arXiv:2603.18288v1 [math.KT] 18 Mar 2026

关于具有 Tutte 覆盖的拟阵的 K 理论

LUIGI CAPUTI 和 SABINO DI TRANI

Abstract. 本文旨在明确计算关于 Tutte 覆盖所生成的覆盖族的拟阵范畴的 K 理论。特别地，我们证明，这等价于带环森林上的图拟阵范畴的 K 理论谱，其中覆盖族由同构生成。此外，我们证明这会导出 C_2 谱的一个等价。

Introduction

拟阵提供了一个组合框架，将代数、几何和图论中出现的多种独立性概念统一起来。拟阵最常见的数值不变量和代数不变量，都可以通过删除与收缩运算递归描述。Tutte–Grothendieck 不变量在这方面发挥着基础作用，它们是与删除-收缩关系相容的普适不变量。事实上，Tutte 多项式是拟阵理论中的核心对象，它编码了若干重要的特化形式，包括色多项式、流多项式和特征多项式（完整阐述请参见 [Whi92，第 6]章）。

近年来，从范畴和同伦视角理解与 Tutte 多项式相关的多项式不变量，日益受到关注。一个例子是对图的 Tutte 多项式进行范畴化的过程，它将这一多项式描述为分次欧拉示性数 [JHR06]。此外，还有对色多项式 [HGR05], 、双色多项式 [Sto08], 以及图的符号色多项式 [CLWZ22]的范畴化。相关思想也出现在近期对经典拟阵不变量进行范畴化的研究中，例如特征多项式 [SY24]。另一个方向是采用同伦论方法。 [BGM+24]中引入的带覆盖族的范畴框架，为定义与图、偏序集或拟阵等组合结构相关的 K-理论谱提供了自然的背景。该方向近期的进展包括 [CG25] 关于图论中边重构猜想的研究，以及对 Tutte 型递归的范畴实现的研究 [Lop25], ，这两项工作都启发了本文。

Tutte 多项式满足的删除–收缩递归关系，提示拟阵范畴上存在一种自然的覆盖族结构。粗略地说，拟阵 M 可以由与非退化元素 e相关联的一对子式 $M \setminus e$ 和 M/e 覆盖。反复进行这一过程，就会生成一棵删除–收缩树，其叶节点对应于经过连续删除和收缩得到的拟阵。沿着 [Lop25], 的思路，这些树定义了拟阵的*Tutte* 覆盖，并确定一种覆盖族结构。由此得到一个带覆盖族的范畴，记作$\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$。本文旨在计算与该范畴相关的 K-理论谱。我们的主要结果如下:

定理 1 (参见推论 4.8)。 存在一个谱的等价

$$K(\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}) \simeq \bigvee_{m,n\in\mathbb{N}} \Sigma^\infty_+ B(S_m) \wedge \Sigma^\infty_+ B(S_n) \ ,$$

其中 S_p 表示由 p 个元素组成的对称群。

关键观察是，每个拟阵都承认一个 Tutte 覆盖，其定义域是不可分解 拟阵（见定义 3.3）。这类拟阵具有特别简单的结构：它们恰好是环与余环的直和，并且可以与和带环森林 [Lop25]相关联的图拟阵对应起来。利用这一描述，我们证明带 Tutte 覆盖的拟阵范畴 $\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 具有细化（见命题 3.7）。这使我们能够对带覆盖族的范畴 [CG25]应用 D´evissage 定理。因此， K-理论的计算可以归约为：相对于由拟阵同构给出的覆盖族，计算不可分解拟阵的全子范畴的 K-理论$\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 。这就得到了定理 1。

鉴于定理 1， [Lop25]中研究的、构成 Tutte 多项式基础的递归组合学，转化为对相应 K-理论谱的同伦论描述。我们进一步证明， K-理论上的等价是 C_2-谱的等价（见推论4.10），并且对于作为$\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 的全范畴来看的图拟阵，也可以做到这一点（见定理 4.4）。

致谢。 LC 得到了 Martino Lupini 的欧洲研究理事会启动基金 101077154“可定义代数拓扑”的支持。SDT 得到了 PRIN 项目 20223FEA2E——“簇代数与泊松李群”的支持。作者感谢 INdAM-GNSAGA 提供的部分支持。此外，作者衷心感谢在里昂举办的“代数、表示论与伦理学中的合作”会议的组织者和所有参与者（包括青蛙）；本研究正是在那里开始的：谢谢你们让我们重新意识到，彼此关怀是多么好的主意。

1. Matroids and their Algebraic Invariants

本节回顾后文所需的一些拟阵基本事实。完整参考文献见[Oxl11]和 [Whi86] 。

回顾一下，(有限) 拟阵 M 是一个有序对 $(X,\mathcal{I})$，其中 X 是一个（有限）集合，而 $\mathcal{I}$ 是 X的独立集族，即由 X 的子集构成、满足独立性公理的集合族：

(I1) 空集属于 $\mathcal{I}$；(I2) 如果 $A \in \mathcal{I}$ 和 $B \subset A$，那么 $B \in \mathcal{I}$；(I3) 如果 A, $B \in \mathcal{I}$并且 $|A| > |B|$，那么存在 $x \in A$ 使得 $B \cup \{x\} \in \mathcal{I}$。

集合 X 是 M的底集。极大独立集称为基。

给定一个拟阵 $M = (X,\mathcal{I})$，其秩函数 $r_M\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{N}_{\geq 0}$ 是这样一个函数：它将每个 $S \subseteq X$ 映射为包含在 S中的极大独立集的大小。

例 1.1（均匀拟阵）. 设 X 是一个含有 n个元素的有限集，且 $k \leq n$是一个非负整数。族 $\mathcal{I} = \{I \subset X \,|\, |I| \leq k\}$ 满足独立集族的公理。拟阵 $M = (X,\mathcal{I})$是一个含有 n 个元素的集合中基数为 k 的子集所构成的均匀拟阵。记作$U_{k,n}$。

例 1.2（图拟阵）。 设 G 是一个有限无向图， $\mathcal{C}$ 是其（无向）圈的集合。将 G 的子图视为其边的集合，该集合

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}} = \{S \subseteq E(G) \mid C \nsubseteq S, \text{ for each } C \in \mathcal{C}\}$$

