arXiv:2603.18638v1 [math.CO] 19 Mar 2026

带孔双曲多形

´ ´SUMMERELDRIDGE、ADITHYA PRABHA、AIDEN ROGER、COOPER ROGER、ERIKA ROLDAN、´ ´和 ROSEMBERG TOALA-ENRIQUEZ

Abstract. 多形是通过沿整个边粘合全等正多边形而形成的平面图形。我们研究双曲 $\{p,\ q\}$-镶嵌中的多形，以及使恰好具有 h 个孔洞所需铺砖数量最小的极值问题。将这一最小值记为 $g_{p,\ q}(h)$，我们建立了一般的下界和上界，计算了若干较小情形下的精确值，并给出了多形具有 h 个孔洞时达到 $g_{p,\ q}(h)$ 的一个充分结构条件。

1. Introduction

使用 Schl¨afli 的符号说明，$\{p,\ q\}$-镶嵌是由正 p 边形（铺砖）铺成的双曲平面的无限镶嵌，其中每个顶点处有 q 个这样的多边形相交。多形 是 $\{p,\ q\}$-镶嵌中的有限铺砖集合，其内部在点集意义下是连通的。当两个铺砖共享一条边时，便认为多形中的铺砖相邻；只要其他铺砖维持多形的边连通性，铺砖也可以仅在一个顶点处相交。 $|A|$表示多形 A 所含铺砖的数量。根据亚历山大对偶，一个多形的孔洞 是其补集的有界连通分支。例如，图 1 分别展示了具有六个和三个孔洞的多形。为使大型双曲多形在视觉上更易处理，本文中的所有图形均使用 Hypertiling 生成， [12], 该工具会将测地边渲染为所选模型中的直线段。

定义 1.1。 设 h 为正整数。对于给定的 $p,\ q,\ h$，我们定义

$$g_{p,q}(h) := \min\{\,|A| : A \text{ is a } \{p,q\}\text{-polyform with } h \text{ holes}\,\},$$

也就是说，$g_{p,\ q}(h)$ 表示一个 $\{p,\ q\}$-多形包含h 个孔洞所需的最少铺砖数。我们称具有 h 个孔洞且由 $g_{p,\ q}(h)$ 块铺砖组成的 $\{p,\ q\}$-多形为晶化。

以往关于多形极值拓扑的研究主要集中于欧几里得情形。$\{4,\ 4\}$-镶嵌和$\{3,\ 6\}$-镶嵌分别由正方形和等边三角形组成，其对应的多形称为多连骨牌和多三角形。在 [5] 和 [6], 中，函数$g_{4,\ 4}(h)$ 已被完全确定，同时还给出了包含$g_{4,\ 4}(h)$ 块铺砖和 h个孔洞的多连骨牌的显式构造。在 [7, 8], 中也进行了类似研究，完整描述了$g_{3,\ 6}(h)$，并给出了实现这些值的相应多三角形。

在本文中，我们将这一研究方向拓展到双曲情形。我们研究双曲多形的 $g_{p,q}(h)$，给出了若干较小 p, q 和 h 取值下的精确结果，建立了关于 $g_{p,q}(h)$ 的一般界，并提出了关于其渐近行为的猜想。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 05A20, 05B50, 05C07, 05C10, 52C20, 05C35, 51M10, 52A40, 49Q10,*Key words and phrases.* 多形、双曲镶嵌、低维拓扑、极值组合学、等周不等式、晶化多形。

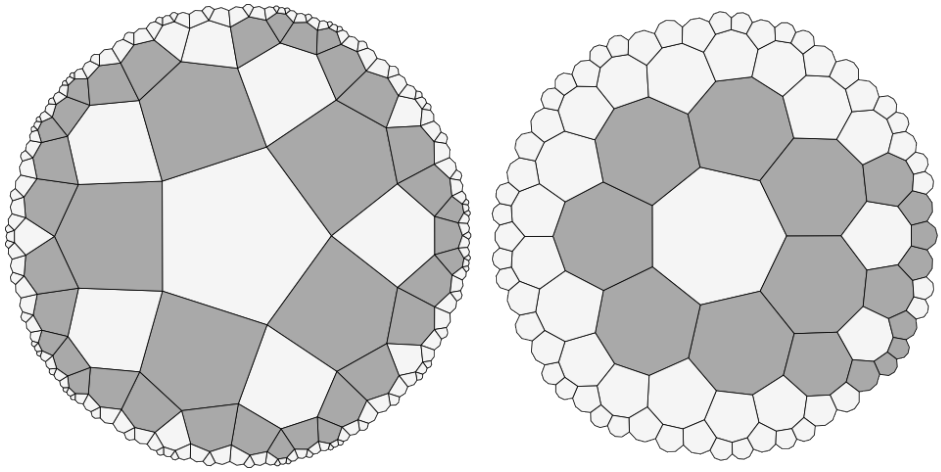

FIGURE 1. 具有多个孔洞的双曲多形示例。左图：具有六个孔洞的 {5, 4}–多形。右图：具有三个孔洞的 {7,3}–多形。孔洞定义为补集的有界连通分支。

1.1. 主要结果。 在本文余下部分中，除非另有说明，我们假设 $\{p, q\}$ 对应于一个双曲镶嵌，即 $(p-2)(q-2) > 4$。

所引入的大多数函数和参数都将依赖于 p 和 q，但为简化符号说明，在首次出现后我们省略索引 p, q。必要时，我们将明确标示对 p, q 的依赖，以避免歧义。

定理 1.2。 对于任意双曲镶嵌 $\{p, q\}$，

$$g_{p,q}(1) = p + (p-1)(q-3) = pq - 2p - q + 3.$$

此外，表 *1* 列出了所选三元组 (p, q, h) 对应的 $g_{p,q}(h)$ 的上界；阴影条目为精确值。

h	{3,7}	{3,8}	{4,5}	{4,6}	{5,4}	{5,5}	{6,4}	{7,3}
1	**11**	**13**	**10**	**13**	**9**	**13**	**11**	**7**
2	**18**	**22**	17	23	15	23	19	12
3	**25**	**31**	24	33	21	33	27	17
4	**31**	**40**	31	42	27	43	35	22
5	39	**48**	38	52	33	53	43	26

TABLE 1. 通过显式构造获得的 $g_{p,q}(h)$ 的已知最小上界，适用于各种 $\{p, q\}$–镶嵌以及孔洞数量 h。阴影条目对应于晶化多形。

为了制作此表，我们使用第 3 节中说明、并可在 [3] 获取的程序，找到了带孔多形的实例。表 1 中对应阴影单元格的多形满足定理 1.5 的晶化判据；因此，这些条目等于 $g_{p,\ q}(h)$。未着色单元格是否代表晶化多形，仍是一个未决问题。

现在，我们介绍一个使多形晶化的充分条件（也就是说，具有 h 个孔洞和 g 个 h 铺砖）。

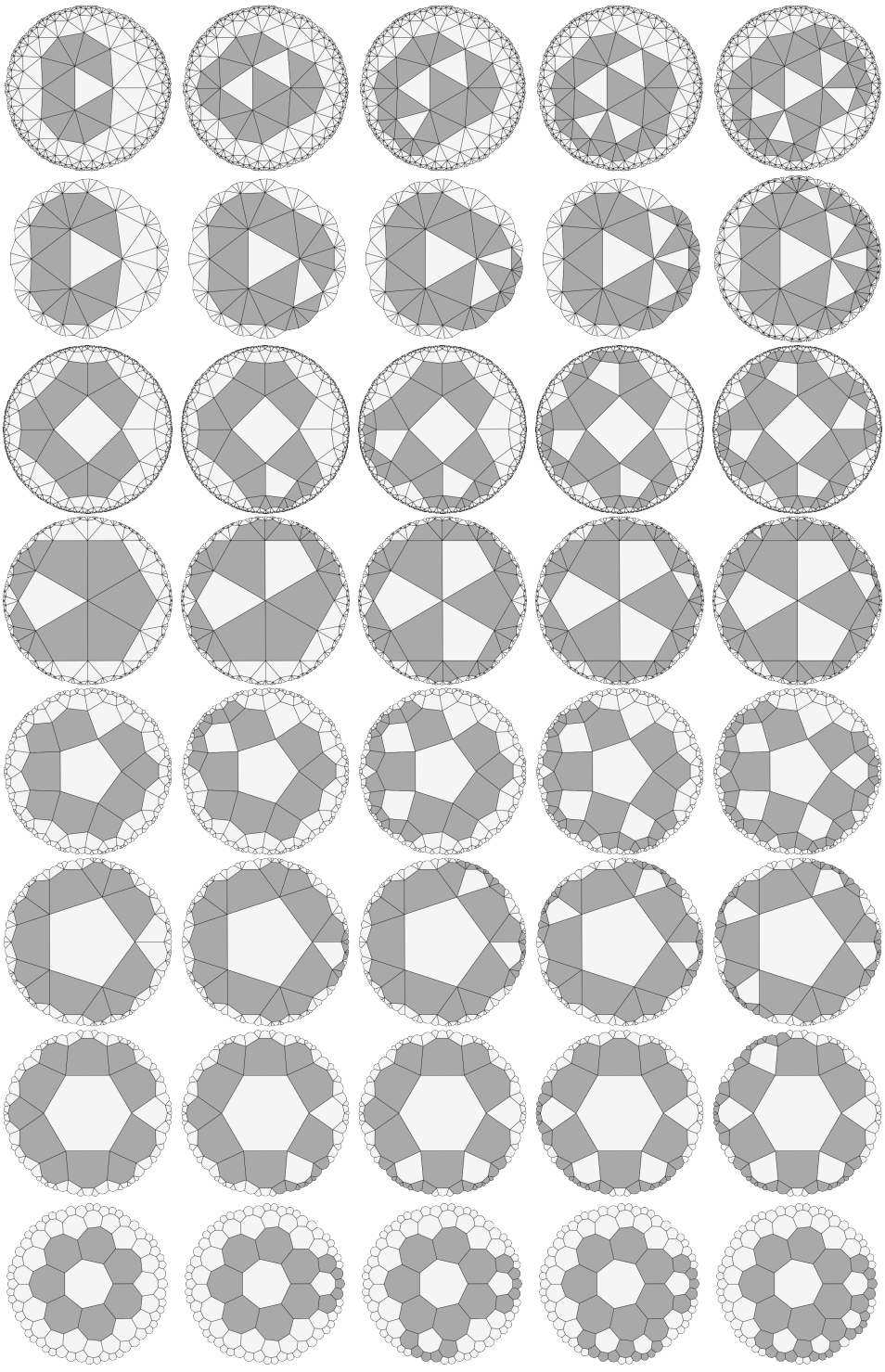

FIGURE 2. 实现表 1 中数值的多形，按镶嵌方式（行）和孔洞数量（列）排列。

直观而言，我们希望尽可能高效地利用瓷砖边来形成孔洞。然而，有些边必须位于多形的外周长上（即与无界区域相邻的边），另一些边则必须由铺砖共享，以保持连通性。为了将这一想法形式化，我们引入以下概念。

