arXiv:2603.18392v1 [math.GT] 19 Mar 2026

关于虚拟缠结的Fox着色的一则说明

TAKUJI NAKAMURA、YASUTAKA NAKANISHI、SHIN SATOH 和 KODAI WADA

Abstract. 我们研究缠结图的Fox着色，采用 $R = \mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，其中 $p \geq 3$ 是奇整数。对于一个 R着色的 m弦缠结图， $2m$ 个边界点上的颜色构成一个向量 $v \in R^{2m}$。我们证明，对于经典缠结图，这类向量完全由交错和条件 $\Delta(v) = 0$刻画。随后，我们考察这一限制在虚拟情形下如何变化。对于 $R = \mathbb{Z}$， v 的可实现性由关于 $\Delta(v)$的整除条件决定。对于 $R = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，每个向量都可由虚拟缠结图实现。

1. 引言

1970年，Conway [1] 提出了缠结的概念，将其作为通过分解研究纽结的一种方法。缠结为分析纽结的局部性质如何影响其整体结构提供了一种语言。例如，Krebes [4] 证明，若缠结 T 嵌入纽结 K中，那么任何同时整除 T 的分子闭包和分母闭包的行列式的整数，也整除K的行列式。

福克斯着色 [2] 是纽结理论中的一项基础工具。尽管其定义很初等，福克斯着色却能捕捉纽结的重要信息。例如， $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$着色数是区分纽结的有效不变量，并为解结数 [6]提供下界。

福克斯着色在缠结研究中也发挥着重要作用。Silver and Williams [7] 使用 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$着色，将Krebes的上述结果推广到了虚拟缠结和虚拟纽结。 此外，Kauffman and Lambropoulou [3] 利用 $\mathbb{Z}$着色，对Conway的有理切结分类给出了组合证明。这些结果表明，着色为理解缠结的结构性质提供了有用工具。

Przytycki [6] 的一项重要观察指出，如果一个1线经典缠结图被 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$着色，那么两个端点必定获得相同的颜色。相比之下，Silver and Williams [7] 证明，对于任意 $a, b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$，都存在一个 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$着色的1线虚拟缠结图，其端点获得颜色a 和 b。这一现象揭示了经典缠结图与虚拟缠结图之间显著的差异。

受这一对比的启发，我们研究经典缠结图与虚拟缠结图对福克斯着色的限制有何不同。设 $R = \mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，其中 p是奇整数。设 T 是由 $m \geq 1$ 条弦组成的、位于一个二维圆盘中的缠结图，且 C是 T的一个 R-着色。对于一个 R-着色的缠结图（T， C），沿边界按循环顺序排列的 T 的 $2m$ 个边界点处出现的颜色构成边界颜色向量

$$v = (a_1, \ldots, a_{2m}) \in R^{2m},$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 57K10, 57K12.*Key words and phrases.* Fox着色、缠结、辫、Hurwitz作用。本研究得到 JSPS KAKENHI Grant Numbers JP20K03621、JP22K03287 和 JP23K12973 的资助。

记作 $v = \partial(T, C)$。

对于经典缠结图，边界颜色向量并非任意。已知 [6] 边界颜色向量 v 满足

$$\Delta(v) = \sum_{i=1}^{2m} (-1)^{i-1} a_i = 0 \in R.$$

参见图1左侧。本文证明，该条件完全刻画了由经典 R-着色缠结所产生的边界颜色向量。

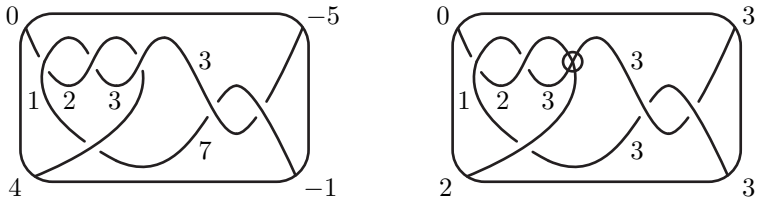


FIGURE 1. $\mathbb{Z}$-着色的经典和虚拟缠结图

命题 1.1。对于向量 $v \in R^{2m}$，以下条件等价。（i）存在一个 R着色的经典缠结图（T、C），使得 ∂（T、C）$= v$。（ii）Δ（v）$= 0$。

此外，这样的图示 T 可以选择为满足如下性质 P_1 : P_1: T 可以通过有限次变换化为平凡辫图；这些变换如图2(a)所示，每次变换都交换沿包含 T 的2圆盘边界相邻的弦的端点。

