arXiv:2603.18268v1 [math.MG] 18 Mar 2026

# 某些 $\ell_p$-和与锥的精确 Banach–Mazur 距离

Florian Grundbacher 和 Tomasz Kobos

2026年3月20日

**摘要**

我们确定了涉及有限维实赋范空间的 $\ell_p$-直和以及相关凸体锥构造的若干 Banach–Mazur 距离。借助近期关于相对于欧几里得球的最优 Banach–Mazur 位置的刻画，我们推导出一个闭式公式，用 $X_1 \oplus_p \cdots \oplus_p X_k$ 到欧几里得空间的距离表示空间 $X_i$ 到欧几里得空间的距离。对于 $p = 1$，我们证明，若 $d_{BM}(X,\ \ell_1^n) \leq 3$，则 $d_{BM}(X \oplus_1 \ell_1^m,\ \ell_1^{n+m}) = d_{BM}(X,\ \ell_1^n)$。将$\ell_1$-和从几何角度解释为双锥，促使我们研究任意凸底上的单锥；对此，我们建立了类似结果，其中单纯形取代了 $\ell_1$。我们还证明，在三维情形下，具有对称底集的单锥之间的距离等于底集之间的距离；对于任意维数中平面对称基底上的双锥，在对底集到 $\ell_1^2$的距离作出额外假设时，同样的等式也成立。作为推论，我们得到二维对称 Banach–Mazur 紧空间到三维（非对称）紧空间的显式等距嵌入，并将近期关于在二维对称紧集内构造任意大等边集的结果推广到所有更高维数。

## 1 引言与结果

本文旨在确定有限维实赋范空间的若干 $\ell_p$-和构造之间的精确 Banach–Mazur 距离，以及 $\mathbb{R}^n$ 中一般凸体的相关锥构造之间的精确距离。

在陈述主要结果之前，我们先引入所需的记号，并回顾一些基本事实。对于任意整数 $n \geq 1$ 和标量 $p \in [1, \infty]$，我们将赋予范数 $\|\cdot\|_p$ 的空间 $\mathbb{R}^n$ 记为 $\ell_p^n$，其中范数 $\|\cdot\|_p$ 对 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 定义为

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}},$$

其中，对于 $p = \infty$，我们将 $\|x\|_\infty =$理解为 $\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$max$\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$。特别地，$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 分别表示 $\ell_1$范数、欧几里得范数和最大范数。其单位球

2020 数学主题分类。 主要分类 52A21；次要分类 46B04、46B20、52A20。关键词与短语。 Banach–Mazur 距离、p-和、凸锥、等距嵌入。

$\ell_p^n$由下式给出： $\mathbb{B}_p^n$。更一般地，给定 $p \in [1,\infty]$和有限维赋范空间$X_i = (\mathbb{R}^{n_i}, \|\cdot\|_{X_i})$ 其中 $i = 1, \ldots\ldots, k$，则 $\ell_p$直和 $X_1 \oplus_p \ldots \oplus_p X_k$是赋予范数 $\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_k}$的空间

$$\|x\| = \left(\|x^1\|_{X_1}^p + \ldots + \|x^k\|_{X_k}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $x = (x^1, \ldots\ldots, x^k)$，且对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, k$，都有 $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$。对于 $p = \infty$，我们仍将$\|x\| = \max\{\|x^1\|_{X_1}, \ldots, \|x^k\|_{X_k}\}$理解为最大值。

对于集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$，其 $v$平移 向量为 $v \in \mathbb{R}^n$定义为 $A+v = \{a+v : a \in A\}$。其 $\rho$伸缩 比例为 $\rho \in \mathbb{R}$ 定义为 $\rho A = \{\rho a : a \in A\}$。若 $A$ 是 0-对称的，则 $(-1)A = A$；若 （中心）对称，则 $A + v$ 是 0-对称的，其中 $v \in \mathbb{R}^n$。

两个同维实赋范空间 之间的 *Banach–Mazur* 距离 定义为 $X$， $Y$

$$d_{BM}(X,Y) = \inf \|T\| \, \|T^{-1}\|,$$

其中，下确界（事实上，在有限维情形下可取到最小值）取遍所有可逆线性算子 $T : X \to Y$，并采用标准算子范数。对于 凸体 $K$， $L \subseteq \mathbb{R}^n$，即内部非空的紧凸集，其 *Banach–Mazur* 距离定义为

$$d_{BM}(K,L) = \inf\{\rho \geq 0 : K + u \subseteq T(L + v) \subseteq \rho(K + u)\},$$

其中下确界（同样是最小值）取遍所有可逆线性算子 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$以及向量 $u, v \in \mathbb{R}^n$。更一般地，若 $K$ 和 $L$ 是 $d$维凸体，即其仿射包的维数为 $d$，则将$K$ 和 $L$ 嵌入到 $\mathbb{R}^d$中后， $d_{BM}(K,L)$的定义与上文相同。当 $K$ 和 $L$ 中心对称时，平移向量 $u$ 和 $v$ 可以省略。根据范数与中心对称凸体之间众所周知的对应关系，对于任意两个赋范空间 $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$、$Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_Y)$及其各自的单位球 $B_X$、 $B_Y \subseteq \mathbb{R}^n$，等式 $d_{BM}(X,Y) = d_{BM}(B_x, B_y)$成立。 $n$维 Banach–Mazur 紧空间 $\mathcal{BM}^n$ 是由 $n$维凸体的仿射等价类构成的集合，并配备（乘法）度量 $d_{BM}$。用 $\mathcal{BM}_s^n$ 表示$\mathcal{BM}^n$ 的子集，该子集仅对应于中心对称凸体，即 $n$维对称Banach–Mazur紧化空间。

实 $\ell_p$范数空间的直和是班纳赫空间几何中的基本构造之一，其诸多方面已在各种不同背景下得到研究。特别是，当涉及 $\ell_p$和时，Banach–Mazur 距离的估计往往发挥重要作用，参见例如 [4, 5, 11, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 22]。

在绝大多数这类研究中，与 $\ell_p$和相关的 Banach–Mazur 距离仅得到估计，而未被精确确定。这反映了 Banach–Mazur 紧空间的一个更普遍的事实：其大多数性质只在渐近范围内得到确立，也就是说，当维数趋于无穷时才成立。部分原因在于，精确计算距离需要求解优化问题，即使在非常具体的情形下，这类问题也可能颇具挑战。一个值得注意的例子是经典空间 $\ell_1^n$ 和 $\ell_\infty^n$。已知它们的距离为 $\sqrt{n}$ 阶，但除平凡情形 $n = 1$，2 外，精确值仅在 $n = 3$ 时确定为 $\frac{9}{5}$，在 $n = 4$ 时确定为 2（见 [17]）。迄今为止，距离 $\frac{9}{5}$ 似乎是已计算出的三维实赋范空间之间最大的 Banach–Mazur 距离。

本文的主要目标是研究若干情形，在这些情形中，到 $\ell_p$-和的 Banach–Mazur 距离可以被精确确定，从而使我们能够明确计算

许多不同赋范空间对或凸体对之间的 Banach–Mazur 距离。在具体情形中，求得 Banach–Mazur 距离的上界通常较为直接，而要证明与之匹配的下界则是主要难点，这需要适当的工具，并且往往还需施加限制。少数已精确计算出到一个 $\ell_p$-和的 Banach–Mazur 距离的情形之一，是 [22, Tomczak-Jaegermann 的命题 2] 。该命题证明，对于任意整数 $n \geq 1$ 以及任意 $1 < p \leq 2$，都有

$$d_{BM}(\ell_p^n \oplus_{p^*} \ldots \oplus_{p^*} \ell_p^n, \ell_2^{n^2}) = n^{\frac{2-p}{p}}, \tag{1}$$

其中 $p^* = \frac{p}{p-1} \in [2, \infty)$ 是 $p$ 的共轭指数，并且恰有 $n$ 个相同的加项。该证明方法高度依赖这一特定和中大量存在的对称性，因此适用范围有限。

我们首先对 (1) 作出广泛推广，根据各个加项的距离，计算欧几里得空间与有限维实赋范空间的任意 $\ell_p$-和之间的 Banach–Mazur 距离。结果如下。

**定理 1.1.** 设 $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$ 为整数，且 $X_i$ 是一个 $n_i$ 维实赋范空间，其中 $i = 1, \ldots, k$。那么，对于任意 $p \in [1, \infty]$,

$$d_{BM}(X_1 \oplus_p \ldots \oplus_p X_k, \ell_2^{n_1+\ldots+n_k}) = \|(d_{BM}(X_1, \ell_2^{n_1}), \ldots, d_{BM}(X_k, \ell_2^{n_k})\|_r,$$

其中 $r = \frac{2p}{|p-2|} \in [2, \infty]$ （约定当 $p = 2$ 时取 $r = \infty$，当 $p = \infty$ 时取 $r = 2$）。

证明在第2 节中给出，并依赖于一项近期的刻画 [8] ：关于相对于欧几里得球的最优 Banach–Mazur 位置，可通过接触点上的代数分解来刻画（见下文定理2.1 ），该结果受 Ader 的一篇早期论文启发 [1]。一个关键观察是，当每个加项相对于欧几里得空间都已处于最优位置时，$\ell_p$-和运算会保持最优 Banach–Mazur 位置。定理1.1的一些进一步推论将在第2节中讨论。

在第3节中，我们将注意力转向 $\ell_1$-和与 $\ell_1^m$ 以及相关的锥构造。从几何上看，如果 $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 是一个单位球为 $B_X \subseteq \mathbb{R}^n$的赋范空间，那么 $X \oplus_1 \ell_1^m$在 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中的单位球是一个双锥，其 $m$ 对称顶点对位于底面 $B_X$之上。事实证明，只要初始距离不太大，这一运算就能保持其到 $\ell_1$ 空间的 Banach–Mazur 距离。根据对偶性，对于 $\ell_\infty$-和与$\ell_\infty^m$，也有类似结果；从几何上看，这对应于在 $X$的单位球上构造一个圆柱。

**定理1.2.** 设 $n$、$m \geq 1$ 为整数，且 $X$ 是一个 $n$ 维实赋范空间，其 $d_{BM}(X$、$\ell_1^n) \leq 3$。那么

$$d_{BM}(X \oplus_1 \ell_1^m, \ell_1^{n+m}) = d_{BM}(X, \ell_1^n).$$

类似地，若 $d_{BM}(X$、$\ell_\infty^n) \leq 3$，则

$$d_{BM}(X \oplus_\infty \ell_\infty^m, \ell_\infty^{n+m}) = d_{BM}(X, \ell_\infty^n).$$

在此　由于 $\mathcal{BM}_s^n$ 的直径至多为 $n$，我们立即得到以下推论　ry.

**推论 1.3**。 对于整数 $n$、$m \geq 1$，以及满足 维数$(X) = n \leq 3$ 的实赋范空间 $X$，

$$d_{BM}(X \oplus_1 \ell_1^m, \ell_1^{n+m}) = d_{BM}(X, \ell_1^n) \quad \text{and} \quad d_{BM}(X \oplus_\infty \ell_\infty^m, \ell_\infty^{n+m}) = d_{BM}(X, \ell_\infty^n).$$

由于 $\ell_1$-和对应于在一个对称底面上构造中心对称双锥，因此自然也会考虑任意凸底上的（非对称）单锥。在这种情况下，我们得到定理1.2的如下类比：用单纯形替代交叉多胞体（即 $\ell_1$ 的单位球）。 $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^n$ 表示中的任意一个单纯形， $\mathbb{R}^n$，而 $\operatorname{conv}(A)$ 表示集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$的凸包。

**定理 1.4**。 设 $n$、$m \geq 1$ 为整数，且 $B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ 是一个 $n$ 维凸体，其 $d_{BM}(B, \Delta^n) \leq 2$。设 $v^1, \ldots, v^m \in \mathbb{R}^{n+m}$ 为任意向量，使得 $C = \operatorname{conv}(B \cup \{v^1, \ldots, v^m\}) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ 是一个 $(n+m)$ 维凸体。那么

$$d_{BM}(C, \Delta^{n+m}) = d_{BM}(B, \Delta^n).$$

定理 1.2 和 1.4 中 Banach–Mazur 距离匹配下界的关键思想在两种情形中是相同的：对于相关凸体的任意 Banach–Mazur 位置，都存在一个投影到低维子空间的线性投影，将这些（双）圆锥映射为与相应圆锥的底面仿射等价的凸体。

这一射影方法在第 4 节中得到进一步发展；在那里，我们首先考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的具有平面对称底面的单锥。在这种情况下，圆锥之间的距离最终证明与其底面之间的距离相同。

