量子模态逻辑的可判定性

作者已接受的手稿（AAM)†

Kenji Tokuo信息工程系，国立大分工业高等专门学校，大分 870-0152，日本
tokuo@oita-ct.ac.jp

arXiv:2603.18368v1 [cs.LO] 19 Mar 2026

2025年1月30日

摘要

逻辑系统的可判定性是指存在一种算法，能够确定该系统中的任意给定公式是否为定理。本文使用 Harrop 引理证明量子模态逻辑的可判定性。

关键词 量子逻辑；模态逻辑、可判定性；有限模型性质；Harrop 引理

†这是经同行评审后获《*IGPL* 逻辑期刊》接受发表的文章的作者制作、未经复制编辑的版本。正式出版版本：Kenji Tokuo，《量子模态逻辑的可判定性》，*IGPL* 逻辑期刊，2025，可在线获取，网址为：https://doi.org/10.1093/jigpal/jzaf010

1 引言

1.1 背景与目标

量子模态逻辑 我们在上一篇论文 [10] 中提出了量子模态逻辑系统**量子模态逻辑**。该系统是正交逻辑这一量子逻辑的扩展，旨在处理一般模态，并配备了克里普克风格语义和基于相继式的演绎系统。

可判定性 逻辑系统的可判定性是指存在一种算法，能够判断该系统中的任意给定公式是否为定理。如果一个逻辑系统是可判定的，就意味着推理或证明过程中的搜索空间是有限的，从而避免不必要的搜索，并能够高效地推导出新的结果。

众所周知，经典命题逻辑 是可判定的。由于可能的真值数量有限 e
对命题变量集的赋值，由于公式中出现的命题变量数量有限，因此可以穷尽检查所有情形 y.
那么，量子逻辑是可判定的吗？关于正交逻辑，Bruns [1] 为正交格恒等式提供了一个判定过程。由于正交逻辑可以嵌入经典模态逻辑系统**B**，正交逻辑的可判定性也可由**B** 的可判定性推出 [5, 4, 3]。然而，正交模逻辑的可判定性仍然未知 [8]。

至于模态逻辑，已知最小正规模态逻辑**K**，以及通过向**K**添加**T**、**B**、**4**、**5**和**D** 中的若干公理所得到的正规模态逻辑，都是可判定的 [2, 7, 6]。

本文的目标本文证明量子模态逻辑**QML**的可判定性。它本质上由两种模态构成——一种负责量子逻辑部分，另一种负责模态逻辑部分——且这两种模态通过强迫关系相互交织，因此其可判定性并非显而易见。

1.2 我们的方法

一般来说，通过从下至上追踪序列演算，我们可以得出结论：如果序列式的复杂度单调递减，那么一个演绎系统就是可判定的。然而，由于**量子模态逻辑** 的序列演算包含切规则，序列式的复杂度不一定会沿向上的方向递减。因此，这种方法无法应用于**量子模态逻辑**。我们转而采用基于 Harrop 引理 [7] 的方法。

命题 1 (Harrop 引理)。 一个有限可公理化且具有有限模型性质的逻辑系统是可判定的。

利用这一引理，我们可以将证明**量子模态逻辑** 可判定这一任务，归结为证明其具有有限模型性质。

2 量子模态逻辑

本节简要概述先前工作 [10] 中介绍的**量子模态逻辑** 。

2.1 语言

量子模态逻辑的语言由以下符号组成。

- 原子公式：p、q、…。*
- 逻辑联结词： $\wedge$（合取）、 $\neg$ （否定）
- 模态算子： $\Box$（必然算子）

公式按照通常方式构造。我们使用小写希腊字母，如 α、 β、…，作为公式的元符号。令F 表示所有公式的集合。我们使用大写希腊字母（包括带下标的字母），如Γ、 Δ、… 以及 Γ_1、 Γ_2、…，作为F的子集的符号。

注 1。 照例，我们将 $\vee$（析取）定义为 $\alpha \vee \beta \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ ，将 $\Diamond$（可能性）定义为 $\Diamond\alpha \equiv \neg\Box\neg\alpha$。

为提高可读性，证明中可以使用以下元逻辑符号：

*出于技术上的原因 , 我们假设所有原子公式的集合是可数的 表。

- $\Rightarrow$：蕴含
- $\forall$：对所有
- $\exists$：存在

2.2 语义

量子模态逻辑的语义如下。

定义 1（量子模态结构）。量子模态结构定义为以下四元组 $\mathscr{S}=\langle W, R_Q, R_M, \rho\rangle$。

- W：一个非空集合。
- R_Q：W上的自反且对称关系。
- R_M：W上的二元关系，由R_Q强制确定。
- ρ：将R_Q-闭的W 子集赋给每个原子公式的一个赋值。

