arXiv:2603.18619v1 [math.GT] 19 Mar 2026

L局部结， ν^+-尖锐结与有理切片亏格

JUNGHWAN PARK、ZHONGTAO WU 和 JINGLING YANG

摘要。Hom 和 Wu 引入了纽结同痕不变量 ν^+，用于研究 S^3 中的纽结，并证明它给出了切片亏格的下界。Wu 和 Yang 将 ν^+ 推广到有理同调三维球面中的纽结；该不变量给出了有理切片亏格的下界，而有理切片亏格是有理同调三维球面中纽结的切片亏格的类似概念。若纽结达到这一界，即下界取等号，我们称其为 ν^+-尖锐结。

一个未解决问题是：三维流形 Y 中的局部结（即包含在一个三维球中的纽结），能否在 $Y \times I$ 中界定一个亏格小于其在 $S^3 \times I$ 中所界定曲面亏格的曲面。利用 Heegaard Floer不变量 ν^+，我们证明，由 ν^+-尖锐结产生的局部结不会出现这种情况：若 $K \subset S^3$ 是 ν^+-尖锐的，且 Y 是一个有理同调三维球面，那么在 Y 中诱导出的局部结的有理切片亏格等于 K 的切片亏格。证明通过建立有理切片亏格的可加性结果来完成。

1. 引言

给定 3-球面 S^3 中的一个纽结 K， K 的切片亏格定义为

$$g_4(K) := \min_F g(F),$$

其中，最小值取遍所有满足 $\partial F = K \subset S^3 \times \{1\}$ 且 F 光滑适当嵌入于 $S^3 \times I$ 中的紧致定向连通曲面。切片亏格已经得到了广泛研究；例如参见 [Mur65、KM93、OS03b、Ras10、HW16]。利用多种技术，人们获得了许多关于 $g_4(K)$ 的下界。其中一个最有用的下界来自 Heegaard Floer 理论 [OS04c、OS04a、Ras03]，它由纽结同痕不变量 $\nu^+(K)$ 给出。该不变量由 Hom 和第二作者 [HW16], 引入，他们证明了

$$\max\left\{\nu^+(K), \nu^+(-K)\right\} \leq g_4(K).$$

如果 K 满足上述不等式中的等式，我们称其为 ν^+-*sharp* 。这里， $-K$ 表示 S^3 中 K 的镜像纽结的反向。

类似地，对于有理同调 3-球面 Y 中的一个纽结 K，可以如下定义有理切片亏格（更准确地说，是相对于有理经线的有理切片亏格）：

$$g_{Y\times I}(K) := \min_F \frac{-\chi(F)}{2|[\mu]\cdot[\partial F]|} + \frac{1}{2},$$

最小值取遍所有 Seifert框架有理切片曲面 F 对于 K，且 μ 表示 K 的子午线（精确定义见第 2.1 节）。[1] 这一概念的系统研究始于 [WY23]，其中使用了 Heegaard Floer 理论。除此之外，该研究将 ν^+不变量推广到了有理同调3球面中的纽结，记作 $\nu^+(Y,K)$，并证明了

$$\max\left\{\nu^+(Y,K), \nu^+(-Y,-K)\right\} \leq g_{Y\times I}(K).$$

这里， $-K \subset -Y$ 表示同时反转 K 和 Y定向后得到的纽结。ν^+-锐性 这一概念自然推广到有理同调三维球面中的纽结，即上述不等式取等号的纽结。

[1]我们按照 [WY23] 中的方式，将有理切片亏格加上 $\frac{1}{2}$ 进行归一化，从而当 K 是 S^3中的纽结时，该定义与切片亏格一致。我们还要指出，有理切片亏格的定义还有其他变体；例如参见 [HR23a]。

局部结的有理切片亏格。本文的主要动机是理解有理同调三维球面中局部结的有理切片亏格。若三维流形 Y 中的纽结 K 包含在 Y的一个三维球内，则称其为局部的。根据定义，对于有理同调三维球面 Y中的局部结，更一般地，对于在 Y中零同调的纽结 K ，有

$$g_{Y\times I}(K)=\min_F g(F),$$

其中，最小值取遍所有紧致定向连通曲面 F，这些曲面光滑适当嵌入于 $Y\times I$，并满足 $\partial F=K\subset Y\times\{1\}$。

注意，每个局部结 $K\subset Y$都由一个纽结 $K\subset S^3$诱导而来。若无歧义，我们将滥用记号，对二者使用相同的符号。根据这一约定，显然有

$$g_{Y\times I}(K)\leq g_4(K)$$

对于任意局部结 $K\subset Y$。一个有趣的未解决问题是，对于所有局部结，是否有 $g_{Y\times I}(K)=g_4(K)$（例如，参见 [KR21，第 2]节）。若成立，这意味着允许更大的环境3-流形并不能使边界曲面的选择更加高效，这或许有些违背直觉。注意，这个问题并不限于有理同调 3-球面中的纽结。更一般地，对于任意 K位于任意 3-流形 Y中的局部结，我们也可以类似地定义 $g_{Y\times I}(K)$。

目前已知有若干种情形

$$g_{Y\times I}(K)=g_4(K).$$

在 [NOPP19的命题2中，9] （另见 [KR21的命题2），2]作者证明了，当 g_4（K） $\leq$ 1时，该等式总是成立。特别地，如果存在不等式严格成立的例子，那么它必须满足 g_4（K）。 $>$ 1此外， [DNPR18的定理25] 证明了，对于 $S^1\times S^2$中的每个局部结，该等式都成立；而 [KR21的命题24] 证明了，对于某个3-流形中的每个局部结，只要该流形能光滑嵌入 S^4，该等式也成立。

我们通过证明 ν^+-尖锐纽结构成一类广泛的新局部结，使这两个亏格相等，从而推广了这些结果。

定理1.1。设 K 是 S^3 中的一个 ν^+-尖锐纽结，且 Y 是一个有理同调3-球面。若 $K\subset Y$ 是诱导的局部结，则它是 ν^+-尖锐的，并且满足 $g_{Y\times I}$（K） $=g_4$（K）。

更一般地，我们证明，对于任意有理同调 3-球面中的 ν^+-sharp 纽结，同样的现象也成立。

定理1.2。设 K 是有理同调 3-球面 Y中的一个 ν^+-*sharp* 纽结， U 是有理同调 3-球面 Y'中的平凡结。那么 $K\#U\subset Y\#Y'$ 是 ν^+-*sharp*，并且

$$g_{(Y\#Y')\times I}(K\#U)=g_{Y\times I}(K).$$

有理切片亏格的可加性。上述两个定理是一个更一般结果的推论，该结果涉及有理切片亏格的可加性。

设 K 和 K' 分别是有理同调 3-球面 Y 和 Y'中的纽结。对于有理切片亏格，我们有通常的次可加性（见引理 4.1）：

$$g_{(Y\#Y')\times I}(K\#K')\leq g_{Y\times I}(K)+g_{Y'\times I}(K').$$

这个不等式可能是严格的，而 3维类比则具有可加性；见 [NV19，引理5。1]。

我们证明，若 K 是 ν^+-sharp，且 K' 满足适当条件，则有理切片亏格具有可加性。粗略地说，对 K' 的条件是：对于每个 Spin^c 结构，其结 Floer 复形除无环直和项外，可分裂为平凡结复形的一个平移副本。我们称这类纽结为 完全局部平凡；见定义 3.3。

定理 1.3. 设 K 和 K' 分别是有理同调3球面 Y 和 Y' 中的 ν^+-锐纽结。此外，若 K' 完全局部平凡，则 $K\#K'$ 是 ν^+-锐的，并且

$$g_{(Y\#Y')\times I}(K\#K')=g_{Y\times I}(K)+g_{Y'\times I}(K').$$

我们指出，对 K' 施加某些假设是必要的：若 $K \subset S^3$ 的切片亏格为正，并取$K' = -K \subset S^3$，则可加性不成立。此外，仅要求 K' 是 ν^+-锐的仍然不够。事实上，存在 ν^+-锐纽结 $K \subset S^3$，它们是两个环面结的连通和 BCG17、FP21], ，其中 K 和 $-K$ 均为 ν^+-锐的。

在引理 4.3 中，我们证明有理同调 3-球面中的平凡结是完全局部平凡且ν^+-尖锐的。因此，只需在定理 1.1 和 1.2 中取 $K' = U$，即可直接由定理 1.3 得出结论。

利用定理1.3，我们还可以考察另一类常见的完全局部平凡纽结，即*Floer* 简单结。Berge 在研究透镜空间手术时引入了简单结 [Ber90]。回顾一下，透镜空间是一个闭的、定向的 3-流形，不同于 S^3 和 $S^1 \times S^2$，且具有亏格 1 的 Heegaard 分解。若一对压缩盘（每个 Heegaard 实心环面中各一个）的边界圆在 Heegaard 环面上处于最简位置，则称其为标准的。于是，透镜空间中的一个简单结可由这两个标准压缩盘中各取一条适当嵌入的弧并起来得到。此外，对于透镜空间中的每个同调类，都可以显式构造一个代表该同调类的简单结。