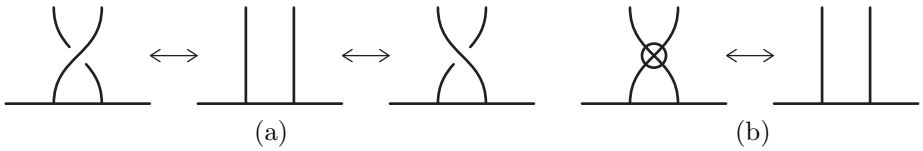


FIGURE 2. 两个变换（a）和（b）

虽然 $\Delta(v) = 0$ 在命题 1.1 中的条件刻画了经典情形，但对于虚拟缠结图，情况的限制性较小。参见图1右侧。本文的主要目的是研究这一限制对于虚拟缠结图如何发生变化。更准确地说，我们将精确确定哪些边界颜色向量可以由 R着色的虚拟缠结产生。

我们首先考虑 $R = \mathbb{Z}$ 的情形。我们称向量 $v = (a_1, \ldots\ldots, a_{2m}) \in \mathbb{Z}^{2m}$为平凡，若 $a_1 = \cdots = a_{2m}$；否则称为非平凡。对于非平凡的 v，我们定义

$$d(v) = \gcd\{a_i - a_j \mid 1 \le i \ne j \le 2m\} > 0,$$

它可以唯一地写成 $d(v) = 2^{k(v)}(2n + 1)$，其中 $k(v)$ $n \ge 0$。我们的主定理指出，v 能否作为一个 $\mathbb{Z}$ 色虚拟缠结图的边界颜色向量实现，取决于 $\Delta(v)$ 和 $k(v)$。

定理 1.2。对于向量 $v \in \mathbb{Z}^{2m}$，以下各命题等价。

（i）存在一个 $\mathbb{Z}$ 着色的虚拟缠结图（T, C），使得 ∂（T, C）$= v$。

（ii）或者（a） v 是平凡的，或者（b） v 是非平凡的，并且 $\Delta(v)$ 可被 $2^{k(v)+1}$ 整除。

此外，若 $m \geq 2$，则可以选择这样的图示 T，使其满足以下性质P_2和P_3：

P_2： T 至多有一个虚交叉。P_3： T 可以通过有限次变换化为平凡缠结图，每次变换如图 2(a) 和(b)所示，即交换包含 T 的2维圆盘边界上相邻的弦端点。

若 $m = 1$，则每个边界颜色向量 $v \in \mathbb{Z}^2$ 都是平凡的。

情形 $R = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 截然不同。在这种情形下，经典限制完全消失。

推论 1.3。对于任意向量 $v \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2m}$，存在一个 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 着色的虚拟缠结图(T, C)，使得 $\partial(T, C) = v$。此外，当 $m = 1$ 时，可以选择这样的图示使其满足性质 P_2；而当$m \geq 2$时，使其满足性质P_2 和P_3。

本文结构如下。第 2 节回顾缠结图的 R-着色，并引入与向量 v 相关的四个量：交错和 $\Delta(v)$、整数 $d(v)$ 和 $k(v)$，以及多重集 $M(v)$。我们还汇集了关于辫群在 $\mathbb{Z}^{2m}$上的 Hurwitz作用的一些结果，这些结果将在命题 1.1 和定理 1.2 的证明中用到。第 3 节研究经典缠结图的 R-着色，并证明命题 1.1。最后，第 4 节探讨虚拟缠结图的R-着色，并证明定理 1.2 和推论 1.3。

2. Preliminaries

2.1. 边界颜色向量。令 $m \geq 1$ 为一个整数。一个 m-弦虚拟缠结图 T 由 m 条区间组成，这些区间适当地浸入一个二维圆盘 D^2 中，且其奇点仅为横截双重点。T的每个双重点都被指定为经典交叉（带有上下信息）或虚交叉（以小圆圈标示）。特别地，如果 T 不含虚交叉，就称其为经典。T 的一个弧是通过从图示中移除所有下交叉而得到的一个连通分支。

令 $R = \mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，其中 $p \geq 3$ 为奇数。R-染色是 T的一个映射

$$C : \{\text{arcs of } T\} \to R$$

使得在 T的每个经典交叉处，都满足关系式

$$C(x) + C(z) = 2C(y)$$

其中 x 和 z 是两条下弧，y 是上弧。在虚交叉处不施加任何要求。赋予弧 x 的值 $C(x)$ 称为该弧的颜色，而二元组（T，C）称为 R- 染色图示。令 E_1 表示 T 的R-染色，其中所有弧都赋予颜色 1。

T 的 R-染色集合构成一个 $\mathbb{Z}$-模。对于 C，C' 的两个 R-染色以及 a，$b \in R$，线性组合 $aC + bC'$ 是由下式定义的 R-染色

$$(aC + bC')(x) = aC(x) + bC'(x)$$

对于 T的任意弧 x。

对于一个 R 着色的虚拟缠结图（T，C），沿着 ∂D^2 按循环顺序排列的 $2m$边界点处出现的颜色构成一个向量

$$v = (a_1, \ldots, a_{2m}) \in R^{2m}.$$

我们称 v 为（T，C）的边界颜色向量，并记作 $v = \partial$（T，C）。a_i 的下标 i 按模 $2m$ 计算。我们指出，向量 v 的起始端点选择是任意的，不会影响本文中的论证。如果一个向量v满足 $a_1 = \cdots = a_{2m}$，则称其为平凡；否则称其为非平凡。我们用$e_1 =$（1，...，1）$\in R^{2m}$表示平凡向量，其所有分量均等于 1。