**定理 1.5**。 设 $B_1$、$B_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ 是2维对称凸体， $v^1$、$v^2 \in \mathbb{R}^3$ 是任意向量，并满足 $C_i =$ 凸包$(B_i \cup \{v^i\})$ 对于 $i = 1$、$2$ 是3维凸体。则

$$d_{BM}(C_1, C_2) = d_{BM}(B_1, B_2). \tag{2}$$

作为推论，我们得到 2 维对称 Banach–Mazur 紧空间 $\mathcal{BM}_s^2$ 到 3 维（非对称）Banach–Mazur 紧空间 $\mathcal{BM}^3$中的一个显式等距嵌入。据我们所知，令人惊讶的是，这是不同维数的 Banach–Mazur 紧空间之间此类嵌入的首个实例（除了 1 维紧空间的平凡嵌入之外）。在本文中以及下文始终，我们用 $e^1$，…， $e^n$表示 标准单位基 的 $\mathbb{R}^n$。

**推论 1.6**。 由下式定义的映射 $\varphi\colon \mathcal{BM}_s^2 \to \mathcal{BM}^3$

$$\varphi(C) = \operatorname{conv}\left((C \times \{0\}) \cup \{\pm e^3\}\right) \quad \text{for } C \in \mathcal{BM}_s^2$$

是从 $\left(\mathcal{BM}_s^2, d_{BM}\right)$ 到 $\left(\mathcal{BM}^3, d_{BM}\right)$的等距嵌入。

自然可以猜想，对于中心对称双锥也成立与 (2) 类似的等式，这将把推论 1.6 加强为将 $\mathcal{BM}_s^2$ 嵌入 $\mathcal{BM}_s^3$。我们不知道这在一般情况下是否成立。不过，在额外假设至少有一个底面与 $\ell_1^2$相距不太远的条件下，我们可以证明这一点，代价是将双锥嵌入任意维数的空间。关于这一假设必要性的讨论见第 4 节中定理的证明之后（相关细节也见开放问题4.2和注4.3 ）。

**定理 1.7**。设 $X_1$ 和 $X_2$ 是2 维实赋范空间，且满足 $d_{BM}(X_1, \ell_1^2) \geq d_{BM}(X_1, X_2)$ 或 $d_{BM}(X_2, \ell_1^2) \geq d_{BM}(X_1, X_2)$。那么，对任意整数 $m \geq 1$,

$$d_{BM}(X_1 \oplus_1 \ell_1^m, X_2 \oplus_1 \ell_1^m) = d_{BM}(X_1, X_2).$$

根据对偶性，对于带有 $\ell_\infty^m$ 的 $\ell_\infty$-和也有类似的结果。作为应用，我们得到：对于任意 $n \geq 3$, $\mathcal{BM}_s^2 \setminus \{\ell_1^2\}$ 可局部等距嵌入到 $\mathcal{BM}_s^n$ 中。在下述推论中，我们将对称Banach–Mazur紧化空间 $\mathcal{BM}_s^n$ 视为由 $n$ 维赋范空间的等距类组成。

**推论 1.8.** 对于整数 $n \geq 3$，令 $\psi$： $\mathcal{BM}_s^2 \to \mathcal{BM}_s^n$ 为由下式定义的映射

$$\psi(X) = X \oplus_1 \ell_1^{n-2} \quad for\ X \in \mathcal{BM}_s^2.$$

设对于 $X \in \mathcal{BM}_s^2 \setminus \{\ell_1^2\}$, $X_1$、$X_2 \in \mathcal{BM}_s^2$ 满足 $d_{BM}(X, X_i) \leq d_{BM}(X, \ell_1^2)$ $\frac{1}{3}$, 其中$i = 1,2$。那么

$$d_{BM}(\psi(X_1), \psi(X_2)) = d_{BM}(X_1, X_2).$$

特别地，$\psi$ 是从 $(\mathcal{BM}_s^2 \setminus \{\ell_1^2\}, d_{BM})$ 到 $(\mathcal{BM}_s^n, d_{BM})$ 的局部等距嵌入.

作为进一步的推论，我们将一个近期在2维对称Banach–Mazur紧化空间 [16] 中构造等距集的方法推广到更高维。回顾一下，在度量空间中，集合 $S$ 称为等距的，如果存在 $d > 0$ 使得任意两个不同的 $x$, $y \in S$之间的距离都是 $d$。

**推论 1.9**。对于整数 $n, m \geq 2$，在 $\mathcal{BM}_s^n$ 中存在基数为 $m$ 的等距集。

推论1.8和1.9的证明见第4节末尾。

本文中，我们经常对赋范空间 $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$、$Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_Y)$ 及其各自的单位球 $B_X$, $B_Y \subseteq \mathbb{R}^n$ 使用等式 $d_{BM}(X, Y) = d_{BM}(B_X, B_Y)$，并根据需要选择更方便的视角。我们也会提及众所周知的 $\ell_p$-和的对偶性，即

$$(X_1 \oplus_p \ldots \oplus_p X_k)^* = X_1^* \oplus_{p^*} \ldots \oplus_{p^*} X_k^*$$

对于任意有限维赋范空间 $X_1$、……、$X_k$ 和 $p \in [1, \infty]$，其中 $X^*$ 表示赋范空间 $X$ 的对偶空间 $p^* = \frac{p}{p-1} \in [1, \infty]$ 是 $p$的共轭指数。给定一个向量 $x \in \mathbb{R}^n$，记 $x_1$、……、$x_n$ 为 $x$ 在$\mathbb{R}^n$ 的标准单位基下的坐标。

## 2 $\ell_p$-和到欧几里得空间的距离

本节中，我们证明定理 1.1。其核心是以下关于相对于欧几里得球的最优 Banach–Mazur 位置的刻画。与通过接触点上的恒等分解刻画最大体积（John）椭球类似，最优 Banach–Mazur 距离椭球可以通过接触点上的一个代数条件来描述。关于该结果的证明、历史背景及其不同应用，请读者参阅 [8]。用 $\mathrm{bd}(A)$ 表示集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$的边界。

**定理 2.1.** 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个0-对称凸体，且设 $R \geq r > 0$ 满足$r\mathbb{B}^n \subseteq K \subseteq R\mathbb{B}^n$。那么以下条件等价:

***(i)*** $d_{BM}(K, \mathbb{B}^n) = \frac{R}{r}$.

***(ii)*** 存在整数 $N, M \geq 1$、内接触点 $y^1, \ldots, y^N \in \mathrm{bd}(K) \cap \mathrm{bd}(r\mathbb{B}^n)$、外接触点 $z^1, \ldots, z^M \in \mathrm{bd}(K) \cap \mathrm{bd}(R\mathbb{B}^n)$，以及权重 $\lambda_1, \ldots, \lambda_N, \mu_1, \ldots, \mu_M > 0$，使得

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i y^i (y^i)^T = \sum_{j=1}^{M} \mu_j z^j (z^j)^T.$$

证明定理 1.1 的大部分工作由以下引理完成。对于 0-对称凸体 $C_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$，其中 $i = 1, \ldots, k$，它们的 $\ell_p$- 和 $C_1 \oplus_p \ldots \oplus_p C_k$ 是 0- 对称单位球，位于 $\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_k}$ 中；该单位球是相应赋范空间的 $\ell_p$-和，其单位球为 $C_i$。

**引理 2.2.** 设 $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$ 为整数，且 $C_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ 是一个 0-对称凸体，定义在 $i = 1, \ldots, k$上。假设对于 $d_i = d_{BM}(C_i, \mathbb{B}_2^{n_i})$，每个 $i = 1, \ldots, k$均满足包含关系 $\mathbb{B}_2^{n_i} \subseteq C_i \subseteq d_i \mathbb{B}_2^{n_i}$。那么，对任意 $p \in [2, \infty]$,

$$\mathbb{B}_2^{n_1+\ldots+n_k} \subseteq C_1 \oplus_p \ldots \oplus_p C_k \subseteq \|(d_1, \ldots, d_k)\|_r \mathbb{B}_2^{n_1+\ldots+n_k} \tag{3}$$

*and*

$$d_{BM}(C_1 \oplus_p \ldots \oplus_p C_k, \mathbb{B}_2^{n_1+\ldots+n_k}) = \|(d_1, \ldots, d_k)\|_r,$$

其中 $r = \frac{2p}{p-2} \in [2, \infty]$ （约定：当 $p = 2$ 时取 $r = \infty$，当 $p = \infty$ 时取 $r = 2$）.

证明。令 $\|\cdot\|_{C_i}$ 表示 $\mathbb{R}^{n_i}$ 上的范数，其单位球为 $C_i$。根据假设，

$$\|x^i\|_{C_i} \leq \|x^i\|_2 \leq d_i \|x^i\|_{C_i} \tag{4}$$

对所有 $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$。令 $C = C_1 \oplus_p \ldots \oplus_p C_k$并令 $\|\cdot\|_C$为 $\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_k}$上的相应范数。由（4）和 $p \geq 2$, 对于 $x = (x^1, \ldots\ldots, x^k) \in \mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_k}$且 $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$对 $i = 1, \ldots\ldots, k$成立的情形，我们可以估计

$$\|x\|_C = \left(\sum_{i=1}^{k} \|x^i\|_{C_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \|x^i\|_2^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \|x^i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2. \tag{5}$$

对于另一个方向的估计，（4）以及指数为 $\frac{p}{p-2}$ 和$\frac{p}{2}$ 的赫尔德不等式（可自然推广至$p = 2$ 和 $p = \infty$的情形）给出

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x^i\|_2^2 &\leq \sum_{i=1}^{k} d_i^2 \|x^i\|_{C_i}^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k} d_i^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\sum_{i=1}^{k} \|x^i\|_{C_i}^p\right)^{\frac{2}{p}} \\ &= \|(d_1, \ldots, d_k)\|_r^2 \|x\|_C^2. \end{aligned} \tag{6}$$

这就证明了（3）。

尚需证明，这条包含链对于 Banach–Mazur 距离而言是最优的。由一个简单的归纳论证可知，只需考虑 $k = 2$ 的情形。此外，通过连续性论证，我们可以假设 $p \in (2, \infty)$。我们的目标是利用定理 2.1 中给出的相对于欧几里得球的 Banach–Mazur 位置刻画。

由于位置 $\mathbb{B}_2^{n_i} \subseteq C_i \subseteq d_i \mathbb{B}_2^{n_i}$ 对于 $i = 1$ 的 Banach–Mazur 距离而言是最优的，$N_1$、$N_2$、$M_1$、$M_2 \geq 1$，定理 2.1 给出了整数，以及四组接触点 $y^1, \ldots, y^{N_1} \in \mathrm{bd}(C_1) \cap \mathrm{bd}(\mathbb{B}_2^{n_1})$，$z^1, \ldots, z^{M_1} \in \mathrm{bd}(C_1) \cap \mathrm{bd}(d_1 \mathbb{B}_2^{n_1})$，$u^1, \ldots, u^{N_2} \in \mathrm{bd}(C_2) \cap \mathrm{bd}(\mathbb{B}_2^{n_2})$，以及 $v^1, \ldots, v^{M_2} \in \mathrm{bd}(C_2) \cap \mathrm{bd}(d_2 \mathbb{B}_2^{n_2})$，还有权重 $\alpha_i$、$\beta_i$、$\gamma_i$、$\delta_i > 0$，使得

$$\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i y^i (y^i)^T = \sum_{i=1}^{M_1} \beta_i z^i (z^i)^T \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{N_2} \gamma_i u^i (u^i)^T = \sum_{i=1}^{M_2} \delta_i v^i (v^i)^T. \tag{7}$$

将每个接触点与其相反点配对并归一化后，我们还可以假设

$$\sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i y^i = \sum_{i=1}^{M_1} \beta_i z^i = \sum_{i=1}^{N_2} \gamma_i u^i = \sum_{i=1}^{M_2} \delta_i v^i = 0 \quad \text{and} \quad d_2^{\frac{4}{p-2}} \sum_{i=1}^{M_1} \beta_i = d_1^{\frac{4}{p-2}} \sum_{i=1}^{M_2} \delta_i = 1. \tag{8}$$

我们的目标是确定 $C = C_1 \oplus_p C_2$ 与 $\mathbb{B}_2^{n_1+n_2}$ 和 $\| (d_1, d_2) \|_r \mathbb{B}_2^{n_1+n_2}$ 的接触点，使其存在类似的代数分解。

我们首先注意到，对于每个 $i = 1, \ldots, N_1$，点 $(y^i, 0) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 是 $\mathrm{bd}(C)$ 和 $\mathrm{bd}(\mathbb{B}_2^{n_1+n_2})$ 的公共点，因为这样的点满足带有等式的 (5)。类似地，对于每个$i = 1, \ldots, N_2$，点 $(0, u^i) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 是 $\mathrm{bd}(C)$ 和 $\mathrm{bd}(\mathbb{B}_2^{n_1+n_2})$ 的公共点。另一方面，$C$ 和 $\|(d_1, d_2)\|_r \mathbb{B}_2^{n_1+n_2}$的接触点包括所有形如

$$(\widetilde{z}^i, \widetilde{v}^j) = \frac{\|(d_1, d_2)\|_r}{\sqrt{d_1^{\frac{2p}{p-2}} + d_2^{\frac{2p}{p-2}}}} \left( d_1^{\frac{2}{p-2}} z^i, d_2^{\frac{2}{p-2}} v^j \right) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$$