W中的元素称为**世界**或**状态**。R_Q 称为W上的**非正交关系**。这个名称源自希尔伯特空间的内积所导出的非正交关系。R_M 称为相对于模态算子 $\Box$ 和 $\Diamond$的**可达关系**。该关系由R_Q强制确定，这意味着必须满足以下条件：

$$R_M(i,l) \Rightarrow \forall j \in W(R_Q(i,j) \Rightarrow R_M(j,l)).$$

由于R_Q 是对称的，因此该条件意味着，通过R_Q 相关联的状态就R_M而言能够看到相同的世界。在 ρ的定义中，如果X 是W 的一个子集，并且满足以下条件，则称其为R_Q-闭：

$$i \in X \text{ iff } \forall j \in W(R_Q(i,j) \Rightarrow \exists k \in W \text{ s.t. } (R_Q(j,k) \text{ and } k \in X)).$$

将 ρ 的取值视为一个R_Q-闭子集，而不是W 的任意子集，其原因源于量子逻辑中的一个原始观点：使实验命题为真的所有世界的集合并非仅仅是一个集合，而是希尔伯特空间的一个闭子空间。

定义 2(真值)。L　　设 $\mathscr{S}=\langle W,R_Q,R_M,\rho\rangle$ 为一个量子模态结构，$i \in W$，且 $\alpha \in F$。我们将 α 定义为真于 $\mathscr{S}$ 中的i 处，记作$i \models_{\mathscr{S}} \alpha$，如下所示：

a) $i \models_{\mathscr{S}} p$ iff $i \in \rho(p)$ for atomic formulas p

b) $i \models_{\mathscr{S}} \alpha \wedge \beta$ iff $i \models_{\mathscr{S}} \alpha$ and $i \models_{\mathscr{S}} \beta$

c) $i \models_{\mathscr{S}} \neg\alpha$ iff $\forall j \in W(R_Q(i,j) \Rightarrow j \not\models_{\mathscr{S}} \alpha)$

d) $i \models_{\mathscr{S}} \Box\alpha$ iff $\forall l \in W(R_M(i,l) \Rightarrow l \models_{\mathscr{S}} \alpha)$

设 $\mathscr{S}=\langle W,R_Q,R_M,\rho\rangle$ 为一个量子模态结构。我们用 $\Gamma \models_{\mathscr{S}} \alpha$ 表示 $\forall i \in W(i \models_{\mathscr{S}} \Gamma \Rightarrow i \models_{\mathscr{S}} \alpha)$。这里，$i \models_{\mathscr{S}} \Gamma$ 表示 $\forall \gamma \in \Gamma(i \models_{\mathscr{S}} \gamma)$。我们用 $\Gamma \models \alpha$ 表示任意量子模态结构 $\mathscr{S}$ 下的 $\Gamma \models_{\mathscr{S}} \alpha$。最后，我们用 $\Gamma \models \Delta$ 表示满足条件 $\Gamma \models \alpha$ 的 $\exists \alpha \in \Delta$。

2.3 公理化

下面给出量子模态逻辑的公理系统。关于非模态公式的部分基于 Nishimura[9]。公理和规则中形如 $\Gamma \vdash \Delta$ 的表达式称为**序列式**，表示 Δ 中至少有一个公式可以由 Γ 中有限个公式推导得出。一般来说，我们在 $\vdash$ 的左侧和右侧分别写出（可以为空的）公式集合。我们用 α，Γ 和 Γ，Δ 分别作为 $\{\alpha\}\cup\Gamma$ 和 $\Gamma\cup\Delta$ 的缩写。此外，我们用 $\neg\Gamma$ 表示 $\{\neg\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$，用 $\Box\Gamma$ 表示 $\{\Box\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$。