2.2. $\Delta(v)$、$d(v)$、$k(v)$，以及 $M(v)$。对于 $v = (a_1, \ldots, a_{2m}) \in R^{2m}$，我们定义交错和

$$\Delta(v) = \sum_{i=1}^{2m} (-1)^{i-1} a_i \in R.$$

当 $R = \mathbb{Z}$ 和 v 是非平凡的时，令 $d(v)$ 表示 v各项之差的最大公约数：

$$d(v) = \gcd\{a_i - a_j \mid 1 \le i \ne j \le 2m\}.$$

由于 v 是非平凡的，$d(v)$ 是一个正整数。它可以唯一地写成如下形式

$$d(v) = 2^k(2n+1)$$

其中 k、$n \ge 0$。我们定义 $k(v) = k$。此外，令 $M(v)$ 表示由 $a_1, \ldots, a_{2m}$ 模 $2d(v)$ 的同余类组成的多重集：

$$M(v) = \{a_1, \ldots, a_{2m} \pmod{2d(v)}\}.$$

例如，向量 $v = (1, 7, -5, -11) \in \mathbb{Z}^4$ 满足

$$\Delta(v) = 0,\ d(v) = 6,\ k(v) = 1,\ \text{and } M(v) = \{1, 1, 7, 7 \pmod{12}\}.$$

根据定义，对于非平凡向量 $v = (a_1, \ldots, a_{2m}) \in \mathbb{Z}^{2m}$，我们可以写作

$$a_i = a_1 + d(v) b_i$$

其中 $b_i \in \mathbb{Z}\,(1 \le i \le 2m)$。注意，$b_1 = 0$。令 $w = (b_1, \ldots, b_{2m}) \in \mathbb{Z}^{2m}$ 为与 v相关联的向量。

引理 2.1。采用上述记号，有如下结论。

(i) 若存在一个 $\mathbb{Z}$-着色的虚拟缠结图 (T, C) 使得 $\partial(T, C) = w$，则

$$v = \partial(T, a_1 E_1 + d(v) C).$$

(ii) 若 $\Delta(v)$可被 $2^{k(v)+1}$ 整除，则 $\Delta(w)$ 为偶数。

证明。(i) 由于 T 允许 $\mathbb{Z}$-着色 E_1 和 C，它也允许 $\mathbb{Z}$-着色$a_1 E_1 + d(v) C$。在此着色下，T的每条弧 x都获得颜色 $a_1 + d(v) C(x)$。因此，边界颜色向量为

$$(a_1 + d(v) b_1, \ldots, a_1 + d(v) b_{2m}) = a_1 e_1 + d(v) w = v.$$

(ii) 由 $a_i = a_1 + d(v) b_i$ 可得

$$\Delta(v) = \sum_{i=1}^{2m} (-1)^{i-1} (a_1 + d(v) b_i) = d(v) \sum_{i=1}^{2m} (-1)^{i-1} b_i = d(v) \Delta(w).$$

由于对于某个 $n \ge 0$，$d(v) = 2^{k(v)}(2n+1)$，假设 $\Delta(v)$ 可被$2^{k(v)+1}$ 整除意味着 $\Delta(w)$ 是偶数。□

2.3. **Hurwitz作用**。在本小节中，我们简要回顾辫群在 $\mathbb{Z}^{2m}$上的 Hurwitz作用。令 B_{2m} 表示由标准生成元 $\sigma_1,\ldots,\sigma_{2m-1}$生成的、作用于 $2m$ 股的辫群。集合 $\mathbb{Z}^{2m}$ 具有由 B_{2m}定义的*Hurwitz*作用，其定义为

$$(a_1,\ldots,a_i,a_{i+1},\ldots,a_{2m})\cdot\sigma_i=(a_1,\ldots,a_{i+1},2a_{i+1}-a_i,\ldots,a_{2m})$$

对于 $1\le i\le 2m-1$。如果 $v\cdot\beta=w$ 对于 v，$w\in\mathbb{Z}^{2m}$ 且 $\beta\in B_{2m}$，那么存在一个$\mathbb{Z}$-着色的辫图（β，C），其顶端和底端分别赋予向量v 和 w。

$\mathbb{Z}^{2m}$ 在 B_{2m} 的Hurwitz作用下的轨道，可由某些标准形以及以下三个不变量 $\Delta(v)$、$d(v)$ 和 $M(v)$ 描述。