对于 $i = 1, \ldots, M_1$ 以及 $j = 1, \ldots, M_2$。事实上，$\frac{1}{d_1} \|z^i\|_2 = \|z^i\|_{C_1} = 1$ 和 $\frac{1}{d_2} \|v^j\|_2 = \|v^j\|_{C_2} = 1$ 表明，这些点通过以下方式在估计式 (6) 中取得等式

$$\begin{aligned} \left\| \left( d_1^{\frac{2}{p-2}} z^i, d_2^{\frac{2}{p-2}} v^j \right) \right\|_2^2 &= d_1^{\frac{2p}{p-2}} + d_2^{\frac{2p}{p-2}} = \left( d_1^{\frac{2p}{p-2}} + d_2^{\frac{2p}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}} \left( d_1^{\frac{2p}{p-2}} + d_2^{\frac{2p}{p-2}} \right)^{\frac{2}{p}} \\ &= \left( d_1^{\frac{2p}{p-2}} + d_2^{\frac{2p}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}} \left( \left\| d_1^{\frac{2}{p-2}} z^i \right\|_{C_1}^p + \left\| d_2^{\frac{2}{p-2}} v^j \right\|_{C_2}^p \right)^{\frac{2}{p}}. \end{aligned}$$

赋予内接触点 $(y^i,0)$ 的权重为 $\eta_i := \alpha_i$，赋予内接触点 $(0, u^i)$ 的权重为 $\kappa_i := \gamma_i$，赋予外接触点 $(\widetilde{z}^i, \widetilde{v}^j)$ 的权重为

$$\omega_{ij} := \frac{d_1^{\frac{2p}{p-2}} + d_2^{\frac{2p}{p-2}}}{\|(d_1, d_2)\|_r^2} \beta_i \delta_j.$$

那么，

$$\eta_i (y^i, 0)(y^i, 0)^T = \alpha_i \begin{bmatrix} y^i (y^i)^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \kappa_i (0, u^i)(0, u^i)^T = \gamma_i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u^i (u^i)^T \end{bmatrix}.$$

此外，

$$\omega_{ij}(\widetilde{z}^i,\widetilde{v}^j)(\widetilde{z}^i,\widetilde{v}^j)^T=\beta_i\delta_j\begin{bmatrix} d_1^{\frac{4}{p-2}}z^i(z^i)^T & (d_1d_2)^{\frac{2}{p-2}}z^i(v^j)^T \\ (d_1d_2)^{\frac{2}{p-2}}v^j(z^i)^T & d_2^{\frac{4}{p-2}}v^j(v^j)^T \end{bmatrix}.$$

因此，

$$\sum_{i=1}^{N_1}\eta_i(y^i,0)(y^i,0)^T+\sum_{j=1}^{N_2}\kappa_j(0,u^j)(0,u^j)^T=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_1}\alpha_i y^i(y^i)^T & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^{N_2}\gamma_j u^j(u^j)^T \end{bmatrix},$$

类似地

$$\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}\omega_{ij}(\widetilde{z}^i,\widetilde{v}^j)(\widetilde{z}^i,\widetilde{v}^j)^T=\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}\beta_i\delta_j\begin{bmatrix} d_1^{\frac{4}{p-2}}z^i(z^i)^T & (d_1d_2)^{\frac{2}{p-2}}z^i(v^j)^T \\ (d_1d_2)^{\frac{2}{p-2}}v^j(z^i)^T & d_2^{\frac{4}{p-2}}v^j(v^j)^T \end{bmatrix}.$$

由（8）可知

$$\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}\beta_i\delta_j z^i(v^j)^T=\left(\sum_{i=1}^{M_1}\beta_i z^i\right)\left(\sum_{j=1}^{M_2}\delta_j v^j\right)^T=0,$$

同理，$\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}\beta_i\delta_j v^j\ (z^i)^T=0$。此外，条件（7）和（8）给出

$$\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}\beta_i\delta_j d_1^{\frac{4}{p-2}}z^i(z^i)^T=\left(d_1^{\frac{4}{p-2}}\sum_{j=1}^{M_2}\delta_j\right)\left(\sum_{i=1}^{M_1}\beta_i z^i(z^i)^T\right)=\sum_{i=1}^{N_1}\alpha_i y^i(y^i)^T$$

类似地，$\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}\beta_i\delta_j d_2^{\frac{4}{p-2}}v^j(v^j)^T=\sum_{j=1}^{N_2}\gamma_j u^j(u^j)^T$。这证明了

$$\sum_{i=1}^{N_1}\eta_i(y^i,0)(y^i,0)^T+\sum_{j=1}^{N_2}\kappa_j(0,u^j)(0,u^j)^T=\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{M_2}\omega_{ij}(\widetilde{z}^i,\widetilde{v}^j)(\widetilde{z}^i,\widetilde{v}^j)^T,$$

这表明，在接触点上所要求的分解确实存在。定理 2.1 现在表明，包含链（3）对于 $C$与 $\mathbb{B}_2^{n_1+n_2}$之间的 Banach–Mazur 距离是最优的，即 $d_{BM}(C,\mathbb{B}_2^{n_1+n_2})=\|(d_1,d_2)\|_r$。证明完毕。□

有了前述引理，定理 1.1 的证明便显而易见。

定理 *1.1*的证明。对于 $p\geq 2$，结论可由引理 2.2直接得出。事实上，对于每个 $i=1,\ldots,k$，存在一个赋范空间 $X_i'$，它与 $X_i$等距，其单位球 $C_i$满足$\mathbb{B}_2^{n_i}\subseteq C_i\subseteq d_i\mathbb{B}_2^{n_i}$对于 $d_i=d_{BM}(C_i,\mathbb{B}_2^{n_i})$。将引理 2.2 应用于这些单位球，可得和 $X_1'\oplus_p\ldots\oplus_p X_k'$到欧几里得空间的距离满足所需条件。由于空间 $X_1'\oplus_p\ldots\oplus_p X_k'$与 $X_1\oplus_p\ldots\oplus_p X_k$显然等距，它们到欧几里得空间的距离相同。

情形 $1\leq p<2$ 可由对偶性轻易得到，因为对于任意两个维数相同的有限维赋范空间 $X$，$Y$，我们有 $d_{BM}(X^*,Y^*)=d_{BM}(X,Y)$。特别地，

$d_{BM}(X_i^*,\ \ell_2^{n_i}) = d_{BM}(X_i,\ \ell_2^{n_i}) = d_i$对每个 $i = 1,\ \ldots k$均成立。现在，若 $p^* = \frac{p}{p-1} \in (2,\ \infty]$表示 $p$的共轭指数，则利用 $\ell_p$-和的对偶性以及第一种情形，可得

$$d_{BM}(X_1 \oplus_p \ldots \oplus_p X_k, \ell_2^{n_1+\ldots+n_k}) = d_{BM}(X_1^* \oplus_{p*} \ldots \oplus_{p*} X_k^*, \ell_2^{n_1+\ldots+n_k}) = \|(d_1, \ldots, d_k)\|_{r^*},$$

其中

$$r^* = \frac{2p^*}{p^* - 2} = \frac{\frac{2p}{p-1}}{\frac{2-p}{p-1}} = \frac{2p}{2-p} = r,$$

如要求的那样。 □

定理 1.1 给出了一个简洁的 1 行证明，证明了众所周知的 $\ell_2^n$ 与 $\ell_p^n$之间的 Banach–Mazur 距离，因此特别推广了引言中指出的（1）。另一个显而易见的推论如下。

**推论 2.3.** 设 $n_1$，…，$n_k \geq 1$ 为整数，且 $X_i$ 是一个 $n_i$ 维实赋范空间，其 $d_i = d_{BM}(X_i,\ \ell_2^{n_i})$ 对 $i = 1$，…，$k$ 成立。定义

$$f(p) = d_{BM}(X_1 \oplus_p \ldots \oplus_p X_k, \ell_2^{n_1+\ldots+n_k})$$

对 $p \in [1, \infty]$ 成立。则

$$\max\{d_1, \ldots, d_k\} = f(2) \leq f(p) = f\left(\frac{p}{p-1}\right) \leq f(1) = f(\infty) = \sqrt{d_1^2 + \ldots + d_k^2}.$$

作为定理 1.1 的进一步应用，我们得到，每个汉纳多面体在 $n$ 维中心对称凸体中，与欧几里得球的 Banach–Mazur 距离达到可能的最大值。回顾一下，汉纳多面体 是中心对称多胞体，由线段或其他低维汉纳多面体经过任意次迭代的 $\ell_1$-和 $\ell_\infty$-和运算构造而成。汉纳 [10]引入了这些多胞体；它们因在著名的马勒猜想中扮演的角色而广为人知。马勒猜想认为，在中心对称凸体中，它们是马勒体积乘积唯一的极小化者。Kim [15] 证明了，每个汉纳多面体确实都是关于 Banach–Mazur 距离的该乘积的严格局部极小化者。就 Banach–Mazur 距离本身而言，领域专家似乎早已知道，汉纳多面体在中心对称凸体中与欧几里得球的距离最大；约翰椭球定理表明，这个最大距离至多为 $\sqrt{n}$。然而，据我们所知，已发表文献中尚未出现针对一般汉纳多面体证明这一事实的论证。以下推论通过定理 1.1 可立即得证。 _

**推论 2.4**。 $\mathbb{R}^n$ 中的每个汉纳多面体与$n$维欧几里得球的 *Banach–Mazur* 距离为 $\sqrt{n}$ 。

证明。 我们对维数 $n \geq 1$进行归纳。对于$n = 1$，无需证明，因此假设 $n \geq 2$。设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个汉纳多面体，且是赋范空间 $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$的单位球。根据汉纳多面体的定义，存在赋范空间 $X_i = (\mathbb{R}^{n_i}, \|\cdot\|_{X_i})$，其中 $i = 1,\ 2$，其单位球均为某些汉纳多面体，并且 $n_1 + n_2 = n$，且 $X = X_1 \oplus_1 X_2$ 或 $X = X_1 \oplus_\infty X_2$。根据归纳假设和定理 1.1，两种情况下我们都有

$$d_{BM}(X, \ell_2^n) = \sqrt{d_{BM}(X_1, \ell_2^{n_1})^2 + d_{BM}(X_2, \ell_2^{n_2})^2} = \sqrt{n_1 + n_2} = \sqrt{n}.$$ □

需要指出的是，当 $n \geq 4$时，在中心对称凸体中，汉纳多面体并非与欧几里得球的 Banach–Mazur 距离的唯一极大者；即使在多胞体这一类中也是如此（参见 [8, 例 2.5]）。

我们以如下评注结束本节，其中我们指出，引理 2.2如何推广到非对称情形。包含原点于其内部的（不一定对称的）凸体的 $\ell_p$-和 $C_1 \oplus_p \cdots \oplus_p C_k$ 定义与之前类似，但对每个 $C_i$ 使用其所诱导的 Minkowski 泛函（或闵可夫斯基泛函），而不是范数。

**注 2.5。** 引理 2.2 对于满足 $\mathbb{B}_2^{n_i} \subseteq C_i \subseteq d_i \mathbb{B}_2^{n_i}$ 的一般（不一定 0 对称的）凸体 $C_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ 仍然成立，其中 $d_i = d_{BM}(C_i, \mathbb{B}_2^{n_i})$。在非对称情形下，关于欧几里得球的最优 *Banach–Mazur* 位置的刻画（对应于定理 2.1）还需要一个额外的平衡条件（见 [9, 定理 1.5]），在这里所考虑的情形下，该条件写作

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i y^i = \sum_{j=1}^{M} \mu_j z^j = 0.$$

在对称情形下，总可以通过将每个接触点与其相反点配对，并相应分配权重，来满足这一消失条件。因此，在非对称情形下，仍可假设等式 (8) 成立，并且很容易验证，在引理的证明中构造的 $C_1 \oplus_p C_2$的接触点 $\mathbb{B}_2^{n_1+n_2}$和 $\|(d_1, d_2)\|_r \mathbb{B}_2^{n_1+n_2}$也满足类似的平衡条件。