Heegaard Floer 理论为每个闭三维流形 Y关联群 $HF(Y)$，并为纽结 $K \subset Y$关联群 $HFK(K)$。当 Y 是有理同调三维球面时，它们的秩满足

$$\operatorname{rk} \widehat{HFK}(K) \geq \operatorname{rk} \widehat{HF}(Y) \geq |H_1(Y;\mathbb{Z})|.$$

我们称 Y 为 L-空间，若第二个不等式取等号。在 L-空间中的纽结称为*Floer* 简单，若进一步第一个不等式也取等号。特别地，透镜空间是 L-空间，而透镜空间中的简单结是 Floer 简单结的基本例子。第 5.3 节还给出了更多 Floer 简单结的例子。

对于 Floer 简单结，ν^+ 检测到有理同调三维球面中纽结的 Seifert 亏格类比，即有理 Seifert 亏格。更确切地说，K 的有理 *Seifert* 亏格定义为

$$g_Y(K) := \min_S \frac{-\chi(S)}{2|[\mu] \cdot [\partial S]|} + \frac{1}{2},$$

其中，最小值取遍所有以 S 为边界的 K 有理塞弗特曲面（见第2.1节了解精确定义）。[2] 对于 K 中的 Floer 简单结 Y，我们有

$$\nu^+(Y,K) = g_{Y\times I}(K) = g_Y(K).$$

参见 [NW14，命题 5。1] 以及 [WY23，定理 1.1、1.3 和 1。4]。

Taki使 K' 在定理 1.3中成为 Floer 简单结，我们立即得到以下 g:

推论 1.4。 设 K 是一个有理同调3球面 Y中的 ν^+-尖锐纽结。若 K' 是 L-空间 Y'中的 *Floer* 简单结，则 $K\#K'$ 是 ν^+-尖锐的，且

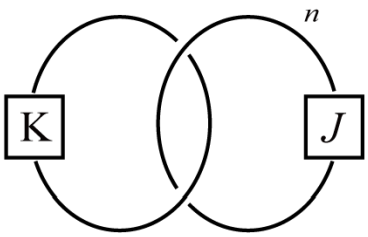
$$g_{(Y\#Y')\times I}(K\#K') = g_{Y\times I}(K) + g_{Y'\times I}(K') = g_{Y\times I}(K) + g_{Y'}(K').$$

此外，若 $K \subset Y$ 是一个局部结，则

$$g_{(Y\#Y')\times I}(K\#K') = g_{Y\times I}(K) + g_{Y'\times I}(K') = g_4(K) + g_{Y'}(K'). \qquad \square$$

利用这个推论，可以计算各种纽结的有理切片亏格。例如，可以确定图 1 中纽结的有理切片亏格：我们沿一个 n 进行手术，该纽结是一个 L-空间纽结 $J \subset S^3$，其中 n 足够大，且 K 是一个 ν^+-sharp 纽结，位于 S^3 中。

[2]我们按照 [NW14、WY23] 中的方式，将有理 Seifert 亏格加上1 2 进行归一化，使得当 K 是 S^3中的纽结时，此定义与 Seifert 亏格一致。



FIG图 1. 一个可以利用推论 1.4 计算其有理切片亏格的纽结 .

注意，当 $n > 2g(J) - 1$ 时， n 对 J 进行手术会得到一个 L-空间，而所得 J-空间中 L 的子午线是 Floer 简单的 Gre15，Ras07，Hed11]，，其中 $g(J)$ 表示 J 的 Seifert 亏格。更多示例将在第 5 节介绍，其中包括 ν^+-sharp 纽结和 Floer 简单结的显式族。

定理 1.3 的证明基于命题 3.6，该命题确立了 ν^+ 不变量的可加性结果。一般而言，与 S^3 中的纽结情形一样， ν^+ 不变量仅具有次可加性；见定理 3.2。在命题 3.6中，我们给出了一个纽结在与任意纽结取连通和时满足 ν^+-可加性的充要条件。关于 ν^+ 的可加性和次可加性结果也可能具有独立的研究价值。

结构安排。 本文安排如下。第 2 节回顾一些预备知识，包括有理切片亏格的定义以及结 Floer 同调的背景。第 3 节证明关于 ν^+-不变量的次可加性和可加性结果。第 4 节证明主要结果。第5节给出 ν^+-锐纽结的例子。全文中，我们都在 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上进行研究。

致谢。 我们感谢 Zhechi Chen、Stefan Friedl、Matthew Hedden 和 Jennifer Hom 提供的有益讨论和建议。第一作者获得三星科学技术基金会（SSTF-BA2102-02）和 NRF资助项目RS-2025-00542968 的部分资助。第二作者获得中国香港特别行政区研究资助局的部分资助（项目编号：14301825）。第三作者获得国家自然科学基金委员会（项目编号：12301087）、福建省自然科学基金（项目编号：2024J08012）和中央高校基本科研业务费（项目编号：20720230026）的资助。

我们最近获悉，Stefan Friedl、Tejas Kalelkar、José Pedro Quintanilha 和 Tanushree Shah 即将发表一篇关于类似问题的论文。我们的论文关注局部结的切片亏格，而他们的论文研究的是解纽结数和 Gordian距离 [FKQS26]。

2. 预备知识

2.1. **有理塞弗特曲面与切片曲面**。 我们首先回顾与有理经线相关的定义；详见 [WY23，第 1] 节，其中有更详细的讨论。设 $K \subset Y$ 是一个有理同调3-球面中的纽结，并令

$$M = Y \setminus N^\circ(K),$$

其中 $N(K)$ 表示 K 的管状邻域， $N^\circ(K)$ 表示其内部。注意，包含映射

$$i_*\colon H_1(\partial M;\mathbb{Z}) \to H_1(M;\mathbb{Z})$$

其核同构于 $\mathbb{Z}$。因此，存在一个本原类 $\lambda_r \in H_1(\partial M;\mathbb{Z})$ 和一个正整数 k，使得

$$\ker(i_*) = \langle k\lambda_r \rangle.$$

类 λ_r 在 ∂M 上确定了一个良定义的斜率，称为 K 的有理经线 .

K 的有理塞弗特曲面是一个适当嵌入的、紧致、连通的定向曲面 $S \subset M$，满足

$$[\partial S] = k\lambda_r \in H_1(\partial M;\mathbb{Z}).$$

K 的塞弗特框架有理切片曲面是一个紧致、连通的定向曲面 F，光滑嵌入于

$$(Y \times [0,1]) \setminus N^\circ(K)$$

使得 $\partial F = F \cap \partial N(K)$ 且

$$[\partial F] = k\lambda_r \in H_1(\partial N(K);\mathbb{Z}),$$

其中 $N(K)$ 表示 K 在 $Y \times \{1\}$中的实心环面邻域。我们称 F 塞弗特框架，因为其边界斜率与 K的有理塞弗特曲面斜率相同。

2.2. **结 Floer 复形**。设 K 是有理同调 3-球面 Y中的一个纽结。固定一个双基点 Heegaard 图 $(\Sigma, \alpha, \beta, w, z)$，对应于 (Y, K)，并取 Y上的 Spin^c 结构 $\mathfrak{s}$。结 Floer 复形 $C_{\mathfrak{s}} = CFK^\infty(Y, K, \mathfrak{s})$ 由三元组 $[x,i,j]$生成，其中 $x \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$满足 $\mathfrak{s}_w(x) = \mathfrak{s}$，$i \in \mathbb{Z}$，且

$$j - i = A_{Y,K}\big(\underline{\mathfrak{s}}_{w,z}(x)\big).$$

这里 $A_{Y,K}\colon \underline{\text{Spin}}^c(Y, K) \to \mathbb{Q}$ 表示与 Spin^c 结构相关的 Alexander 分次 (Y, K)。微分由计数全纯圆盘的通常方法定义。更多细节参见 [HL24，第2节。4] 。

令 $\underline{\text{Spin}}^c(Y,K,\mathfrak{s})$ 表示底层 Spin^c 结构为 $\mathfrak{s}$ 的相对 Spin^c 结构集合，即满足 $G_{Y,K}(\xi) = \mathfrak{s}$ 的那些 ξ。对于 $\xi \in \underline{\text{Spin}}^c(Y,K,\mathfrak{s})$，定义

$$A^-_\xi(K) = C_{\mathfrak{s}}\{\max\{i, j - A_{Y,K}(\xi)\} \le 0\} \qquad \text{and} \qquad B^-_\xi(K) = C_{\mathfrak{s}}\{i \le 0\}.$$

特别地，

$$B^-_\xi(K) = C_{\mathfrak{s}}\{i \le 0\} \cong CF^-(Y,\mathfrak{s}),$$

并且 $A^-_\xi(K)$ 与复形 CF^- 准同构，该复形对应于在适当的 Spin^c 结构下沿 K 进行的充分大手术。

2.3. V**-不变量**。对于纽结 $K \subset S^3$，Ni 和第二作者定义了一族 $\mathbb{Z}_{\ge 0}$-值不变量$\{V_k(K)\}_{k\in\mathbb{Z}}$，见 [NW15]。对于有理同调 V-球面中的纽结 K，类似的 3-不变量 Y 可用类似方式定义如下；参见 [WY23，第5节。1]。