引理 2.2 （[5, 命题 5。4]）。设 $m\ge 2$。对于任意非平凡向量 $v\in\mathbb{Z}^{2m}$，存在整数 a、λ 和一个辫 $\beta\in B_{2m}$，使得

$$v\cdot\beta=(a,\ldots,a,\underbrace{a+\lambda d(v)}_{i\text{-}th},a+d(v),\ldots,a+d(v))$$

对于某个 $1<i<2m$。 □

当 $\Delta(v)=0$ 时，这个标准形可简化如下。

引理 2.3 ([5, 命题 5.5])。向量 $v\in\mathbb{Z}^{2m}$ （可能是平凡向量）满足$\Delta(v)=0$，当且仅当存在整数 a、b 以及一个辫 $\beta\in B_{2m}$，使得

$$v\cdot\beta=(\underbrace{a,\ldots,a}_{2r},\underbrace{b,\ldots,b}_{2s})$$

对于某些 r、$s\ge 0$，满足 $r+s=m$。 □

定理2.4 ([5, 定理 1.1])。对于两个非平凡向量 v、$w\in\mathbb{Z}^{2m}$，存在一个辫 $\beta\in B_{2m}$，使得 $v\cdot\beta=w$，当且仅当

$$\Delta(v)=\Delta(w),\ d(v)=d(w),\ and\ M(v)=M(w).$$

□

3. Classical tangle diagrams

本节中，所有缠结图均假定为经典缠结图。令 $R=\mathbb{Z}$ 或$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，其中 $p\ge 3$ 为奇数。

引理 3.1 (参见 [6, 引理 1.5])。对于任意 R-着色缠结图 (T,C)，边界颜色向量 $v=\partial(T,C)$ 满足 $\Delta(v)=0$。

证明。证明沿用 Przytycki 在 [6] 中使用的方法。令 T' 为在 T 下方添加一个大圆后得到的图示，如图 3 左侧所示。由于经过有限次 Reidemeister 变换，T' 等价于 T 与一个圆的不交并，因此 T 的 R-着色 C 自然延拓为 T'的 R-着色。见图右侧。

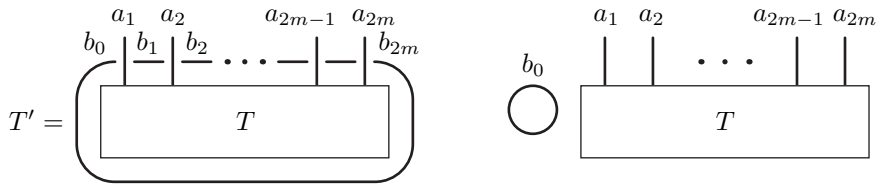


FIGURE 3. 向 T添加一个圆

令 $v=(a_1, \ldots\ldots, a_{2m})$ 为边界颜色。对于 $0 \le i \le 2m$，令 b_i 表示外圆上位于颜色分别为 a_i 和 a_{i+1} 的股之间的弧的颜色，其中下标模 $2m$ 取值。由于 $b_{i-1}+b_i=2a_i$，我们得到

$$b_i=(-1)^i\left(b_0+2\sum_{j=1}^{i}(-1)^j a_j\right).$$

特别地，当 $i=2m$ 时，我们有 $b_{2m}=b_0-2\Delta(v)$。由于 $b_{2m}=b_0$，可得 $2\Delta(v)=0\in R$。由于 $R=\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 中 $p\ge 3$ 为奇数，元素 2 不是 R中的零因子。因此 $\Delta(v)=0$。□

命题 *1.1* 的证明。(i)⇒(ii)。这可由引理 3.1 立即得到。

(ii)⇒(i)。令 $v=(a_1, \ldots, a_{2m})$ 为 $\in R^{2m}$，其中 $\Delta(v)$ 为 $=0$。

我们先考虑 $R=\mathbb{Z}$的情形。根据引理 2.3，存在一个 $\mathbb{Z}$着色的辫图（β，C'），使得顶部端点赋予向量 v，而底部端点赋予

$$w=(\underbrace{a,\ldots,a}_{2r},\underbrace{b,\ldots,b}_{2s})$$

对于某些 r，$s\ge 0$，使用 $r+s=m$。

为构造一个缠结图 T，用简单弧（$1\le i\le m$）连接 β 的第（$2i-1$）个和第 $2i$ 个底部端点。每条这样的弧连接具有相同颜色的端点。这便得到一个 $\mathbb{Z}$ 着色的经典缠结图（T，C），其满足∂（T，C）$=v$。见图 4。容易验证，该图示 T 满足性质 P_1。事实上，由于 β 是一个辫图，T 可通过反复应用图 2(a) 所示的变换，化简为一个没有交叉的图示。