## 3 The （双）锥到 $\ell_1^n$ 和单纯形的距离 x

本节中，我们证明定理 1.2 和定理 1.4。虽然在这两种情形下，将 Banach–Mazur 距离的精确值作为上界求出都很直接，但验证相应的下界则更为复杂，并且需要将所有对象适当地投影到底面上。显然，对于凸体 $C_1 \subseteq C_2 \subseteq dC_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ 和线性投影 $P$，包含关系在 $P(C_1) \subseteq P(C_2) \subseteq dP(C_1)$ 下保持不变。因此，只要能够控制像 $P(C_1)$ 和 $P(C_2)$，就可以根据低维像得到 $d_{BM}(C_1, C_2)$ 的下界。当原集合的极点集合较小时，控制射影像是可行的——例如$\ell_1^n$ （对应于 $\mathbb{R}^n$中的交叉多胞体）或单纯形的情形。由此，我们证明，对于锥之间任意一个 Banach–Mazur 位置，都可以选择投影 $P$，使锥的像与其底面仿射等价。[17]中关于控制投影的证明里，也出现了类似论证，用以证明等式 $d_{BM}(\ell_1^3, \ell_\infty^3) = \frac{9}{5}$。除此之外，这种方法似乎是首次用于研究（精确的）Banach–Mazur 距离。

在本节及下一节中，我们将反复使用以下显然的观察：对于一个 $d$维凸体 $B \subseteq \mathbb{R}^n$，其中 $d < n$，所有形如 $n$维锥 $C = \mathrm{conv}(B' \cup \{v^1, \ldots v^{n-d}\})$ 且 $B'$ 是 $B$的仿射像、并取适当的向量 $v^1$，……，$v^{n-d}$ 都是仿射等价的。关于双锥的类似陈述conv( $B' \cup \{\pm v^1, \ldots, \pm v^{n-d}\}$) 对 0-对称 $B'$ 同样成立。特别地，我们常常假设 $B'$ 包含于 线性张成 $\mathrm{lin}\{e^1, \ldots, e^d\}$ 中，并且 $v^1$，……，$v^{n-d}$ 是标准单位基中的其余向量。

接下来，对一个 $d$ 维凸体施加具有一维核的投影，至多会使其维数降低 1。当且仅当该投影的核平行于该凸体的仿射包时，维数才会降低 1。

我们还将用到下面这个简单的引理。此处给出证明，以免重复论证。用 $[x, y]$ 表示闭线段，它连接 $x$、$y \in \mathbb{R}^n$。

**引理 3.1**。设 $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 为凸集，$v \in \mathbb{R}^n$ 为向量，且 $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性算子。若 $B_1 \subseteq$ 凸包$(B_2 \cup \{v\})$，$v \notin B_1$，且 $T(v) \in T(B_1)$，则

$$T(\mathrm{conv}(B_2 \cup \{v\})) = T(B_2).$$

若 $B_1$ 和 $B_2$ 是0-对称的，则假设 $B_1 \subseteq$ 凸包$(B_2 \cup \{v\})$ 可弱化为 $B_1 \subseteq$ 凸包$(B_2 \cup \{\pm v\})$。

证明。对任意集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$，显然

$$T(\mathrm{conv}(B_2 \cup A)) = \mathrm{conv}(T(B_2) \cup T(A)),$$

因此，只需证明 $T(v) \in T(B_2)$。现在，任取满足 $T(v) = T(u)$ 的 $u \in B_1$。若$B_1 \subseteq$ 凸包$($ $B_2 \cup \{v\})$，则存在某些 $w \in B_2$ 和 $\lambda \in [0, 1)$，使得

$$u = (1 - \lambda)w + \lambda v. \tag{9}$$

Then

$$T(w) = T\left(\frac{u - \lambda v}{1 - \lambda}\right) = \frac{T(u) - \lambda T(v)}{1 - \lambda} = \frac{T(v) - \lambda T(v)}{1 - \lambda} = T(v)$$

验证 $T(v) \in T(B_2)$。

若 $B_1$ 和 $B_2$ 是 0-对称的，且 $B_1 \subseteq$ 凸包$(B_2 \cup \{\pm v\})$，很容易看出 $u$ 仍可按(9)给出，但可能使用 $-v$ 而非 $v$。若它使用 $v$，则$T(v) \in T(B_2)$ 便可与之前完全相同地推出。否则，

$$T\left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} w\right) = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} T\left(\frac{u + \lambda v}{1 - \lambda}\right) = \frac{T(u) + \lambda T(v)}{1 + \lambda} = \frac{T(v) + \lambda T(v)}{1 + \lambda} = T(v)$$

且 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} w \in [0, w] \subseteq B_2$ 完成证明。 □

定理 1.2的证明。 由于 $(X \oplus_1 Y)^* = X^* \oplus_\infty Y^*$ 对所有有限维实赋范空间 $X$ 和 $Y$均成立，因此只需证明 $\ell_1$-和的情形。此外，根据归纳法，只需证明对于任意 $n$维实赋范空间 $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ 满足$d^* := d_{BM}(X, \ell_1^n) \le 3$，有

$$d := d_{BM}(X \oplus_1 \mathbb{R}, \ell_1^{n+1}) = d^*.$$

我们按照标准方式将 $X \oplus_1 \mathbb{R}$ 的底层向量空间与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 识别，即将 $X$ 的向量空间识别为由 $x_{n+1} = 0$ 给出的子空间 $Y \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$。为证明上界 $d \le d^*$，我们假设 $\mathbb{R}^n$ 中的 $\|\cdot\|$ 是一个与 $\|\cdot\|_X$ 等距的范数，并且满足

$$\|x\|_1 \le \|x\| \le d^* \|x\|_1$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 均成立。于是也有

$$\|x\|_1 + |x_{n+1}| \le \|x\| + |x_{n+1}| \le d^*\|x\|_1 + |x_{n+1}| \le d^*(\|x\|_1 + |x_{n+1}|)$$

f或对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 和所有 $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ 均成立。下面仍需建立下界 $d \ge d^*$ .

设 $K = \mathrm{conv}\{\pm v^1, \dots, \pm v^{n+1}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中交叉多胞体的一个线性像，并满足

$$C \subseteq K \subseteq dC, \tag{10}$$

其中， $C = \mathrm{conv}(B \cup \{\pm e^{n+1}\}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是空间 $X \oplus_1 \mathbb{R}$ 的单位球，而 $B \subseteq Y$ 是嵌入于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 $X$ 的单位球。由于 $e^{n+1} \in C \subseteq K$，某个顶点 $v^i$ 满足 $|v^i_{n+1}| \ge 1$。不妨设 $v^{n+1}_{n+1} \ge 1$。对于 $x \in \mathbb{R}^{n+1}$，令 $\pi_Y(x) = (x_1, \dots, x_n, 0)$ 表示其到 $Y$ 的正交投影。于是

$$3 \ge d^* \ge d \ge \|\pi_Y(v^{n+1})\|_X + |v^{n+1}_{n+1}| \ge \|\pi_Y(v^{n+1})\|_X + 1,$$

从而 $r := \|\pi_Y(v^{n+1})\|_X \le 2$。接下来，我们定义向量 $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ 如下

$$w := \begin{cases} e^{n+1} + \dfrac{1}{r\, v^{n+1}_{n+1}} \pi_Y(v^{n+1}), & \text{if } r > 0, \\ e^{n+1}, & \text{if } r = 0. \end{cases}$$

现在，取线性投影 $P\colon\ \mathbb{R}^n \to Y$ 给定为 $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ 的 $P(x) = x - x_{n+1} w$。由于 $v^{n+1}_{n+1} \ge 1$，我们有 $\|P(e^{n+1})\|_X = \|-\pi_Y(w)\|_X \le 1$，因此 $\pm P(e^{n+1}) \in B$。由此可得

$$P(C) = \mathrm{conv}(P(B) \cup \{\pm P(e^{n+1})\}) = B.$$

应用 $P$ 于包含关系（10）可得

$$B = P(C) \subseteq P(K) \subseteq dP(C) = dB. \tag{11}$$

此外，若 $r = 0$，则

$$P(v^{n+1}) = v^{n+1} - v^{n+1}_{n+1} e^{n+1} = \pi_Y(v^{n+1}) = 0 \in B.$$

反之，若 $r \in (0, 2]$, ，则

$$P(v^{n+1}) = v^{n+1} - v^{n+1}_{n+1} e^{n+1} - \frac{v^{n+1}_{n+1}}{r\, v^{n+1}_{n+1}} \pi_Y(v^{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \pi_Y(v^{n+1}),$$

因此我们有 $\|P(v^{n+1})\|_X = \left|1 - \frac{1}{r}\right| \cdot r = |r - 1| \in [0, 1]$。特别地，我们在这种情况下也得到 $P(v^{n+1}) \in B$。由于 $P(B) = B \subseteq K$ 且 $v^{n+1} \notin B$，引理 3.1 表明

$$P(K) = P(\mathrm{conv}\{\pm v^1, \dots, \pm v^n\}) = \mathrm{conv}\{\pm P(v^1), \dots, \pm P(v^n)\}$$

是一个中心对称多胞体，其顶点数至多为 $2n$，且位于 $n$维子空间$Y$中。由于它是一个($n+1$)维凸体的投影，因此它是 $n$维的，故而是 $n$维交叉多胞体的非退化线性像。最后，由（11）和 $d^*$ 的定义可得 $d \ge d^*$，证明完毕。

□

与对称情形不同，非对称情形下，无法先验保证最优 Banach–Mazur 位置具有任何特定的位似中心。因此，在考察单锥与单纯形之间的 Banach–Mazur 距离时，与对称情形下的交叉多胞体相比，单纯形的位置受到的限制较少。下面的引理将射影论证推广到这种额外的自由度。

**引理 3.2.** 设 $B \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个包含 0 且包含于子空间 $Y = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$中的$(n-1)$维凸体。设 $d \in [1,2]$ 和 $u \in \mathbb{R}^n$ 满足锥

$$C = \operatorname{conv}((B+u) \cup \{e^n + u\})$$

包含0。那么，对于每个满足 $v_n \geq u_n + 1$的向量 $v \in dC$，都存在一个线性投影$P\colon \mathbb{R}^n \to Y$，使得

$$P(e^n) \in B \quad and \quad P(v-u) \in B.$$

证明。 假设 $0 \in C$ 意味着 $u_n \in [-1,0]$。令 $\pi_Y\colon \mathbb{R}^n \to Y$ 为到子空间 $Y$上的正交投影。由于 $0 \in B \cap C$，我们有 $0 \in \pi_Y(C) = B + \pi_Y(u)$，因此

$$-\pi_Y(u) \in B. \tag{12}$$

点 $v \in dC$ 位于锥 $dC$ 与由$x_n = v_n$给出的仿射超平面的截面中。容易验证，这个截面等于

$$\lambda dB + (1-\lambda)de^n + du, \quad \text{where } \lambda := \frac{d - v_n + du_n}{d} \in [0,1].$$

应用 $\pi_Y$ 可得

$$\pi_Y(v) \in \lambda dB + d\pi_Y(u) = (d - v_n + du_n)B + d\pi_Y(u).$$

因此，由 $d + du_n \geq v_n \geq u_n + 1$， $u_n \in [-1,0]$， $d \in [1,2]$， $0 \in B$，以及（12），我们得出

$$\begin{aligned} \pi_Y(v-u) &\in (d - v_n + du_n)B + (d-1)\pi_Y(u) \subseteq (d - u_n - 1 + du_n)B + (d-1)\pi_Y(u) \\ &= (d-1)((u_n+1)B + \pi_Y(u)) \subseteq B + \pi_Y(u). \end{aligned} \tag{13}$$

现在，我们将线性投影 $P\colon \mathbb{R}^n \to Y$定义为 $P(x) = x - x_n w$，其中

$$w := e^n + \frac{1}{v_n - u_n}\pi_Y(u).$$

由 $v_n - u_n \geq 1$， $0 \in B$，以及（12），我们得到 $P(e^n) = -\frac{1}{v_n - u_n}\pi_Y(u) \in [0, -\pi_Y(u)] \subseteq B$。此外，由（13）可知

$$P(v-u) = v - u - (v_n - u_n)w = v - u - (v_n - u_n)e^n - \pi_Y(u) = \pi_Y(v-u) - \pi_Y(u) \in B$$

$P$ 所需的两个性质均已验证，证明完成。 □

定理 1.4 的证明。 根据归纳法，只需证明 $m = 1$ 的情形。设 $d^* = d_{BM}(B, \Delta^n)$和 $d = d_{BM}(C, \Delta^{n+1})$。此外，设 $Y \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是由 $x_{n+1} = 0$给出的子空间。为证明上界 $d \le d^*$，不妨设 $B_0 \subseteq Y$和 $\Delta_0^n \subseteq Y$ 分别是 $B$ 和 $\Delta^n$的仿射副本，且 $0 \in B_0$ 和 $B_0 \subseteq \Delta_0^n \subseteq d^* B_0$。于是我们有

$$C_0 := \operatorname{conv}(B_0 \cup \{e^{n+1}\}) \subseteq \operatorname{conv}(\Delta_0^n \cup \{e^{n+1}\}) =: \Delta_0^{n+1}.$$