令 $v^-_\xi\colon A^-_\xi(K) \to B^-_\xi(K)$ 为包含映射。它诱导出

$$v^-_{\xi,*}\colon H_*(A^-_\xi(K)) \longrightarrow H_*(B^-_\xi(K)) \cong HF^-(Y,\mathfrak{s}).$$

$H_*(A^-_\xi(K))$ 和 $H_*(B^-_\xi(K))$ 均同构于 $\mathbb{F}[U]$ 与一个有限维 U-挠模的直和。映射 $v^-_{\xi,*}$ 诱导出自由部分 $\mathbb{F}[U]$ 之间一个齐次且非零的映射，该映射必为乘以某个非负整数 N 的映射。我们定义

$$V_\xi(Y,K) := N.$$

修正项 $d(Y, \mathfrak{s})$ 定义为$HF^-(Y, \mathfrak{s})$中任意非挠元素的最高 Maslov 分级。由于 U 使 Maslov 分级降低两个单位，我们可以将 V-不变量的定义重新表述如下：

$$V_\xi(Y,K) := \frac{1}{2}\Big(d(Y,\mathfrak{s}) - \max\big\{\mathrm{gr}(x)\colon x \in H_*(A^-_\xi(K)) \text{ is homogeneous and non-torsion}\big\}\Big),$$

其中 gr 表示 Maslov 分级，且 $\mathfrak{s} = G_{Y,K}(\xi)$。

2.4. ν^+**-不变量**。纽结 $K \subset S^3$ 的 ν^+-不变量 定义为

$$\nu^+(K) := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid V_k(K) = 0\}.$$

类似地，我们定义有理同调 3-球面中纽结的 ν^+-不变量。

定义 2.1 ([WY23，定义 2.7])。设 K 是有理同调 3-球面 Y中的一个纽结。给定$\mathfrak{s} \in \mathrm{Spin}^c(Y)$，定义

$$\nu_{\mathfrak{s}}^+(Y,K) := \min\{A_{Y,K}(\xi) \mid \xi \in \underline{\mathrm{Spin}^c}(Y,K,\mathfrak{s}) \text{ and } V_\xi(Y,K) = 0\}$$

and

$$\nu^+(Y,K) := \max_{\mathfrak{s}\in \mathrm{Spin}^c(Y)} \nu_{\mathfrak{s}}^+(Y,K).$$

当 $Y = S^3$ 时，Alexander 分次 $A_{Y,\ K}$ 将 Spin^c(S^3，K) 与 $\underline{\mathbb{Z}}$ 对应起来，并恢复不变量 V_k(K) 的通常编号方式。

定理 ν^+-不变量给出了有理切片亏格的一个下界。

定理 2.2 （[WY23，定理 1.4]）。对于任意纽结 K，若其位于一个有理同调3-球面 Y中，则有

$$\nu^+(Y,K) \le g_{Y\times I}(K).$$

特别地，*Floer* 简单结达到等号。

注记 2.3. 由于 $g_{Y\times I}(K) = g_{(-Y)\times I}(-K)$，我们得到有理切片亏格的以下界:

$$\max\{\nu^+(Y,K),\, \nu^+(-Y,-K)\} \le g_{Y\times I}(K).$$

2.5. **结 Floer 同调中的对称性与中间相对 Spin^c 结构**。本小节记录结 Floer 同调中的若干关键事实，这些事实将在后续各节中频繁使用。

设 K 是有理同调 3-球面 Y 中的一个纽结。反转 Y 和 K 的定向，得到镜像纽结的反向，记作 $-K \subset -Y$。给定任意 Spin^c 结构 $\mathfrak{s} \in$ Spin^c(Y) $\cong$ Spin^c(−Y)，存在一个滤过链同伦等价

$$CFK^\infty(-Y,-K,J\mathfrak{s}) \simeq CFK^\infty(Y,K,\mathfrak{s})^*, \tag{1}$$

其中 $CFK^\infty(Y,K,\mathfrak{s})^*$ 表示对偶复形

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[U,U^{-1}]}\left(CFK^\infty(Y,K,\mathfrak{s}),\, \mathbb{F}[U,U^{-1}]\right),$$

以及 J 是 Spin^c(Y) 上的共轭作用。参见 [OS04a，第3节。5]。

在 [WY23，第2节2], 中，为每个 中间相对 Spin^c 结构 引入了 $\mathfrak{s} \in \mathrm{Spin}^c(Y)$，将其定义为唯一的相对 Spin^c 结构 $\mathrm{Spin}^c(Y,K,\mathfrak{s})$，使得

$$\overline{V_{\xi^0_{\mathfrak{s}}}(Y,K) = H_{\xi^0_{\mathfrak{s}}}(Y,K)},$$

其中 H 是一个以类似于 V的方式定义的不变量族；参见 [WY23，第5节。1] 具体定义见该处。那里还证明了中间相对Spin^c 结构的若干有用性质。

引理 2.4 ([WY23，命题 2。6])。设 K 是有理同调 3-球面 Y中的一个纽结。那么，对于任意 Spin^c 结构 $\mathfrak{s} \in$ Spin^c(Y)，与 Spin^c 中间相对结构 $\xi^0_{\mathfrak{s}}$ 相关联的 $\mathfrak{s}$*Alexander* 分次由下式给出

$$A_{Y,K}(\xi^0_{\mathfrak{s}}) = \frac{1}{2}d(Y,\mathfrak{s}) - \frac{1}{2}d(Y,\mathfrak{s}+PD[K]).$$

引理 2.5 ([WY23，推论 2。8])。设 K 是有理同调 3-球面 Y中的一个纽结。那么，对于任意 Spin^c 结构 $\mathfrak{s} \in$ Spin^c(Y)，有

$$\nu_{\mathfrak{s}}^+(Y,K) \ge A_{Y,K}(\xi^0_{\mathfrak{s}}).$$

为简便起见，当 Y和 K 已知时，我们记作

$$r_{\mathfrak{s}} = A_{Y,K}(\xi^0_{\mathfrak{s}}).$$

简单计算可得中间相对 Spin^c 结构的 Alexander 分次具有如下对称性。

引理 2.6. 设 K 是有理同调 3 球面 Y 中的一个纽结。那么，对于任意一对共轭的 Spin^c 结构 $\mathfrak{s}$、$J\mathfrak{s} \in$ Spin^c(Y) $\cong$ Spin^c(−Y)，有

$$-A_{Y,K}(\xi^0_{\mathfrak{s}}) = A_{-Y,-K}(\xi^0_{J\mathfrak{s}}).$$

证明. 由引理 2.4，可得

$$\begin{aligned} A_{-Y,-K}(\xi^0_{J\mathfrak{s}}) &= \frac{1}{2}d(-Y, J\mathfrak{s}) - \frac{1}{2}d(-Y, J\mathfrak{s} + PD[-K]) \\ &= -\frac{1}{2}d(Y, \mathfrak{s}) + \frac{1}{2}d(Y, \mathfrak{s} + PD[K]) \\ &= -A_{Y,K}(\xi^0_{\mathfrak{s}}), \end{aligned}$$

其中我们使用了对称性 $d(-Y,\mathfrak{s}) = -d(Y,\mathfrak{s})$ 和 $d(Y, J\mathfrak{s}) = d(Y,\mathfrak{s})$。 □

3. ν^+ 和 V-不变量的次可加性与可加性

3.1. 和 ν^+ 与 V-不变量的次可加性。 有理同调 3-球面中纽结的 ν^+ 和 V-不变量满足次可加性，这与 S^3中纽结的情形类似。

命题 3.1 （的次可加性 V）。 设 K_1 和 K_2 分别是有理同调 3-球面 Y_1 和Y_2中的纽结。那么，对于任意相对 Spin^c 结构

$$\xi_1 \in \underline{\mathrm{Spin}^c}(Y_1, K_1) \qquad and \qquad \xi_2 \in \underline{\mathrm{Spin}^c}(Y_2, K_2),$$

我们有

$$V_{\xi_1\#\xi_2}(Y_1\#Y_2,\, K_1\#K_2) \le V_{\xi_1}(Y_1, K_1) + V_{\xi_2}(Y_2, K_2).$$

证明。 对于 $i = 1,\ 2$，令

$$n_i = \max\{\mathrm{gr}(x)\colon x \in H_*(A^-_{\xi_i}(K_i)) \text{ is homogeneous and non-torsion}\}.$$