多形 A 的对偶图是图 A'，其中每块铺砖对应一个顶点，当且仅当对应的两块铺砖共用一条边时，这两个顶点相邻。我们将多形的每个孔洞视为一个独立的多形，并将其面积定义为其中包含的铺砖数。令 $H(A)$表示 A的所有孔洞区域的并集，并令 A表示通过填补 A的孔洞所得到的多形，也就是说，

$$\overline{A} = A \cup H(A).$$

当且仅当一个多形的对偶图是一棵树时，我们称该多形为无环。多形的外周长是其邻接无界区域的边数。若一个多形在所有铺砖数相同的多形中周长最小，则称其为极值的。

定义 1.3. 给定一个多形 A，当且仅当 A 无环、$\underline{A}$ 中的每个孔洞面积均为 1 块铺砖，且 A 为极值的时，我们称 A 为高效结构化。

为量化高效结构，我们引入函数 $M(n,\ h)$，见下文公式 1.1，该函数用于衡量在周长约束下可达到的最大孔洞数。引理 2.1 和 2.3 对此进行了详细解释和证明。

令 $\mathcal{P}^{p,\ q}_{min}(N)$ 表示含有 N 块铺砖的极值多形的周长。作为同名函数的一种推广，我们从 [6], 定义 $M_{p,\ q}(n,\ h)$ 如下：

$$M_{p,q}(n,h) = \frac{n(p-2) + 2 - \mathcal{P}^{p,q}_{min}(n+h)}{p}. \tag{1.1}$$

定义1.4。固定 $h \geq 1$。设 A 是一个恰好具有 h 个孔洞的 $\{p,q\}$-多形，并令 $n := |A|$。如果 A 是（对于 h）最小高效结构化的，则称之为：A 是高效结构化的，且 n 是满足 $M(n,h) = h$ 的最小整数。

请注意，这严格强于高效结构化：最小高效结构化还要求在约束 $M(n,h) = h$ 下，n 具有极小性。因此，高效结构化是一种结构条件，而最小高效结构化则是固定-h 的极值细化。

定理 1.5。如果一个多形是最小高效结构化的，那么它就是晶化的。

定理 1.5 提供了目前唯一已知的晶化判据。我们利用这一结果证明定理 1.2，并为 $g(h)$ 推导一个下界。在 [5, 7] 中也采用了类似策略：对于 $\{4,4\}$（多连骨牌）和 $\{3,6\}$（多三角形）这两种情形，分别构造了一个具有 n_k 个铺砖和 h_k 个孔洞的最小高效结构化多形的无限序列。这些构造后来被用作基准，以确定所有 h 的 $g(h)$。对于 $\{3,6\}$ 情形，一个多形是晶化的，当且仅当它是最小高效结构化的，见[8, 定理 1.4]。相比之下，对于 $\{4,4\}$，还需要额外的棋盘格障碍，才能完整刻画晶化多形，尤其参见 [6], 定理 8。我们预计，双曲情形将展现这两种情形的特征；然而，目前我们缺乏足够证据来证实这一点。

函数 $\mathcal{P}^{p,\ q}_{min}$ 在刻画极小高效结构化多形方面发挥着核心作用。在 [9, 11], 中，对多形函数 $\mathcal{P}^{p,\ q}_{min}$ 进行了详细分析。在

具体而言， $\mathcal{P}^{p}_{,min}{}^{q}(n)$ 的渐近行为由参数 β 精细调节，该参数满足二次方程 $(p-2)\beta^2-(p-2)(q-2)\beta+(q-2)=0$。其明确定义如下：

$$\beta_{p,q}=\frac{(p-2)(q-2)+\sqrt{(p-2)^2(q-2)^2-4(p-2)(q-2)}}{2(p-2)}. \tag{1.2}$$

在 [11, 定理 1] 中，已证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathcal{P}^{p,q}_{min}(n)}{n}=p-2-\frac{2}{\beta}. \tag{1.3}$$

沿着类似的思路，在 [2], 中，作者研究了双曲镶嵌的最小有限子图，重点关注顶点数固定而非铺砖数固定的图。他们明确刻画了这类周长最小的图，从而确定了有限顶点集图的精确切格常数。尽管他们的方法与我们不同——我们研究的是铺砖而非顶点——但两者之间的联系很直接：在 $\{p,q\}$-镶嵌中，含有 n 块铺砖的多形的对偶，是其对偶 $\{q,p\}$-镶嵌中含有 n 个顶点的连通图。关键的是，这些对偶对象的周长相同。因此，$\{p,q\}$-镶嵌的切格常数（或等周常数），如 [4] 中所给出并在 [2], 中得到确认的，是：

$$(q-2)\sqrt{1-\frac{4}{(p-2)(q-2)}} \tag{1.4}$$

当 p 和 q 互换时，这个表达式与方程 (1.3) 一致。

在第三个主要结果中，我们结合 $M(n,\ h)$ 的表达式、定理 1.5 中的结构判据，以及针对 $\mathcal{P}^{p}_{,\ min}{}^{q}$ 的双曲等周界，从而得到 $g(h)$ 的一般下界。相应的上界则通过构造显式的 $\{p,q\}$–多形族来确立，这些多形实现了大小受控的 h 个孔洞。完整论证见第 4 节。

定理 1.6。 对于每个双曲镶嵌 $\{p,q\}$ （其中 $q>3$ ），以及每个整数 $h\geq 2$,

$$\beta\left(p-1-\frac{1}{\beta}\right)h\ \leq\ g_{p,q}(h)\ \leq\ \big((p-1)(q-2)+1\big)\,h. \tag{1.5}$$

特别地，$g_{p,\ q}(h)$ 随 h线性增长，并且渐近比值$g_{p,\ q}(h)/h$ 被限制在两个显式常数之间，这两个常数仅取决于 p 和 q。

注 1.7。 由 [11, 引理 14] 可知：

$$\lfloor\beta\rfloor=\begin{cases}q-4, & \text{if } p=3,\\ q-3, & \text{if } p>3.\end{cases}$$

这让我们对 (1.5) 中界的锐性有了更清晰的直观认识。特别是，当$p,\ q>3$时，定理 1.6 给出

$$(p-1)(q-3)-1\ \leq\ \frac{g(h)}{h}\ \leq\ (p-1)(q-2)+1,$$

这表明在此范围内，每个孔洞的铺砖复杂度都受到严格控制。

将这一结果与欧几里得情形进行比较很有启发性。根据 [8, 定理 1.1]和 [6, 定理 4], ，可得以下渐近行为：

$$g_{3,6}(h) = 3h + O(\sqrt{h}), \qquad g_{4,4}(h) = 2h + O(\sqrt{h}). \tag{1.6}$$

在欧几里得情形下， $\mathcal{P}_{min}(N)$ 随 $O(\sqrt{N})$ 增长。因此，在求解方程 $M(n,\ h) = h$ 关于 n 的方程时，首项为 $\frac{p}{p-2}h$，这分别与方程（1.6）中 $p=3$ 和 $p = 4$ 对应的首项 $3h$和 $2h$ 相匹配。下一阶项为 $O(\sqrt{h})$。

相比之下，在双曲情形下， $\mathcal{P}_{min}(N)$ 随 $O(N)$ 线性增长。重复同样的过程时，必须计入 $\mathcal{P}_{min}(n + h)$ 的线性贡献。经过详细分析，便可得到定理 1.6 中所述的下界。

我们的最终结果给出了当 p 为偶数且 $q = 3$时 $g_{p,\ q}(h)$ 的一个上界。情形 $q = 3$ 较为特殊，因为与一个孔洞相邻的铺砖还必须与另外两个同样与该孔洞相邻的铺砖相邻（也就是说，每个孔洞都由对偶图中的一个环表示）。见图 1。我们利用这一性质和对偶性，将寻找具有 h 个孔洞的晶化 {$2k$、3}-多形的问题，转化为寻找具有 h 块铺砖的极值 {$2k,\ k$}-多形的问题。

定理 1.8。 对于 $k > 3$ 整数，

$$g_{2k,3}(h) \le \frac{\mathcal{P}_{min}^{2k,k}(h) + (2k-2)h}{2} + 1. \tag{1.7}$$

根据为得到定理 1.8 的界而构造的例子的结构，可以直观地看出这个不等式是紧的。我们猜想事实确实如此。将此结果与 $\mathcal{P}^{p,\ q}_{min}(n)$ 的渐近行为结合起来，就能得到 $g_{2k,\ 3}(h)$ 的渐近行为。

猜想。

$$\lim_{h\to\infty} \frac{g_{2k,3}(h)}{h} = k - 1 + \sqrt{(k-1)^2 - \frac{2k-2}{k-2}}. \tag{1.8}$$