此外， $0 \in d^* B_0$ 还表明

$$\Delta_0^{n+1} = \operatorname{conv}(\Delta_0^n \cup \{e^{n+1}\}) \subseteq \operatorname{conv}(d^* B_0 \cup \{d^* e^{n+1}\}) = d^* C_0.$$

由于凸体 $C_0$、 $\Delta_0^{n+1}$分别与 $C$ 和 $\Delta^{n+1}$仿射等价，因此可得 $d \le d^*$。还需证明下界 $d \ge d^*$。

为证明下界，我们可以假设 $0 \in B \subseteq Y$、 $v^1 = e^{n+1}$，并且存在一个向量 $u \in \mathbb{R}^{n+1}$，使得 $C =$ 凸包$((B + u) \cup \{e^{n+1} + u\})$ 满足

$$0 \in C \subseteq K \subseteq dC, \tag{14}$$

其中 $K =$凸包$\{w^1, \dots, w^{n+2}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$是一个单纯形。结合前一部分的不等式 $d \le d^*$ 和假设 $d^* \le 2$，可得 $d \le 2$。由于 $e^{n+1} + u \in C \subseteq K$，单纯形 $K$的某个顶点 $w^i$，不妨设为 $w^i = w^{n+2}$，满足 $w^i_{n+1} \ge u_n + 1$。根据引理 3.2，存在一个线性投影 $P$: $\mathbb{R}^{n+1} \to Y$，使得 $P(e^{n+1}) \in B$且 $P(w^{n+2}) \in B + P(u)$。特别地，

$$P(C) = \operatorname{conv}((P(B) + P(u)) \cup \{P(e^{n+1}) + P(u)\}) = B + P(u).$$

应用 $P$ 于（14）可得

$$B + P(u) = P(C) \subseteq P(K) \subseteq dP(C) = dB + dP(u). \tag{15}$$

由 $B + u \subseteq K$， $w^{n+2} \notin B + u$，以及 $P(w^{n+2}) \in B + P(u) = P(B + u)$，引理 3.1 可知

$$P(K) = P(\operatorname{conv}\{w^1, \dots, w^{n+1}\}) = \operatorname{conv}\{P(w^1), \dots, P(w^{n+1})\}$$

是 $n+1$ 个点在 $n$维空间 $Y$中的凸包。它是一个 $(n+1)$维集合的投影，因此 $P(K)$ 是一个 $n$维单纯形。因此，(15) 和 $d_{BM}(B, \Delta^n) = d^*$给出 $d \ge d^*$，证毕。

□

# 4 任意平面对称底面的（双）锥的距离

本节进一步发展射影方法，用于研究任意平面对称基底的单锥与双锥之间的 Banach–Mazur 距离。要为这些距离建立相匹配的下界，同样需要在任意 Banach–Mazur 位置下找到线性投影，使其同时将两个锥映射为与各自底面仿射等价的集合，或映射为其他易于处理的集合。处理任意锥时，控制

射影像比上一节更为复杂。因此，我们的方法需要进行更详尽的几何分析，并在某些情况下作出适当的假设。

我们的首要目标是验证定理 1.5，该定理指出，$\mathbb{R}^3$ 中具有平面对称底面的两个单锥之间的 Banach–Mazur 距离等于它们底面之间的距离。所需的 2 维分析将在下面的引理中进行。

**引理 4.1**。设 $y \in \mathbb{R}^2$ 满足 0 位于三角形 $T \subseteq \mathbb{R}^2$ 内，该三角形的顶点为 $y - e^1$、$y + e^1$ 和 $y + e^2$。设 $d \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$，并设 $S \subseteq \mathbb{R}^2$ 为一个三角形，使得

$$T \subseteq S \subseteq dT,$$

其顶点 $v$、$v'$、$v'' \in \mathbb{R}^2$ 满足 $S$ 的条件 $v \in [d(y - e^1)\ dy]$ 和 $v_2' \geq v_2''$。那么以下条件至少有一个成立：

*(i) There exists* $\mu \in \left[1, \frac{4}{3}\right)$ *such that* $v_2' + \mu(v_2'' - v_2') = v_2$.

**(ii)** 存在 $\mu \in \left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$，使得经过 $y + e^2$ 且平行于经过 $v'$ 和 $v''$ 的直线，与经过 $y - e^1$ 和 $y + e^1$ 的直线相交于一点 $z$，且 $z_1 = y_1 + 2\mu - 1$。

参见图 1，其中给出了引理所述情形的一个例子。注意，点 $z$ 不必位于三角形 $dT$。

证明。由 $T \subseteq S$ 和 $v_2' \geq v_2'' \geq v_2$，可得 $v_2' \geq y_2 + 1$。此外，$0 \in T$ 推出 $y_1 \in [-1, 1]$ 和 $y_2 \in [-1, 0]$。因此，$v' \in dT$ 和 $d \in [1, \frac{3}{2}]$ 意味着

$$v_1' \geq v_1' - v_2' + y_2 + 1 \geq d(y_1 - y_2 - 1) + y_2 + 1 = y_1 + (d-1)(y_1 - y_2 - 1) \geq y_1 - 1.$$

类似地，我们可以证明 $v_1' \leq y_1 + 1$。再次利用 $T \subseteq S$，现在可得 $v_1'' \geq y_1 + 1$ 和 $v_1 \leq y_1 - 1$。我们还看到，对于 $y_2 = 0$，$v_2 = v_2'' = 0$ 必然成立，此时条件 (i) 得到满足。因此，从现在起我们可以假设 $y_2 < 0$，特别是 $y_1 < 1$。

为了估计 $v_2''$，我们注意到，经过 $v$ 和 $v''$ 的直线从 $y + e^1$ 下方经过。由 $v \in [d(y - e^1)\ dy]$ 和 $v_1 \leq y_1 - 1$ 可知，$v''$ 不会位于经过 $(y_1 - 1,\ dy_2)$ 和 $y + e^1$ 的直线 $L$ 上方。直线 $L$ 与由 $x_1 = d(y_1 + 1)$ 给出的直线相交于

$$\left(d(y_1+1), y_2 + \frac{y_2 - dy_2}{2}(d(y_1+1) - (y_1+1))\right) = \left(d(y_1+1), y_2\left(1 - \frac{(d-1)^2(y_1+1)}{2}\right)\right).$$

由于 $v''$ 不会位于 $L$ 上方，根据 $v'' \in dT$、$d \in [1, \frac{3}{2}]$、$y_1 \in [-1, 1)$ 和 $y_2 < 0$，$v_1'' \leq d(y_1 + 1)$，这意味着

$$v_2'' \leq y_2\left(1 - \frac{(d-1)^2(y_1+1)}{2}\right) \leq y_2\left(1 - \frac{y_1+1}{8}\right) < \frac{3}{4}y_2.$$

若此时 $y_2 \geq -\frac{2}{5}$，则

$$v_2' + \frac{4}{3}(v_2'' - v_2') = \frac{4}{3}v_2'' - \frac{1}{3}v_2' < y_2 - \frac{1}{3}(y_2 + 1) = \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3} \leq \frac{3}{2}y_2 \leq dy_2 = v_2.$$

因此，在这种情况下，条件 (i) 得到满足，所以我们可以假设从现在起 $y_2 < -\frac{2}{5}$。

接下来，令 $w = \left(\frac{3}{2}(y_1 + 1) + \frac{3}{4}y_2, -\frac{3}{4}y_2\right) \in \left[\frac{3}{2}(y + e^1), \frac{3}{2}(y + e^2)\right]$。由于经过 $v'$ 和 $v''$ 的直线经过 $y + e^2$，其斜率至多与经过 $y + e^2$ 和 $v''$ 的直线的斜率相同。

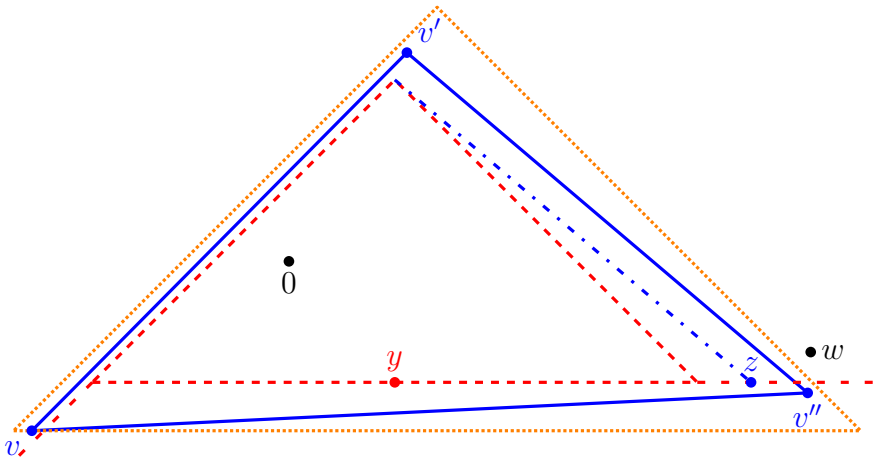



图 1：引理 4.1 中情形的一个示例及其证明，其中 $d = 1.4$： $T$（红色，虚线），$S$（蓝色，实线），$dT$（橙色，点线）。

此外，$y + e^2$，$v'' \in dT \subseteq \frac{3}{2}T$和 $v_2'' < \frac{3}{4}y_2$表明，经过 $y + e^2$和 $v''$的直线的斜率小于经过 $y + e^2$ 和 $w$的直线 $L'$的斜率。特别地，$z$严格位于 $L'$与经过 $y - e^1$ 和 $y + e^1$的直线的交点左侧。后一个交点可计算得

$$\left(y_1 + \frac{2y_1 + 3y_2 + 6}{y_2 + 4}, y_2\right).$$

Since $0 \in T$蕴含 $-y_1 + y_2 + 1 \geq 0$，并且根据假设有$y_2 \in [-1, -\frac{2}{5})$，我们得到

$$z_1 - y_1 < \frac{2y_1 + 3y_2 + 6}{y_2 + 4} \leq \frac{5y_2 + 8}{y_2 + 4} < \frac{5}{3}.$$

因此，满足 $z_1 = y_1 + 2\mu - 1$ 的唯一 $\mu \in \mathbb{R}$ 满足 $\mu < \frac{4}{3}$。此外，$v_1' \leq y_1 + 1 \leq v_1''$ 和 $v_2' \geq v_2''$ 表明 $z$ 不在 $y$ 的左侧，即 $\mu \geq \frac{1}{2}$。证明至此完成。 □

在接下来的定理 1.5 的证明中，我们还会用到以下众所周知的事实：任意 $\mathbb{R}^2$ 中的 $\Delta^2$ 中心对称凸体与其 Banach–Mazur 距离等于 2。更一般地，任意 $\mathbb{R}^n$ 中的 $\Delta^n$ 中心对称凸体之间的 Banach–Mazur 距离等于 $n$（例如，参见 [7, 推论 5.8]）。

定理 1.5的证明。设 $d^* := d_{BM}(B_1, B_2)$ 以及 $d := d_{BM}(C_1, C_2)$。我们的首要目标是建立上界 $d \leq d^*$。为此，不妨假设 $B_1$、$B_2$ 均为 0-对称集，并且包含于由 $x_3 = 0$给出的平面中，包含关系 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq d^* B_1$ 成立，且 $v^1 = v^2 = e^3$。于是

$$C_1 = \operatorname{conv}(B_1 \cup \{e^3\}) \subseteq \operatorname{conv}(B_2 \cup \{e^3\}) = C_2$$

并且，由于 $0 \in d^* B_1$，

$$C_2 = \operatorname{conv}(B_2 \cup \{e^3\}) \subseteq \operatorname{conv}(d^* B_1 \cup \{d^* e^3\}) = d^* C_1.$$

由此可得 $C_1 \subseteq C_2 \subseteq d^* C_1$，这意味着 $d \leq d^*$。接下来只需证明反向不等式。

为了得到下界，我们可以假设 $B_1$ 是中心对称的，并包含在由 $x_3 = 0$ 给出的平面内，且存在向量 $u$，$v \in \mathbb{R}^3$，使得 $C_1 = \text{conv}((B_1 + u) \cup \{e^3 + u\})$ 满足

$$0 \in C_1 \subseteq C_2 = \text{conv}(B_2 \cup \{v\}) \subseteq dC_1. \tag{16}$$

在此情形下，$u_3 \in [-1, 0]$。根据证明的第一部分以及 Stromquist 的一个结果，[21], 可得 $d \leq d^* \leq \frac{3}{2}$。为了证明 $d \geq d^*$，我们根据顶点 $v_3$ 相对于 $v$ 的高度分为三种情形，其中该顶点属于 $C_2$ 相对于底面 $B_1 + u$ 的位置 $C_1$。由上述包含关系可得 $du_3 + d \geq v_3 \geq du_3$。