满足独立性公理，其中 $E(G)$ 表示 G 的边集。数对 $M_G = (E(G), \mathcal{I}_{\mathcal{C}})$ 是与 G 相关联的图拟阵。

设 $M_1 = (X_1, \mathcal{I}_1)$ 和 $M_2 = (X_2, \mathcal{I}_2)$ 是两个拟阵。拟阵态射 $\varphi\colon M_1 \to M_2$ 是一个单射 $\varphi\colon X_1 \to X_2$，满足对每个 $I \in \mathcal{I}_1$，都有 $\varphi(I) \in \mathcal{I}_2$。拟阵及其态射构成一个范畴，记作 $\mathbf{Mat}$。拟阵 $M_1 = (X_1, \mathcal{I}_1)$ 和 $M_2 = (X_2, \mathcal{I}_2)$ 同构；此时记作 $M_1 \cong M_2$，若存在双射 $f\colon X_1 \to X_2$，使得 $f^{-1}(I) \in \mathcal{I}_1$ 当且仅当 $I \in \mathcal{I}_2$。

定义 1.3 (直和拟阵)。设 $M_1 = (X_1, \mathcal{I}_1)$ 和 $M_2 = (X_2, \mathcal{I}_2)$ 为拟阵。直和 $M_1 \oplus M_2$ 是一个拟阵，其底集为 $X_1 \sqcup X_2$，独立集族为 $\mathcal{I} = \{I_1 \sqcup I_2 \mid I_1 \in \mathcal{I}_1, I_2 \in \mathcal{I}_2\}$。

设 $M = (X, \mathcal{I})$ 是一个拟阵，B 是其基的集合。令

$$B^* = \{X \setminus J \mid J \in B\},$$

$$I^* = \{A \in X \mid A \subset J \text{ for certain } J \in B^*\}.$$

注意，集合 I^* 满足拟阵独立集族的公理。

定义 1.4 (对偶拟阵)。设 $M = (X, \mathcal{I})$ 为一个拟阵。拟阵 $M^* = (X, I^*)$ 是 M 的对偶拟阵。

我们将使用以下术语；

定义 1.5。设 $M = (X、I)$ 是一个有限拟阵，且 $e \in X$。

- e 是一个环，如果 $\{e\}$ 不是独立集；

如果 e 包含于每个独立集中，则• e 是 M 的余环（或桥）；
如果对于 M，• e 既不是环也不是余环，则• e 是非退化 的。

后续内容中将用到拟阵的两个重要运算：删除与收缩。现在回顾其定义。考虑拟阵 $M = (X, \mathcal{I})$，以及 T X 的任意子集。

定义 1.6（删除拟阵）。关于 T 的 $M =$（X、$\mathcal{I}$）的删除是拟阵$M \setminus T =$（X'、$\mathcal{I}'$），其定义如下：
(DM1) 底集 X' 是集合 $X \setminus T$；(DM2) 独立集 $\mathcal{I}'$ 是满足 $I \subset X'$ 的 $I \in \mathcal{I}$ 集合。

定义 1.7 (收缩拟阵)。拟阵 M/T定义为拟阵 $(M^* \setminus T)^*$

注 1.8。如果 $\{x\}$ 是 $M = (X, \mathcal{I})$ 的独立集，则等价于说 M/x 是由以下数据定义的拟阵：

(CM1) 底集 X 是集合 $X \setminus \{x\}$；(CM2) 独立集 $\mathcal{I}'$ 由满足 $I \cup \{x\} \in \mathcal{I}$的集合 $I \subset X \setminus \{x\}$ 构成。反之，如果 x是 M中的一个环，则 $M/x = (X \setminus \{x\}, \mathcal{I})$。

我们回顾删除和收缩的以下性质——例如参见 [Oxl11，命题 3.1。25]:

命题 1.9。设 $M = (X, I)$ 是一个拟阵，且 T_1, T_2 是 X 的不相交子集。则：
(1) $(M \setminus T_1) \setminus T_2 = M \setminus (T_1 \cup T_2) = (M \setminus T_2) \setminus T_1$; *(2)* $(M/T_1)/T_2 = M/(T_1 \cup T_2) = (M/T_2)/T_1$; *(3)* $(M \setminus T_1)/T_2 = (M/T_2) \setminus T_1$。

设 M 是一个拟阵。通过对 M 依次进行删除和/或收缩得到的任何拟阵，都称为 M 的一个 拟阵小拟阵 。注意，根据命题 1.9，拟阵的拟阵小拟阵是定义良好的对象。

注 1.10。 设 $M = (X, \mathcal{I}(M))$ 是一个拟阵，且 $x \in X$。 $X \setminus \{x\}$ 的包含映射诱导出两个映射，

$$M \setminus x \to M \qquad \text{and} \qquad M/x \to M \ ,$$

它们是拟阵态射。事实上，对于第一个映射，根据定义，当且仅当 I 是包含于 $X \setminus \{x\}$中的 M 的独立集时，有 $I \in \mathcal{I}(M \setminus x)$。如果 x 是环，则第二个映射显然有定义。如果 x 不是环，则有 $I \in \mathcal{I}(M/x)$ 当且仅当 $I \cup \{x\} \in \mathcal{I}(M)$；特别地， $I \in \mathcal{I}(M)$。此外，注意到，如果 T_1 和 T_2 是 X的不相交子集，则底集包含诱导出一个从 $M' = M \setminus T_1/T_2$到 M的态射。

对于图拟阵这一类，我们有如下结论：

命题 1.11 ([Oxl11, 3.1.2& 3.2.1])。 设 G 为一个图， M_G 为其关联的图拟阵。设 $T \subseteq E(G)$ 为 G 的边的一个子集。则：

(1) $M_G \setminus T = M_{G \setminus T}$;