本文其余部分安排如下：第 2 节证明晶化双曲多形的若干性质以及函数 $M(n,\ h)$ 的性质。第 3 节运用此前发展的技巧证明定理 1.2，并介绍生成表 1 和图 2 的算法。第 4 节通过构造带孔多形的例子，并应用基于多形最小周长的界，建立 $g(h)$ 的理论界，从而证明定理 1.6。最后，第 5 节研究 p 为偶数且$q = 3$ 的情形，并证明定理 1.8。附录 A 总结了本文中使用的符号说明。

2. Properties of Crystallized Polyforms

本节将介绍研究晶化多形所需的一些工具，并证明定理 1.5，该定理给出了多形晶化的充分条件。在此过程中，我们还将证明晶化多形的一般性质。

回顾

$$M_{p,q}(n,h) = \frac{n(p-2) + 2 - \mathcal{P}_{min}^{p,q}(n+h)}{p}. \tag{2.1}$$

照例，当含义明确时，我们省略下标 p, q ，以简化符号说明。

Le引理 2.1. 对于所有 n、$h \geq 1$，如果存在一个由 n 块铺砖和 h 个孔洞组成的多形，则 n

$$h \leq M(n,h). \tag{2.2}$$

证明。这个引理的证明沿用了 Kahle 和 Rold´an 在 [5], 中推导 $M_{4,4}(n,h)$ 的相同思路，并将其推广到任意双曲 $\{p,q\}$-镶嵌。在他们的论文中，对于一个 {4,4}-多形 A，他们将 $p_o(A)$ 定义为 A 的外周长，将 $p_h(A)$ 定义为 A 的孔周长（即 A 中与 A 补集的某个有界区域相邻的边数），并将 $b(A)$ 定义为 A 的对偶图中的边数。我们的定义与此类似，只是 A 可以是任意双曲 $\{p,q\}$-多形。他们还指出，若 A 有 n 个铺砖和 h 个孔洞，则以下关系成立：

$$b(A) \geq n-1, \tag{2.3}$$

$$p_o(A) = p_o(\overline{A}) \geq \mathcal{P}^{p,q}_{min}(|\overline{A}|) \geq \mathcal{P}^{p,q}_{min}(n+h), \text{ for } p>3. \tag{2.4}$$

A 的内部边恰好对应于图 A' 的边。由于 A' 是一个有 n 个顶点的连通图，它至少有 $n-1$ 条边，因此得到第一个不等式。

A 的外周长与多形 A的整个周长重合，而该多形至少包含 $n+h$ 块铺砖。回想一下，对于 $p>3$，$\mathcal{P}_{min}$ 是非递减的，由此得到第二个不等式。

最后，对于任意镶嵌 $\{p,q\}$，注意到

$$pn = 2b(A) + p_o(A) + p_h(A),$$

因为每块铺砖有 p 条边，且每条边要么连接 A的两块铺砖，要么位于其周长上。因此，

$$p_h(A) = pn - 2b(A) - p_o(A).$$

此外，每个孔洞至少包含一块铺砖，且每块铺砖有 p条边，因此

$$h(A) \leq \frac{p_h(A)}{p} = \frac{pn - 2b(A) - p_o(A)}{p}. \tag{2.5}$$

利用等式 2.3 和 2.4，可得关于 $p>3$的不等式：

$$h(A) \leq \frac{pn - 2(n-1) - \mathcal{P}^{p,q}_{min}(|A|)}{p} \leq \frac{n(p-2) + 2 - \mathcal{P}^{p,q}_{min}(n+h)}{p} = M(n,h). \tag{2.6}$$

对于 $p=3$ 的情形，需要对关于 $p_o(A)$的界作一些调整。这里改编了取自 [6], 的以下论证，以确保其适用于双曲情形。我们首先证明，对所有 N，$\mathcal{P}^{3,q}_{min}(N) \leq \mathcal{P}^{3,q}_{min}(N+j)+1$，其中 $j \geq 1$。回想一下，函数$\mathcal{P}^{3,q}_{min}(N)$给出含有 N块铺砖的螺旋 $\{3,q\}$-多形的周长。向螺旋中添加一块新铺砖时，周长会减少 1 或增加 1，即 $\mathcal{P}^{3,q}_{min}(N) = \mathcal{P}^{3,q}_{min}(N+1) \pm 1$。更重要的是，每次减少 1 后，至少会接连增加 1 达 $q-4$ 次（参见 [9], 定理 1.5，以及定义 3.6 下方对序列 $d_{k,i}$ 的描述）。特别地，若 $\mathcal{P}^{3,q}_{min}(N) = \mathcal{P}^{3,q}_{min}(N+1)+1$，则 $\mathcal{P}^{3,q}_{min}(N+1) = \mathcal{P}^{3,q}_{min}(N+2)-1$。因此，对所有 $N \geq 1$，$\mathcal{P}^{3,q}_{min}(N) \leq \mathcal{P}^{3,q}_{min}(N+2)$。接着对 j 作归纳论证，可得对所有 N，$\mathcal{P}^{3,q}_{min}(N) \leq \mathcal{P}^{3,q}_{min}(N+j)+1$，其中 $j \geq 1$。

设 $n+h+j = \lceil |A| \rceil$，其中 $j \geq 0$。那么，$p_o(A) = p_o(\overline{A}) \geq \mathcal{P}^{3,q}_{min}(n+h+j)$。我们仍有 $b(A) \geq n-1$ 且 $p_h(A) = 3n - 2b(A) - p_o(A)$，因此，

$$p_h(A) \leq 3n - 2(n-1) - \mathcal{P}^{3,q}_{min}(n+h+j). \tag{2.7}$$

{3, q}-多形中的孔洞至少有 3 条边；因此，我们可以定义 $i = i(A) \geq 0$ 使得$p_h(A) = 3h + i$。如果 $j = i = 0$，就得到所需结果。否则， $j > 0$ 意味着 $i > 0$，因此：

$$\begin{aligned} 3h + i &\leq 3n - 2(n-1) - \mathcal{P}_{min}^{3,q}(n + h + j), \\ 3h &\leq n + 2 - \mathcal{P}_{min}^{3,q}(n + h + j) - i, \\ 3h &\leq n + 2 - \mathcal{P}_{min}^{3,q}(n + h + j) - 1, \\ 3h &\leq n + 2 - \mathcal{P}_{min}^{3,q}(n + h). \end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

推论 2.2. 对于正整数 h和 n，若 $h > M(n, h)$，则不存在具有n 块铺砖和 h 个孔洞的多形。

2.1. **高效结构**。 本节沿用 [6] 中的思路，证明当 $q > 3$时，极小高效结构化的多形是晶化的。注意，对于 $q = 3$，对偶图 A' 必定含有环，因此 A 不可能是高效结构化的。

引理 2.3. 设 A 是一个由 $\{p, q\}$ 镶嵌构成的多形。若 A 是高效结构化的，则$h = M(n, h)$。

证明。 对于所有多形，无论其是否具有高效结构，我们都有

$$pn = 2b(A) + p_0(A) + p_h(A).$$

根据定义，当 A 具有高效结构化特性时，其对偶图是无环的， A 中的每个孔洞都是极小孔洞，并且其外周长是最小的。这意味着：

- $b(A) = n - 1$，因为对偶图是一棵具有 n 个顶点的树，因此它有 $n - 1$条边。
- $p_h(A) = ph$，因为极小孔洞的面积为1块铺砖，因此有 p 条相邻边。
- $p_o(A) = \mathcal{P}^{p,\ q}_{,\ min}(n + h)$，因为$A$是由 $n + h$ 块铺砖组成的、具有最小周长的多形。

将这些代入 $pn = 2b(A) + p_0(A) + p_h(A)$，可得：

$$pn = 2(n-1) + \mathcal{P}_{min}^{p,q}(n + h) + ph.$$

重新排列后，

$$h = \frac{n(p-2) + 2 - \mathcal{P}_{min}^{p,q}(n + h)}{p} = M(n, h).$$

□

引理2.4。 $M(n, h)$ 关于 n单调不减。

证明。我们有：

$$M(n+1, h) - M(n, h) = \frac{p - 2 - \left(\mathcal{P}_{min}^{p,q}(n + 1 + h) - \mathcal{P}_{min}^{p,q}(n + h)\right)}{p}.$$

在 [9, 推论 7 中， 1], Malen、Rold´an 和 Toala 刻画了函数 $\mathcal{P}^{p\ \ q}_{,min}$ 的跳跃。他们发现：

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{min}^{p,q}(N+1) - \mathcal{P}_{min}^{p,q}(N) = p - 2 \text{ or } p - 4, \text{ when } q > 3. \\ &\mathcal{P}_{min}^{p,3}(N+1) - \mathcal{P}_{min}^{p,3}(N) = p - 4 \text{ or } p - 6, \text{ for } N > 1. \end{aligned}$$

因此，表达式 $M(n+1,h) - M(n,h)$ 等于 0、$\frac{2}{p}$ 或 $\frac{4}{p}$。由此可知，$M(n,h)$ 是非递减的。□

设 A 是一个 $\{p, q\}$-多形，具有 n 个铺砖和 h 个孔洞。回顾定义1.4，A 是最小高效结构化的，当且仅当 A 是高效结构化的，并且 n 是使 $M(n, h) = h$ 的最小整数。

注意，根据引理2.4，$M(n, h)$ 关于 n 非递减；根据引理 2.3，A 高效结构化意味着 $M(n, h) = h$。因此，可以通过检验 A 是否高效结构化，以及 $M(n-1, h) < h$，来验证多形 A 是否是最小高效结构化的。

定理 (定理 1.5)。设 A 是一个位于 $\{p, q\}$-镶嵌中的多形。如果 A 是最小高效结构化的，那么 A 是晶化的。

证明。设 A 是一个最小高效结构化的 $\{p, q\}$-多形，具有 n 个铺砖和 h 个孔洞。根据引理 2.3，我们知道 $M(n, h) = h$。此外，根据极小性和引理2.4，对于所有 $m < n$，我们有 $M(m, h) < M(n, h) = h$。最后，根据推论 2.2，不存在具有 m 个铺砖和 h 个孔洞的 $\{p, q\}$-多形。因此，这意味着 n 是一个具有 h 个孔洞的 $\{p, q\}$-多形所需的最少铺砖数。换句话说，A 是晶化的。□