取一个圈 $a_i \in A^-_{\xi_i}(K_i)$，使得 $[a_i] \in H_*(A^-_{\xi_i}(K_i))$ 是齐次且非挠的，并且

$$\mathrm{gr}(a_i) = n_i.$$

那么 $v^-_{\xi_i}(a_i)$ 是 $B^-_{\xi_i}(K_i)$中的一个圈，并且

$$[v^-_{\xi_i}(a_i)] \in H_*(B^-_{\xi_i}(K_i))$$

是齐次且非挠的。

由于 $B^-_{\xi}(K) \cong CF^-(Y,\ G_{Y,\ K}(\xi))$，Künneth 公式 [OS04b，定理 6。2] 给出

$$CF^-(Y_1\#Y_2, \mathfrak{s}_1\#\mathfrak{s}_2) \simeq CF^-(Y_1, \mathfrak{s}_1) \otimes CF^-(Y_2, \mathfrak{s}_2),$$

因此

$$B^-_{\xi_1\#\xi_2}(K_1\#K_2) \simeq B^-_{\xi_1}(K_1) \otimes B^-_{\xi_2}(K_2).$$

因此,

$$v^-_{\xi_1}(a_1) \otimes v^-_{\xi_2}(a_2) \in B^-_{\xi_1\#\xi_2}(K_1\#K_2)$$

是一个圈，其同调类是齐次且非挠的。

根据 [Rao20 引理 38] 和 [OS04b 定理 6.2、推论 63], ，我们有

$$\begin{aligned} A_{Y_1\#Y_2,K_1\#K_2}\big(v^-_{\xi_1}(a_1) \otimes v^-_{\xi_2}(a_2)\big) &= A_{Y_1,K_1}\big(v^-_{\xi_1}(a_1)\big) + A_{Y_2,K_2}\big(v^-_{\xi_2}(a_2)\big) \\ &\le A_{Y_1,K_1}(\xi_1) + A_{Y_2,K_2}(\xi_2) \\ &= A_{Y_1\#Y_2,K_1\#K_2}(\xi_1\#\xi_2), \end{aligned}$$

and

$$\mathrm{gr}\big(v^-_{\xi_1}(a_1) \otimes v^-_{\xi_2}(a_2)\big) = \mathrm{gr}\big(v^-_{\xi_1}(a_1)\big) + \mathrm{gr}\big(v^-_{\xi_2}(a_2)\big) = n_1 + n_2.$$

Thus

$$v^-_{\xi_1}(a_1) \otimes v^-_{\xi_2}(a_2) \in A^-_{\xi_1\#\xi_2}(K_1\#K_2).$$

此外，它是一个圈，其同调类 1 1

$$\big[v^-_{\xi_1}(a_1) \otimes v^-_{\xi_2}(a_2)\big] \in H_*\big(A^-_{\xi_1\#\xi_2}(K_1\#K_2)\big)$$

是齐次且非挠的。令

$$n_3 = \max\{\mathrm{gr}(x)\colon x \in H_*(A^-_{\xi_1\#\xi_2}(K_1\#K_2)) \text{ is homogeneous and non-torsion}\}.$$

于是 $n_3 \geq n_1 + n_2$，因此

$$\begin{aligned} V_{\xi_1\#\xi_2}(Y_1\#Y_2, K_1\#K_2) &= \frac{1}{2}\big(d(Y_1\#Y_2, \mathfrak{s}_1\#\mathfrak{s}_2) - n_3\big) \\ &\leq \frac{1}{2}\big(d(Y_1, \mathfrak{s}_1) - n_1\big) + \frac{1}{2}\big(d(Y_2, \mathfrak{s}_2) - n_2\big) \\ &= V_{\xi_1}(Y_1, K_1) + V_{\xi_2}(Y_2, K_2), \end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{s}_i = G_{Y_i,\ K_i}(\xi_i)$ 对于 $i = 1,\ 2$，并且我们利用了 d-不变量在连通和下的可加性 [OS03a，定理 4。3]。 □

定理3.2 (次可加性)。 设 K_1 和 K_2 分别是有理同调 3-球面 Y_1 和 Y_2 中的纽结。那么，对于任意的 Spin^c 结构 $\mathfrak{s}_1 \in \mathrm{Spin}^c(Y_1)$ 和 $\mathfrak{s}_2 \in \mathrm{Spin}^c(Y_2)$，我们有

$$\nu^+_{\mathfrak{s}_1\#\mathfrak{s}_2}(Y_1\#Y_2,\ K_1\#K_2) \leq \nu^+_{\mathfrak{s}_1}(Y_1, K_1) + \nu^+_{\mathfrak{s}_2}(Y_2, K_2).$$

证明。 对于 $i = 1,\ 2$，取一个相对 Spin^c 结构

$$\xi_i \in \underline{\mathrm{Spin}^c}(Y_i, K_i, \mathfrak{s}_i)$$

使得

$$A_{Y_i,K_i}(\xi_i) = \nu^+_{\mathfrak{s}_i}(Y_i, K_i).$$

那么 $V_{\xi_i}(Y_i,\ K_i) = 0$。由命题 3.1 以及 V-不变量的非负性，可得

$$V_{\xi_1\#\xi_2}(Y_1\#Y_2, K_1\#K_2) = 0.$$

因此,

$$\begin{aligned} \nu^+_{\mathfrak{s}_1\#\mathfrak{s}_2}(Y_1\#Y_2, K_1\#K_2) &\leq A_{Y_1\#Y_2,K_1\#K_2}(\xi_1\#\xi_2) \\ &= A_{Y_1,K_1}(\xi_1) + A_{Y_2,K_2}(\xi_2) \\ &= \nu^+_{\mathfrak{s}_1}(Y_1, K_1) + \nu^+_{\mathfrak{s}_2}(Y_2, K_2), \end{aligned}$$

正如所需。 □

3.2. **-不变量的可加性**。我们先介绍一类简单的完整结 Floer 复形CFK^∞，它在张量积（等价地，纽结的连通和）下表现良好。

定义 3.3。设 $K \subset Y$ 是有理同调 3-球面中的一个纽结。若存在滤过链同伦等价，则称 K 关于 Spin^c 结构 $\mathfrak{s} \in \mathrm{Spin}^c(Y)$ 是局部平凡的

$$CFK^\infty(Y, K, \mathfrak{s}) \simeq CFK^\infty(S^3, U)[r_\mathfrak{s}] \oplus A, \tag{2}$$

其中 U 表示 S^3 中的平凡结，$[r_\mathfrak{s}]$ 表示 Alexander 分次平移，而 A 是一个无环复形。若K 对 Spin^c (Y) 中的每个 Spin^c 结构都是局部平凡的，则称 K 是完全局部平凡的。

注*3.4*。方程 *(2)* 意味着存在 CFK^∞*(Y, K,* $\mathfrak{s}$*)* 的一个滤过基，其中包含一个元素x，它生成同调 H_**(*CFK^∞ *(Y, K,* $\mathfrak{s}$*))*，并作为 CFK^∞*(Y, K,* $\mathfrak{s}$*)* 的一个直和项分裂出来。我们称这样的 x 为一个特 *distinguished* 生成元。注意，该 *distinguished* 生成元支撑在满足 $V = H = 0$ 的滤过层级上，因此

$$A_{Y,K}(x) = r_\mathfrak{s} = A_{Y,K}(\xi^0_\mathfrak{s}).$$

注3.5。 如果 $K \subset Y$ 关于 Spin^c 结构 $\mathfrak{s}$ 是局部平凡的，那么

$$\nu^+_\mathfrak{s}(Y, K) = r_\mathfrak{s}.$$

下面的命题给出了 $\nu^+_\mathfrak{s}$ 在与任意纽结作连通和时具有可加性的充要条件。

命题 3.6。 假设 $K_1 \subset Y_1$ 是有理同调 3 球面中的一个纽结，且 $\mathfrak{s}_1 \in \mathrm{Spin}^c(Y_1)$。那么等式

$$\nu^+_{\mathfrak{s}_1\#\mathfrak{s}_2}(Y_1\#Y_2,\ K_1\#K_2) = \nu^+_{\mathfrak{s}_1}(Y_1, K_1) + \nu^+_{\mathfrak{s}_2}(Y_2, K_2)$$

对于有理同调3球面中的每个纽结 $K_2 \subset Y_2$ 以及每个 Spin^c 结构 $\mathfrak{s}_2 \in \mathrm{Spin}^c(Y_2)$ 成立，当且仅当 K_1 关于 $\mathfrak{s}_1$是局部平凡的。

证明。 首先假设 K_1 关于 $\mathfrak{s}_1$是局部平凡的。那么

$$\nu^+_{\mathfrak{s}_1}(Y_1,K_1)=A_{Y_1,K_1}(\xi^0_{\mathfrak{s}_1})=r_{\mathfrak{s}_1}.$$

根据 Künneth 公式 [OS11，定理 5。1] 以及 [Rao20，定理 3.7，引理 3。8], 我们有 ve

$$\begin{aligned}CFK^\infty(Y_1\#Y_2,K_1\#K_2,\mathfrak{s}_1\#\mathfrak{s}_2)&\simeq CFK^\infty(Y_1,K_1,\mathfrak{s}_1)\otimes CFK^\infty(Y_2,K_2,\mathfrak{s}_2)\\&\simeq\big(CFK^\infty(S^3,U)[r_{\mathfrak{s}_1}]\oplus A\big)\otimes CFK^\infty(Y_2,K_2,\mathfrak{s}_2)\\&\simeq CFK^\infty(Y_2,K_2,\mathfrak{s}_2)[r_{\mathfrak{s}_1}]\oplus A',\end{aligned}$$