定义 3（公理和规则）。

- 公理

$$\alpha \vdash \alpha \quad \text{(AX)}$$

$$\Gamma \vdash \Box\alpha, \ \neg\Box\alpha \quad \text{(MEM)}$$

- 规则

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Pi, \Gamma \vdash \Delta, \Sigma}\ (\text{WKN})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \alpha \qquad \alpha, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\text{CUT})$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \vdash \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \vdash \Delta}\ (\wedge \text{l}_1)$$

$$\frac{\beta, \Gamma \vdash \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \vdash \Delta}\ (\wedge \text{l}_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \qquad \Gamma \vdash \Delta, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \wedge \beta}\ (\wedge \text{r})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \vdash \Delta}\ (\neg \text{l})$$

$$\frac{\alpha \vdash \Delta}{\neg\Delta \vdash \neg\alpha}\ (\neg \text{r})$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \vdash \Delta}{\neg\neg\alpha, \Gamma \vdash \Delta}\ (\neg\neg \text{l})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\neg\alpha}\ (\neg\neg \text{r})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Box\Gamma \vdash \Box\alpha}\ (\mathbf{K})$$

推导是由有限个序列式构成的序列，其中每个序列式要么是公理，要么是某条规则的下序列式，且该规则的所有上序列式都已在序列中出现。若存在一个推导，其中 $\Gamma \vdash \Delta$ 是最后一个元素，我们就称 $\Gamma \vdash \Delta$ 可导，或称其为定理。我们将简写为 $\Gamma \vdash \Delta$，表示 $\Gamma \vdash \Delta$可导。

3 可判定性

本节将证明量子模态逻辑的可判定性。

命题 *2*（有限模型性质）。若公式 α 在量子模态结构 $\mathscr{S}$中不成立，即 $\not\models_{\mathscr{S}} \alpha$，则存在一个量子模态结构 $\mathscr{S}^*$，其世界集合有限，且满足 $\not\models_{\mathscr{S}^*} \alpha$。

我们暂且推迟证明；假设该命题成立，即可得出以下主要定理。定理1（可判定性）。量子模态逻辑是可判定的。

证明。设 $\alpha \in$F。以下两个过程并行进行。在第一个过程中，我们搜索 α 的证明图。由于 F 是可数的，可以为 F 中的元素编号并按顺序排列。对于正自然数 k，我们考虑由第 k 个元素之前的公式构成的序列式，其中每个公式的出现次数不超过 k。由此类序列式构成、且序列式出现次数小于或等于 k 的量子模态逻辑证明图集合记为 P_k。由于量子模态逻辑是可公理化的，P_k 是有限集。从 P_1，开始，我们检查其中是否包含 $\vdash \alpha$ 的证明图。若 $\vdash \alpha$ 可证，则 α 的证明图必定包含在某个 P_k 中，因此该过程最终会终止。在第二个过程中，我们搜索能够证伪 α 的量子模态结构。根据命题 2，我们具体需要搜索世界集合为有限集的结构。对于正自然数 k，在同构意义下，至多有有限多个满足 $|\mathrm{W}^*| = \mathrm{k}$ 的结构。鉴于此，我们将 S_k 定义为同构类代表元的集合。从 S_1，开始，我们检查是否存在结构 $\mathscr{S}^*$，使得 $\exists \mathrm{i} \in \mathrm{W}^* \text{s.t. } \mathrm{i} \not\models_{\mathscr{S}^*} \alpha$。若 $\vdash \alpha$ 不可证，则根据量子模态逻辑的完备性，必定有一个能够证伪 α 的结构包含在某个 S_k 中，因此该过程最终会终止。 □

下面我们将为命题 2 的证明做准备。设 Σ 是满足以下条件的公式集合：(i) 若 $\alpha \in \Sigma$，则 α 的子公式也属于该集合。(ii) 若 $p \in \Sigma$，则对原子 p，p $\neg$ 也属于该集合。按照 Goldblatt [5]，，我们将这样的集合称为Σ 容许的。给定一个量子模态结构 $\mathscr{S} = \langle W, R_Q, R_M, \rho \rangle$，我们按如下方式在 W 上定义等价关系 $\sim$：$i \sim j$ 当且仅当 $\forall \alpha \in \Sigma (i \models_{\mathscr{S}} \alpha$ 当且仅当 $j \models_{\mathscr{S}} \alpha)$。相对于 $\sim$，i 的等价类记为 $[i]$。

定义 4（坍缩）。对于量子模态结构 $\mathscr{S} = \langle W, R_Q, R_M, \rho \rangle$，相对于 Σ 的 $\mathscr{S}$ 坍缩，记作 $\mathscr{S}^* = \langle W^*, R_Q^*, R_M^*, \rho^* \rangle$，定义如下。