注2.5. $M(n+1,h) = M(n,h)$ 当且仅当 $\mathcal{P}^{p,q}_{min}(n+1+h) - \mathcal{P}^{p,q}_{min}(n+h) = p-2$。当螺旋 $S_{p,q}(n+1+h)$ 通过沿一条边将第（ $n+1+h$ ）块铺砖附加到 $S_{p,q}(n+h)$ 上形成时，$\mathcal{P}_{min}$ 中的 $p-2$ 增量便会出现。如果铺砖沿两条边附加，则 $\mathcal{P}_{min}$ 的增量改为 $p-4$。此外，为构造螺旋多形，连续铺砖沿一条边附加的次数最多只能连续达到 $q-2$ 次。因此，对于固定的 h，函数 $M(n,h)$ 至多可在 n 的连续 $q-2$ 个取值上保持不变。由此，如果存在一个具有 n 块铺砖、h 个孔洞且 $M(n,h) = h$ 的多形，那么 $n-(q-2) \le g(h) \le n$。

3. Some values of $g(h)$.

我们首先介绍两类多形，作为构造的参照对象。

定义 3.1。按如下方式归纳构造多形 $A_{p,q}(k)$：令 $A_{p,q}(1)$ 表示仅含一个 p边形的 $\{p, q\}$-多形。然后，从 $A_{p,q}(k-1)$ 出发，添加恰好所需的铺砖，使 $A_{p,q}(k-1)$ 的所有周界顶点都被铺砖围住。我们称 $A_{p,q}(k)$ 为完整的 k层叠 $\{p, q\}$-多形。参见 [9] 中的定义 1.2。

定义 3.2。$S_{p,q}(n)$ 是一个含有 n 块铺砖的极值多形。它通过从中心铺砖开始沿螺旋模式铺设而构造。参见 [9] 中的定义 4.1 和定理 1.8。

定理 （定理 1.2 的第一部分）。$g_{p,q}(1) = p + (p-1)(q-3) = pq - 2p - q + 3$。

证明。按如下方式构造多形 $B = B_{p,q}(1)$：从 $A_{p,q}(2)$ 开始。选择一个与中心铺砖相邻的顶点，并移除与该顶点相邻的所有铺砖，但保留与中心铺砖相邻的那两块。参见图 2 第一列。

B 是连通的，因为第二层除了移除 $q-3$ 个连续的铺砖外，其余部分保持不变。由于第二层最初构成一个环，移除连续的铺砖不会使其断开。B 也有一个孔洞，因为原先位于第一层的铺砖现已被移除，但所有与其相邻的铺砖都保留了下来。B 中的铺砖数量为 $p + (p-1)(q-3) = pq - 2p - q + 3$，因为有 p 个铺砖与孔洞相邻，而要连接与同一孔洞相邻的两个铺砖，需要 $q-3$ 个铺砖；对于 $p-1$ 个顶点，每个顶点各需一组。

最后，我们计算 $M(|B|-1,\ 1)$。 [11] 中的公式（1.9）给出了$\mathcal{P}^{p,\ q}_{min}(N)$ 关于 $N \le p(q-2)+1$ 的公式。特别是，

$$\mathcal{P}^{p,q}_{min}(N) = p + (p-2)(N-1) - 2\left\lfloor \frac{N-2}{q-2} \right\rfloor, \text{ if } q \le N \le p(q-2).$$

将其代入公式 $M(n,\ h) = {}^{n\ (p-2)\ +2-\mathcal{P}^{p,\ q}_{min}\ (n+h)\ p}$并化简，可得对于 $n = pq-2p-q+2$ 和 $h = 1$:

$$\begin{aligned} M(n,1) &= \frac{n(p-2)+2-\left(p+(p-2)(n+1-1)-2\left\lfloor \frac{n-1}{q-2} \right\rfloor\right)}{p}, \\ &= \frac{-(p-2)+2\left\lfloor \frac{p(q-2)-(q-2)-1}{q-2} \right\rfloor}{p}, \\ &= \frac{-(p-2)+2(p-2)}{p} = \frac{p-2}{p} < 1. \end{aligned}$$

因此，根据推论 2.2，不存在具有 1 个孔洞且铺砖数少于 B的多形。因此，$g(1) = pq-2p-q+3$。□

注释 3.3。 注意，$g_{p,\ q}(1)$ 的值等于定理 1.6 中确立的上界，因此定理 1.6 对 $h = 1$ 也成立。

现在我们继续完成定理 1.2 的证明，并介绍用于生成表 1 和图 2 的程序。

程序 [3] 首先生成 $\{p, q\}$ 镶嵌中与 $A_{p,q}(3)$ 相等的子集，然后以类似深度优先搜索的方式，每次添加一块铺砖，递归生成多形。具体来说，递归步骤是一个过程，它接收一个多形、最近添加到该多形中的铺砖（称为 X）以及该多形可包含的铺砖数量上限作为输入，并输出一个孔洞尽可能多、且优先采用铺砖数量较少的多形。

在这个过程中，如果多形中的铺砖数量少于指定上限，就为每块与 X 相邻且可以添加到多形中的铺砖创建一份多形副本，并将该铺砖添加到对应副本中。随后，将每份副本与目前已生成的多形集合进行比对，并丢弃任何重复项。接着，对每份副本重复递归步骤，并用每次输出的多形替换相应的输入多形。然后，对这些多形进行比较，输出孔洞最多的一个（若孔洞数量相同，则输出铺砖数量最少的一个）。最后，程序先创建一个仅包含一块铺砖的多形，并以此为输入运行递归过程。

值得注意的是，此过程并不会枚举所有不超过给定大小的多形。这是因为起始铺砖的位置固定，而且要求只能将铺砖添加到与最近添加的铺砖相邻的位置。这些限制旨在让我们比允许在任意位置添加铺砖时更快地检查大量多形，同时减少内存消耗。尤其是在 $p = 3$ 的情况下，这可能导致输出的多形尚未晶化。不过，这些多形似乎只比晶化后的多形大少数几块铺砖；它们也表明，对于许多 p，q，以及较小的h, $g(h) \le g(1)+(h-1)(g(1)-3)$，除非 $p = 3$ 或 $q = 3$。关于我们在各种镶嵌中发现的含有 h 个孔洞的多形所需的最少铺砖数，请参见表 1。

此外，值得探讨一下为什么我们只生成了带有少量孔洞的多形。为了更快完成任务并减少内存占用，我们牺牲了进行完整穷尽检查的机会，

因为多形的可能构型数量很快就会变得难以应付。为了处理数量如此庞大的可能结构，我们必须采取以下办法之一：对结构的生成方式施加额外规则，或改进对彼此同构的多形的检测。我们不能施加未经证明对结晶必不可少的规则，因为这些假设可能会阻碍我们发现罕见或违反直觉的例外，而这些例外在某些情况下可能是结晶所必需的。我们可以改进同构检测，但这会带来更多问题：首先，我们必须为每个多形确定一种规范形式（这是一个尚未解决的问题），或者将每个新生成的多形与此前生成的所有多形逐一比较，而这种做法的代价会越来越高。其次，同构检测并非易事；多形的枚举也是一个尚未解决的问题，而且在欧氏情形下有用的简单方法并不能直接应用于双曲镶嵌。第三，这些改进并不能让我们有能力检查任意大的多形，只会推迟它们因检查耗时过长或占用内存过多而无法检查的临界点。归根结底，这些做法无法让我们得到一个关于 $g(h)$ 的方程，因此我们把注意力转向了其他方向。

作为本节的总结，我们证明表 1 中阴影标出的条目对应晶化多形。只需验证 $h > M(n-1,\ h)$ 并应用推论 2.2 即可。因此，定理 1.2 的证明得以完成。

表 1 列出了图 2 所示的具有 h 个孔洞的各种 $\{p,\ q\}$-多形的铺砖数量 n。对于每个元组 $(p,\ q,\ h,\ n)$，我们计算 $M(n-2,\ h)$、$M(n-1,\ h)$ 和 $M(n,\ h)$。结果汇总于表 2。$\mathcal{P}_{min}$ 的取值根据 [11] 中的定理 1 得出；[10] 提供了一个在线计算器。

4. Proof of Theorem 1.6

本节中，我们给出关于 $g_{p,\ q}(h)$ 的匹配线性界。我们结合 [6] 中针对多连骨牌的技巧与 [11] 中 Rold´an–Toal´a 的等周定理 1，得到下界 $(\beta p - \beta - 1)h$，并通过显式构造得到上界 $((p-1)(q-2)+1)h$。

为进行明确的构造，我们首先回顾构造所需的双曲几何性质。

引理 4.1。如果 l 和 m 是经过双曲四边形一对相对边的测地线，且所有内角都小于 $\frac{\pi}{2}$，那么 l 和 m 是超平行的 [1]。

证明。设 Q 是一个所有内角都小于 $\frac{\pi}{2}$ 的双曲四边形。将经过 Q 每条边的测地线标记为 l、m、l' 和 m'，其中 l、m 与 l'、m' 分别经过相对的边。为导出矛盾，假设 l 和 m 在点 x 相交。注意，l' 和 m' 各自将平面分成两个区域。对于 l' 所分出的两个区域，假设 x 位于不包含四边形 Q 的区域内。由于 Q 的内角都小于 $\pi/2$，由 x 以及 l' 与 l、m 的交点构成的三角形，其两个角必定大于 $\pi/2$。因此，其内角和大于 π，这与双曲平面上的性质矛盾，所以 x 必定位于包含 Q 的区域内。出于同样的原因，它必定位于包含 Q 的 m' 一侧。然而，如果 l 和 m 在该区域内相交，那么在 Q 的顶点之间的 m 上，存在一点使 m 与 l' 相交，同时 m 与 m' 相交，这与