其中 $A':=A\otimes C$ FK^∞(Y2， K_2， $\mathfrak{s}_2$) 是无环的。由于无环直和项不会影响 ν^+-不变量，因 e 得到

$$\nu^+_{\mathfrak{s}_1\#\mathfrak{s}_2}(Y_1\#Y_2,K_1\#K_2)=\nu^+_{\mathfrak{s}_2}(Y_2,K_2)+r_{\mathfrak{s}_1}=\nu^+_{\mathfrak{s}_2}(Y_2,K_2)+\nu^+_{\mathfrak{s}_1}(Y_1,K_1).$$

反过来，假设上述等式对所有 (Y2、 K_2、 $\mathfrak{s}_2$) 都成立。取

$$(Y_2,K_2,\mathfrak{s}_2)=(-Y_1,-K_1,J\mathfrak{s}_1),$$

通过反 转 Y_1 和 K_1的定向得到。由 Künneth 公式和（1），可得 t

$$\begin{aligned}CFK^\infty(Y_1\#-Y_1,K_1\#-K_1,\mathfrak{s}_1\#J\mathfrak{s}_1)&\simeq CFK^\infty(Y_1,K_1,\mathfrak{s}_1)\otimes CFK^\infty(-Y_1,-K_1,J\mathfrak{s}_1)\\&\simeq CFK^\infty(Y_1,K_1,\mathfrak{s}_1)\otimes CFK^\infty(Y_1,K_1,\mathfrak{s}_1)^*\\&\simeq CFK^\infty(S^3,U)\oplus A'',\end{aligned}$$

对于某个无环复形 A''。这里最后一个等价关系由 [Zem19引理 218] 和 [HH19引理 33]推出。此外，不存在 Alexander 分次平移，因为特 distinguished 生成元只能出现在 Alexander 分次

$$\begin{aligned}A_{Y_1\#-Y_1,K_1\#-K_1}(\xi^0_{\mathfrak{s}_1\#J\mathfrak{s}_1})&=\frac12 d(Y_1\#-Y_1,\mathfrak{s}_1\#J\mathfrak{s}_1)-\frac12 d(Y_1\#-Y_1,\mathfrak{s}_1\#J\mathfrak{s}_1+PD[K_1\#-K_1])\\&=\frac12 d(Y_1,\mathfrak{s}_1)-\frac12 d(Y_1,J\mathfrak{s}_1)-\frac12 d(Y_1,\mathfrak{s}_1+PD[K_1])+\frac12 d(Y_1,J\mathfrak{s}_1-PD[K_1])\\&=0.\end{aligned}$$

因此，

$$\nu^+_{\mathfrak{s}_1\#J\mathfrak{s}_1}(Y_1\#-Y_1,K_1\#-K_1)=0.$$

我们断言

$$\nu^+_{\mathfrak{s}_1}(Y_1,K_1)=A_{Y_1,K_1}(\xi^0_{\mathfrak{s}_1})\qquad\text{and}\qquad\nu^+_{J\mathfrak{s}_1}(-Y_1,-K_1)=A_{-Y_1,-K_1}(\xi^0_{J\mathfrak{s}_1}).$$

否则，引理 2.5将推出

$$\nu^+_{\mathfrak{s}_1}(Y_1,K_1)>A_{Y_1,K_1}(\xi^0_{\mathfrak{s}_1})\qquad\text{or}\qquad\nu^+_{J\mathfrak{s}_1}(-Y_1,-K_1)>A_{-Y_1,-K_1}(\xi^0_{J\mathfrak{s}_1}).$$

根据引理 2.6，这将推出

$$\begin{aligned}\nu^+_{\mathfrak{s}_1}(Y_1,K_1)+\nu^+_{J\mathfrak{s}_1}(-Y_1,-K_1)&>A_{Y_1,K_1}(\xi^0_{\mathfrak{s}_1})+A_{-Y_1,-K_1}(\xi^0_{J\mathfrak{s}_1})\\&=0=\nu^+_{\mathfrak{s}_1\#J\mathfrak{s}_1}(Y_1\#-Y_1,K_1\#-K_1),\end{aligned}$$

这与对 ν^+ 应用于 K_1 和 $-K_1$的可加性假设相矛盾。这就证明了该断言。因此，

$$V_{\xi^0_{\mathfrak{s}_1}}(Y_1,K_1)=0\qquad\text{and}\qquad V_{\xi^0_{J\mathfrak{s}_1}}(-Y_1,-K_1)=0.$$

根据 [WY23，命题 6。1] 和 [Hom17，命题 3。11], 可知 K_1 相对于 $\mathfrak{s}_1$是局部平凡的。 □

我们的主定理依赖于 ν^+-不变量的可加性。利用 Heegaard Floer τ-不变量， [Rao20、HR23b], 可以证明一个类似于定理 1.3的结果。然而，我们强调， ν^+ 给出的切片亏格下界至少与 τ给出的下界一样强，而且通常严格更强，正如 [HW16中的定理 1]所示。因此， ν^+-sharp 纽结构成了一个比 τ-sharp 纽结更大的族，后者可以类似地定义。

4. 有理切片亏格的可加性

我们首先证明以下不等式。

引理 4.1 . 设 K 和 K' 分别是有理同调 3-球面 Y 和 Y' 中的纽结。则

$$g_{(Y\#Y')\times I}(K\#K') \le g_{Y\times I}(K) + g_{Y'\times I}(K').$$

证明。在 [NV19，引理 5 中，1], 作者从有理塞弗特曲面 S_0 构造了 $K\#K'$ 的有理塞弗特曲面，该曲面由有理塞弗特曲面 S（对应于 K）和 S'（对应于 K'）构造而成。

同样的构造也适用于四维情形。设 F 和 F' 分别是 K 和 K' 的塞弗特框架有理切片曲面。我们通过沿边界附近的弧附加带来构造 F_0，使其成为 $K\#K'$ 的塞弗特框架有理切片曲面，具体方式与 S_0 的构造完全相同。特别地，由于这一操作在 ∂F 和 $\partial F'$ 上与在 ∂S 和 $\partial S'$ 上的操作相同，因此有 $\partial F_0 = \partial S_0$。所以，$F_0$ 是塞弗特框架的，其亏格满足

$$g(F_0) = g(F) + g(F').$$

取 F 和 F' 使其属数达到最小，即完成证明。 □

为了证明 定理 1.3，我们还需要以下关于完全局部平凡纽结的事实 .

引理 4.2. 设 K 是有理同调 3-球面 Y 中的一个完全局部平凡纽结。那么，$-K$ 在 $-Y$ 中也完全局部平凡，并且

$$\nu^+(Y,K) = \nu^+(-Y,-K).$$

证明. 设 $K \subset Y$ 是有理同调 3-球面中的一个完全局部平凡纽结。令

$$\mathcal{A}_{Y,K} = \{A_{Y,K}(\xi^0_{\mathfrak{s}}) \mid \mathfrak{s} \in \mathrm{Spin^c(Y)}\},$$

并定义

$$A_{\max}(Y,K) = \max \mathcal{A}_{Y,K}, \qquad A_{\min}(Y,K) = \min \mathcal{A}_{Y,K}.$$

由于 K 是完全局部平凡的，我们有

$$\nu^+(Y,K) = A_{\max}(Y,K).$$

对于任意Spin^c 结构 $\mathfrak{s} \in \mathrm{Spin^c(Y)}$，考虑中间相对Spin^c 结构 $\xi^0_{\mathfrak{s}}$ 和 $\xi^0_{J\mathfrak{s}-PD[K]}$。由引理2.4，

$$\begin{aligned} A_{Y,K}(\xi^0_{J\mathfrak{s}-PD[K]}) &= \frac{1}{2}d(Y, J\mathfrak{s} - PD[K]) - \frac{1}{2}d(Y, J\mathfrak{s} - PD[K] + PD[K]) \\ &= \frac{1}{2}d(Y, \mathfrak{s} + PD[K]) - \frac{1}{2}d(Y,\mathfrak{s}) \\ &= -A_{Y,K}(\xi^0_{\mathfrak{s}}), \end{aligned}$$

其中我们使用了 $d(Y, J\mathfrak{s}) = d(Y, \mathfrak{s})$。由此可知，$\mathcal{A}_{Y,K}$ 关于 0 对称，因此

$$A_{\max}(Y,K) = -A_{\min}(Y,K). \tag{3}$$

由（1），是完全局部平凡的这一事实意味着 $-K \subset -Y$ 也完全局部平凡。此外，引理2.6给出

$$\mathcal{A}_{Y,K} = -\mathcal{A}_{-Y,-K} \qquad \text{and} \qquad A_{\max}(Y,K) = -A_{\min}(-Y,-K).$$

