10.1016/j.aim.2010.08.010。[Cou18] K. Coulembier。《张量理想、Deligne 范畴与不变量理论》。Selecta Math. (N.S.), 24(5):4659–4710, 2018。 arXiv:1712.06248, doi:10.1007/s00029-018-0433-z。[CW12] S.-J. Cheng 和 W. Wang。《李超代数的对偶性与表示》，数学研究生丛书第 144 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012。 doi:10.1090/gsm/144。[EGNO15] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik。《张量范畴》，数学调查与专著第 205 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。 doi:10.1090/surv/205。[Enr07] B. Enriquez。《拟反射代数与分圆结合子》。Selecta Math. (N.S.),

13 3 391 463, ( ): – 。.[

2007 doi:10.1007/s00029-007-0048-2

GL96] J. J. Graham 和 G. I. Lehrer。《胞腔代数》。Invent. Math.,

123 1 1 34, 1996 doi:10.1007/ ( ): – 。.[

BF01232365

HO01] R. Häring-Oldenburg。《张量范畴作用、圆柱辫及其考夫曼多项式》。Topology Appl., 112(3):297–314, 2001。 doi:10.1016/S0166-8641(00)00006-7。[Kra15] H. Krause。《Krull–Schmidt 范畴与投射覆盖》。Expo. Math., 33 4 535 549, 2015 arXiv: ( ): –

。, 1410.2822

doi:10.1016/j.exmath.2015.10.001。[KX98] S. König 和 C. Xi。《关于胞腔代数的结构》。载于《代数与模 II》（Geiranger，1996），CMS 会议论文集第 24 卷，第 365–386 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998。[Lam01] T. Y. Lam。《非交换环初级教程》，数学研究生教材第 131 卷。Springer-Verlag，纽约，第二版，2001。 doi:10.1007/978-1-4419-8616-0。[Mit06] H. Mitsuhashi。《量子超代数与 Iwahori–Hecke 代数之间的 Schur–Weyl 互反性》。Algebr. Represent. Theory, 9:309–322, 2006。 arXiv:math/0506156, doi:10.1007/s10468-006-9014-5。[QS19] H. Queffelec 和 A. Sartori。《混合量子斜 Howe 对偶与 A 型链环不变量》。J. Pure Appl. Algebra, 223(7):2733–2779, 2019。 arXiv:1504.01225, doi:10.1016/j.jpaa.2018.09.014。[RSS24] H. Rui、M. Si 和 L. Song。《 q-Brauer 代数的 Jucys–Murphy 基与半单性判据》。Lett. Math. Phys.,

114 4 104, 36, 2024 arXiv:2211.14756 doi:10.1007/ ( ):论文编号

s11005-024-01850-8

. , .[Sel11] P. Selinger。《幺半范畴图形语言综述》。载于《物理学的新结构》，物理学讲义丛书第

813 289 355 2011 arXiv:0908.3347 doi:10.1007/ 卷，第 – 页。

978-3-642-12821-9 4

Springer，海德堡，. , ..[SSS25] H. Salmasian、A. Savage 和 Y. Shen。《非定向 skein 与 i量子布劳尔范畴》。Forum Math. Sigma, 2025。即将出版。 arXiv:2507.12328。[tD98] T. tom Dieck。《有根圆柱带范畴及其表示》。第 494 卷，第 35–63 页。1998。谨以此文纪念 Martin Kneser 七十寿辰。 doi:10.1515/crll.1998.010。

[tDHO98] T. tom Dieck 和 R. Häring-Oldenburg。《量子群与圆柱编织》。Forum Math., 10(5):619–639, 1998。 doi:10.1515/form.10.5.619。[Tur89] V. G. Turaev。《缠结的算子不变量与 R-矩阵》。苏联科学院数学系列, 53(5):1073–1107, 1135, 1989。 doi:10.1070/IM1990v035n02ABEnH000711。(H.S.) 渥太华大学数学与统计学系，加拿大安大略省渥太华，K1N 6N5 URL: mysite.science.uottawa.ca/hsalmasi/, ORCiD: orcid.org/0000-0002-1073-7183电子邮箱： hadi.salmasian@uottawa.ca(A.S.) 渥太华大学数学与统计学系，加拿大安大略省渥太华，K1N 6N5 URL: alistairsavage.ca, ORCiD: orcid.org/0000-0002-2859-0239电子邮箱: alistair.savage@uottawa.ca(Y.S.) 渥太华大学数学与统计学系，加拿大安大略省渥太华，K1N 6N5 URL: sites.google.com/virginia.edu/yaolongshen, ORCiD: orcid.org/0000-0002-8840-3394电子邮箱: yshen5@uottawa.ca