[1] 在双曲几何中，如果两条直线不相交（即使渐近时也不相交），就称它们为超平行。（也就是说，即使在庞加莱圆盘模型的边界上也不相交）。

	{3,7}			{3,8}		
h	$M(n-2,\ h)$	$M(n-1,\ h)$	$M(n,\ h)$	$M(n-2,h)$	$M(n-1,\ h)$	$M(n,\ h)$
1	0.3	**0.3**	**1.0**	0.3	**0.3**	**1.0**
2	1.3	**1.3**	**2.0**	1.3	**1.3**	**2.0**
3	2.3	**2.3**	**3.0**	2.3	**2.3**	**3.0**
4	3.3	**3.3**	**4.0**	3.3	**3.3**	**4.0**
5	4.3	5.0	5.0	4.3	**4.3**	**5.0**

	{4,5}			{4,6}		
h	$M(n-2,\ h)$	$M(n-1,\ h)$	$M(n,h)$	$M(n-2,h)$	$M(n-1,\ h)$	$M(n,\ h)$
1	0.5	**0.5**	**1.0**	0.5	**0.5**	**1.0**
2	1.5	2.0	2.0	1.5	2.0	2.0
3	2.5	3.0	3.0	2.5	3.0	3.0
4	4.0	4.0	4.5	3.5	4.0	4.0
5	5.0	5.5	5.5	5.0	5.0	5.0

	{5,4}			{5,5}		
h	$M(n-2,\ h)$	$M(n-1,\ h)$	$M(n,\ h)$	$M(n-2,\ h)$	$M(n-1,h)$	$M(n,\ h)$
1	0.6	**0.6**	**1.0**	0.6	**0.6**	**1.0**
2	1.6	2.0	2.0	1.6	2.0	2.0
3	2.6	3.0	3.4	2.6	3.0	3.0
4	4.0	4.0	4.4	4.0	4.0	4.0
5	5.0	5.4	5.4	5.0	5.0	5.0

	{6,4}			{7,3}		
h	$M(n-2,\ h)$	$M(n-1,\ h)$	$M(n,h)$	$M(n-2,\ h)$	$M(n-1,\ h)$	$M(n,\ h)$
1	0.7	**0.7**	**1.0**	0.4	**0.7**	**1.3**
2	1.7	2.0	2.0	2.0	2.3	2.6
3	2.7	3.0	3.0	3.6	3.9	4.1
4	3.7	4.0	4.3	5.1	5.4	5.7
5	5.0	5.0	5.3	6.4	6.7	7.0

TABLE 2. 表 1 中出现的参数组 $(\ p,q,h,n)$ 对应的 $M(n-2,h)$、$M(n-1,h)$ 和 $M(n,h)$ 的计算值，其中 n 是该表中的对应项。深灰色阴影表示在 n 处发生结晶，即 $M(n-1,h)\ <\ h\ \leq\ M(n,h)$。浅灰色阴影表示根据 M 界，排除了 $n-2$ 铺砖，但未排除 $n-1$ 铺砖，即 $M(n-2,h)\ <\ h\ \leq\ M(n-1,h)$。

假设 Q 是一个四边形。因此， l 和 m是超平行的。同样的论证证明 m' 和 l' 是超平行的。□

引理 4.2。 如果 X 是一个具有 $q>3$ 的{p、 q}-镶嵌中的铺砖，那么穿过 X 的非相邻边的测地线是超平行的。

证明。 令 X 为一个带有 {p、 q}-镶嵌的铺砖，且具有 $q>3$。由于 $q>3$ 的所有内角都小于或等于 $\frac{\pi}{2}$。令 l 和 m 为 X的不相邻的边。用两条测地线连接 l 和 m，每条测地线都经过 l 上的一个顶点和 m 上的一个顶点，从而形成一个四边形。

由于 X 是凸的，由这些测地线与 l 和 m 形成的角小于或等于每个顶点的内角，而这些内角又不大于 $\frac{\pi}{2}$。这意味着，对于经过 X 的不相邻边的任意一对测地线，要么它们之间存在一条垂线，要么由它们以及经过其顶点的测地线形成的四边形的所有角都小于 $\frac{\pi}{2}$。在第一种情况下，显然它们是超平行的；在第二种情况下，由引理 4.1可知它们也是超平行的。□

引理 4.3。 如果 $p = 3$，则由两个相邻铺砖形成的四边形的对边超平行。

证明。 可以通过反证法证明这一点。注意，这种形式的每个四边形都有两个相对的内角为 $\frac{2\pi}{q}$，以及两个相对的内角为 $\frac{4\pi}{q}$。如果存在某一点使这些直线相交，那么它们将与四边形的一条边以及与该边相邻的两条边的延长线构成一个三角形。这个三角形将有一个角的度数为 $\pi - \frac{2\pi}{q}$，另一个角的度数为 $\pi - \frac{4\pi}{q}$。因此，这个三角形的内角和至少为 $2\pi - \frac{6\pi}{q}$。由于当 $p = 3$时 $q \geq 7$，角度和不小于$2\pi - \frac{6\pi}{7} = \frac{8\pi}{7} > \pi$，这与双曲三角形的内角和不超过 π 相矛盾。因此，对边平行。□

至此，构造定理 1.6 所需的多形序列的准备工作已经完成。现在我们陈述一个引理，以界定实现 2 个孔洞所需的铺砖数量。

引理 4.4. 如果 $n + h \leq p(q-2) + 1$ 且 $h \geq 2$，那么不存在具有 n 块铺砖和 h 个孔洞的多形。

证明。 根据推论 2.2，只需证明 $h > M(n,h)$。对于 $N \leq p(q-2) + 1$ 这些取值，我们有来自 [11, 公式（1.9）], 的 $\mathcal{P}^{p,q}_{min}(N)$ 公式。

$$\mathcal{P}^{p,q}_{min}(N) = \begin{cases} p + (p-2)(N-1), & \text{if } 1 \leq N < q, \\ p + (p-2)\,(N-1) - 2\left\lfloor \frac{N-2}{q-2} \right\rfloor, & \text{if } q \leq N \leq p(q-2), \\ p(p-2)(q-2) - p, & \text{if } N = p(q-2) + 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

将其代入公式 $M(n,h) = {}^{n}_{(p-2)+2-\mathcal{P}^{p,q}_{min}(n+h)\,p}$ 并化简可得，对于 $n + h \leq p(q-2) + 1$:

$$M(n,h) = \begin{cases} \frac{-h(p-2)}{p}, & \text{if } 1 \leq n + h < q, \\ \frac{-h(p-2)+2\left\lfloor \frac{n+h-2}{q-2} \right\rfloor}{p}, & \text{if } q \leq n + h \leq p(q-2), \\ \frac{-h(p-2)+2p}{p}, & \text{if } n + h = p(q-2) + 1. \end{cases}$$

在所有情况下

$$M(n,h) \leq \frac{-h(p-2) + 2p}{p} < 2 \leq h.$$

因此，任何具有 $h \geq 2$ 的多形都必须满足 $n + h > p(q-2) + 1$。 □

定理 (定理 1.6)。对于 $q > 3$ 和任意整数 $h \geq 2$,

$$\beta\left(p - 1 - \frac{1}{\beta}\right)h \leq g(h) \leq h((p-1)(q-2) + 1). \tag{4.2}$$

证明。首先，我们证明下界。利用引理 2.1，我们有：

$$h \le M(n,h) = \frac{n(p-2)+2-\mathcal{P}_{min}^{p,q}(n+h)}{p}.$$

由于按定义， $g(h)$ 是存在具有 h 个孔洞的多形所需的最少铺砖数 n ，我们可以代入 $n = g(h)$：

$$h \le \frac{g(h)(p-2)+2-\mathcal{P}_{min}^{p,q}(g(h)+h)}{p}. \tag{4.3}$$

由 [11, 定理 1 中的等周公式 2] ，对于 $N > p(q-2)+1$，有

$$\mathcal{P}_{min}^{p,q}(N) = \left(p-2-\frac{2}{\beta}\right)N + \epsilon(N) > \left(p-2-\frac{2}{\beta}\right)N + 2. \tag{4.4}$$

由引理 4.4，得 $n + h > p(q-2) + 1$。因此，我们可以将 4.4 中的界应用于 4.3，得到：

$$h \le \frac{g(h)(p-2)+2-\left(p-2-\frac{2}{\beta}\right)(g(h)+h)-2}{p}.$$

对上述内容进行基本代数运算后，得到

$$\begin{aligned}
hp &\le g(h)(p-2) - \left(p-2-\frac{2}{\beta}\right)(g(h)+h),\\
hp &\le g(h)(p-2) - g(h)\left(p-2-\frac{2}{\beta}\right) - h\left(p-2-\frac{2}{\beta}\right),\\
hp + h\left(p-2-\frac{2}{\beta}\right) &\le g(h)\left(p-2-\left(p-2-\frac{2}{\beta}\right)\right),\\
2h\left(p-1-\frac{1}{\beta}\right) &\le \frac{2g(h)}{\beta}.
\end{aligned}$$

由于 β 严格为正，我们可以两边同时除以 $\frac{2}{\beta}$，得到

$$\beta\left(p-1-\frac{1}{\beta}\right)h \le g(h).$$

为证明 $h((p-1)(q-2)+1)$ 的上界，我们构造一个由 $\{p,q\}$-多形组成的序列族，其中含有 h 个孔洞，并将其标记为 $B_{p,q}(h)$。

我们首先通过选择 $\{p,q\}$-镶嵌中的某个铺砖 X 作为孔洞，选择 X 的一个顶点，并将 X 的每个其他顶点上的所有铺砖都纳入 $B_{p,q}(1)$ 中，从而构造 $B_{p,q}(1)$，如下方的图 3 所示。这会形成一个带有一个孔洞的连通图形。由于与 X 相邻的所有铺砖都与其共享两个顶点，而纳入任意两个与 X 相邻的铺砖所共享的顶点上的铺砖，就能将它们连接起来。因此，这构造出了一个含有 $p+(p-1)(q-3) = (p-1)(q-2)+1$ 个铺砖的多形。为构造 $B_{p,q}(h)$，我们选择 $B_{p,q}(1)$ 的两条超平行边，并沿这两条边进行反射，以在这些边的另一侧生成其副本。证明的其余部分将详细说明这一构造。