对（3）$(-Y, -K)$ 使用后，得到

$$A_{\max}(-Y,-K) = -A_{\min}(-Y,-K) = A_{\max}(Y,K).$$

因此，

$$\nu^+(-Y,-K) = A_{\max}(-Y,-K) = A_{\max}(Y,K) = \nu^+(Y,K).$$ □

现在我们证明定理 1.3，为方便起见，先回顾其陈述。

定理 1.3。 设 K 和 K' 分别是有理同调3-球面 Y 和 Y' 中的 ν^+-尖锐纽结。若此外， K' 完全局部平凡，则 $K\#K'$ 是 ν^+-尖锐的，并且

$$g_{(Y\#Y')\times I}(K\#K') = g_{Y\times I}(K) + g_{Y'\times I}(K').$$

证明。 根据假设和引理 4.2，我们有

$$g_{Y\times I}(K) = \max\{\nu^+(Y,K), \nu^+(-Y,-K)\} \qquad \text{and} \qquad g_{Y'\times I}(K') = \nu^+(Y',K') = \nu^+(-Y',-K').$$

我们先考虑以下情形:

$$g_{Y\times I}(K) = \nu^+(Y,K).$$

由引理 4.1和定理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}\nu^+(Y\#Y',K\#K') &= \max_{\mathfrak{o}\in \mathrm{Spin}^c(Y\#Y')} \nu^+_{\mathfrak{o}}(Y\#Y',K\#K')\\ &\le g_{(Y\#Y')\times I}(K\#K')\\ &\le g_{Y\times I}(K) + g_{Y'\times I}(K').\end{aligned}$$

另一方面，在标准同一化下

$$\mathrm{Spin}^c(Y\#Y') \cong \mathrm{Spin}^c(Y)\times \mathrm{Spin}^c(Y'),$$

every $\mathfrak{o}\in \mathrm{Spin}^c(Y\#Y')$ 可写为 $\mathfrak{o} = \mathfrak{s}\#\mathfrak{t}$。命题 3.6 因此意味着

$$\nu^+_{\mathfrak{o}}(Y\#Y',K\#K') = \nu^+_{\mathfrak{s}}(Y,K) + \nu^+_{\mathfrak{t}}(Y',K').$$

对两边取最大值，得到

$$\nu^+(Y\#Y',K\#K') = \nu^+(Y,K) + \nu^+(Y',K').$$

由于

$$g_{Y\times I}(K) = \nu^+(Y,K) \qquad \text{and} \qquad g_{Y'\times I}(K') = \nu^+(Y',K'),$$

可得

$$g_{Y\times I}(K) + g_{Y'\times I}(K') = \nu^+(Y\#Y',K\#K') \le g_{(Y\#Y')\times I}(K\#K') \le g_{Y\times I}(K) + g_{Y'\times I}(K').$$

因此，

$$g_{(Y\#Y')\times I}(K\#K') = g_{Y\times I}(K) + g_{Y'\times I}(K').$$

若 $g_{Y\times I}(K) = \nu^+(-Y,-K)$，则对 $(-Y\#-Y',-K\#-K')$ 运用相同的论证，可得 $(Y\#Y',K\#K')$ 的相应等式。

最后，我们证明 $K\#K'\subset Y\#Y'$ 也是 ν^+-尖锐的。由引理 4.2， $-K'\subset -Y'$ 也完全局部平凡，命题3.6给出

$$\nu^+(-Y\#-Y',-K\#-K') = \nu^+(-Y,-K) + \nu^+(-Y',-K').$$

因此，

$$\begin{aligned}g_{(Y\#Y')\times I}(K\#K') &= g_{Y\times I}(K) + g_{Y'\times I}(K')\\ &= \max\{\nu^+(Y,K),\nu^+(-Y,-K)\} + g_{Y'\times I}(K')\\ &= \max\{\nu^+(Y,K)+\nu^+(Y',K'),\ \nu^+(-Y,-K)+\nu^+(-Y',-K')\}\\ &= \max\{\nu^+(Y\#Y',K\#K'),\ \nu^+(-Y\#-Y',-K\#-K')\},\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

根据定义，引理4.2以及 [WY23，定理 1。4], Floer 简单结是完全局部平凡且ν^+-sharp。现在我们证明，理性同调3-球面中的平凡结也完全局部平凡且ν^+-sharp。

引理 4.3。 若 U 是理性同调 3-球面 Y' 中的平凡结，则 U 完全局部平凡且ν^+-*sharp*。更准确地说，对任意 $\mathfrak{t} \in \mathrm{Spin}^c(Y')$，存在一个滤过链同伦等价

$$CFK^\infty(Y', U, \mathfrak{t}) \simeq CFK^\infty(S^3, U) \oplus A,$$

其中 $CFK^\infty(S^3, U)$ 表示平凡结在 S^3 中的完整结 *Floer* 复形，而 A 是一个无环复形。此外，$CFK^\infty(Y', U, \mathfrak{t})$ 的每个生成元的 *Alexander* 分次均为 0。

证明。 由于 $g_{Y'\times I}(U) = 0$，定理 2.2表明，对于任意 $\mathfrak{t} \in \mathrm{Spin}^c(Y')$，

$$\nu^+_{\mathfrak{t}}(Y', U) \le \nu^+(Y', U) \le g_{Y'\times I}(U) = 0.$$

利用引理 2.4 和引理 2.5，我们得到，对于任意 $\mathfrak{t} \in \mathrm{Spin}^c(Y')$，

$$A_{Y',U}(\xi^0_{\mathfrak{t}}) = \frac{1}{2}d(Y', \mathfrak{t}) - \frac{1}{2}d(Y', \mathfrak{t} + PD[U]) = 0 \le \nu^+_{\mathfrak{t}}(Y', U),$$

因为 U 是零同调的。这表明，对于所有 $\mathfrak{t} \in \mathrm{Spin}^c(Y')$，$\nu^+(Y', U) = \nu^+_{\mathfrak{t}}(Y', U) = 0$。

根据 $\nu^+_{\mathfrak{t}}$ 的定义，可得

$$V_{\xi^0_{\mathfrak{t}}}(Y', U) = 0$$

对所有 $\mathfrak{t} \in \mathrm{Spin}^c(Y')$ 都成立。类似地，由于 $g_{(-Y')\times I}(-U) = 0$，我们也有

$$\nu^+(-Y', -U) = \nu^+_{\mathfrak{t}}(-Y', -U) = 0 \qquad \text{and} \qquad V_{\xi^0_{\mathfrak{t}}}(-Y', -U) = 0$$

对所有 $\mathfrak{t} \in \mathrm{Spin}^c(Y')$ 都成立。因此，

$$\max\{\nu^+(Y', U), \nu^+(-Y', -U)\} = g_{Y'\times I}(U) = 0,$$

而结论 U 是完全局部平凡的，现在可由 [WY23，命题 61] 和 [Hom17，命题 311] 得出。

最后，结 Floer 同调可以检测（有理）Seifert 属 [Ni09，定理 11] [NW14，定理 22]，并满足对称性 [HL24，第2节2]

$$\widehat{HFK}(Y, K, r) \cong \widehat{HFK}(Y, K, -r),$$

其中

$$\widehat{HFK}(Y, K, r) = \bigoplus_{\{\xi \in \mathrm{Spin}^c(Y,K) \mid A_{Y,K}(\xi) = r\}} \widehat{HFK}(Y, K, \xi).$$

于是，根据 $g_{Y'}(U) = 0$，我们得出 $CFK^\infty(Y', U, \mathfrak{t})$ 的所有生成元的 Alexander 分次均为 0。 □

5. Examples of ν^+-sharp knots and Floer simple knots

5.1. ν^+中的 -sharp 纽结 S^3。 ν^+中有许多 ν^+-sharp 纽结 S^3。在本小节中，我们介绍具有这一性质的几个纽结族。

5.1.1. 具有 $|\tau(K)| = g_4(K)$的例子。 τ不变量是一个由结 Floer 同调导出的纽结同痕不变量。Ozsváth 和 Szabó [OS03b], 与 [HW16，命题 23], 证明了

$$|\tau(K)| \le \max\{\nu^+(K), \nu^+(-K)\} \le g_4(K).$$

因此，若纽结 $K \subset S^3$ 满足 $|\tau(K)| = g_4(K)$，则 K 是 ν^+-sharp。下面列举一些具有这一性质的纽结。

(a) L-空间纽结，即能够通过正手术得到一个 L-空间的纽结。例子包括 Berge纽结 [Ber90], 某些扭结环面纽结 [Vaf15，定理 1.1], 某些 Montesinos 结 [BM18，定理 1；LM16], 某些 (1, 1) 结 [GLV18，定理 1.2], 所有代数纽结 [GN16，定理 2], 以及某些卫星纽结 [Hom11,HLV14,HRW24]。(b) 拟正纽结 [Pla04, Hed10], ，即由辫的闭包构成的纽结，其中辫由正生成元的任意共轭组成。拟正纽结等价于横截 $\mathbb{C}$-纽结，即由复曲线与单位球面的横截相交得到的纽结 $S^3 \subset \mathbb{C}^2$。它们包括正辫、正纽结和强拟正纽结。更多详情见 [Hed10]。(c) 任意纽结的非正扭、正交叉 Whitehead倍结 K，其中 $\tau(K) > 0$ [Hed09，定理 1.5]。