**情形 1.** $v_3 \geq u_3 + 1$。
根据引理 3.2，存在一个线性投影 $P\colon \mathbb{R}^3 \to Y$，其中 $Y$ 是由下式给出的平面$x_3 = 0$，使得 $P(e^3) \in B_1$ 且 $P(v - u) \in B_1$。于是

$$P(C_1) = \text{conv}((P(B_1) + P(u)) \cup \{P(e^3) + P(u)\}) = B_1 + P(u),$$

并将 $P$ 应用于 (16) 可得

$$B_1 + P(u) = P(C_1) \subseteq P(C_2) \subseteq dP(C_1) = dB_1 + dP(u). \tag{17}$$

根据 $B_1 + u \subseteq C_2$，$v \notin B_1 + u$和 $P(v)$，$\in B_1 + P(u) = P(B_1 + u)$，引理 3.1 给出

$$P(C_2) = P(B_2).$$

因此，$P(B_2)$ 必定是 $B_2$ 在 $Y$中的非退化线性像。由（17）可得 $d \geq d_{BM}(B_1, P(B_2)) = d^*$，证毕。

**情形 2.** $u_3 + 1 > v_3 \geq u_3$。
我们的目标是证明这种情形不可能发生。由于 $e^3 + u \in C_2 = \text{conv}(B_2 \cup \{v\})$，锥 $C_2$ 包含一个 $x_3$坐标至少为 $u_3 + 1$的点。由于 $v_3 < u_3 + 1$，该点必定来自底面 $B_2$。同理，$B_1 + u \subseteq C_2$ 意味着 $C_2$ 包含一个$x_3$坐标至多为 $u_3$的点。如果 $B_2$ 中没有点满足此条件，那么 $C_2$ 在 $x_3 = u_3$ 上的截面必然仅由 $v$ 组成。然而，$C_1$ 的对应截面是二维集合 $B_1 + u$，这与 $C_1 \subseteq C_2$ 矛盾。因此，$B_2$ 必定包含一个 $x_3$ 坐标至多为 $u_3$ 的点。由凸性及 $u_3 + 1 > v_3 \geq u_3$，存在 $y \in B_2$ 使得 $y_3 = v_3$（见图2）。现在，令 $P\colon \mathbb{R}^3 \to Y$ 为到平面 $Y := \text{lin}(B_2 - y)$ 上的线性投影，并满足 $P(v - y) = 0$。于是 $P(v) = P(y) \in P(B_2)$，因此

$$P(C_2) = \text{conv}(P(B_2) \cup \{P(v)\}) = P(B_2) = P(B_2 - y) + P(y) = B_2 - y + P(y).$$

此外，$P(B_1)$ 是一条线段，因为 $P$ 的核 $\text{lin}\{v - y\}$ 是由 $x_3 = 0$ 给定且包含 $B_1$ 的平面的子集。由于 $P(C_1) = \text{conv}((P(B_1) + P(u)) \cup \{P(e^3) + P(u)\})$ 是一个三维集合的投影，因此它必为二维的，从而是 $Y$ 中的一个三角形。最后，通过将 $P$ 应用于 (16)，得到

$$P(C_1) \subseteq P(C_2) = B_2 - y + P(y) \subseteq dP(C_1),$$

我们得出 $d_{BM}(B_2, \Delta^2) \leq d \leq \frac{3}{2}$。然而，由于 $B_2$ 的对称性，这个距离实际上等于 2，因此得到了所需的矛盾。总之，$u_3 + 1 > v_3 \geq u_3$ 的情况不会出现。

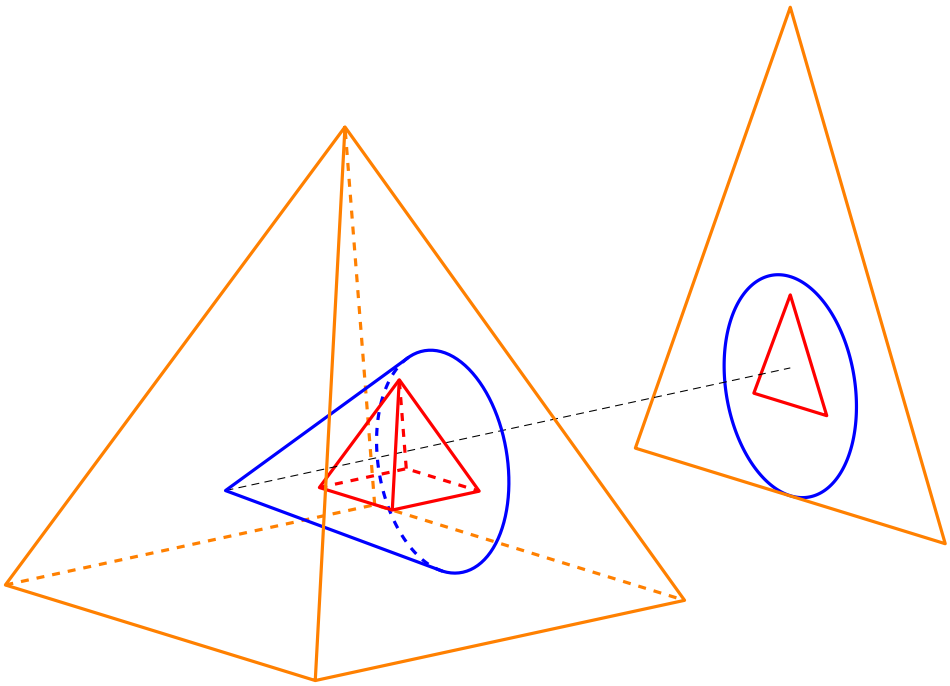


图2：证明定理 1.5中情形2的示例： $C_1$ （红色）、 $C_2$（蓝色）、 $dC_2$ （橙色）。中间圆锥的顶点投影到圆锥的底面的投影像上。

**情形3**。 $v_3 < u_3$。
与第二种情况类似，我们在这里的目标是利用投影到适当选取的平面上的线性投影，得出与到三角形的 Banach–Mazur 距离相矛盾的结论。不过，现在的情况需要更详细的分析，因为不一定还能同时将 $C_1$ 和 $C_2$的投影像都取为三角形或底面的非退化仿射变换。相反，我们使用引理4.1 来控制可能的投影像的形状。

下文中，我们可以假设底面 $B_2$ 上的所有点的$x_3$坐标都严格大于 $v$；否则，仍可沿用前一情形中的推理。此外，将 $C_1$ 和 $C_2$ 向上平移 $\underline{\frac{v_3-du_3}{d-1}e^3}$ （并相应地将 $dC_1$ 平移 $d\underline{\frac{v_3-du_3}{d-1}e^3}$），其中

$$v_3 + \frac{v_3 - du_3}{d-1} = du_3 + d\frac{v_3 - du_3}{d-1},$$

保持假设 $v_3 < u_3$ 以及 $0 \in C_1 \subseteq C_2 \subseteq dC_1$ 通过 $0 \in B_1$ 所得的包含关系和前述假设不变。因此，我们还可以假设 $C_2$ 的顶点 $v$ 位于底面$d(B_1 + u)$ 中。

接下来，我们断言存在一个平面 $V \subseteq \mathbb{R}^3$，使得 0、$e^3 + u$、$v \in V$，并且交集 $(B_1+u) \cap V$是一个线段。事实上，如果经过 $e^3+u$和 $v$的直线与 0 相交，那么我们可以取任意一个包含这条直线且与 $B_1 + u$的相对内部相交的平面。否则，从 $e^3+u \neq 0$ 出发经过 0 的射线根据 $0 \in C_1$与 $B_1+u$ 相交于一点，且该点不同于$\frac{1}{d}v$。由于根据我们上面的第二个假设，$\frac{1}{d}v \in B_1 + u$，这意味着平面 $\mathrm{lin}\{e^3 + u, v\}$与 $B_1 + u$ 相交成一条线段。无论哪种情况，都存在一个具备所有所需性质的平面 $V$。

现在，$T := C_1 \cap V$是一个三角形。此外，交集 $B_2 \cap V$至多是一条线段，因为 $v \in V \setminus B_2$。这些包含关系

$$T = C_1 \cap V \subseteq C_2 \cap V \subseteq (dC_1) \cap V = dT$$

由(16)可知，交集 $S := C_2 \cap V$是二维的，也就是说，$B_2 \cap V$是一个线段，而 $S$也是一个三角形。现在，我们可以在$V$中选取一个坐标系，使引理 4.1适用。记$(B_1 + u) \cap V = [y - f^1, y + f^1]$为某些向量 $y$、$f^1 \in V$，其中点 $y$对应于引理中的点 $y$，向量$f^1$对应于标准单位基向量 $e^1 \in \mathbb{R}^2$，而向量 $f^2 \in V$与$y + f^2 = e^3 + u$对应于向量 $e^2 \in \mathbb{R}^2$。类似地，$v$的顶点对应于引理中的点 $v$，并且我们可以选取 $v'$、$v'' \in V$，使得 $B_2 \cap V = [v', v'']$成立，且引理的所有条件都适用于三角形 $S$和 $T$。下文中，我们根据引理中的两个条件分别讨论不同情形。

假设引理 4.1 的条件 (i) 成立，并令 $P : \mathbb{R}^3 \to Y$ 为到平面 $Y$上的正交投影，该平面垂直于 $f^1$，即 $P(f^1) = 0$（见图3）。注意，$\mathrm{lin}\{f^1\}$是所选坐标系中的第一坐标轴，而该坐标系位于 $V$中；$V$是平面 $V$与 $\mathrm{lin}(B_1)$ 的公共直线。因此，这两个平面在 $Y$上的投影都是直线。与第二种情况类似，集合 $P(C_1)$ 因而是平面 $Y$中的一个三角形。尽管这次投影 $P(C_2)$ 可能与 $B_2$ 仿射非等价，但引理 4.1 的条件 (i) 仍使我们能够对 $d_{BM}(P(C_2)\ B_2)$ 给出上界。由于 $P(v)$ $P(v')$ $P(v'')$ 位于 $Y$中的直线 $P(V)$ 上，因此可得某个 $\mu \in [1, \frac{4}{3})$，使得

$$P(v) = \mu(P(v'') - P(v')) + P(v').$$

因此，由 $v'' \in B_2$,

$$P(v) \in \mu(P(B_2) - P(v')) + P(v').$$

此外，$\mu \geq 1$ 和 $v' \in B_2$ 得出 $B_2 \subseteq \mu(B_2 - v') + v'$，因此

$$P(B_2) \subseteq \mu(P(B_2) - P(v')) + P(v').$$

综上，我们得到

$$P(B_2) \subseteq P(C_2) = \mathrm{conv}(P(B_2) \cup \{P(v)\}) \subseteq \mu(P(B_2) - P(v')) + P(v'). \tag{18}$$

特别地，由于集合 $P(C_2)$ 是三维凸体的投影，因而是二维的，所以集合 $P(B_2)$ 也必定是二维的。因此，$P(B_2)$ 是 $B_2$ 的非退化线性像，而包含关系 (18) 以及由 (16) 得到的 $P(C_1) \subseteq P(C_2) \subseteq dP(C_1)$ 表明

$$d_{BM}(B_2, \Delta^2) \leq d_{BM}(P(B_2), P(C_2)) \cdot d_{BM}(P(C_2), P(C_1)) \leq \mu \cdot d < \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2.$$

这与任意平面对称凸体和 $\Delta^2$ 之间的 Banach–Mazur 距离等于2相矛盾，正如所要求的。

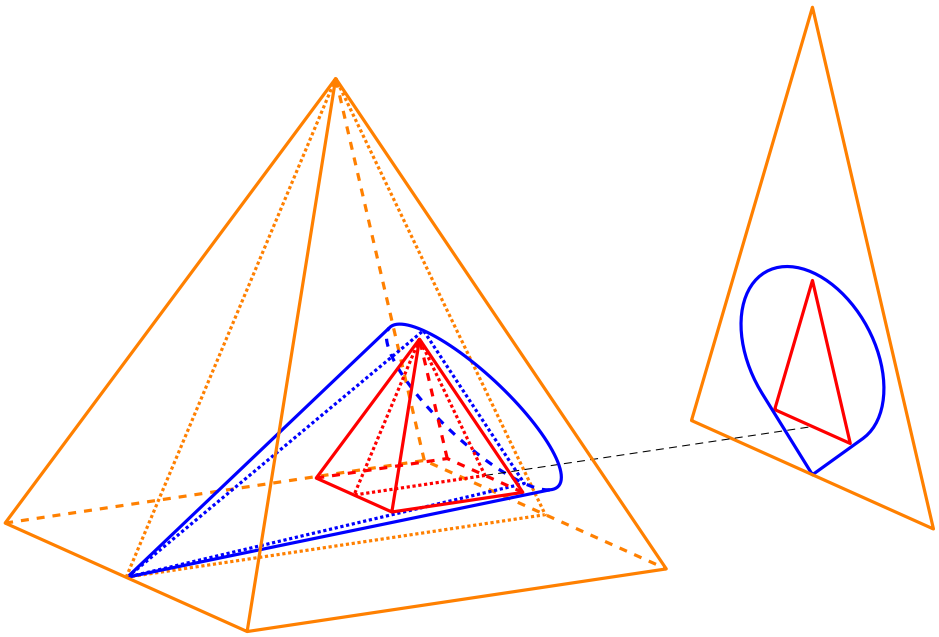


图3：引理 4.1 中情形 3 下定理 1.5的证明： $C_1$ （红色）， $C_2$ （蓝色）， $dC_2$ （橙色）。三角形 $T = C_1 \cap V$、 $S = C_2 \cap V$和 $dT$ 分别标记为相应圆锥的虚线截面。在所选坐标系中，沿第一坐标轴的投影 $V$ 将中间圆锥映射到一个与其底面几乎仿射等价的集合。