- $W^* = W / \sim$
- $R^*_Q([i],[j])$ 当且仅当 $\exists i' \in [i]$ 使得 $(\exists j' \in [j]$ 使得 $R_Q(i', j'))$
- $R^*M([i],[l])$ 当且仅当 $\forall \Box\alpha \in \Sigma (i \models_{\mathscr{S}} \Box\alpha \Rightarrow l \models_{\mathscr{S}} \alpha)$
- $\rho^*(p) \equiv \{[i] \in W^* \mid i \in \rho(p)\}$ 当 p 时，且 $\rho^*(p) \equiv /0$，否则。

引理 1. $\mathscr{S}^*$ 是一个量子模态结构。

证明。事实上，

- W^*：一个非空集合。
- R^*_Q：W^*上的一个自反且对称的关系。
- R*M：W*上的一个二元关系，由R*Q强制。我们可以如下验证强制条件成立。假设R*M([i],[l])。那么，对所有 $\Box\alpha \in \Sigma$，我们都有i $\models_{\mathscr{S}} \Box\alpha \Rightarrow$ l $\models_{\mathscr{S}} \alpha$。取逆否命题，得到l $\not\models_{\mathscr{S}} \alpha \Rightarrow$ i $\not\models_{\mathscr{S}} \Box\alpha$。假设l $\not\models_{\mathscr{S}} \alpha$。那么，我们有i $\not\models_{\mathscr{S}} \Box\alpha$。此外，假设R*Q([i],[j])。那么，我们有 $\exists$i′ $\in$ [i]，使得（$\exists$j′ $\in$ [j]，且RQ(i′, j′)）。令i′和j′分别表示存在性断言所给出的元素。根据RM的强制条件，我们有i′ $\not\models_{\mathscr{S}} \Box\alpha \Rightarrow$ j′ $\not\models_{\mathscr{S}} \Box\alpha$。于是我们也有i $\not\models_{\mathscr{S}} \Box\alpha \Rightarrow$ j $\not\models_{\mathscr{S}} \Box\alpha$。因此，j $\not\models_{\mathscr{S}} \Box\alpha$。故l $\not\models_{\mathscr{S}} \alpha \Rightarrow$ j $\not\models_{\mathscr{S}} \Box\alpha$。取逆否命题，得到j $\models_{\mathscr{S}} \Box\alpha \Rightarrow$l $\models_{\mathscr{S}} \alpha$。由于 $\Box\alpha$是任意的，我们有 $\forall \Box\alpha \in \Sigma$(j $\models_{\mathscr{S}} \Box\alpha \Rightarrow$ l $\models_{\mathscr{S}} \alpha)$，这意味着R*M([j],[l])。
- ρ^*：将 W* 的一个 R*Q-闭子集赋给每个原子公式。我们可以如下验证 R*Q-闭性得到满足。我们需要证明 [i] $\in \rho^*$(p) 当且仅当 $\forall$[j] $\in$ W* (R*Q([i],[j]) $\Rightarrow \exists$[k] $\in$ W* 使得 (R*Q([j],[k]) 且 [k] $\in \rho^*$(p))。当 p $\notin \Sigma$，即 $\rho^*(p) = /0$ 时，这个命题显然成立。因此，我们考虑 p $\in \Sigma$的情形。假设 $\forall$[j] $\in$ W* (R*Q([i],[j]) $\Rightarrow \exists$[k] $\in$ W* 使得 (R*Q([j],[k]) 且 [k] $\in \rho^*$(p))。令 j $\in$ W，并假设 RQ(i, j)。于是，我们有 R*Q([i],[j])。根据假设，我们有 $\exists$[k] $\in$ W* 使得 (R*Q([j],[k]) 且 [k] $\in \rho^*$(p))。令 [k] 表示存在性断言所断言的元素。于是，我们有 R*Q([j],[k]) 且[k] $\in \rho^*$(p)。这里，R*Q([j],[k]) 表示 $\exists$j′ $\in$ [j] 使得 ($\exists$k′ $\in$ [k] 使得 RQ(j′, k′))。令 j′和 k′表示存在性断言所断言的元素。于是，[k] $\in \rho^*$(p) 蕴含 [k′] $\in \rho^*$(p)，即 k′ $\models_{\mathscr{S}}$p。由于 RQ(j′, k′)，我们有 j′ $\not\models_{\mathscr{S}} \neg$p。由此可得 j $\not\models_{\mathscr{S}} \neg$p，这意味着 $\exists$ k $\in$ W 使得 (RQ(j, k) 且 k $\in \rho$(p))。因此，RQ(i, j) $\Rightarrow \exists$k $\in$ W 使得 (RQ(j, k) 且 k $\in \rho$(p))。由于 j $\in$ W 是任意的，我们有 $\forall$j $\in$ W (RQ(i, j) $\Rightarrow \exists$k $\in$ W 使得 (RQ(j, k) 且 k $\in \rho$(p)))。根据 ρ的 RQ-闭性，我们有 i $\in \rho$(p)。因此，[i] $\in \rho^*$(p)。反向命题略去，因为它很容易推出。