(2) $M_G/T = M_{G/T}$。

其中， $G \setminus T$ 和 G/T 表示图上的经典删除与收缩运算。

根据命题 1.11，图拟阵的拟阵小拟阵仍然是图拟阵。

设 $M = (X, \mathcal{I})$ 是一个秩函数为 r 的拟阵。子集 $A \subset X$ 的余秩是差值 $z(A) := r(M) - r(A)$。差值 $n(A) := |A| - r(A)$ 称为 A 的零度。利用余秩函数和零度函数，现在我们可以回顾拟阵的 Tutte 多项式定义。更多详细信息请参阅 [Whi92，第 6] 章。

D定义 1.12。 设 $M = (X, I)$ 是一个有限拟阵。则其 *Tutte* 多项式定义为 *s:*

$$T_M(x, y) = \sum_{A \subseteq X} (x-1)^{z(A)} (y-1)^{n(A)} \ .$$

按照约定，如果 $X = \emptyset$，那么 $T_M(x, y) = 1$。

我们回顾一下，Tutte 多项式在直和下具有良好的性质，

$$T_{M_1 \oplus M_2}(x, y) = T_{M_1}(x, y)\, T_{M_2}(x, y) \ , \tag{1.1}$$

并且可以利用删除和收缩递归地计算。Tutte 多项式的这些性质，正是研究 [Lop25]，中引入的带 Tutte 覆盖的拟阵范畴（本文将对此进行探讨）的主要动机。

2. K-theory of categories with covering families

本节回顾带覆盖族的范畴这一概念。我们遵循 [BGM+24].

定义 2.1 ([BGM+24，定义 2.1])。设 $\mathbf{C}$ 是一个小范畴。

(1) $\mathbf{C}$ 中的一个**多态射**由一个对象 $B \in \mathbf{C}$ 以及一族有限（可能为空）的映射组成，这些映射属于 $\mathbf{C}$且目标为 B:

$$\{f_i \colon A_i \to B\}_{i \in I} \ .$$

(2) {style id='1'}C 上的覆盖族结构*{style id='1'}*是由多态射组成的一个集合，这些多态射称为覆盖族，并满足： *(a)* 每个包含恒等映射 $\{A = A\}$ 的单元素集都是覆盖族； *(b)* 给定一个覆盖族 $\{g_j$*{style id='9'}*: *{style id='9'}* $B_j \to C\}_{j \in J}$ ，且对每个 $j \in J$ 都有一个覆盖族$\{f_{ij}$*{style id='14'}*: *{style id='14'}* $A_{ij} \to B_j\}_{i \in I_j}$，则所有复合映射 $\{g_j \circ f_{ij}$*{style id='18'}*: *{style id='18'}*$A_{ij} \to C\}_{j \in J}$*{style id='21'}*, *{style id='21'}*$_{i \in I_j}$构成一个覆盖族。*(3)* 带覆盖族的范畴是一个小范畴 *{style id='26'}C{style id='26'}*、*{style id='28'}C{style id='28'}*上的覆盖族结构，以及一个指定的基点对象 $* \in$*{style id='31'}C{style id='31'}*，并满足： *(i) {style id='33'}Hom({style id='33'}*$*, *${style id='37'}*){style id='37'}* $= \{1_*\}$ 且 *{style id='40'}Hom({style id='40'}*$c, *${style id='44'}*){style id='44'}* $= \emptyset$，若 $c \neq *$;

(ii) 对于每个有限（可能为空的）集合 I，族 $\{* \to *\}_{i\in I}$ 是覆盖族。

带覆盖族的范畴之间的态射是一个函子 F: {style id='2'}C{style id='2'} $\to$ {style id='5'}D{style id='5'}，它同时保持覆盖族和基点；这意味着 $F(*_C) = *_D$，并且 F 将 {style id='11'}C{style id='11'}的覆盖族映射为 {style id='13'}D{style id='13'}的覆盖族。带覆盖族的范畴及其间的态射构成一个范畴 {style id='15'}CatFam{style id='15'}。

如果$\mathbf{C}$ 是一个不带基点的小范畴，我们总可以添加一个不交基点。事实上，我们可以从 $\mathbf{C}$ 构造一个新范畴$\mathbf{C}_+$ ：向$\mathbf{C}$ 添加一个对象 $*$，使其具有如下性质：$\mathrm{Hom}(*,*) = \{1_*\}$ 以及 $\mathrm{Hom}(c,*) = \emptyset$，其中 $c \neq *$。如果形如 $\{* \to *\}_{i\in I}$ 的所有族都是覆盖族 [BGM+24，注 2.3]，则这个新范畴$\mathbf{C}_+$ 成为一个带覆盖族的范畴。

例 2.2。设$\mathbf{C}$ 是一个带基点 $*$的小范畴。于是，$\mathbf{C}$ 的所有同构构成的集族 $\mathcal{S}^{\cong}_{\mathbf{C}}$ 给出了一个带覆盖族的范畴，我们将其记为 $(\mathbf{C}\ \mathcal{S}^{\cong}_{\mathbf{C}}, *)$，或更简洁地记为$\mathbf{C}^{\cong}$。特别地，我们有：

(i) 对于每个有限（可能为空的）集合 I，族 $\{* \to *\}_{i\in I}$ 属于 $\mathcal{S}^{\cong}$；(ii) 如果 $f\colon\ C \to D$ 是 $\mathbf{C}$ 中的同构，则 $\{f\colon\ C \to D\}$ 属于 $\mathcal{S}^{\cong}$。

例 2.3（[Lop25，定义4.1]）。令$\mathbf{Mat}$ 为拟阵范畴。记$\mathbf{Mat}_+$为拟阵及拟阵态射范畴，并带有一个不相交的指定点 $*$。于是，带覆盖族的范畴（$\mathbf{Mat}_+$，$\mathcal{S}^{\cong}_{\mathbf{Mat}}$，$*$）记作 $\mathbf{Mat}^{\cong}$。