(d) 被正环面结和平凡结夹住的纽结 [FLL25，命题 4.1], ，即作为正环面结与平凡结之间的、亏格最小、定向、连通的光滑余边界的切片而得到的纽结。(e) 具有形式 $aT(p,q)\# -bT(p',q')$ 的环面结的线性组合，其中正整数 p,q,p',q',a,b [的取值满足某些条件 2, 3, 16]LVC18，定理。(f) 任意纽结的非扭结卫星 K，其中 $\tau(K)=g_4(K)>0$ 由 L-空间卫星算子生成 [CZZ25，定理 1.5], ；以及任意纽结的非负扭结卫星 K，其中 $\tau(K)=g_4(K)>0$ 由任意具有最小缠绕数的 L-空间卫星算子生成 [CZZ25，命题 1.8]。(g) 任何满足 $\tau(K)=g_4(K)$ 的纽结的连通和都保留这一性质，因为 τ 在连通和下具有可加性。

5.1.2. 示例：使用无码不卡 $|\tau(K)|<\max\{\nu^+(K)\ \nu^+(-K)\}=g_4(K)$. 在本小节中，我们展示一些示例满足条件的纽结集合

$$|\tau(K)|<\max\{\nu^+(K),\nu^+(-K)\}=g_4(K).$$

Livingston 和 *Van Cott* 的例子：Livingston 和 Van Cott [LVC18，定理 2 和 16] 表明以下环面结的线性组合

(a) $aT(p,qr)\# -bT(q,pr)$，其中 $q>p>0$, $q/(q-p)>r>0$ 和 $a>b>0$；(b) $aT(2,10r+1)\# -bT(3,6r+1)$，其中 $a>b>0$ 和 $r>0$；(c) $aT(2,10r+3)\# -bT(3,6r+2)$，其中 $a>b>0$ 和 $r>0$；(d) $aT(2,10r+1)\# -bT(4,4r+1)$，其中 $a>b>0$ 和 $r>0$

满足

$$|\tau(K)|<\max_{t\in(0,1]}\frac{|\Upsilon_K(t)|}{t}=g_4(K),$$

其中 $\Upsilon_K(t)$也 是由结 Floer 同调导出的纽结同痕不变量。对于任意纽结 $K\subset S^3$ ，

$$|\tau(K)|\le\max_{t\in(0,1]}\frac{|\Upsilon_K(t)|}{t}\le\max\{\nu^+(K),\nu^+(-K)\}\le g_4(K).$$

因此，这些纽结是 ν^+-锐的。

Hom 和 Wu 的例子，以及缆绕：Hom 和第二作者 [HW16] 构造了 ν^+-锐的例子，其中 $|\tau(K)|<g_4(K)$，即纽结$T_{2,5}\#2T_{2,3}\# -T_{2,3;2,5}$，其中$T_{2,3;2,5}$表示$T_{2,3}$的(2, 5)-缆结。随后，他们应用了 ν^+ [HW16，命题 3.5–3.6] 中的缆结公式（另见 [Wu16，推论 1.2]），证明对于任意正整数 p，存在一个纽结 K 满足

$$|\tau(K)|+p\le\max\{\nu^+(K),\nu^+(-K)\}=g_4(K),$$

通过考虑$T_{2,5}\#2T_{2,3}\# -T_{2,3;2,5}$的（$p,3p-1$）-缆结。

此外，Sato 将缆结公式推广到了任意正缆结。

定理 5.1 ([Sat18，推论 1。4])。 给定一个纽结 $K\subset S^3$，如果 $\nu^+(K)=g_4(K)$，那么对于任意互素的p，$q>0$ 都有

$$\nu^+(K_{p,q})=g_4(K_{p,q})=pg_4(K)+\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

应用定理5.1 以及 Hom 关于 τ [Hom14 的缆结公式，定理 1], 可知，这一现象在正缆结下保持不变。也就是说，如果 K 是 ν^+-锐的，并满足 $|\tau(K)|<g_4(K)$，那么 K 的任意正缆结也具有这一性质。

5.2. **ν^+-锐纽结与有理同调 3-球面。** 正如定理1.3 （以及推论 1.4 等相关结果）所述，我们可以通过与平凡纽结或 Floer 简单结作连通和，立即构造出 ν^+-锐纽结的例子。此外，还有一些并非以这种方式得到的例子，即L-空间纽结，位于 L-空间中。

与 S^3 的情形一样，若纽结 K 位于 L-空间 Y 中，且该空间允许正 L-空间手术，等价地说，是一个L-空间纽结，则满足

$$\nu^+(Y,K)=\max\{\nu^+(Y,K),\nu^+(-Y,-K)\}=g_Y(K)=g_{Y\times I}(K). \tag{4}$$

与 L-空间中的纽结 S^3 的情形一样， L-空间中的 L-空间纽结的结 Floer 复形具有阶梯形 [RR17，引理 3。2]。结合结 Floer 同调能够检测结亏格这一事实 [Ni09，定理 1。1] [NW14，定理 2。2], 这意味着 $\nu^+(Y,\ K) = g_Y(K)$，因此 (4)。

关于 L 中除 S^3 以外的 L-空间纽结的研究相对较少。这里列举几个例子，主要关注透镜空间中的纽结。

(a) Berge-Gabai 结 [Gab90] （或其镜像）位于透镜空间中。这些包括透镜空间的实心环面中的所有环面结。(b) 透镜空间中的所有 1-桥辫 [GLV18，定理 1。4]。(c) 透镜空间中的一些 (1,1) 结。在 [GLV18，定理 1。2], Greene、Lewallen 和 Vafaee 刻画了透镜空间中的 (1,1) L-空间纽结。

(a)–(c) 之间存在重叠。特别是，

$$(\mathrm{a}) \smallsetminus \{\text{torus knots}\} \subset (\mathrm{b}) \subset (\mathrm{c}).$$

5.3. **Floer 简单结**。 下面列举一些 Floer 简单结的例子。

(a) 平凡结是 L-空间中唯一的零同调 Floer 简单结。(b) 透镜空间中的简单结 [Ras07，第2节。1]。(c) 设 Y 是一个具有环面边界的紧致连通定向 3-流形，并令 $\mathcal{L}(Y)$ 表示 Y 的 L-空间填充斜率集合。对于斜率 α，记 $Y(\alpha)$ 为沿 α 对 Y 作 Dehn 填充所得的闭流形，并令 $K_\alpha \subset Y(\alpha)$ 表示填充实心环面的核。若 $\alpha \in \mathcal{L}^\circ(Y)$，且 $\mathcal{L}(Y)$ 的内部为 K_α，则 K_α 在 $Y(\alpha)$ 中是 Floer 简单的 [RR17，推论 3。6]。特别地，对一个 L-空间纽结 $K \subset S^3$ 作 α-手术所得纽结的对偶结，只要 $\alpha \in (2g(K) - 1, \infty)$，便是 Floer 简单结，其中 $g(K)$ 表示 K 的 Seifert 亏格（另见 [Gre15,Ras07,Hed11]）。(d) 任意 Floer 简单结的连通和仍是 Floer 简单结。

参考文献

[BCG17] József Bodnár、Daniele Celoria 和 Marco Golla，《代数纽结余边界札记》，Algebr. Geom. Topol. **17** 2017 4, 2543 2564 3686406 ↑3 ( )，第 – 期。MR Ber John Berge，《一些经手术可得到透镜空间的纽结》，预印本 [90] arXiv: 1802 09722 1990 ↑3 12 。 （）。, BM [18] Kenneth L. Baker 和 Allison H. Moore，《Montesinos 结、Hopf 拼接与 L-空间手术》，J. Math. Soc. Japan **70** 2018 1, 95 110 3750269 ↑12 ( )，第 – 期。MR CZZ Daren Chen、Ian Zemke 和 Hugo Zhou，《L-空间卫星 [25] 公式的应用》，预印本 arXiv:2509.20288（ 2025 ↑13 ）。DNPR Christopher W. Davis、Matthias Nagel、JungHwan [18] Park 和 Arunima Ray，《 $S^1 \times S^2$中的纽结同痕》，J. Lond. Math. Soc. (2) 98 (2018)，第 1 期，59–84。MR3847232 ↑2[FKQS26] Stefan Friedl、Tejas Kalelkar、José Pedro Quintanilha 和 Tanushree Shah，《 *3* 2026 ↑4 流形中局部结之间的 [25] Gordian距离》（）。FLL Peter Feller、Lukas Lewark 和 Andrew Lobb，《挤压结》，Quantum Topol. 16 (2025)，第 4 期，831–865。MR4958851 ↑13[FP21] Peter Feller 和 JungHwan Park，《环面结之间的亏格一余边界》，Int. Math. Res. Not. IMRN 1 (2021)，523–550。MR4198504 ↑3[90] 1 **37** 1990 3, 221 235 1082933 ↑14 Gab [18] 1, 1 **154** David Gabai，《实心环面中的 -桥辫》，Topology Appl. ( )，第 – 期。MR GLV Joshua Evan Greene、Sam Lewallen 和 Faramarz Vafaee，《（ ）L-空间结》，Compos. Math. (2018 5,)，第 – 期。MR ,[918 933 3798589 ↑12 14 GN16] Eugene Gorsky 和 András Némethi，《平面曲线奇点的链环是 L-空间链环》，Algebr. Geom. Topol. 16 (2016 4, 1905 1912 3546454 ↑12)，第 – 期。MR Gre Joshua Evan Greene，《L-空间手术、亏格界与缆绕猜想》，J. [15] Differential Geom. 100 (2015)，第 3 期，491–506。MR3352796 ↑4, 14[Hed09] Matthew Hedden，《结 Floer 同调与缆结。II》，Int. Math. Res. ~~Not. IMR~~N 12 (2009)，2248–2274。MR2511910 ↑12[Hed10] ，《正性的概念与 Ozsváth-Szabó 同痕不变量》，J. Knot Theory Ramifications 19 (2010)，第 5 期，617–629。MR2646650 ↑12[Hed11] ，《Floer 同调与关于可接受透镜空间手术的纽结的 Berge 猜想》，Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011)，第 2 期，949–968。MR2728591 ↑4, 14[HH19] Kristen Hendricks 和 Jennifer Hom，《纽结同痕与对合结 Floer 同调札记》，《当代拓扑学前沿》，2019，第 113–118 页。MR3967364 ↑9

