arXiv:2603.18651v1 [math.MG] 19 Mar 2026

Sawayama–Th´ebault 定理推广的证明

Miłosz Płatek

摘要。我们证明了 2016 年提出的两个猜想，这些猜想涉及 Sawayama–Th´ebault 定理和泽山引理的推广。我们表明，这一推广后的命题可以在拉盖尔几何中加以考察，而拉盖尔几何为解决该问题提供了自然的框架。

数学主题分类（2010）。51M05；51M04；51B15。

关键词。Sawayama–Th´ebault 定理；泽山引理；Th´ebault 问题 III；拉盖尔几何；轴向圆变换。

1. 引言

在平面几何的经典问题中，Sawayama–Th´ebault 定理因其悠久而非凡的历史而占据特殊地位。该问题由法国数学家 Victor Th´ebault 于1938年以《美国数学月刊》中的问题3887提出[19]。

1963年，C. Stanley Ogilvy 在其著作《明日数学：业余爱好者未解问题》[13]，中收录了该问题，并将其归类为解析几何中的一个未解决问题。

命题 1.1（Sawayama–Th´ebault 定理）。设 ABC 为一个三角形， D 为三角形 ABC的边 BC 上的一点。设 O_1 和 O_2 （$O_1 \neq O_2$）分别为与线段 BC、线段 AD以及三角形 ABC的外接圆相切的圆的中心。那么，无论选择哪一点 D，直线 O_1O_2 都经过一个不动点 I，该点是三角形ABC的内心。

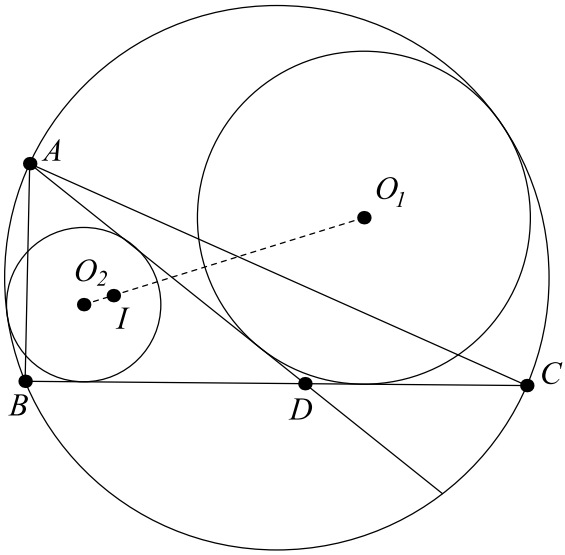

FIGURE 1. Sawayama–Th´ebault 定理。

长期以来，人们一直认为第一个解答由 K. B. Taylor 找到，并于 1983 年发表。他的证明包含 24 页计算，不过在《美国数学月刊》[18]中只发表了摘要。这是已知的第一个以 English 发表的解答，并且多年来被广泛引用为最早的证明。然而，这个问题早在 1973 年就已由荷兰数学家 H. Streefkerk 解决。不过，这并未终止人们对更具综合性和优雅性的解答的探索。

1988 年，Chou [2] 采用基于 Gröbner 基和伪余式的自动定理证明方法证明了该定理。原始证明在 Symbolic 3600 计算机上需要 44 小时的 CPU 时间。Sawayama–Th´ebault 定理在 Gröbner 基理论中几乎成为了基准问题¨。

1991 年，H. Demir 和 C. Dezar 在 Geometriae Dedicata 发表了另一个版本的证明，为这一问题提供了一个自然的解法，并将其与三角形的经典著名构形联系起来 [6]。

2001 年，R. Shaila 在《美国数学月刊》发表了一篇使用笛卡尔坐标的初等证明 [16]。尽管论证是初等的，但仍需使用 Maple 计算四次方程的一个根。正如我们所指出的，围绕该定理最初的证明存在相当多的误解。Shaila 发表论文时称，他不知道有任何已发表的 Th´ebault 定理的初等证明。

最终，2003年，在历经65年后，Jean-Louis Ayme 发表了一篇简短而精炼的证明 [1]。Ayme 发现，Yuzaburo Sawayama，

东京中央陆军学校的一名教员，早在1905年就已在其学术著作中独立提出并解决了这个问题 [15]。此后，该定理被称为 Sawayama–Th´ebault 定理，而 Sawayama 原始证明中使用的引理则被称为泽山引理。