我们关注带覆盖族的范畴的 K理论，尤其是拟阵范畴的K理论。其定义基于以下覆盖范畴概念：

定义2.4 （[BGM+24，定义2.12]）。令$\mathbf{C}$ 为带覆盖族的范畴。覆盖范畴 $W(\mathbf{C})$ 的对象是 $\mathbf{C}$ 中任意有限集族 $\{A_i\}_{i\in I}$ 非指定对象，而 $W(\mathbf{C})$ 中的态射是有限集的映射 $f\colon\ I \to J$，连同对所有 $i \in I$ 给定的态射 $f_i\colon\ A_i \to B_{f(i)}$，使得

$$\{f_i\colon A_i \to B_j\}_{i\in f^{-1}(j)}$$

对于每个 $j \in J$，都是一个覆盖族。在 $W(\mathbf{C})$ 中，态射的复合是通过复合集合映射和覆盖族来定义的。

我们在此注意到，由 [BGM+24 引理 2.16]，可知，覆盖范畴的构造给出了一个函子，并且 $W(\mathbf{C})$ 有一个自然的基点对象，对应于 $I = \emptyset$。利用与带覆盖族的范畴 $\mathbf{C}$ 相关联的覆盖范畴，可以定义 K-理论谱 $K(\mathbf{C})$——详见 [BGM+24 定义 2.17]，了解这一构造的细节。K-理论群的计算通常相当困难，但零次群的情形已十分清楚。事实上，我们有如下结论：

命题 2.5 ([BGM+24，命题 3.8])。设$\mathbf{C}$ 是一个带覆盖族的范畴。那么，$K_0(\mathbf{C})$ 是自由阿贝尔群

$$K_0(\mathbf{C}) = \mathbb{Z}[\mathrm{ob}(\mathbf{C})] \Big/ [A] = \textstyle\sum_{i\in I}[A_i]$$

对于每个覆盖族 $\{A_i \to A\}_{i\in I}$。

带覆盖族的范畴的 K-理论满足一些基本定理，这些定理对于经典的范畴 K-理论也成立。设 $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$ 是带覆盖族的范畴 $\mathbf{C}$的全子范畴；也就是说，$\mathbf{D}$ 是$\mathbf{C}$的全子范畴，且$\mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 是带覆盖族的范畴之间的态射。按照 [CG25]，，我们称覆盖 $\{f_i\colon\ A_i \to A\}_{i\in I}$ 是覆盖 $\{g_j\colon\ B_j \to A\}_{j\in J}$的细化，如果对于每个 $i \in I$，都存在 $j \in J$以及$\mathbf{C}$ 中的映射 $h\colon\ A_i \to B_j$，使得 $f_i = g_j \circ h$。

定义 2.6 ([CG25，定义 2.7])。 带覆盖族的范畴$\mathbf{C}$ 具有细化性质，当同一对象 A 的任意一对覆盖 $\{A_i \to A\}_{i\in I}$ 和 $\{A'_j \to A\}_{j\in J}$ 都有共同细化时。

现在我们可以回顾带覆盖族的范畴的 D´evissage 定理。

定理 2.7 ([CG25，定理 2.8])。 设$\mathbf{C}$ 是一个具有细化的带覆盖族的范畴，并设 $i\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 是带覆盖族的全子范畴的包含。如果每个对象 $C \in\mathbf{C}$ 都有一个覆盖的选择 $\{D_i \to C\}_{i\in I}$，其中对所有 $i \in I$都有 $D_i \in \mathbf{D}$，那么

$$Ki\colon K(\mathbf{D}) \to K(\mathbf{C})$$

是一个等价。

回顾例 2.2，对于任意带基点的小范畴$\mathbf{C}$，我们都可以关联一个带覆盖族的范畴$\mathbf{C}^{\cong}$，其中覆盖族由同构给出。于是，我们对相关的 K-理论有了完整的描述:

命题 2.8 ([CG25，命题 2.14])。 设$\mathbf{C}^{\cong}$ 是一个带基点的小范畴。那么，存在谱的等价

$$K(\mathbf{C}^{\cong}) \simeq \bigvee_{[C]} \Sigma^{\infty}_{+} B(\mathrm{iso}_{\mathbf{C}}(C))$$

其中，楔和遍历 $\mathbf{C}$ 中对象的同构类，而 $\mathrm{iso}_{\mathbf{C}}(C)$ 是对象 $C \in\mathbf{C}$ 的 $\mathbf{C}$-同构群。

因此，命题 2.8 给出了带有由同构给出的覆盖的拟阵范畴$\mathbf{Mat}^{\cong}$ 的完整计算。在接下来的几节中，我们将关注覆盖族的另一种结构，即 [Lop25] 中发展出的 Tutte 覆盖。

3. Matroids with Tutte coverings

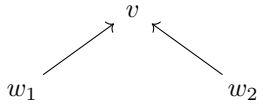
在本节中，我们首先回顾 [Lop25] 中带 Tutte 覆盖的拟阵覆盖范畴的定义，然后将重点讨论不可分解拟阵。不过，为了定义 Tutte 覆盖的概念，我们首先需要回顾删除-收缩树的定义。

设 T 是一棵根为 r_T 的二叉树。我们可以按如下方式自然地为 T 关联一个范畴。首先，我们考虑 $\leq_T$ 上顶点的序关系 T，其中 $w \leq_T v$ 当且仅当 $w = v$ 或 w 是 v 的后代。由于 T 是一棵树，这描述了一个偏序集，因而也描述了一个范畴。我们将所得范畴记为 $\mathcal{C}_T$。

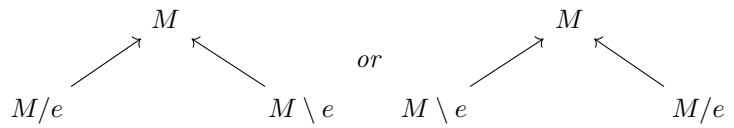
回顾例2.3，$\mathbf{Mat}_+$ 表示拟阵及其态射构成的范畴，并带有一个不相交的指定点 $*$。

定义 3.1 ([Lop25，定义 4.4 和 4.5])。设 T 是一棵根为 r_T的有根二叉树。形状为 T 的初等删除-收缩树是一个函子 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}_T \to \mathbf{Mat}_+$，满足:

(1) $\mathcal{F}(r_T) \neq *$; *(2)* 若 v 是 T 的一个内部顶点，且仅有一个子节点 w，则 $\mathcal{F}(v) = \mathcal{F}(w)$；若 $w \to v$ 是 $\mathcal{C}_T$ 中由关系 $w \leq_T v$诱导的态射，则有 $\mathcal{F}(w \to v) =\mathrm{Id}^{\mathcal{F}(v)}$; *(3)* 若 v 是一个子节点为 w_1 和 w_2的内部顶点，则拟阵 M 中存在一个非退化元素 $e\colon = \mathcal{F}(v)$，使得 $\mathcal{F}$ 将子图表映射



到以下对象之一:



其中， M/e 和 $M \setminus e$ 表示在 e上对 M 进行的收缩和删除，而映射$M/e \to M$ 和 $M \setminus e \to M$ 表示标准包含映射。

我们称函子 $\mathcal{G}$: $\mathcal{C}_T \to \mathbf{Mat}_+$ 为形状为 T 的删除-收缩树，如果它自然同构于形状为 T 的初等删除-收缩树。

沿用 [Lop25 的定义 4.11], ，现在可以定义由 Tutte 态射在拟阵范畴上诱导的覆盖族结构。

定义 3.2。设 $\mathcal{S}^{\mathrm{tc}}$ 为 $\mathbf{Mat}_+$ 上多态射的集合，定义如下：

(1) 对于每个有限（可能为空的）集合 I，族 $\{* \to *\}_{i\in I}$ 属于 $\mathcal{S}^{\mathrm{tc}}$。*(2)* 给定一个拟阵 $M \neq *$，当且仅当存在一个有根二叉树 T，其根为 r_T，叶为 v_1、……、v_p，以及一个删除-收缩树 $\mathcal{F}$: $\mathcal{C}_T \to \mathbf{Mat}_+$，满足 $\mathcal{F}(r_T) = M$，使得对于每个 $j = 1$、……、p 都有 $f_j = \mathcal{F}(i_{v_j})$，并且其中 i_{v_j}是 $\mathcal{C}_T$ 中的唯一态射 i_{v_j}: $v_j \to r_T$，多态射 $\{f_j\colon M_j \to M\}_{j=1、\ldots\ldots、p}$ 属于 $\mathcal{S}^{\mathrm{tc}}$。

多态射 $\{f_j{:}M_j \to N\}_{j=1,\ldots,p}$在 $\mathcal{S}^{\mathrm{tc}}$ 中称为 M的Tutte 覆盖 。

根据 [Lop25，命题 4.12], ，三元组（$\mathbf{Mat}_+, \mathcal{S}^{\mathrm{tc}}, *$）是一个带覆盖族的范畴，我们很快将其记作 $\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$。

3.1. **不可分解覆盖**。本小节回顾所谓不可分解拟阵的性质。回顾 [Lop25，定义 2.9]：若$\mathbf{C}$ 是一个带覆盖族的范畴，那么对象 $C \in \mathbf{C}$ 是不可分解的，当且仅当 C 的唯一覆盖是$\widetilde{}$形如 $\{A \xrightarrow{=} C\}$的单元素集。

定义 3.3。不可分解拟阵 是指满足每个 $x \in X$都退化的拟阵 $M = (X, \mathcal{I})$ 。

注意，不可分解拟阵是与森林（可能带有环）相关联的图拟阵。事实上，若 M 是有限多个余环和环（可以为空）的直和，则它是不可分解拟阵。根据 [Lop25，定义 4.15], ，若拟阵 $M \neq *$ 的 Tutte 覆盖$\{A_i \to M\}_{i\in I}$ 满足其中所有拟阵 A_i（ $i \in I$）均不可分解，则称其为不可分解的 。每个拟阵都存在一个由不可分解拟阵构成的覆盖。事实上，我们有如下结论：

命题 3.4 ([Lop25, 命题 4.14])。 任意拟阵 $M \neq *$ 都存在一个 ***Tutte*** 覆盖$\{g_i\colon N_i \to M\}_{i\in I}$其中每个 N_i都是不可分解拟阵。

我们将拟阵的一个拟阵多重集定义为指标族 $\{M_i\}_{i\in I}$，其中满足 $I \neq \emptyset$。拟阵多重集的同构 $\{M_i\}_{i\in I} \to \{N_j\}_{j\in J}$ 是一个双射 f: $I \to J$，使得对于所有 $i \in I$， $M_i \xrightarrow{\cong} N_{f(i)}$ 都是拟阵同构。给定一个不可分解 Tutte 覆盖 $A = \{A_i \to M\}_{i\in I}$，集合 $\mathrm{Ind}_M(A)$ 表示其定义域的拟阵多重集——也就是其中出现的不可分解拟阵。随后，Lop25, 命题 4.16] 证明了，不可分解 Tutte 覆盖具有同构的定义域。更准确地说，我们有：

命题 3.5 ([Lop25，命题 4.16])。 设 $A{:=}\{A_i \to M\}_{i\in I}$和 $B{:=}\{B_j \to M\}_{j\in J}$是拟阵 $M \neq *$ 的不可分解 ***Tutte*** 覆盖。那么，$\mathrm{Ind}_M(A)$ 与 $\mathrm{Ind}_M(B)$ 作为多重集是同构的。

作为计算带 Tutte 覆盖的拟阵的 K-理论的一项主要步骤，我们希望证明带覆盖族的范畴 $\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 具有细化。我们将使用以下命题；

命题3.6。 设 $A \coloneqq \{A_i \to M\}_{i\in I}$ 是一个 *Tutte* 覆盖。则存在 A 的一个细化 $A' \coloneqq \{A'_k \to M\}_{k\in K}$，它是一个不可分解 *Tutte* 覆盖。

证明。 如果 A 的每个定义域 A_i 都是不可分解拟阵，则结论显然成立。否则，存在一个指标 j 和一个拟阵 A_j，使得 A_j 至少有一个非退化元素 e。由注释1.10可知，我们有如下态射

$$f_j^d \coloneqq A_j \setminus e \to A_j \to M, \qquad f_j^c \coloneqq A_j/e \to A_j \to M \ ,$$

因此，我们可以考虑如下多态射

$$A' \coloneqq \{A_i \to M\}_{i\neq j} \cup \{A_j \setminus e \xrightarrow{f_j^d} M\} \cup \{A_j/e \xrightarrow{f_j^d} M\} \ .$$