若 $p > 3$，则 l_1，l_2 是 X 的两条不相邻边（这是可能的，因为 X 至少有 4 条边）；根据引理 4.2，它们是超平行的。此外，它们将双曲平面

分成 3 个区域：l_1 与 l_2 之间的一个条带，其中 X 位于此处；以及两个半平面 D_1 和 D_2，其边界分别为 l_1 和 l_2。令 l 为 l_1 关于 l_2 的反射，令 m 为 l_2 关于 l_1 的反射。根据构造，l 和 m 是与 X 相邻的铺砖的边。此外，l 和 m 是超平行的，因为它们被 l_1 与 l_2 之间的条带隔开。这就得到了一对位于 B_p 的外周长上的超平行边，$_q$（1）。见图 3。

当 $p = 3$ 时，令 Y_1 和 Y_2 为与 X 相邻的铺砖。考虑由 X 和 Y_1 形成的四边形，令 l_1 和 l_2 为该四边形的对边，且它们不在 B_p 的外周长上；$_q$(1) 中的 l_1 边与 Y_1 的 l_2 边相邻。根据引理 4.3，l_1 和 l_2 超平行。与之前一样，它们将双曲平面分成 3 个区域：X 所在的条带，以及两个半平面 D_1 和 D_2。不失一般性，设 Y_2 位于 D_2 中。根据连通性，B_p 中还有另一个与 Y_2 相邻的铺砖；$_q$(1) 中，令 l 为由 Y_2 和这个相邻铺砖形成的四边形中与 l_2 相对的边。注意，由于 l 和 l_2 超平行，l_2 完全位于 D_2 中。类似地，$D_1 \cap B_p$ 上还有另外 2 块铺砖；$_q$ (1) 中，其中一块沿着 l_1 与 Y_1 相连。这 2 块铺砖构成另一个四边形；令 m 为与 l_1 相对的边。注意，m 完全位于 D_1 上。最后，l 和 m 是 B_p 外周长上所需的超平行边；$_q$(1)。见图 3。

要构造$B_{p,\ q}(2)$，我们只需选取其中一条平行边，并将$B_{p,\ q}(1)$关于经过这条边的测地线反射后的像纳入多形。由于我们是沿铺砖的一条边进行反射，多形仍保持连通；而新副本完全位于经过这条边的测地线一侧，因此不会发生自相交。重复这一过程，我们可以构造一个多形$B_{p,\ q}(h)$，其中恰有 $h(p-1)(\ q-2)+h$ 块铺砖，因为$B_{p,\ q}(1)$的每个副本都是一个含有一个孔洞且由$(\ p-1)(\ q-2)+1$ 块铺砖构成的自包含结构。形状$B_{p,\ q}(h)$不会发生自相交，因为$B_{p,\ q}(1)$的各个副本位于由两条超平行直线界定的不相交条带中。此外，边界边之间的相邻关系保证了连通性。

□

正如引言中所提到的，这些界限彼此之间出乎意料地接近。

推论 4.5。对于 $p,\ q > 3$,

$$(p-1)(q-3)-1 \le \frac{g(h)}{h} \le (p-1)(q-2)+1. \tag{4.5}$$

证明。由定理 1.6 以及 $\lfloor \beta \rfloor = q-3$ 这一事实可直接得出。参见 [11] 中的引理 14。□

5. The case p even and $q = 3$

本节中，我们猜想当 $p = 2k$ 且 $q = 3$时，$g(h)$ 的一个公式。我们给出 $\{2k,\ 3\}$-多形的例子，其中有 h 个孔洞，适用于 $h \ge 1$。根据这一构造，预期这些多形是晶化的；然而迄今仍未能证明这一点。

设 $k > 3$ 是一个整数，并设 $\mathcal{V}^{2k,\ k}_{min}(n)$ 是具有 n 块铺砖的 $\{2k,\ k\}$-多形所需的最少顶点数。我们证明

$$g_{2k,3}(h) \le \mathcal{V}^{2k,k}_{min}(h). \tag{5.1}$$

这是通过对一个极值 $\{2k,\ k\}$-多形的顶点应用对偶性，构造一个 $\{2k,\ 3\}$-多形来实现的。

首先，我们按如下方式将 $\{2k, k\}$-镶嵌实现为 $\{3, 2k\}$-镶嵌的一个子图：对于 $\{2k, k\}$-镶嵌中的每块铺砖，我们将其中心作为一个顶点，并在该中心与铺砖的每个顶点之间添加边。由此便得到一个正则的 $\{3, 2k\}$-镶嵌

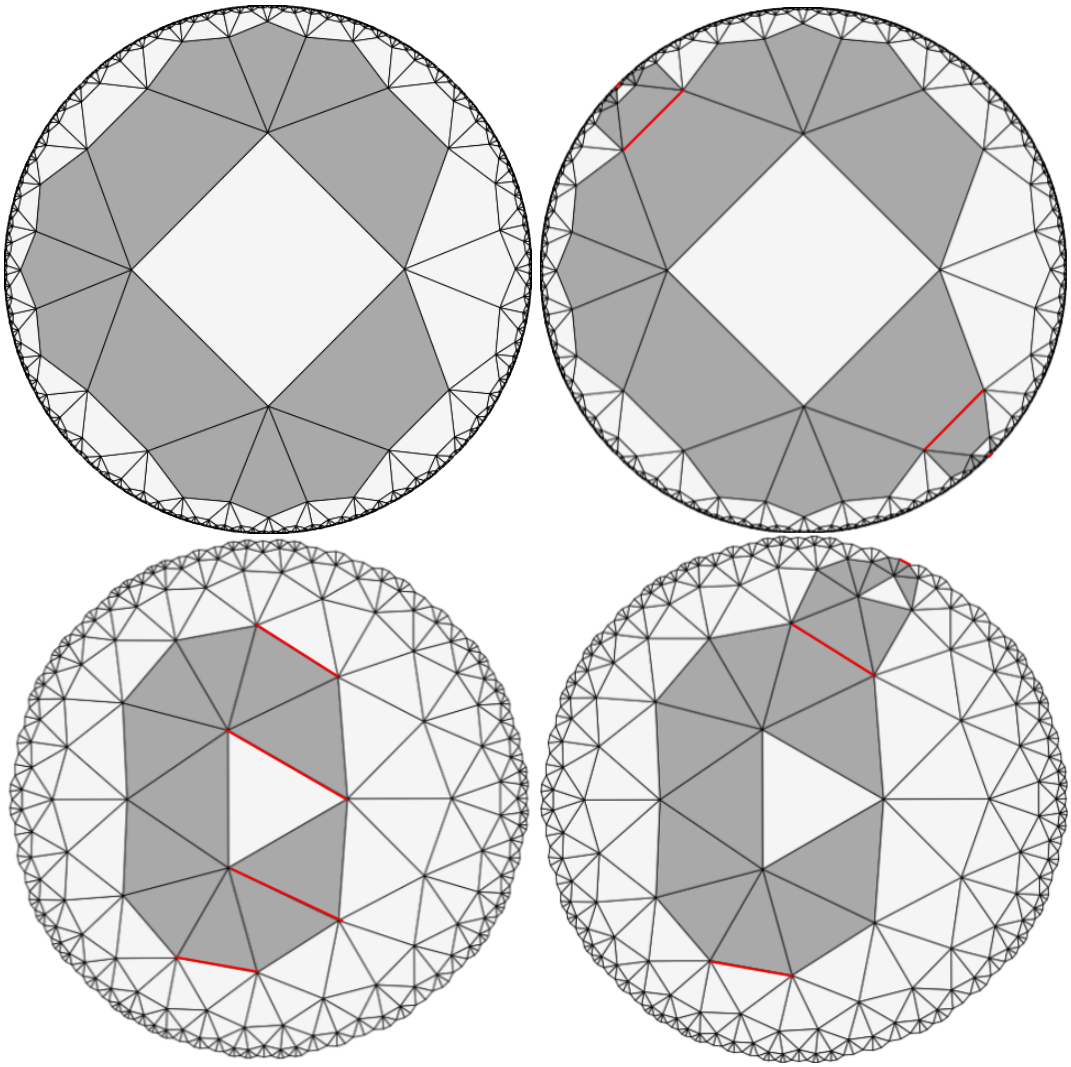

FIGURE 3. 证明定理 1.6 时使用的多形 $B_{p,q}(h)$ 的示例。高亮的边彼此超平行，并在构造具有逐渐增多孔洞的多形时用作反射轴。

因为所有三角形的内角都等于 π/k。如果 $\{3, 2k\}$-镶嵌的顶点原本属于 $\{2k, k\}$-镶嵌，则将其涂成灰色；新增中心则涂成白色。

最后，在 $\{2k,3\}$ 镶嵌中，我们将那些与 $\{3, 2k\}$ 镶嵌对偶后对应于曾是 $\{2k, k\}$ 铺砖中心的顶点的铺砖视为孔洞。最终结果称为 打孔的 $\{2k,3\}$ 镶嵌。参见图 4。打孔过程可限于含有 h 块铺砖的 $\{2k, k\}$ 多形，从而生成具有 h 个孔洞的 $\{2k,3\}$ 多形。

定义 5.1. 设 A 是一个 $\{2k, k\}$-多形。按照打孔过程，将其视为 $\{3, 2k\}$-镶嵌的一个子图，并令 $\tilde{A}$ 为 $\{2k,3\}$-˜ ˜镶嵌中的铺砖集合，使得 A 的每个顶点都对应于 A中的一块铺砖。我们称 A 为关于 A的带孔多边形组合。参见图 5。