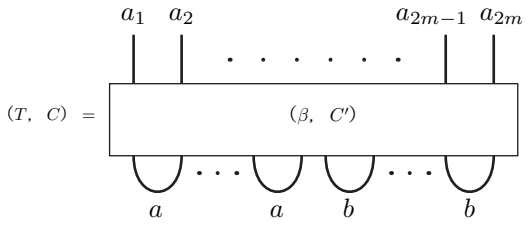


FIGURE 4. 用 m 弧封闭（β，C'）

接下来考虑情形 $R=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。选取整数 $b_i\in\mathbb{Z}$（$1\le i\le 2m-1$），使得 $b_i=a_i\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。定义

$$b_{2m}=-\sum_{i=1}^{2m-1}(-1)^{i-1}b_i$$

并设 $w=(b_1、\ldots\ldots、b_{2m})\in\mathbb{Z}^{2m}$。于是 $\Delta(w)=0\in\mathbb{Z}$。根据上文已证明的关于 $R=\mathbb{Z}$ 的结果，存在一个 $\mathbb{Z}$ 着色的经典缠结图 $(T,\ C)$，使得 $\partial(T,\ C)=w$。由于 $\Delta(v)=0\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，我们有 $b_{2m}=a_{2m}\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。令 $\pi\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 表示自然投影。于是 $(T,\ \pi\circ C)$ 是一个 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 着色的缠结图，且 $\partial(T,\ \pi\circ C)=v$。此外，$T$ 满足性质 P_1。□

4. VIRTUAL TANGLE DIAGRAMS

本节中，除非另有说明，缠结图均允许含有虚交叉。

引理 4.1. 令 $v=(a_1,\ldots,a_{2m})\in\mathbb{Z}^{2m}$ 为一个 $\mathbb{Z}$ 着色虚拟缠结图 (T, C)的边界颜色向量。若 v 是非平凡的，则有以下结论。

(i) 对于 T的任意一条弧 x ，有

$$C(x) \equiv a_1 \pmod{2^{k(v)}}.$$

(ii) 对于 T 的同一条弦上的任意两条弧 x 和 y ，有

$$C(x) \equiv C(y) \pmod{2^{k(v)+1}}.$$

证明。我们对 s 使用归纳法，证明对于每个 $0 \le s \le k(v)$ ，以下结论成立：
(i)$_s$ 对于 T 的任意一条弧 x ，有

$$C(x) \equiv a_1 \pmod{2^s}.$$

(ii)$_s$ 对于 T 的同一条弦上的任意两条弧 x 和 y ，有

$$C(x) \equiv C(y) \pmod{2^{s+1}}.$$

对于 $s = 0$，**(i)**$_0$ 是平凡的，因为 $C(x) \equiv a_1$ (模 1)。为证明 **(ii)**$_0$，，考虑任意一个经典交叉，其中 x，z 是两条下弧，而 y 是上弧。由于$C(x) + C(z) = 2C(y)$，我们有

$$C(x) - C(z) = 2(C(y) - C(z)),$$

因此 $C(x) \equiv C(z)$ (模 2)。由于这对每个经典交叉都成立，且虚交叉不会影响颜色，因此同一条弦上的所有弧具有相同的奇偶性。因此 **(ii)**$_0$ 得证。

假设对于某个 $0 \le s \le k(v) - 1$，**(i)**$_s$ 和 **(ii)**$_s$ 成立。为证明 **(i)**$_{s+1}$，任取 T的一条弧x 。根据 **(ii)**$_s$，颜色 $C(x)$ 模 2^{s+1} 同余于同一条弦一个端点处的颜色 a_i 。由于 $s + 1 \le k(v)$ 且 $a_i \equiv a_1$ (模 $2^{k(v)}$)，因此有 $a_i \equiv a_1$ (模 2^{s+1})。于是 $C(x) \equiv a_1$ (模 2^{s+1})，从而证明了 **(i)**$_{s+1}$。

为证明 **(ii)**$_{s+1}$，考虑任意一个具有上述弧 x，y，z的经典交叉。由 **(i)**$_{s+1}$，根据$C(x) - C(z) = 2(C(y) - C(z))$ 和 $C(y) \equiv C(z)$（模 2^{s+1}），可得$C(x) \equiv C(z)$（模 2^{s+2}）。因此，位于同一条弦上的任意两条弧的颜色模 2^{s+2}同余。由此可得 **(ii)**$_{s+1}$ 。

由归纳法可知，对于所有 $0 \le s \le k(v)$，**(i)**$_s$ 和 **(ii)**$_s$ 均成立。取 $s = k(v)$ 即可得到所需结论。□

引理 4.2. 设 $v = (a_1, \ldots, a_{2m}) \in \mathbb{Z}^{2m}$ 是一个 $\mathbb{Z}$-着色虚拟缠结图 (T, C) 的边界颜色向量。若 v 非平凡，则 $\Delta(v)$ 可被 $2^{k(v)+1}$ 整除。

证明。记 $a_i = a_1 + 2^{k(v)} b_i$ $(1 \le i \le 2m)$，并令 $w = (b_1, \ldots, b_{2m}) \in \mathbb{Z}^{2m}$。