我们要证明 A' 是一个 Tutte 覆盖族。为此，设 $\mathcal{F}_A\colon T_A \to \mathbf{Mat}_+$ 是覆盖族 A 的一个删除-收缩树，并设 ℓ_j 是 T_A 的一个叶节点，满足 $\mathcal{F}_A(\ell_j) = A_j$。考虑由 T_A 添加子节点 w_1 和 w_2 到 ℓ_j 后得到的树 $T_{A'}$。该赋值

$$\mathcal{F}_{A'}(v) \coloneqq \begin{cases} \mathcal{F}_A(v) & \text{if } v \in T_A \\ M \setminus e & \text{if } v = w_1 \\ M/e & \text{if } v = w_2 \end{cases}$$

给出了所需的函子 $\mathcal{F}_{A'}\colon T_{A'} \to \mathbf{Mat}_+$。根据构造， A' 细化了 A。现在我们可以重复这一过程，直到新构造的 Tutte 覆盖的定义域中的每个拟阵都没有非退化元素。这就证明了该命题。□

推论 3.7。 带覆盖族的范畴$\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 具有细化。

证明。 设 $\{A_i \to M\}_{i\in I}$ 和 $\{B_j \to M\}_{j\in J}$ 是$\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$中的覆盖族。我们要证明， A 和 B存在一个共同细化。根据命题3.6，存在不可分解的 Tutte 覆盖 A' 和 B'，分别通过细化态射 h_A 和 h_B细化 A 和 B。根据命题 3.5，拟阵多重集 $\mathsf{Ind}_M(A')$ 和 $\mathsf{Ind}_M(B')$ 同构。这意味着存在一个双射 $h\colon \mathsf{Ind}_M(A') \to \mathsf{Ind}_M(B')$，使得若$h(A'_j) = B'_i$，则 $h_j\colon A'_j \to B'_i$ 是拟阵同构。因此，复合 $h \circ h_B$ 是一个细化态射，并且 A' 同时细化 A 和 B。这足以说明范畴$\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 具有细化。□

4. The K-theory of (indecomposable) matroids

本节介绍 $\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 中图拟阵和不可分解拟阵的子范畴。我们的目标是证明这些范畴具有相同的 K-理论不变量。作为一项主要应用，我们计算 $\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 的 K-理论。

我们从带覆盖族的图拟阵范畴开始。记 $\mathbf{Graph}$ 为 $\mathbf{Mat}$ 中由图拟阵构成的全子范畴。因此，其对象是形如 M_G 的拟阵，其中 G 是一个有限图；其态射是作为（图）拟阵所诱导的态射。根据命题 1.11，图拟阵在删除和收缩运算下封闭。因此，$\mathbf{Mat}_+$ 上以 Tutte 覆盖为多态射的覆盖族结构也赋予其带覆盖族的范畴结构，我们将其记为

$$\mathbf{Graph}^{\mathrm{tc}} \coloneqq (\mathbf{Graph}_+, \mathcal{S}^{\mathrm{tc}}_{\mathbf{Graph}}, *) \ .$$

Re标记 4.1。包含映射 $\mathbf{Graph}^{\mathrm{tc}} \to \mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 是一个带覆盖族的范畴态射

现在我们聚焦于不可分解拟阵，并回顾一下，不可分解拟阵是与森林相关联的图拟阵，森林中可能含有环（见定义 3.3）。我们用**IMat** 表示**Mat** 中以不可分解拟阵为对象的全子范畴。其态射是不可分解拟阵之间的所有拟阵态射。

注 4.2。 范畴**IMat** 在取子式和对偶拟阵时封闭。

考虑范畴 $\mathbf{IMat}_+$，其对象为带有不相交指定点 $*$ 的不可分解拟阵。由例 2.2 可知，拟阵同构构成一个带覆盖族的范畴，我们将其记为

$$\mathbf{IMat}^{\cong} := (\mathbf{IMat}_+, \mathcal{S}^{\cong}_{\mathbf{IMat}}, *) .$$

注意，由注 4.2 可知，不可分解拟阵的 Tutte 覆盖族构成**IMat**中的一个覆盖族 $\mathcal{S}^{\mathrm{tc}}_{\mathbf{IMat}}$，我们仍称之为 Tutte 覆盖。由此得到一个带覆盖族的范畴

$$\mathbf{IMat}^{\mathrm{tc}} := (\mathbf{IMat}_+, \mathcal{S}^{\mathrm{tc}}_{\mathbf{IMat}}, *) .$$

注 4.3。 包含函子 $\mathbf{IMat}^{\cong} \to \mathbf{Mat}^{\cong}$、$\mathbf{IMat}^{\mathrm{tc}} \to \mathbf{Graph}^{\mathrm{tc}}$ 和 $\mathbf{IMat}^{\mathrm{tc}} \to \mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 都是带覆盖族的范畴之间的范畴态射。所有定义域范畴都是陪域范畴的满子范畴。

考虑带覆盖族的范畴 $\mathbf{IMat}^{\mathrm{tc}}$。根据定义，$\mathbf{IMat}^{\mathrm{tc}}$ 中的覆盖族要么具有形式 $\{* \to *\}_I$，要么是具有形式 $\{A \xrightarrow{\cong} C\}$ 的单元素集。因此，带覆盖族的范畴 $\mathbf{IMat}^{\mathrm{tc}}$ 实际上等价于由同构给出的带覆盖族的范畴，也就是$\mathbf{IMat}^{\cong}$。基于这一观察，我们有以下结论：

定理 4.4. 存在谱的等价

$$K(\iota_1)\colon K(\mathbf{IMat}^{\cong}) \to K(\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}})$$

and

$$K(\iota_2)\colon K(\mathbf{IMat}^{\cong}) \to K(\mathbf{Graph}^{\mathrm{tc}})$$