□

引理 2. 设 Σ 是一个有限的公式容许集，并假设 $|\Sigma| = n$。那么，$|W^*| \leq 2^n$。

证明. 有 2^n 种方式为 n 个公式赋予真值。W^* 是将 W 中对 Σ 中公式赋予相同真值的元素视为同一元素后形成的集合。因此，$|W^*| \leq 2^n$。 □

引理 3. $\forall \alpha \in \Sigma (\forall i \in W ([i] \models_{\mathscr{S}^*} \alpha$ 当且仅当 $i \models_{\mathscr{S}} \alpha))$。

证明. 我们对公式的结构使用归纳法来证明这一点。

a）情形：原子公式。设 p $\in \Sigma$是原子公式，且 i $\in$ W。我们有以下等价关系：[i] $\models_{\mathscr{S}^*}$p 当且仅当[i] $\in \rho^*$(p) 当且仅当 i $\in \rho$(p) 当且仅当 i $\models_{\mathscr{S}}$p。b）情形：$\alpha \wedge \beta$。在此情形下，$\alpha, \beta \in \Sigma$。设 i $\in$ W。我们有以下等价关系：[i] $\models_{\mathscr{S}^*} \alpha \wedge \beta$当且仅当[i] $\models_{\mathscr{S}^*} \alpha$且 [i] $\models_{\mathscr{S}^*} \beta$当且仅当 i $\models_{\mathscr{S}} \alpha$且 i $\models_{\mathscr{S}} \beta$当且仅当 i $\models_{\mathscr{S}} \alpha \wedge \beta$。这里，第二个“当且仅当”由归纳假设推出。

c）情形： $\neg\alpha$。在此情形下， $\alpha \in \Sigma$。设 $i \in W$。首先，我们将证明 $[i] \models_{\mathscr{S}^*} \neg\alpha \Rightarrow i \models_{\mathscr{S}} \neg\alpha$。假设$[i] \models_{\mathscr{S}^*} \neg\alpha$。此外，设 $j \in W$，且假设 $R_Q(i, j)$。那么，我们有 $R_Q^*([i], [j])$。因此 $[j] \not\models_{\mathscr{S}^*} \alpha$。根据归纳假设，我们有 $j \not\models_{\mathscr{S}} \alpha$。因此，$R_Q(i, j) \Rightarrow j \not\models_{\mathscr{S}} \alpha$。由于 j 是任意的，我们有$\forall j \in W\ (R_Q(i, j) \Rightarrow j \not\models_{\mathscr{S}} \alpha)$，这意味着 $i \models_{\mathscr{S}} \neg\alpha$。接下来，我们将证明 $i \models_{\mathscr{S}} \neg\alpha \Rightarrow [i] \models_{\mathscr{S}^*} \neg\alpha$。假设 $i \models_{\mathscr{S}} \neg\alpha$。此外，设 $[j] \in W^*$，且假设 $R_Q^*([i][j])$。那么，我们有 $\exists i' \in [i]$ 使得 $(\exists j' \in [j]$使得 $R_Q(i', j'))$。令 i' 和 j' 表示存在性断言所断言的元素。那么，我们有 $R_Q(i', j')$ 且 $i' \models_{\mathscr{S}} \neg\alpha$。因此，$j' \not\models_{\mathscr{S}} \alpha$，这意味着 $j \not\models_{\mathscr{S}} \alpha$。根据归纳假设，我们有 $[j] \not\models_{\mathscr{S}^*} \alpha$。因此，$R_Q^*([i], [j]) \Rightarrow [j] \not\models_{\mathscr{S}^*} \alpha$。由于 $[j]$是任意的，我们有 $\forall [j] \in W^* (R_Q^*([i], [j]) \Rightarrow [j] \not\models_{\mathscr{S}^*} \alpha)$，这意味着 $[i] \models_{\mathscr{S}^*} \neg\alpha$。