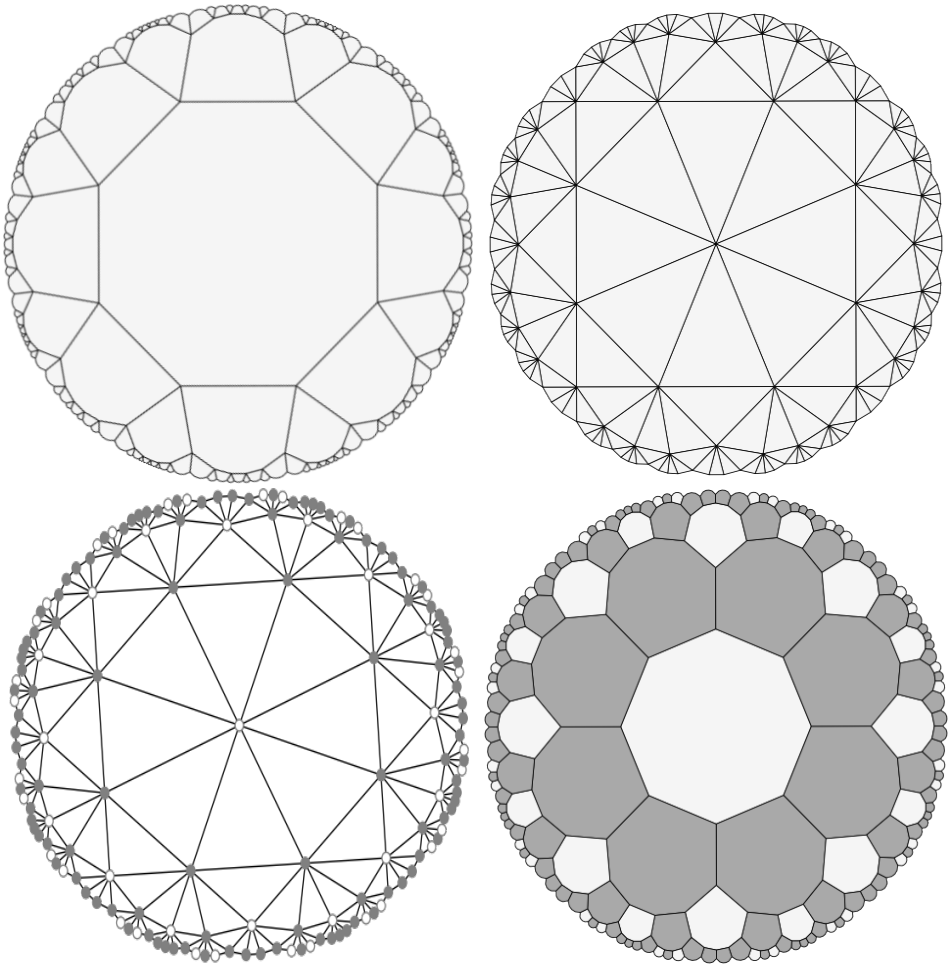

FIGURE 4. 打孔过程。左上。 $\{2k,k\}$-镶嵌。右上。 对于$\{2k,k\}$-镶嵌中的每块铺砖，将其中心作为一个顶点加入，并在该中心与铺砖的各个顶点之间添加边，从而得到$\{3,2k\}$-镶嵌。左下。 $\{3,2k\}$-镶嵌的顶点以灰色和白色标示。灰色顶点构成的子图就是原来的$\{2k,k\}$-镶嵌；白色顶点是新增中心。右下。 $\{3,2k\}$的对偶是$\{2k,3\}$-镶嵌，其铺砖带有相应的着色。

命题 5.2. 设 A 是一个$\{2k,k\}$-多形，含有 h 块铺砖和 $v(A)$ 个顶点。那么 $\tilde{A}$ 是一个$\{2k,3\}$-多形，具有 h 个孔洞和 $v(A)$ 块铺砖。

证明。 注意，在$\{2k,k\}$-镶嵌的每个面中心放置一个顶点，并在该中心与外围顶点之间添加边，会得到$\{3,2k\}$-镶嵌，因为原镶嵌的每条边之间都新增了一条边。取其对偶后，便得到$\{3,2k\}$-镶嵌。

X 中的每个铺砖都对应于 $\tilde{A}$ 中一个铺砖的顶点 X'。 A 中˜铺砖的关联关系对应于 A中顶点的边连接。一个铺砖的顶点是连通的，因此，如果两个铺砖 X_1， X_2 在 A中的同一个铺砖上具有对应的 X_1'，X_2' 那么它们

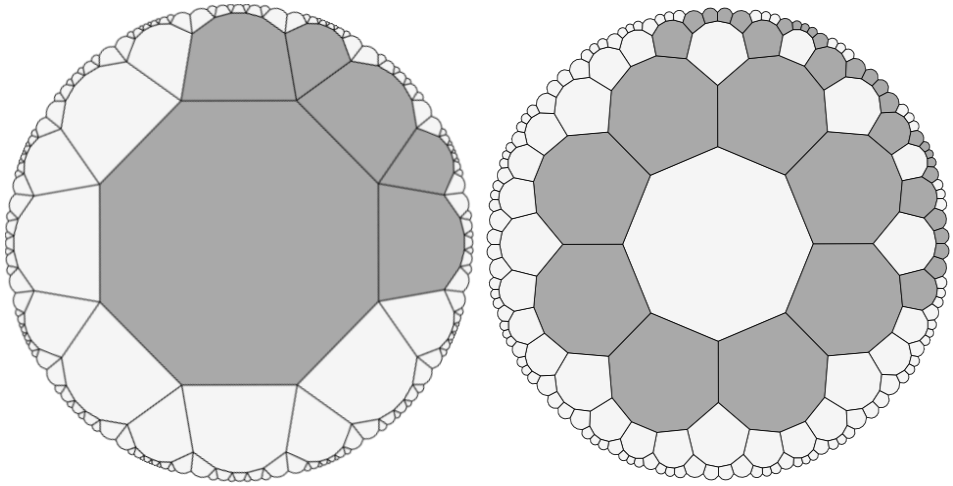

FIGURE 5. 左侧。 </style>在 时，{, k}-镶嵌中由 6 块铺砖组成的一个极值多形。 右侧。 对应的带孔 {2k,3}-多形，具有 6 个孔洞。

是连通的。如果两个铺砖在 A中具有关联关系，它们必定共享某些顶点。连通性是一种传递性质；因此，如果两个铺砖共享顶点，那么这两个铺砖中的每个顶点都与˜其他每个顶点连通。由于 A 是连通的，因此 A 也必定是连通的。

˜现在，我们关注 A 的图参数。 A 中每块铺砖的中心对应于 $\tilde{A}$ 中的一个孔洞；因此， $h(\tilde{A})$ $= |A| = h$。最后， A 的每个顶点都对应于 $\tilde{A}$ 中的一块铺砖，也就是说， $\tilde{A}$ 有 $v(A)$ 块铺砖。□

现在，我们可以利用 A 为极值多形时 $\tilde{A}$ 的构造，给出 $g_{2k,3}(h)$ 的一个上界，从而证明定理 1.8。为方便读者，我们在此重述该定理。

定理 (定理 1.8)。 对于 $k > 3$ 整数，

$$g_{2k,3}(h) \le \frac{\mathcal{P}_{min}^{2k,k}(h) + (2k-2)h}{2} + 1. \tag{5.2}$$

证明。 设 A 是一个含有 h 块铺砖（且没有孔洞）、 v 个顶点、 e 条边和 p_o条周边边的 {p, q}-多形。根据欧拉公式，有 $v - e + h = 1$。计算 A中所有铺砖的边数，并将共用边重复计入，可得 $2e - p_o = p \cdot h$。结合这两个关系，得到 $v = \frac{p_o + (p-2)h}{2} + 1$。这表明，对于固定的铺砖块数 h，使p_o 最小等价于使 v最小。

回想一下，如果一个多形 A 的周长 p_o 在所有含有 h 块铺砖的多形中最小，则称它为极值的。根据前面的观察， A 也使 v最小。这说明，对于含有 h 块铺砖的极值多形，采用以下符号是合理的： $\mathcal{V}^{p,q}_{min}(h) = v$ 和 $\mathcal{P}^{p,q}_{min}(h) = p_o$。 于是，等式 $v = \frac{p_o + (p-2)h}{2} + 1$)可改写为：

$$\mathcal{V}_{min}^{p,q}(h) = \frac{\mathcal{P}_{min}^{p,q}(h) + (p-2)h}{2} + 1. \tag{5.3}$$

令 A 为一个具有 h 块铺砖的极值 {2k, k}-多形；例如，[9] 中的螺旋多形；参见其中的定义 4.1 和定理 1.8。利用命题 5.2，我们可以构造 A,

一个具有 $\mathcal{V}^{2k,}_{min}{}_{k}(h)$ 块铺砖和 h 个孔洞的 $\{2k, 3\}$-多形。该构造证明：

$$g_{2k,3}(h) \le \mathcal{V}^{2k,k}_{min}(h)$$

由此立即可得：

$$g_{2k,3}(h) \le \frac{\mathcal{P}^{2k,k}_{min}(h) + (2k-2)h}{2} + 1.$$

□

猜想。若 A 是极值的$\{2k, k\}$-多形，则 $\tilde{A}$ 是晶化的。也就是说，

$$g_{2k,3}(h) = \frac{\mathcal{P}^{2k,k}_{min}(h) + (2k-2)h}{2} + 1. \tag{5.4}$$

若该猜想成立，则可得到 $g_{2k,\ 3}$ 的渐近行为。回顾一下 $\mathcal{P}_{min}$ 的渐近行为：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{P}^{p,q}_{min}(n)}{n} = p - 2 - \frac{2}{\beta}.$$

对于 $p = 2k$ 和 $q = k$ 的情况，有：

$$\beta = \frac{(2k-2)(k-2) + \sqrt{(2k-2)^2(k-2)^2 - 4(2k-2)(k-2)}}{2(2k-2)}.$$

于是，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta} &= \frac{2}{k-2+\sqrt{(k-2)^2 - 4\frac{k-2}{2k-2}}}, \\
&= \frac{2\left(k-2-\sqrt{(k-2)^2 - 4\frac{k-2}{2k-2}}\right)}{4\frac{k-2}{2k-2}}, \\
&= k-1-\sqrt{(k-1)^2 - \frac{2k-2}{k-2}}.
\end{aligned}$$