最后，假设引理 4.1 的条件(ii)成立。令 $w = v'' - v'$，并令 $Y$为由 $x_3 = 0$给出的平面。注意，从 $y + f^2 = e^3 + u \notin Y + u$ 沿方向$w$的射线与经过 $y - f^1$和 $y + f^1$的直线在 $Y + u$中的一点相交，因此 $w_3 \neq 0$。于是，我们可以取一个线性投影 $P\colon \mathbb{R}^3 \to Y$，满足 $P(w) = 0$ （见图 4 ）。由于 $w$ 平行于 $\mathrm{lin}(B_2)$，集合 $P(B_2)$ 是一个线段。此外，由于它是三维凸体的投影，我们知道 $P(C_2)$ 必须是一个二维集合，因此 $P(C_2)$ 是 $Y$中的一个三角形。与之前类似，集合 $P(C_1)$ 可能与 $B_1$仿射非等价，但它与 $B_1$之间的 Banach–Mazur 距离可以被界定。引理 4.1 的条件(ii)意味着存在 $\mu \in [\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$，使得

$$P(e^3 + u) = P(y + f^2) = P(y + (2\mu - 1)f^1).$$

写出 $\mu^* = \max\{\mu, 1\} \in [1, \frac{4}{3}]$并使用 $y - f^1$， $y + f^1 \in B_1 + u$可得

$$\begin{aligned} P(e^3 + u) &= \mu(P(y + f^1) - P(y - f^1)) + P(y - f^1) \\ &\in \mu(P(B_1 + u) - P(y - f^1)) + P(y - f^1) \\ &\subseteq \mu^*(P(B_1 + u) - P(y - f^1)) + P(y - f^1). \end{aligned}$$

此外，我们还有

$$P(B_1 + u) \subseteq \mu^*(P(B_1 + u) - P(y - f^1)) + P(y - f^1),$$

因此

$$P(B_1+u) \subseteq P(C_1) = \mathrm{conv}(P(B_1+u) \cup \{P(e^3+u)\}) \subseteq \mu^*(P(B_1+u) - P(y-f^1)) + P(y-f^1).$$

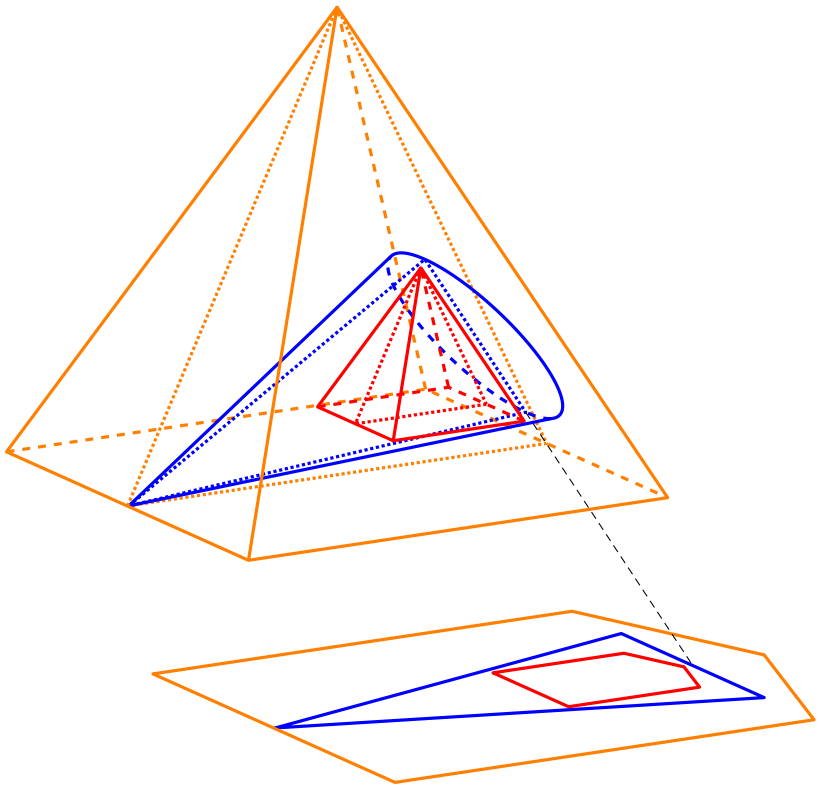


图4：引理4.1 证明中情形 3 定理 1.5中条件(ii)所述情形的示例： $C_1$ （红色）， $C_2$ （黑色），$dC_2$ （橙色）。核平行于$w$ 的投影将内锥和外锥映射为与其底面几乎仿射等价的集合。

由于 $P(C_1)$ 是 2维的，因为它是一个 3维凸体的投影，我们可知 $P(B_1+u)$ 也是 2维的，因此是 $B_1$的非退化仿射像。综上，结合 $P(C_1) \subseteq P(C_2) \subseteq dP(C_1)$ 中的 16式，可得

$$d_{BM}(B_1, \Delta^2) \leq d_{BM}(P(B_1+u), P(C_1)) \cdot d_{BM}(P(C_1), P(C_2)) \leq \mu^* \cdot d < \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2,$$

这再次与 $B_1$ 是对称的且其到 $\Delta^2$ 的 Banach–Mazur 距离为 2 相矛盾。除了情形 1 外，我们在所有情形下都得到了矛盾，因此 $d \geq d^*$ 如所述得证。 □

需要指出的是，底面的对称性并非定理 1.5成立的必要条件。要使上述证明成立，只需 $B_1$， $B_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ 是 2 维凸体并满足

$$d_{BM}(B_1, B_2) \leq \min\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{4} d_{BM}(B_1, \Delta^2), \frac{3}{4} d_{BM}(B_2, \Delta^2)\right\}.$$

接下来，我们讨论定理 1.7 关于具有平面对称基底的双锥。推理过程与证明定理 1.2时所用的方法颇为相似。

定理 *1.7* 的证明。为证明上界，设范数 $\|\cdot\|_{X_1}$和 $\|\cdot\|_{X_2}$在 $\mathbb{R}^2$ 中选取，使得

$$\|x'\|_{X_1} \le \|x'\|_{X_2} \le d^*\|x'\|_{X_1}$$

对于所有 $x' \in \mathbb{R}^2$，其中 $d^* := d_{BM}(X_1, X_2)$。那么，对于任意 $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^{m+2}$ 满足 $x' \in \mathbb{R}^2$和 $x'' \in \mathbb{R}^m$，我们有

$$\|x\|_{X_1 \oplus_1 \ell_1^m} = \|x'\|_{X_1} + \|x''\|_1 \le \|x'\|_{X_2} + \|x''\|_1 = \|x\|_{X_2 \oplus_1 \ell_1^m}$$

and

$$\|x\|_{X_2 \oplus_1 \ell_1^m} = \|x'\|_{X_2} + \|x''\|_1 \le d^*\|x'\|_{X_1} + d^*\|x''\|_1 = d^*\|x\|_{X_1 \oplus_1 \ell_1^m}.$$

因此，

$$d_{BM}(X_1 \oplus_1 \ell_1^m, X_2 \oplus_1 \ell_1^m) \le d^*$$

对于每个整数 $m \ge 1$。

为了证明下界，我们对 $m \ge 0$ 使用归纳法，并约定 $X \oplus_1 \ell_1^0 = X$。因此，无需对 $m = 0$ 进行证明。现在，假设 $m \ge 1$，且下界对 $m-1$ 成立，即

$$d_{BM}(X_1 \oplus_1 \ell_1^{m-1}, X_2 \oplus_1 \ell_1^{m-1}) \ge d^*. \tag{19}$$

不失一般性，我们可以假设

$$d_{BM}(X_1, \ell_1^2) \ge d^*. \tag{20}$$

设 $C_1$，$C_2$ 分别为与 $X_1 \oplus_1 \ell_1^m$ 和 $X_2 \oplus_1 \ell_1^m$ 等距的空间的单位球，使得

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq dC_1 \tag{21}$$

对于 $d := d_{BM}(X_1 \oplus_1 \ell_1^m, X_2 \oplus_1 \ell_1^m)$。不妨设 $C_1 = \mathrm{conv}(B_1 \cup \{\pm e^3, \dots, \pm e^{m+2}\})$，其中 $B_1 \subseteq \mathrm{lin}\{e^1, e^2\}$ 是 $X_1$ 的单位球，且对于某个与 $X_2$ 的单位球仿射等价的二维中心对称凸体 $B_2$ 以及向量 $v^3$、……、$v^{m+2} \in \mathbb{R}^{m+2}$，有 $C_2 = \mathrm{conv}(B_2 \cup \{\pm v^3, \dots, \pm v^{m+2}\})$。

由于 $e^{m+2} \in C_1 \subseteq C_2$，存在一点 $v \in C_2$ 使得 $v_{m+2} \ge 1$。定义向量$w := \frac{v}{v_{m+2}}$。令 $Y \subseteq \mathbb{R}^{m+2}$ 为由 $x_{m+2} = 0$ 给出的子空间，并令 $P: \mathbb{R}^{m+2} \to Y$ 为到 $Y$ 上的线性投影，其中对于 $x \in \mathbb{R}^{m+2}$ 有 $P(x) = x - x_{m+2}w$。于是 $P(v) = 0$，并且

$$P(e^{m+2}) = e^{m+2} - w = -\pi_Y(w)$$

对于 $\pi_Y$到 $Y$上的正交投影。记 $C_1' = \mathrm{conv}(B_1 \cup \{\pm e^3, \dots, \pm e^{m+1}\})$，我们注意到

$$2 \ge d^* \ge d \ge \|\pi_Y(v)\|_{C_1'} + |v_{m+2}|.$$

因此，根据 $v_{m+2} \ge 1$,

$$\|P(e^{m+2})\|_{C_1'} = \|-\pi_Y(w)\|_{C_1'} \le \frac{2 - v_{m+2}}{v_{m+2}} \le 1.$$

由此可得

$$P(C_1) = \mathrm{conv}(P(C_1') \cup \{\pm P(e^{m+2})\}) = C_1'.$$

将应用 $P$ 于（21）可得

$$P(C_1) \subseteq P(C_2) \subseteq dP(C_1). \tag{22}$$

为处理 $P(C_2)$，我们根据 $v$ 的选择分两种情况讨论。若 $v$ 是 $i=3$ 的 $\pm v^i$ 之一，，...，$m+2$，例如 $v=v^{m+2}$，那么 $P(v)=0$ 意味着

$$P(C_2)=\operatorname{conv}(P(B_2)\cup\{\pm P(v^3),\dots,\pm P(v^{m+1})\})=:C_2'.$$

由于 $C_2'$ 是一个（$m+2$）维凸体的投影，因此是（$m+1$）维的，$P$（$B_2$）是二维的，这是因为

$$m+1=\dim(C_2')\le\dim(P(B_2))+m-1\le m+1.$$

因此，$P$（$B_2$）与 $B_2$仿射等价，而 $C_2'$ 是与 $X_2\oplus_1\ell_1^{m-1}$等距的空间的单位球。由（19）和（22），结论由此得出

$$d\ge d_{BM}(P(C_1),P(C_2))=d_{BM}(X_1\oplus_1\ell_1^{m-1},X_2\oplus_1\ell_1^{m-1})\ge d^*.$$

现在，假设 $v$ 属于 $B_2$。由于 $P$（$v$）$=0$，投影 $P$（$B_2$）是一条线段。因此，

$$P(C_2)=\operatorname{conv}(P(B_2)\cup\{\pm P(v^3),\dots,\pm P(v^{m+2})\})$$

是一个中心对称多胞体，顶点至多有 2（$m+1$）个。由于它是一个（$m+1$）维凸体的投影，因此是（（$m+2$）维凸体的投影，因此，$P$（$C_2$）是（（$m+1$）维交叉多胞体的非退化线性像。因此，定理 1.2 意味着

$$d_{BM}(P(C_1),P(C_2))=d_{BM}(X_1\oplus_1\ell_1^{m-1},\ell_1^{m+1})=d_{BM}(X_1,\ell_1^2).$$