命题 1.2. 设 ABC 为一个三角形，D 为三角形 ABC边 BC 上的一点。设 ω 为一个圆，它与线段 BC 相切于点 E，与线段 AD 相切于点 F，并与三角形 ABC的外接圆相切。那么，无论如何选择点 D，直线 EF 都经过一个不动点I，该点是三角形 ABC的内心。

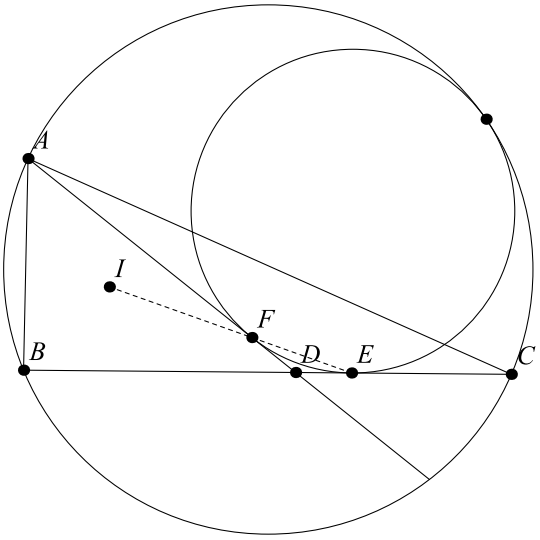

FIGURE 2. 泽山引理。

多年来，关于 Sawayama–Th´ebault 定理的许多论文已发表于各类数学期刊 [3,7,9,14,17,20,21,24,25]。其证明逐渐简化为一页篇幅的综合几何证明，该证明基于 Y. Sawayama 提出的泽山引理。

越南数学家 Dao Thanh Oai 花了四年时间研究 Sawayama–Th´ebault 定理的推广。此前，人们曾多次尝试推广 Sawayama–Th´ebault 定理和泽山引理。尤其是在发现更强的结果之前，Dao 曾提出另一种思路，试图推广泽山引理和 Sawayama–Th´ebault 定理 [12]。其中一项结果——泽山引理的推广——后来由 Nguyen Chuong Chi 证明 [10]。然而，这些推广都很复杂，也未达到真正推广所能期待的程度。此外，2002年，S. Gueron 证明了一个涉及外切圆的定理版本，并将其发表在

《美国数学月刊》 [8], 但这也不能被视为真正的推广。经过四年的努力, Dao 终于发现了可称为 Sawayama–Th´ebault 定理和泽山引理真正推广的结果。正如 Dao Thanh Oai 所确认的，这个猜想至今仍未解决，已近十年。

本文给出了 Sawayama 引理的推广以及 Sawayama–Th´ebault 定理推广的证明。

获得本文所述证明的一个关键思路，是从拉盖尔几何的角度看待问题 [22]。所用的具体拉盖尔变换是伸缩变换，它是轴向圆变换的一种特殊情形。这一技巧见《几何变换 IV：圆变换》 [23]。

总之，本文证明了两个猜想：Sawayama–Th´ebault 定理的推广，以及 Sawayama 引理的推广 [11]。这些证明均为综合证明，其退化情形分别对应于这两个定理的经典版本，从而推广了相关文献中确立的结果。

2. Sawayama 引理的推广

本节给出 Sawayama 引理推广的证明。该猜想 [11] 由来自越南的 Dao Thanh Oai 提出，他为此研究了四年。我们将使用以下引理，它是 Sawayama 引理的一个变式。令作者惊讶的是，尽管其证明可以类似于经典引理来完成，但尚未见于任何已知文献。

引理 2.1。（泽山引理的另一种构形）设三角形ABC，点 D 在线段 BC上。设 ω 为一个圆，它与外接圆在点 P处相切，与直线 BC 在点 E处相切，并与直线 AD 在点F处相切；其中点 A 和 P 位于直线 BC的另一侧，点 B 和 P 位于直线 AD的同侧。那么，无论点 D如何选取，直线 EF 都经过点 J_c，即三角形 ABC的 C旁切圆的中心。