代入 5.4 得：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{g_{2k,3}(h)}{h} &= \frac{2k-2-2/\beta+2k-2}{2}, \\
&= 2k-2-\frac{1}{\beta}, \\
&= k-1+\sqrt{(k-1)^2 - \frac{2k-2}{k-2}}.
\end{aligned}$$

6. Conclusions and further directions

我们方法中的一个关键要素是量 $M(n, h)$，它为具有 n 块铺砖和 h 个孔洞的 $\{p, q\}$–多形的存在性提供了一个代数障碍：只要 $h > M(n, h)$，这样的多形就不可能存在。该障碍纯粹是解析性的，并且仅取决于等周剖面 $\mathcal{P}^{p,q}_{,}{}_{\min}$。

在 n 取连续数值时计算不等式 $h \le M(n, h)$，可以自然地构建出一套障碍层次。特别是，对于较小的整数 $k \ge 1$，计算 $M(n-k, h)$ 可以

排除整个范围的铺砖数。例如，条件 $M(n-2,h) < h$ 严格排除了存在具有 $n-2$ 个铺砖和 h 个孔洞的 $\{p,q\}$–多形，而 $M(n-1,h) \geq h$ 表明，仅凭代数障碍并不能排除情形 $n-1$。这一现象形成了一个狭窄的“模糊区间”，在此区间内无法仅凭 M–界判定极小性。

第 4 节中的表格展示了如何在实践中运用这种多步障碍来证明极小性、识别晶化情形，并找出需要额外几何或组合论证的参数范围。更一般地说，这提示了以下未来研究方向。

- 确定对于哪些双曲镶嵌 $\{p,q\}$，代数阈值
$$n_{\mathrm{alg}}(h) := \min\{n \in \mathbb{N} : h \leq M(n,h)\}$$
对于所有充分大的 h，都与真正的最小值 $g_{p,q}(h)$ 重合。
- 研究差值 $g_{p,q}(h) - n_{\mathrm{alg}}(h)$ 是否保持一致有界，抑或会随 p、q 或 h 的同余类而呈现出有规律的变化。
- 建立几何或构造性判据，以解决由如下形式的不等式检测出的模糊区间
$$M(n-k,h) < h \leq M(n-k+1,h),$$
the从而弥合代数障碍与显式实现之间的鸿沟。

综合来看，这些问题表明，量 $M(n-k,\ h)$ 为系统排除大类参数组（$p,\ q,\ n,\ h$）提供了一个灵活的框架，并可指导寻找新的极值或近极值双曲多形。

定理 1.6 中给出的 $g(h)$ 界并非紧的。由于双曲几何中出现的技术性问题，我们在第 4 节给出的带孔多形构造较为简单；因此它并非最优。对于所有 $\{p,\ q\}$ 都适用的一般过程似乎很难获得，因为我们尚未发现任何规律。要理解晶化多形中孔洞的内在结构，还需要对例子进行更系统的研究。例如，对于$p = 3$，在 [6] 中给出的 $Spir_k$ 构造或许可以在双曲情形下复制，但具体如何实现，以及这是否会产生晶化多形，目前尚不清楚。另一种方法是遵循第 5 节中针对一般 $\{p,\ q\}$ 所展示的对偶构造，但我们可能需要依赖双曲平面的非正则镶嵌，以及一种能够刻画孔洞结构的带孔多形对偶性概念。

如第 3 节所述，我们的搜索算法并非穷尽式的。未来的工作将涉及开发适用于双曲情形的算法枚举方法。例如，[1] 中介绍的生成测地正则树结构（GRTS）的算法，或可启发穷尽生成策略，尤其是通过对偶图的典范形式进行同构排除。

如猜想 5 所述，我们认为在 $\{2k,\ 3\}$ 情形下，$g(h)$ 的界是紧的。证明这一点需要对晶化多形进行刻画（例如，孔洞的大小必须为 1），或者更深入地理解带孔多形的参数，例如改进对其顶点数的界。

致谢。我们感谢 Peter Kagey 提供有益的讨论，并感谢乔治·梅森大学的梅森实验几何实验室为本项目提供支持。

利益冲突声明。 作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。作者声明，与本文内容相关的事项不存在利益冲突。所有作者均确认，他们与任何在本稿件所讨论的主题或材料方面具有财务或非财务利益的组织或实体均无关联，也未参与其中。作者对本文讨论的任何材料均无财务或所有权利益。

AppendixA. Notation

本节总结了本文中使用的符号。

p{p, q}-多形 A 的参数：

- $|A|$, $v(A)$ $e(A)$ $h(A)$ 分别表示铺砖、顶点、边和孔洞的数量。
- $p_o(A)$ $p_h(A)$ $b(A)$ 分别表示外周长、孔周长和内部边。

- $H(A)$ 是 A 中所有孔洞的并集。
- $\overline{A} = A \cup H(A)$ 是填满孔洞后的多形。
- $A_\prime$ 是 A 的对偶图。 $A_\prime$ 的顶点是 A 的铺砖。当 A 中对应的铺砖共享一条边时，就在 $A_\prime$ 中画一条边。

A 的图参数之间的关系：

- A 的欧拉公式： $v(A) - e(A) + |A| + h(A) = 1$。
- A 的边数： $e(A) = p_o(A) + b(A) + p_h(A)$。
- 统计 A 中所有铺砖的边数，允许重复计算共享的边： $p \cdot |A| = p_o(A) + 2b(A) + p_h(A) = e(A) + b(A) = 2e(A) - b(A)$。

变量约定：

- k 是一个正整数，用于标记 {p, q}-镶嵌中的铺砖环。
- n 是一个正整数，表示一个多形中的铺砖数量。
- {p, q} 是镶嵌的施莱夫利符号。
- β 是 {p, q}-镶嵌的一个参数，参见方程 1.2。它出现在 $\mathcal{P}^{p,\ q}_{min}(n)$ 的渐近行为中。

- $A_{p,\ q}(k)$ 是完整的 k 层 {p, q} 多形。定义如下：令 $A_{p,\ q}(1)$ 表示仅有一个 p 边形的 {p, q} 多形。然后，从 $A_{p,\ q}(k-1)$ 出发，恰好添加所需的铺砖，使 $A_{p,\ q}(k-1)$ 的所有周界顶点都被 q 块铺砖包围。我们称 $A_{p,\ q}(k)$ 为完整的 k层{p, q}多形。参见 [9] 中的定义 1.2
- $S_{p,\ q}(n)$ 是由 n 块铺砖构成的螺旋多形。它们是衡量多形所能达到的极值的基准，例如，它们使外周长最小。参见 [9] 中的定义 4.1 和定理 1.8。

- A, B, C 是一般多形。
- l, m 是双曲直线。
- X, Y, Z 是铺砖
- x, y, z 是顶点

References

[1] D. Celi´nska-Kopczy´nska 和 E. Kopczy´nski。双曲镶嵌的生成树结构。*arXiv* 预印本 *arXiv:2111.12040*，2021。

[2] M. d'Achille、V. Jacquier 和 W. M. Ruszel。关于双曲晶格中的最小形状与拓扑不变量。arXiv 预印本 arXiv:2504.14080，2025。[3] S. Eldrige、A. Prabha、A. Roger、C. Roger、E. Roldan 和 R. Toala-Enriquez。Megl 多形（软件包）。https://github.com/CRoger20/megl-polyforms/，2025。[4] O. H¨aggstr¨om、J. Jonasson 和 R. Lyons。随机簇模型中的显式等周常数与相变。《概率年刊》，30(1):443–473，2002。[5] M. Kahle 和 E. Rold´an。具有尽可能多孔洞的多连骨牌。Geombinatorics，29 (1):5–20，2019。ISSN 1065-7371。[6] G. Malen 和 ´E. Rold´an。多连骨牌的极值拓扑与几何问题。《组合数学电子期刊》，27(2)，2020。[7] G. Malen 和 E. Rold´an。具有极值拓扑性质的多三角形 I。Geombinatorics，第 Vol XXX(Issue I) 卷：14–24，2020 年 7 月。[8]G. Malen 和 E. Rold´an。具有极值拓扑性质的多三角形 II。Geombinatorics，第 Vol XXX(Issue II) 卷：64–76，2020 年 10 月。[9]G. Malen、 ´E. Rold´an 和 R. Toal´a-Enr´ıquez。极值 {p, q}-动物。《组合数学年刊》，27(1):169–209，2023。[10]E. Rold´an 和 R. Toal´a-Enr´ıquez。双曲动物的等周公式。网址：https://www.erikaroldan.net/isoperimetric-formulas-for-hyperbolic-animals。[11] ´E. Rold´an 和 R. Toal´a-Enr´ıquez。双曲动物的等周公式。《图与组合数学》，41(2):1–23，2025。[12] M. Schrauth、Y. Thurn、F. Goth、J. S. E. Portela、D. Herdt 和 F. Dusel。Hypertiling 项目。Zenodo，2023。网址：https://doi.org/10.5281/zenodo.7559393。

（S. Eldridge） Department of Mathematics, Graduate Center, City University of New York.*Email address*: seldridge@gradcenter.cuny.edu（A. Prabha） Basis Independent McLean, Virginia.*Email address*: prabhaadithyasai@gmail.com（A. Roger） Department of Mathematics, George Mason University.*Email address*: aroger29@gmu.edu（C. Roger） Department of Mathematics, George Mason University.*Email address*: croger20@gmu.edu（E. Rold´an）, , ,*Email address*: roldan@mis.mpg.de（R. Toal´a-Enrıquez）,*Email address*: rosemberg.toala@edu.uaa.mx

´ Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences Leipzig; Department of Statistical Learning ScaDS.AI Leipzig University; and Université de Genève.

´ ´ Departamento de Matemáticas y Física Universidad Autónoma de Aguascalientes.