根据假设（20）和包含关系（22），我们得到

$$d\ge d_{BM}(P(C_1),P(C_2))=d_{BM}(X_1,\ell_1^2)\ge d^*.$$

由于 $v$ 总能从上述两种情况中选出一种，因此归纳步骤成立，定理得证。

□

在讨论定理 1.7 的推论之前，我们先来探讨该定理中关于到 $\ell_1^2$ 的距离的假设是否必要。如果该假设不成立，也就是说，$d_{BM}(X_1,\ell_1^2)<d_{BM}(X_1,X_2)$ 且 $d_{BM}(X_2,\ell_1^2)<d_{BM}(X_1,X_2)$，那么该定理的结论就是错误的，至少对于 $m\ge2$ 来说如此。事实上，假设 $m\ge2$，并且存在某个 $1\le d<d_{BM}(X_1,X_2)$，使得对于 $i=1$，2，有 $d_{BM}(X_i,\ell_1^2)\le d$。不失一般性，我们可以假设

$$\frac{1}{d}\|x\|_1\le\|x\|_{X_1}\le\|x\|_1\quad\text{and}\quad\|x\|_1\le\|x\|_{X_2}\le d\|x\|_1$$

对所有 $x\in\mathbb{R}^2$ 均成立。于是，对于所有满足 $x,y\in\mathbb{R}^2$ 和 $z\in\mathbb{R}^{m-2}$ 的 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^{m+2}$，

$$\|(x,\ y,\ z)\|_{X_1\oplus_1\ell_1^m}=\|x\|_{X_1}+\|y\|_1+\|z\|_1\le\|x\|_1+\|y\|_{X_2}+\|z\|_1=\|(x,\ y,\ z)\|_{\ell_1^2\oplus_1X_2\oplus_1\ell_1^{m-2}}.$$

此外，

$$\|(x,\ y,\ z,\ )\|_{\ell_1^2\oplus_1X_2\oplus_1\ell_1^{m-2}}=\|x\|_1+\|y\|_{X_2}+\|z\|_1\le d\|x\|_{X_1}+d\|y\|_1+d\|z\|_1=d\|(x,\ y,\ z)\|_{X_1\oplus_1\ell_1^m}.$$

由于 $\ell_1^2\oplus_1X_2\oplus_1\ell_1^{m-2}$和 $X_2\oplus_1\ell_1^m$显然是等距的，我们得到

$$d_{BM}(X_1\oplus_1\ell_1^m,X_2\oplus_1\ell_1^m)\le d<d_{BM}(X_1,X_2),$$

这说明在这种情况下，定理 1.7 的结论并不成立。这自然引出了一个问题：这个假设是否有可能不成立。

**开放问题 4.2**。不等式是否成立

$$d_{BM}(X_1, X_2) \leq \max\left\{d_{BM}(X_1, \ell_1^2), d_{BM}(X_2, \ell_1^2)\right\} \tag{23}$$

对于所有二维实赋范空间 $X_1$ 和 $X_2$都成立吗?

显然，若此问题的答案为肯定，则可在定理1.7中去掉附加假设，并可得到一个从 $\mathcal{BM}_s^2$ 到 $\mathcal{BM}_s^n$ 的等距嵌入，适用于所有$n \geq 3$。我们将在下面的注释中讨论肯定答案的合理性及其一些进一步推论。

**注 4.3**。 尽管不等式 (23) 乍看之下似乎不太可信，但我们并未发现任何反例。相反，我们可以提供一些间接证据，或可支持该不等式成立。

首先，在实平面情形中，有若干例子表明， $\ell_1^2$ 最终成为 *Banach–Mazur* 距离的极大元。这些例子包括紧致空间的直径，即任意空间之间的最大距离（由 *Stromquist* 确定 *[21]*），到欧几里得空间 *[3]*, 的最大距离，以及1-对称空间之间的最大距离*[8]*。在这些例子中， $\ell_1^2$ 都属于每个距离最大化对。若问题 *4.2* 的答案为肯定，则至少能部分解释这一现象，因为在任何包含 $\ell_1^2$ 的空间类中求距离的最大值，都可归结为寻找与 $\ell_1^2$距离最远的空间。这通常会容易得多。例如，*Stromquist* 证明了 $\mathcal{BM}_s^2$ 的直径等于 $3\,2$，且唯一达到该值的一对由 $\ell_1^2$ 以及单位球为正六边形的空间组成。然而，*Stromquist* 的证明相当冗长复杂。相比之下，早在此 20年前，*Asplund* *[2]*（采用了简单得多的方法）就确定了到 $\ell_1^2$ 的最大距离等于 $3\,2$。

其次，不难证明三角不等式

$$d_{BM}(X_1, X_2) \leq d_{BM}(X_1, \ell_1^2) \cdot d_{BM}(X_2, \ell_1^2)$$

当且仅当 $X_1$ 和 $X_2$ 不同构于 $\ell_1^2$时始终严格成立。这意味着，式 (23) 的反例不可能通过在$\mathcal{BM}_s^2$ 中构造一条测地线来找到，该测地线包含空间 $\ell_1^2$ 于其内部。非正式地说， $\ell_1^2$ 似乎位于紧空间 $\mathcal{BM}_s^2$的一个“角落”中。如果这个“角落”足够狭窄，那么不等式 (23) 就变得可信。然而，要肯定地回答开放问题 *4.2* 很可能需要付出相当大的努力。

本文最后给出推论 1.8 和 1.9的证明。

推论 *1.8*的证明。 我们需要证明：如果 $X_1$、 $X_2$是 2维赋范空间，且 $d_{BM}(X_i, X) \leq d_{BM}(X, \ell_1^2)^{\frac{1}{3}}$对于 $i = 1$、2均成立，则

$$d_{BM}(X_1 \oplus_1 \ell_1^{n-2}, X_2 \oplus_1 \ell_1^{n-2}) = d_{BM}(X_1, X_2) =: d.$$

这由定理 1.7得出，前提是 $d_{BM}(X_1, \ell_1^2) \geq d$。根据该假设和三角不等式，我们有

$$\begin{aligned} d_{BM}(X_1, \ell_1^2) &\geq \frac{d_{BM}(X, \ell_1^2)}{d_{BM}(X, X_1)} \geq \frac{d_{BM}(X, \ell_1^2)}{d_{BM}(X, \ell_1^2)^{\frac{1}{3}}} = d_{BM}(X, \ell_1^2)^{\frac{2}{3}} \\ &\geq d_{BM}(X_1, X) \cdot d_{BM}(X, X_2) \geq d_{BM}(X_1, X_2), \end{aligned}$$

如所需。 □

推论 1.9 的证明。根据 [16, 定理 1], ，对每个充分大的整数 $N$，存在$k := \lceil C^N \rceil$（其中 $C > 1$ 是明确的）二维实赋范空间 $X_1, \dots, X_k$，使得$d_{BM}(X_i, X_j) = d_N^2$对所有 $i \neq j$都成立，其中 $d_N = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4N})}$。此外，证明中构造的空间$X_i$ 的单位球是正则 $4N$ 边形与欧几里得圆盘的组合，它们满足 $d_{BM}(X_i, \ell_2^2) \leq d_N$对所有 $i = 1, \dots, k$都成立。因此，在推论 1.8 中取 $X = \ell_2^2$，对于 $n \geq 3$和充分大的 $N$，若 $d_N \leq d_{BM}(\ell_2^2, \ell_1^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}$，则

$$d_{BM}(X_i \oplus_1 \ell_1^{n-2}, X_i \oplus_1 \ell_1^{n-2}) = d_N^2$$

对所有 $i \neq j$。由此可知，空间 $X_1 \oplus_1 \ell_1^{n-2}$、……、$X_k \oplus_1 \ell_1^{n-2}$在 $\mathcal{BM}_s^n$ 中构成一个等距集。由于 $k$ 可以任意大，证明至此完成。 □

在论文结尾，我们想指出未来研究的另一个可能方向。在 [16] 中构造的 $\mathcal{BM}_s^2$ 中 $d_N^2$-等距集的规模阶本质上是最优的，因为这一阶与 $\mathcal{BM}_s^2$ 中最大 $d_N^2$-分离集的规模阶相符。Bronstein [6] 确定了 $\mathcal{BM}_s^n$ 中最大基数的 $(1+\varepsilon)$-分离集在 $\varepsilon \to 0^+$ 时的渐近增长率（对所有 $n \geq 1$ 均成立），其值为 $\exp\left(\varepsilon^{\frac{1-n}{2}}\right)$（另见 [16, 注记 5]）。虽然对于所有 $n \geq 2$，对称紧集 $\mathcal{BM}_s^n$ 可能都包含具有相应规模阶的等距集，但将平面构造提升到更高维度无法实现这一点。该过程保留了 $\exp(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$ 的基数阶。因此，要在 $\mathcal{BM}_s^n$ 中构造规模与最大分离集相匹配的等距集，需要对 $n \geq 3$ 采用不同的方法。

# 5 致谢

这项研究合作由克拉科夫雅盖隆大学的“卓越计划——研究型大学”资助。

# 参考文献

[1] O. B. Ader, 《凸区域的仿射不变量》, 《杜克数学杂志》4(2) (1938), 291–299·

[2] E. Asplund, 平面对称凸体与平行四边形的比较, 《斯堪的纳维亚数学》8 (1960), 171–180.

[3] F. Behrend, 《关于凸区域的若干仿射不变量》, 《数学年鉴》113(1937), 713–747（德文）。

[4] J.Bourgain, S. J. Szarek, 到立方体的 *Banach–Mazur* 距离与 *Dvoretzky-Rogers* 分解, Israel J. Math.62(2) (1988)169–180.

[5] J. Bourgain, L. Tzafriri, 子空间的补空间 $\ell_p^n$; $p \geq 1$ 其由……唯一确定, 载于: J. Lindenstrauss、V. D. Milman（编）, 《泛函分析的几何方面：以色列研讨会, 1985–86》, 数学讲义, 第1267卷, Springer, 柏林、海德堡, 1987年, 39–52页。

[6] E. M. Bronstein，仿射等价凸体的 $\varepsilon$-熵与 Minkowski 紧化，Optimizatsiya 22(39)（1978），5–11页（俄文）。[7] Y. Gordon, A. E. Litvak, M. Meyer, A. Pajor, 一般情形下的 John 分解及其应用，J. Differential Geom. 68(1)（2004），99–119页。[8] F. Grundbacher, T. Kobos，某些极值 Banach–Mazur 距离及距离椭球的 Ader 刻画，Mathematika 72(1)（2026），e70062。[9] F. Grundbacher, T. Kobos，凸体仿射最优位置的 John 型分解，arXiv:2602.14847（2026）。[10] O. Hanner，凸体平移的交，Math. Scand. 4（1956），65–87页。[11] W. B. Johnson, G. Schechtman， $l_p^n$ 空间的子空间到 $l_p^k$的距离，Trans. Amer. Math. Soc. 324(1)（1991），319–329页。[12] W. B. Johnson, A. Szankowski，Banach 空间中的迹公式，Israel J. Math. 203（2014），389–404页。[13] A. I. Khrabrov，若干 $\ell_p^n$ 空间和空间之间距离的比较，Funct. Anal. Appl. 38(1)（2004），75–77页。[14] A. I. Khrabrov，空间 $\ell_p^n$的和空间之间距离的估计。II，J. Math. Sci. 129(4)（2005），4040–4048页。[15] J. Kim，汉纳多面体附近的最小体积乘积，J. Funct. Anal. 266(4)（2014），2360–2402页。[16]T. Kobos, K. Swanepoel, 平面 Banach–Mazur 紧化的等边维数，Proc. Amer. Math. Soc. 153(10)（2025），4423–4436页。[17] T. Kobos, M. Varivoda，低维情形下的 Banach–Mazur 距离，Discrete Comput. Geom. 74(2)（2025），399–427页。[18] M. Korpalski, G. Plebanek，从 $L_\infty$ 到 $\ell_\infty$有多远?，arXiv:2511.12672v2（2025）。[19] Ł. Piasecki, 关于不受 Banach–Mazur 距离 1 保持不变的 Banach 空间性质，J. Math. Anal. Appl. 467(2)（2018），1129–1147页。[20] M. Rudelson，有限维 Banach 空间之间弱距离的估计，Israel J. Math. 89（1995），189–204页。[21]W. Stromquist，两个二维 Banach 空间之间的最大距离，Math. Scand. 48（1981），205–225页。[22] N. Tomczak-Jaegermann，对称空间之间的 Banach–Mazur 距离，Israel J. Math. 46(1-2)（1983），40–66页。

慕尼黑工业大学数学系，德国电子邮件地址：**florian.grundbacher@tum.de**。

波兰克拉科夫雅盖隆大学数学与计算机科学学院电子邮件地址：
**tomasz.kobos@uj.edu.pl**