假设 a_i 和 a_j 是 T 中同一条弦的端点处的颜色。根据引理 4.1(ii)，有 $a_i \equiv a_j$ (模 $2^{k(v)+1}$)，这意味着 $b_i \equiv b_j$ (模 2)。由于整数 $a_1, \ldots, a_{2m}$ 被 T 的 m 条弦划分为 m 对，因此我们得到

$$\Delta(w) \equiv \sum_{i=1}^{2m} b_i \equiv 0 \pmod{2}.$$

由于 $\Delta(v) = 2^{k(v)}\Delta(w)$，可知 $\Delta(v)$ 可被 $2^{k(v)+1}$ 整除。 □

引理 4.2 中的假设只有在 $m \ge 2$ 时才成立。事实上，当 $m = 1$ 时，我们得到如下结果。

命题 4.3。对于任意 $\mathbb{Z}$-着色的 1-弦虚拟缠结图 (T, C)，T 的所有弧具有相同的颜色。特别地，边界颜色向量 $\partial(T, C) \in \mathbb{Z}^2$ 是平凡的。

证明。令 $\partial(T,C) = (a_1,a_2) \in \mathbb{Z}^2$。如引理 4.1 的证明所示，我们对 s 进行归纳，证明对于每个 $s \geq 0$，T 的任意弧 x 都满足

$$C(x) \equiv a_1 \pmod{2^s}.$$

由于对所有 $s \geq 0$，$C(x) - a_1$ 都可被 2^s 整除，因此我们有 $C(x) = a_1$。于是，T 的所有弧都具有相同的颜色 a_1。□

引理 4.4。设两个向量 $v, w \in \mathbb{Z}^{2m}$ 满足 $v \cdot \beta = w$，其中 $\beta \in B_{2m}$。若存在一个 $\mathbb{Z}$着色的虚拟缠结图 (T, C)，使得 $\partial(T, C) = w$且 T 满足性质P_2 和P_3，，则 v也满足相同性质。

证明。令 (β, C') 为与Hurwitz作用 $v \cdot \beta = w$相关联的 $\mathbb{Z}$着色辫图。考虑通过将 (β, C') 与 (T, C) 连接而得到的 $\mathbb{Z}$着色缠结图 (T', C'')，如图 5 所示。根据构造，我们有$\partial(T', C'') = v$。

由于 T 至多有一个虚交叉，而 β 没有虚交叉，T'满足性质 P_2。此外，由于 T' 经过图 2(a)所示的有限个变换转化为 T，T' 也满足性质 P_3。□

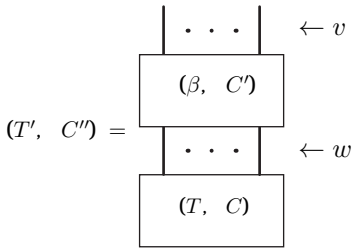


FIGURE 5. 将 (β, C') 与 (T, C) 相连

定理 定理 1.2。(i)⇒(ii)。这由引理 4.2 得出。

(ii)⇒(i). (a) 任意平凡向量 $v = ae_1 = (a, \ldots, a) \in \mathbb{Z}^{2m}$ 都可由一个$\mathbb{Z}$-着色的经典缠结图 (T, aE_1) 实现。

(b) 由于 v 是非平凡的，命题 4.3 蕴含 $m \geq 2$。由引理 2.2 和 4.4，我们可以假设

$$v = (a, \ldots, a, \underbrace{a + \lambda d(v)}_{i\text{-th}}, a + d(v), \ldots, a + d(v)) \in \mathbb{Z}^{2m}$$

对于某些 $a, \lambda \in \mathbb{Z}$ 和 $1 < i < 2m$。此外，根据引理 2.1，证明可归结为以下情形

$$v = (0, \ldots, 0, \underbrace{\lambda}_{i\text{-th}}, 1, \ldots, 1)$$

在假设 $\Delta(v)$ 为偶数的条件下。

情形 1：i 为偶数。由于 $\Delta(v) = -\lambda$ 为偶数，我们可对某个 $n \in \mathbb{Z}$ 写成 $\lambda = 2n$。考虑由下式定义的向量 $v', v'' \in \mathbb{Z}^{2m}$

$$v' = (0, \ldots, 0, \underbrace{n}_{i\text{-th}}, 1-n, 1, \ldots, 1) \text{ and}$$
$$v'' = (0, \ldots, 0, \underbrace{n}_{i\text{-th}}, 1, 1-n, 1, \ldots, 1).$$

由定理2.4，存在 $\beta \in B_{2m}$ 使得 $v \cdot \beta = v'$。事实上，直接计算可得

$$\Delta(v) = \Delta(v') = -2n,\ d(v) = d(v') = 1,\ \text{and}$$
$$M(v) = M(v') = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{i}, \underbrace{1, \dots, 1}_{2m-i} \pmod 2\}.$$