其中 ι_1 和 ι_2 是包含函子。

证明。 根据推论 3.7 和 ι_1，范畴 $\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 具有细化：$\mathbf{IMat}^{\cong} \to \mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 是带覆盖族的全子范畴的包含。$\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 中的每个对象 $M \in$都有一个覆盖 $M_i \to M$，其中所有 M_i 都是不可分解拟阵（命题 3.4）——基点 $*$ 的覆盖则是显然的，由 $\{* \to *\}$给出。于是，陈述的第一部分由定理 2.7 得出。对于陈述的第二部分，注意到 ι_1 可经由 ι_2分解。由 K-理论构造的自然性，第二个等价也成立。□

利用这个谱的等价，我们现在可以如下分解拟阵的 K-理论谱：

推论 4.5. 存在谱的等价

$$K(\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}) \simeq \bigvee_{[M]} \Sigma^{\infty}_{+} B(\mathrm{iso}_{\mathbf{IMat}}(M))$$

其中，楔积遍历不可分解拟阵的同构类，而同构$_{\mathbf{IMat}}(M)$是 M 的 **IMat**-同构群。

证明。 根据命题 2.8，我们有如下谱的等价

$$K(\mathbf{IMat}^{\cong}) \simeq \bigvee_{[M]} \Sigma^{\infty}_{+} B(\mathrm{iso}_{\mathbf{IMat}}(M))$$

其中，楔和遍历不可分解拟阵的同构类，群 $\mathrm{iso}_{\mathbf{IMat}}(M)$ 是范畴 **IMat** 中 M 的同构群。由定理 4.4 即得结论。□

我们可以给出更明确的计算，但首先需要一个预备引理。

引理 4.6. 设 $M = (X, \mathcal{I}) \in \mathbf{IMat}^{\cong}$ 是一个秩为 r 的不可分解拟阵，且 n 是底集 X的基数。那么

$$\mathrm{iso}_{\mathbf{IMat}}(M) \cong S_r \times S_{n-r} \ ,$$

其中， S_r 和 S_{n-r} 分别表示作用在 r 个和 $n-r$ 个元素上的对称群。

证明。 $\mathrm{iso}_{\mathbf{IMat}}(M)$ 的元素恰好是范畴 **Mat** 中 M 的自同构，
即双射 $\varphi\colon X \to X$ ，使得对任意 $I \in \mathcal{I}$ ，都有 $\varphi(I) \in \mathcal{I}$。

回想一下，**IMat** 中的拟阵没有非退化元素。因此， $X = X_c \sqcup X_\ell$，其中 X_c 和 X_ℓ 分别是 M 的余环集和环集。注意，根据定义， $X_c \in \mathcal{I}$ ，且它是 M的唯一基。特别地，我们有 $|X_c| = r$和 $|X_\ell| = n - r$。此外，注意，条件 $I \in \mathcal{I} \implies \varphi(I) \in \mathcal{I}$ 仅当对每个 $x \in X_c$都有 $\varphi(\{x\}) \in X_i$ 时才成立；也就是说，将 φ 限制在 X_c上时，它表现为 S_r 的一个置换。类似地，该条件要求对于任意 $x \in X_\ell$， $\varphi(\{x\})$ 都属于 X_ℓ 。于是， φ 在 X_ℓ上表现为 S_{n-r} 的一个元素。命题得证。□

注记 4.7。 我们指出，若 M 是不可分解拟阵，则其秩等于其余环的数量，而 $n-r$ 是其环的数量。特别地， M可写成$M \simeq U_{0}^{\oplus n-r}{}_{,\ 1} \ \oplus U_{1\,1}^{\oplus r}{}_{,}$ 的形式，其中$U_{k,\ h}$是由h个元素组成的集合上的、基数为 k的子集构成的均匀拟阵。此外，注意，对于任意 m， $n \in \mathbb{N}$，拟阵 $M \simeq U_{0}^{\oplus m}{}_{,\ 1} \ \oplus U_{1\,1}^{\oplus n}{}_{,}$ 都是恰有 m 个环和 n个余环的不可分解拟阵。

我们在此注意到，存在一个谱的等价

$$\Sigma^\infty_+ B(G \times H) \simeq \Sigma^\infty_+ B(G) \wedge \Sigma^\infty_+ B(H)$$

只要 G 和 H 是有限群。事实上，首先我们有一个分类空间之间的同伦等价 $B(G \times H) \simeq B(G) \times B(H)$。此外，若 X， Y是拓扑空间，则存在一个带基点空间的同胚 $(X \times Y)_+ \cong X_+ \wedge Y_+$ ；例如参见 [Rie14，构造 3.3.14 和引理 3.3.16]，，其应用对象为紧生成空间的便利范畴**CGTop**。这意味着，带基点空间的关联范畴 $\mathbf{CGTop}_+$ 关于楔积 [Rie14，定理 6.1.12] 构成一个闭对称幺半范畴。对带基点空间的积取悬挂谱，可得一个强对称幺半函子（相对于谱的楔积）——参见 [Lur17，第 4.8.2]节。由此，我们得到带 Tutte 覆盖的拟阵范畴的 K-理论可描述为悬挂谱的楔分解（参见 [BGM+24，例 2.20]）：

推论 4.8。 存在谱等价

$$K(\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}) \simeq \bigvee_{m,n \in \mathbb{N}} \Sigma^\infty_+ B(S_m) \wedge \Sigma^\infty_+ B(S_n) \simeq K(\mathbf{Graph}^{\mathrm{tc}}) \ .$$

证明。 由于 $K(\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}})$ 等价于 $K(\mathbf{IMat}^{\cong})$，而后者又等价于 $\Sigma^\infty_+ B(\mathrm{iso}_{\mathbf{IMat}}(M))$，因此我们只需确定不可分解拟阵的自同构群 $\mathrm{iso}_{\mathbf{IMat}}(M)$。回想一下，根据注 4.7，不可分解拟阵可写成 $U_{0}^{\oplus m}{}_{,1} \ \oplus U_{1\,1}^{\oplus n}{}_{,}$ 的形式，其中 m 和 n 分别是环和余环的数量。因此，我们得到一个谱的等价

$$K(\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}) \simeq \bigvee_{m,n \in \mathbb{N}} \Sigma^\infty_+ B(S_m \times S_n) \ .$$