[HL24] Matthew Hedden 和 Adam Simon Levine, 《结 Floer 同调的手术公式》, Quantum Topol. 15 (2024), 第 2 期, 229–336。MR 4725826 ↑5, 12[HLV14] Jennifer Hom、Tye Lidman 和 Faramarz Vafaee, 《Berge-Gabai 结与 L-空间卫星操作》, Algebr. Geom. Topol. **14** 2014 6, 3745 3763 3302978 ↑12 ( ), 第 – 期。MR Hom Jennifer Hom, 《缆绕与 -空间手术札记》, Algebr. [11] L Geom. Topol. 11 (2011), 第 1 期, 219–223。MR2764041 ↑12 [Hom14] ,《带边界希加德弗洛尔同调与缆结的 tau不变量》, J. Topol. 7 (2014), 第 2 期, 287–326。MR[17] , Hom 《希加德弗洛尔同调与同痕综述》, J. Knot Theory Ramifications ——— **26** 2017 2, ( ), 第 期。MR ,[HR23a] 1740015, 24 3604497 ↑9 12
Matthew Hedden 和 Katherine Raoux, 《四维有理亏格界》, 预印本 arXiv:2308.16853 (2023)。↑1[HR23b] ,《结 Floer 同调与相对伴随不等式》, Selecta Math. (N.S.) 29 (2023), 第 1 期, 论文编号 7, 48 页。MR4507976 ↑9[HRW24] Jonathan Hanselman、Jacob Rasmussen 和 Liam Watson, 《通过浸入曲线研究边界为环面的流形的带边界弗洛尔同调》, J. Amer. Math. Soc. **37** 2024 2, 391 498 4695506 ↑12 ( ), 第 – 期。MR HW Jennifer Hom 和 [16] ——— Zhongtao Wu, 《四维球亏格界与 Ozsváth-Szabó tau不变量的精化》, J. Symplectic Geom. **14** 2016 1, 305 323 3523259 ↑1 9 12 13 ( ), 第 – 期。MR , , , KM Peter B. Kronheimer 和 Tomasz S. [93] Mrowka, 《嵌入曲面的规范理论。I》, Topology **32** 1993 4, ( ), 第 – 期。MR[KR21] 773 826 1241873 ↑1
Michael R. Klug 和 Benjamin M. Ruppik, 《四维流形中的深层与浅层切片结》, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B **8** 2021 204 218 4273166 ↑2 ( ), –。MR LM Tye Lidman 和 Allison H. Moore, 《具有 L-空间手术的椒盐结》, [16] Michigan Math. J. 65 (2016), 第 1 期, 105–130。MR3466818 ↑12[LVC18] Charles Livingston 和 Cornelia A. Van Cott, 《环面结连通和的四维亏格》, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **164** 2018 3, 531 550 3784267 ↑13 ( ), 第 – 期。MR Mur [65] 171275 ↑1
Kunio Murasugi, 《链型的某个数值不变量》, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 387–422。MR[09] Ni Yi Ni, 《链 Floer 同调检测瑟斯顿范数》, Geom. Topol. 13 (2009), 第 5 期, 2991–3019。MR2546619 ↑12, 14[NOPP19] Matthias Nagel、Patrick Orson、JungHwan Park 和 Mark Powell, 《光滑与拓扑近似同痕》, Int. Math. Res. Not. IMRN **23** 2019 7324 7355 4039014 ↑2 ( ), –。MR NV Yi Ni 和 Faramarz Vafaee, 《L-空间中纽结的零手术》, [19] Trans. Amer. Math. Soc. 372 (2019), 第 12 期, 8279– 8306 4029697 ↑2 10 。MR , NW Yi Ni 和 Zhongtao Wu, 《希加德弗洛尔修正项与有理亏格界》, Adv. Math. 267 (2014), 360–380。MR3269182 ↑3, 12, 14[NW15] [14] ,《 S^3中的纽结美容手术》, J. Reine Angew. Math. 706 (2015), 1–17。MR3393360 ↑5[OS03a] Peter Ozsváth 和 Zoltán Szabó, 《带边界四维流形的绝对分次弗洛尔同调与交形式》, Adv. Math. **173** 2003 2, 179 261 1957829 ↑8 ( ), 第 – 期。MR OS b《结 Floer 同调与四维球亏格》, [03] , Geom. Topol. **7** 2003 615 639 2026543 ↑1 12 ( ), –。 [04] , **186** 2004 1, 58 116 2065507 ↑1
MR , OS a《全纯圆盘与结不变量》, Adv. Math. ( ), 第 – 期。MR , 6 [04] , 2 OS b《全纯圆盘与三维流形不变量：性质与应用》, Ann. of Math. ( ) 159 (2004), 第 3 期, 1159–1245。MR2113020 ↑7[OS04c] ,《闭三维流形的全纯圆盘与拓扑不变量》, Ann. of Math. (2) 159 (2004), 第 3 期, 1027–1158。MR2113019 ↑1
[11] ——— , **11** 2011 1, 1 68 2764036 ↑9 OS《结 Floer 同调 [04] 与有理手术》, Algebr. Geom. Topol. ( ), 第 – 期。MR Pla Olga Plamenevskaya, 《由弗洛尔同调得到的 Thurston-Bennequin 数界》, Algebr. Geom. Topol. 4 (2004 399 406 2077671 ↑12), –。MR Rao Katherine Raoux, 《有理同调球面中纽结的 -不变量》, ——— [20] τ Algebr. Geom. Topol. 20 (2020), 第 4 期, 1601–1640。MR4127080 ↑7, 9[Ras03] Jacob Andrew Rasmussen, 《弗洛尔同调与纽结补空间》, 2704683 ↑1 ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2003。博士论文——哈佛大学。MR[07] Ras Jacob Rasmussen, 《透镜空间手术与 l-空间同调球面》, 预印本 arXiv:arXiv: 0710 2531 2007 ↑4 14 。 () 。, Ras [10] , **182** 2010 2, 419 447
《Khovanov 同调与切片亏格》, Invent. Math. ( ), 第 – 期。MR 2729272 ↑1 [17] **322**RR Jacob Rasmussen 和 ——— Sarah Dean Rasmussen, 《弗洛尔简单流形与 L-空间区间》, Adv. Math. (2017), 738–805。MR3720808 ↑14 [18] ν^+ **245** 2018 113 130 3823992 ↑13 Sat Kouki Sato, 《关 [15] **15** 2015 于 -不变量的全扭转不等式》, Topology Appl. ( ), –。MR Vaf Faramarz Vafaee, 《扭结环面纽结的结 Floer 同调》, Int. Math. Res. Not. I MRN ( ), 6516–6537。MR3384486 ↑12[Wu16] Zhongtao Wu, 《 ν^+ 不变量的缆结公式》, Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016), 第 9 期, 4089–4098。MR3513564 ↑13

[WY23] Zhongtao Wu 和 Jingling Yang，《有理亏格与希加德弗洛尔同调》，预印本 arXiv:2307.06807（2023）。↑1，3、4、5、6、9、11、12[Zem19] Ian Zemke，《连通和与对合结 Floer 同调》，伦敦数学会会刊（ 3 **119** 2019 1, ）（），214 265 3957835 ↑9

第—期。MR 数学科学系，韩国科学技术院，大韩民国 电子邮箱：jungpark0817@kaist.ac.kr 数学系，香港中文大学，香港 电子邮箱：ztwu@math.cuhk.edu.hk 数学科学学院，厦门大学，中国 电子邮箱：yangjingling@xmu.edu.cn