令 (β, C') 为与此 Hurwitz作用相关联的 $\mathbb{Z}$-着色辫图。

另一方面，由于 $\Delta(v'') = 0$，命题 1.1 表明，存在一个 $\mathbb{Z}$-着色的经典缠结图 (T', C'')，使得 $\partial(T', C'') = v''$，且 T' 满足性质 P_1。

如图6所示，在颜色为 $1-n$ 和 1 的弧之间插入一个虚交叉，将 (β, C') 与 (T', C'') 连接起来。由此得到所需的 $\mathbb{Z}$-着色虚拟缠结图 (T, C)，其中 $\partial(T, C) = v$，且 T满足 P_2 和 P_3。

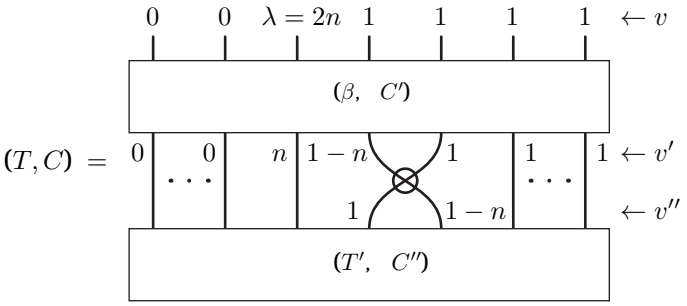


FIGURE 6. 通过一个虚交叉连接 (β, C') 和 (T', C'')

情形2：i 是奇数。由于 $\Delta(v) = \lambda - 1$ 是偶数，我们可以将 $\lambda = 2n+1$ 写成某个 $n \in \mathbb{Z}$。考虑由下式定义的向量 v'，$v'' \in \mathbb{Z}^{2m}$

$$v' = (0, \dots, 0, 1-n, \underbrace{n}_{i\text{-th}}, 1, \dots, 1) \text{ and}$$
$$v'' = (0, \dots, 0, 1-n, 0, \underbrace{n}_{i\text{-th}}, 1, \dots, 1).$$

与情形 1 类似，由于 $v \cdot \beta = v'$ 对于某个 $\beta \in B_{2m}$ 以及 $\Delta(v'') = 0$，我们可以构造一个 $\mathbb{Z}$着色缠结图 (T, C)，其中 $\partial(T, C) = v$。此外，T满足 P_2 和 P_3。□

推论 *1.3* 的证明。令 $v = (a_1, \dots, a_{2m}) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2m}$。

对于 $m = 1$，所需的带有单个虚交叉的 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$着色图示 (T, C) 如图7所示。由于 $p \geq 3$ 是奇数，$\frac{p+1}{2} \geq 2$ 是整数，因此该着色定义良好。

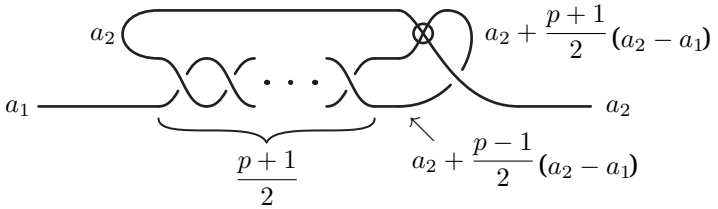


FIGURE 7. 带有虚交叉的 1-弦缠结图

对于 $m \geq 2$，取整数 $b_i \in \mathbb{Z}$ $(1 \leq i \leq 2m)$，使得 $b_i = a_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。我们可以假设向量 $w = (b_1, \dots, b_{2m}) \in \mathbb{Z}^{2m}$ 中既包含偶数，也包含

奇数；如有必要，可用 $b_i + p$ 替换 b_i。此外，假设 $b_1, \ldots, b_{2m}$ 中奇数的个数为偶数。

根据假设，$k(w) = 0$和 $\Delta(w)$ 为偶数。根据定理 1.2，存在一个$\mathbb{Z}$着色的虚拟缠结图 (T, C)，使得 $\partial(T, C) = w$和 T满足性质 P_2 和 P_3。令 $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 表示自然投影。则 $(T, \pi \circ C)$ 是所需的 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$着色缠结，且 $\partial(T, \pi \circ C) = v$。□

本文最后给出两条注记。

注 4.5. 以下结果给出了一种有效算法，用于判定给定向量 $v = (a_1, \ldots, a_{2m}) \in \mathbb{Z}^{2m}$ 能否实现为某个 $\mathbb{Z}$着色虚拟缠结图的边界颜色向量。证明可由定理 1.2 立即得出。

(i) 假设 $a_1, \ldots, a_{2m}$ 均为奇数。则存在一个 $\mathbb{Z}$ 着色的虚拟缠结图 (T, C)，使得 $\partial(T, C) = v$，当且仅当存在这样一个图示 $(a_1 - 1, \ldots, a_{2m} - 1)$。(ii) 假设 $a_1, \ldots, a_{2m}$ 均为偶数。则存在一个 $\mathbb{Z}$ 着色的虚拟缠结图 (T, C)，使得 $\partial(T, C) = v$，当且仅当存在这样一个图示 $(\frac{a_1}{2}, \ldots, \frac{a_{2m}}{2})$。(iii) 假设 v 同时包含偶数和奇数。则存在一个$\mathbb{Z}$ 着色的虚拟缠结图 (T, C)，使得 $\partial(T, C) = v$，当且仅当 $a_1, \ldots, a_{2m}$ 中奇数的个数为偶数。