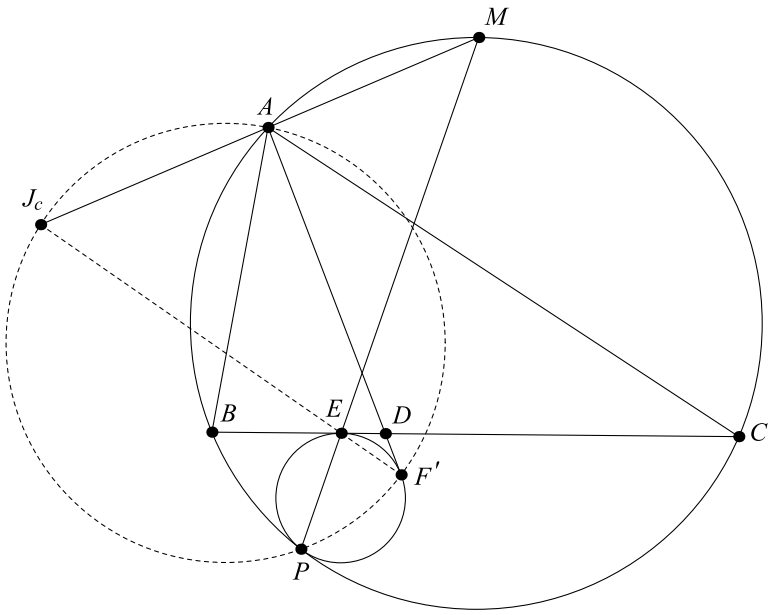

FIGURE 3. 另一种构形中的泽山引理。

证明。设点 $F' \neq E$ 为直线 J_cE 与圆 ω的交点。设点 M 为弧 BAC的中点。由于以 P 为中心的位似变换将圆 ω 映射到 $\triangle ABC$ 的外接圆，并将 E 映射到 M，因此点 P、 E和 M 共线。再由以点 P为中心的位似变换可得:

$$\sphericalangle PF'E = \sphericalangle PCM = \sphericalangle J_cAP. \tag{2.1}$$

因此，

$$\sphericalangle J_cAP = \sphericalangle J_cF'P, \tag{2.2}$$

所以四边形 $PF'AJ_c$共圆。此外，我们有

$$\sphericalangle MBC = \sphericalangle BCM = \sphericalangle MPB. \tag{2.3}$$

因此， MB 与 $\triangle BEP$ 在 B处相切。根据点幂定理（见[4]），我们得到

$$MB^2 = ME \cdot MP. \tag{2.4}$$

此外，根据内心–旁心引理的一个变体（见 [4]），我们有$MJ_c = MB$。因此，

$$ME \cdot MP = MB^2 = MJ_c^2, \tag{2.5}$$

因此，直线 MJ_c与三角形 J_cEP的外接圆相切。

$$\sphericalangle MJ_cE = \sphericalangle J_cPM = \sphericalangle ACM + \sphericalangle J_cF'A. \tag{2.6}$$

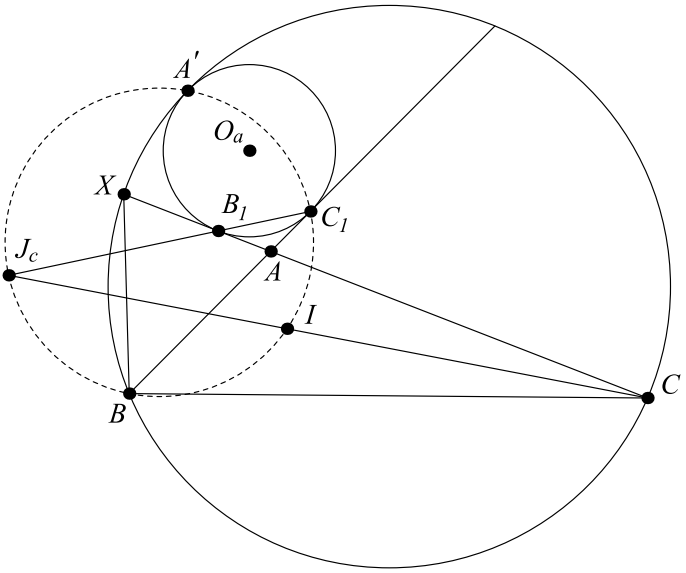

FIGURE 4. $A'I$ 是角 $BA'C$的角平分线。

然而，我们还有：

$$\sphericalangle MJ_cE = \sphericalangle APF' = \sphericalangle ACM + \sphericalangle EPF'. \tag{2.7}$$