d) 情形： $\Box\alpha$。在此情形下， $\alpha \in \Sigma$。令 $i \in W$。首先，我们将证明 $[i] \models_{\mathscr{S}^*} \Box\alpha \Rightarrow i \models_{\mathscr{S}} \Box\alpha$。假设$[i] \models_{\mathscr{S}^*} \Box\alpha$。此外，令 $l \in W$，并假设 $R_M(i, l)$ 且 $i \models_{\mathscr{S}} \Box\alpha$。于是，我们有 $l \models_{\mathscr{S}} \alpha$。因此 $i \models_{\mathscr{S}} \Box\alpha \Rightarrow l \models_{\mathscr{S}} \alpha$，这意味着 $R_M^*([i], [l])$。由此可得， $[l] \models_{\mathscr{S}^*} \alpha$。根据归纳假设，我们有 $l \models_{\mathscr{S}} \alpha$。因此，$R_M(i, l) \Rightarrow l \models_{\mathscr{S}} \alpha$。由于 l 是任意的，我们有 $\forall l \in W\ (R_M(i, l) \Rightarrow l \models_{\mathscr{S}} \alpha)$，这意味着 $i \models_{\mathscr{S}} \Box\alpha$。接下来，我们将证明 $i \models_{\mathscr{S}} \Box\alpha \Rightarrow [i] \models_{\mathscr{S}^*} \Box\alpha$。假设 $i \models_{\mathscr{S}} \Box\alpha$。此外，令$[l] \in W^*$，并假设 $R_M^*([i], [l])$。于是，我们有 $l \models_{\mathscr{S}} \alpha$。根据归纳假设，我们有 $[l] \models_{\mathscr{S}^*} \alpha$。因此，$R_M^*([i], [l]) \Rightarrow [l] \models_{\mathscr{S}^*} \alpha$。由于 $[l]$ 是任意的，我们有 $\forall [l] \in W^* (R_M^*([i], [l]) \Rightarrow [l] \models_{\mathscr{S}^*} \alpha)$，这意味着 $[i] \models_{\mathscr{S}^*} \Box\alpha$。

□

我们重述本节的第一个命题。

命题 2. 如果公式 α 在量子模态结构 $\mathscr{S}$中不成立，即 $\not\models_{\mathscr{S}} \alpha$，那么存在一个量子模态结构 $\mathscr{S}^*$，其世界集为有限集，且满足 $\not\models_{\mathscr{S}^*} \alpha$。

证明。 假设公式 α 在量子模态结构 $\mathscr{S} = \langle W, R_Q, R_M, \rho\rangle$ 中不成立，即 $\not\models_{\mathscr{S}} \alpha$。令 Σ为满足 $\alpha \in \Sigma$的最小可容许集。注意， Σ 是有限的。在此情形下， $\mathscr{S}$关于Σ的坍缩，记为 $\mathscr{S}^* = \langle W^*, R_Q^*, R_M^*, \rho^*\rangle$，根据引理 1 是一个量子模态结构。此外，根据引理 2， $|W^*|$是有限集。进一步，根据引理 3， $\not\models_{\mathscr{S}}^* \alpha$ 成立。 □

致谢

我们衷心感谢匿名审稿人对稿件进行了细致审阅。审稿人的意见对于提升我们论证的清晰度极为宝贵。

基金资助

本研究由日本学术振兴会（JSPS）KAKENHI [Grant Number JP24K03372]资助。

参考文献

[1] Bruns, G.《自由正交格》。《加拿大数学杂志》28.5：977-985，1976。[2] Chellas, B.《模态逻辑：导论》。剑桥大学出版社，1980。[3] Dalla Chiara, M. L. 和 R. Giuntini。《量子逻辑》。《哲学逻辑手册》129-228，2002。[4] Dishkant, H.《将量子逻辑嵌入 Brower 模态系统》。《符号逻辑杂志》42(3)：321-328，1977。[5] Goldblatt, R. I.《正交逻辑的语义分析》。《哲学逻辑杂志》3(1/2)：19-35，1974。[6] Goldblatt, R. I.《时间与计算逻辑》。语言与信息研究中心，1987。[7] Harrop, R.《命题演算有限模型与判定程序的存在性》。《剑桥哲学学会数学学报》54(10)：剑桥大学出版社，1958。[8] Kalmbach, G.《正交模格》。学术出版社，伦敦，1983。[9] Nishimura, H.《量子逻辑中的序列方法》。《符号逻辑杂志》45.2：339-352，1980。[10] Tokuo, K.《量子模态逻辑》。《IGPL 逻辑期刊》，2024。