注 4.6。我们考虑允许缠结图包含环分支的情形。对于 $R = \mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，由 R-颜色的经典缠结图（可能含有环）实现 $v \in R^{2m}$ 的可实现性条件仍为 $\Delta(v) = 0$。

相比之下，对于 $\mathbb{Z}$着色的虚拟缠结图，可实现性条件不同于定理 1.2：对于 $v = (a_1, \ldots, a_{2m}) \in \mathbb{Z}^{2m}$，以下条件等价。

(i) 存在一个可能含有环的 $\mathbb{Z}$着色虚拟缠结图 (T, C)，使得 $\partial(T, C) = v$。(ii) $a_1, \ldots, a_{2m}$中奇数的个数为偶数。

事实上，若 $v = \partial(T, C)$，则同一条T 弦两端的颜色奇偶性相同，因为引理 4.1 的证明中的 $(\mathrm{ii})_0$ 在存在环分支时仍然成立。反过来，若 v 中的奇数项个数为偶数，则 $\Delta(v)$为偶数。通过定义

$$a'_{2m} = a_{2m} + \Delta(v) \text{ and } w = (a_1, \ldots, a_{2m-1}, a'_{2m}),$$

我们有 $\Delta(w) = 0$。根据定理 1.2，存在一个 $\mathbb{Z}$着色的经典缠结图 (T', C')，其 $\partial(T', C') = w$。所需的带一个环和一个虚交叉的 $\mathbb{Z}$着色图 (T, C) 的构造如图 8 所示。

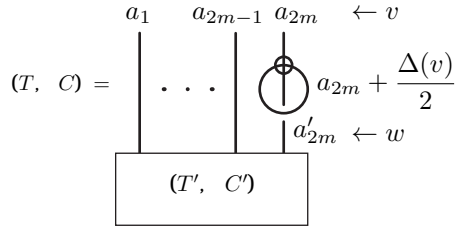


FIGURE 8. 带有一个环和一个虚交叉的缠结图

致谢。作者谨向谷山公辉教授致以诚挚谢意，感谢他提出的深刻建议。特别是，他通过将每个交叉处的着色条件改写为 $a - c = 2(b - c)$，给出了一个初等证明，证明任意纽结只有平凡 $\mathbb{Z}$着色——这与奇行列式的众所周知的性质一致。这个观点表明，对于任意正整数 s， $a-c$ 可被 2^s 整除，因而 $a = c$；这对引理 4.1 的建立至关重要。

References

[1] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, 载于《抽象代数中的计算问题》（会议论文集，牛津，1967），第329–358页，Pergamon，牛津-纽约-多伦多（安大略省），1970。[2] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, 载于《三维流形拓扑及相关主题》（佐治亚大学研究所会议论文集，1961），第120–167页，Prentice-Hall, Inc.，新泽西州恩格尔伍德克利夫斯，1961。[3] L. H. Kauffman 和 S. Lambropoulou, *On the classification of rational tangles*, 《应用数学进展》**33**（2004），第2期，199–237。[4] D. A. Krebes, *An obstruction to embedding 4-tangles in links*, 《纽结理论及其分支》**8**（1999），第3期，321–352。[5] T. Nakamura、Y. Nakanishi、S. Satoh 和 K. Wada, *Hurwitz equivalence in the universal dihedral quandle* 2410 11599 ,

arXiv：。。[6] J. H. Przytycki, *3-coloring and other elementary invariants of knots*, 载于《纽结理论》（华沙，1995），第275–295页，Banach 中心出版物，**42**，波兰科学院数学研究所，华沙，1998。[7] D. S. Silver 和 S. G. Williams, *Virtual tangles and a theorem of Krebes*, 《纽结理论及其分支》**8**（1999），第7期，941–945。

Faculty of Education, University of Yamanashi, Takeda 4-4-37, Kofu, Yamanashi 400-8510, Japan*Email address*: takunakamura@yamanashi.ac.jp Department of Mathematics, Kobe University, Rokkodai-cho 1-1, Nada-ku, Kobe 657-8501, Japan*Email address*: nakanisi@math.kobe-u.ac.jpDepartment of Mathematics, Kobe University, Rokkodai-cho 1-1, Nada-ku, Kobe 657-8501, Japan*Email address*: shin@math.kobe-u.ac.jpDepartment of Mathematics, Kobe University, Rokkodai-cho 1-1, Nada-ku, Kobe 657-8501, Japan*Email address*: wada@math.kobe-u.ac.jp