结合以上结果，可得：

$$\sphericalangle ACM + \sphericalangle EPF' = \sphericalangle ACM + \sphericalangle J_cF'A, \tag{2.8}$$

$$\sphericalangle EPF' = \sphericalangle J_cF'A. \tag{2.9}$$

因此，直线 AF'与圆 ω相切，所以 $F = F'$，证毕。□

我们还将证明一个引理，它将在证明泽山引理的推广时发挥作用。

引理 2.2. 设 ABC 是一个三角形， ω_a 是与直线AC 和 AB相切的圆。设 Ω 是经过点 B 和 C的圆。此外，

1. 若圆 ω_a 位于直线 AC 上与点 B相反的一侧，则圆 Ω 与 ω_a内切；2. 若圆 ω_a 位于直线 AC 上与点 B同侧，则圆 Ω 与 ω_a外切。

设 A' 为圆 ω_a 与圆 Ω 的切点， I 为 $\triangle ABC$的内心。则直线 $A'I$ 是 $\angle BA'C$ 的角平分线。

证明。为简化证明，我们采用第一种构形。第二种构形的证明类似。

设点 B_1 和 C_1 分别为直线 AC 和 AB 与圆 ω_a 的切点。记直线

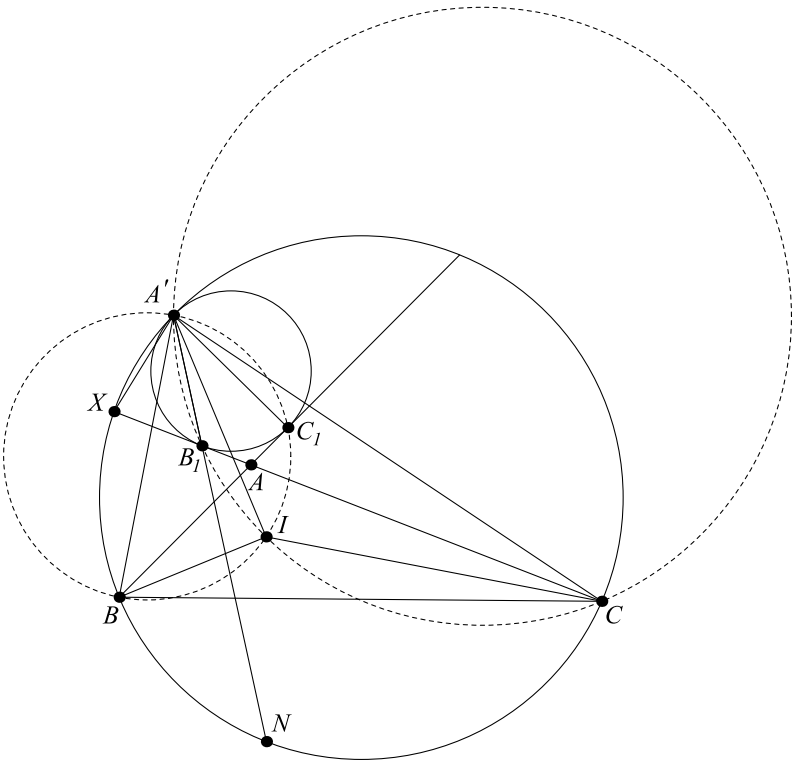

FIGURE 5. 四边形共圆性 $A'C_1IB$ 和 AB_1IC。

AC 与圆 Ω 相切。此外，设直线 CI 与直线 B_1C_1 交于点 J_c。由引理 2.1 可知， J_c 是三角形 BCX 的对顶点C的旁心。此外，根据引理 2.1的证明，我们有四边形J_cBC_1A' 是共圆的。另请注意：

$$\begin{aligned} \sphericalangle J_cIB &= \sphericalangle IBC + \sphericalangle ICB \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BAC) \\ &= \sphericalangle B_1C_1A \\ &= \sphericalangle J_cC_1B. \end{aligned} \tag{2.10}$$