现在，利用分解

$$\Sigma^\infty_+ B(S_m \times S_n) \simeq \Sigma^\infty_+ B(S_m) \wedge \Sigma^\infty_+ B(S_n) \ ,$$

结论由此得出。 □

根据推论 4.8 中 K 理论的分裂，我们得到 $K_0(\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}})$ 与 $\bigoplus_{m,\ n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ 同构，这一点已在 [Lop25], 中确立，并被用于将拟阵的普适Tutte-Grothendieck不变量实现为由 K 理论谱之间的映射所诱导的 K_0-同态。由同一分裂还可知，所有高阶同伦群都编码了对称群的稳定同调群。此外，我们可以用以下交换图描绘 $\mathbf{Mat}^{\cong}$ 的 K 理论与 $\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 之间的关系：

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbf{Mat}^{\cong}) & \longrightarrow & K(\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}) \\ \uparrow & \overset{\simeq}{\nearrow} & \uparrow \simeq \\ K(\mathbf{IMat}^{\cong}) & \xrightarrow{\cong} & K(\mathbf{IMat}^{\mathrm{tc}}) \end{array}$$

图的上半部分中 π_0 内诱导的映射已在 [Lop25] 中得到研究，用以实现拟阵的普适Tutte-Grothendieck不变量。我们提出以下一般性问题：

问题4.9。 *Tutte* 多项式的取值是否有范畴论解释 *l?*

最后，我们描述拟阵的 K-理论，并引入一种反映拟阵对偶性的新结构。令 C_2 为含两个元素的循环群：

Cor推论 4.10。 K-理论谱 $K(\mathbf{IMat}^{\cong})$ 与 $K(\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}})$ 作为 C_2-谱是等价的。

证明。 考虑范畴**Mat**。这是一个带对偶性的范畴，其对偶性由取对偶拟阵给出。此外，根据注 4.2，范畴 **IMat** 也带有对偶性。由于拟阵 M 的元素 x 是非退化的，当且仅当 M^* 在对偶拟阵 x 中是非退化的，因此得到对偶函子

$$D_{\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}} \colon \mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}} \to \mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}} \text{ and } D_{\mathbf{IMat}^{\cong}} \colon \mathbf{IMat}^{\cong} \to \mathbf{IMat}^{\cong}$$

它们是带覆盖族的范畴之间的范畴态射。也就是说，带 Tutte 覆盖的范畴$\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$ 和范畴 **I** $\mathbf{Mat}^{\cong}$ 是带覆盖族的 C_2-范畴（参见 [BGM+24，定义 4.1]）。注意，对偶函子与包含函子 ι_1 相交换：$\mathbf{IMat}^{\cong} \to \mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}$，即图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{IMat}^{\cong} & \xrightarrow{\iota_1} & \mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}} \\ {\scriptstyle D_{\mathbf{IMat}^{\cong}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D_{\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}}} \\ \mathbf{IMat}^{\cong} & \xrightarrow{\iota_1} & \mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}} \end{array} \tag{4.1}$$

是交换的。现在我们关注该图的左侧部分。对偶函子 $D_{\mathbf{IMat}^{\cong}}$诱导出一个等价

$$\Sigma^\infty_+ B(S_m) \wedge \Sigma^\infty_+ B(S_n) \to \Sigma^\infty_+ B(S_n) \wedge \Sigma^\infty_+ B(S_m)$$

对所有 $m,\ n \in \mathbb{N}$，并由此得到一个谱对合。这可扩展到整个谱$\bigvee_{m,\ n\in\mathbb{N}} \Sigma^\infty_+ B(S_m) \wedge \Sigma^\infty_+ B(S_n)$，后者继承了 C_2-谱的结构。同样，$K(\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}})$ 也通过对偶函子 $D_{\mathbf{Mat}^{\mathrm{tc}}}$ 继承了 C_2-谱的结构。根据应用于交换图 (4.1) 的 K理论构造的自然性， C_2作用是相容的，并且定理 4.4 的等价可提升为 C_2-谱之间的等价。□

References

[BGM+24] Anna Marie Bohmann、Teena Gerhardt、Cary Malkiewich、Mona Merling 和 Inna Zakharevich。《高阶剪刀合同群上的迹映射》。 *Int. Math. Res. Not.*，2024(18):12683–12710，2024。[CG25] Maxine E. Calle 和 Julian J. Gould。《从组合 K 理论视角看图论中的边重构猜想》。 *Homology Homotopy Appl.*，27(1):293–322，2025。[CLWZ22] Zhiyun Cheng、Ziyi Lei、Yitian Wang 和 Yanguo Zhang。《符号色多项式的范畴化》。 *Electron. J. Comb.*，29(2):研究论文 p2.49，26，2022。[HGR05] L. Helme-Guizon 和 Y. Rong。《色多项式的范畴化》。 *Algebr. Geom. Topol.*，5 1365: –1388，2005。[JHR06] Edna F Jasso-Hernandez 和 Yongwu Rong。《Tutte 多项式的范畴化》。 *Algebraic & Geometric Topology* 6 5 2031 2049, 2006 ，( ): – 。[Lop25] Mauricio Gomez Lopez。《将 Tutte 多项式实现为一种割贴K理论不变量》。 *arXiv preprint arXiv:2501.12250* 2025 ，。[Lur17] Jacob Lurie。《高阶代数》，2017。[Oxl11] James Oxley。《拟阵》。牛津大学出版社，2011年2月。[Rie14] Emily Riehl。《范畴论》，第 24 卷，收录于 *New Math. Monogr.* 剑桥：剑桥大学出版社，2014。[Sto08] Marko Stošić。《图的双色多项式的范畴化》。 *J. Knot Theory Ramifications* 17 1 31 45, 2008 ，( ): – 。[SY24] Takuya Saito 和 So Yamagata。《拟阵特征多项式的范畴化》，2024。[Whi86] *Theory of Matroids*。《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，1986。[Whi92] *Matroid Applications*。《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，1992。

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, via Zamboni 33, Bologna, IT
Email address: luigi.caputi@unibo.it

Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell' Informazione e Matematica, Università degli Studi dell'Aquila, Via Vetorio, L'Aquila, IT*Email address*: sabino.ditrani.math@gmail.com