因此

$$\sphericalangle J_cIB = \sphericalangle J_cC_1B, \tag{2.11}$$

因此四边形 J_cBIC_1 共圆。综合以上结果，可得五边形 J_cBIC_1A' 共圆，尤其是四边形 $A'C_1IB$ 共圆。类似地，我们可以证明 $A'B_1IC$ 共圆。

设点 N 为弧 XBC 的中点（图 5）。由引理 2.1的证明可知，点 A'、 B_1 和 N 共线。

因此，我们得到：

$$\begin{aligned}
\sphericalangle BA'B_1 &= \frac{1}{2}\sphericalangle XA'C - \sphericalangle XA'B \\
&= \frac{1}{2}\sphericalangle XA'B + \frac{1}{2}\sphericalangle BA'C - \sphericalangle XA'B \\
&= \frac{1}{2}\sphericalangle BA'C - \frac{1}{2}\sphericalangle XCB \\
&= \frac{1}{2}\sphericalangle BA'C - \sphericalangle B_1CI \\
&= \frac{1}{2}\sphericalangle BA'C - \sphericalangle B_1A'I.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\sphericalangle BA'I &= \sphericalangle BA'B_1 + \sphericalangle B_1A'I \\
&= \frac{1}{2}\sphericalangle BA'C - \sphericalangle B_1A'I + \sphericalangle B_1A'I \\
&= \frac{1}{2}\sphericalangle BA'C.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

因此， $A'I$ 是角 $\sphericalangle BA'C$的角平分线，证毕。 □

现在我们给出泽山引理推广的证明——这是本文两项主要结果中的第一项。

定理 2.3（广义泽山引理）。在三角形 ABC 中，设 ω_a 是与边 AB 和 AC 相切的圆，Ω 是经过 B 和 C 且与 ω_a 相切的圆。设 ω 是与线段 BC 在 D 处相切、与 Ω 相切，并与一条在 E 处和 ω_a 相切的直线 k 相切的圆。那么，对于任意选取的直线 k，直线 DE 总是经过一个不动点 I，即三角形 ABC 的内心。

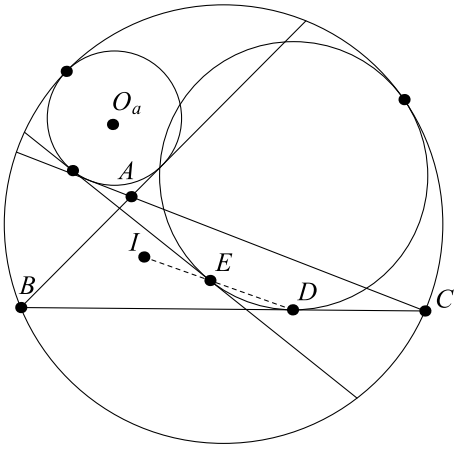

FIGURE 6. 定理 2.3—构形 1。

该定理可视为将泽山引理中的顶点 A 替换为一个圆，从而得到的强有力的推广。

在开始证明之前，我们需要明确定理 2.3 的构形。正如证明中将会显明的那样，这一推广在很大程度上依赖于拉盖尔几何的性质。在这种几何中，当且仅当两个对象在经典欧几里得意义下相切，且在切点处方向一致时，才称它们相切。因此，该构形可以简洁地描述如下：“对象（圆或直线）可以定向，使得所有相切关系都符合拉盖尔几何的定义。”

具体而言，该构形可以描述如下：

圆 ω 位于直线 BC 与点 A 同侧。则：

1. 如果圆 ω_a 位于直线 AC 上与点 B 相反的一侧，那么圆 Ω 与 ω_a 内切，且圆 ω 位于直线 k 与 ω_a 同侧；2. 如果圆 ω_a 位于直线 AC 与点 B 同侧，那么圆 Ω 与 ω_a 外切，且圆 ω 位于直线 k 上与 ω_a 相反的一侧。

因此，我们得到两种构形（图6 和7）。在证明中，我们将看到上述构形的自然推导过程。

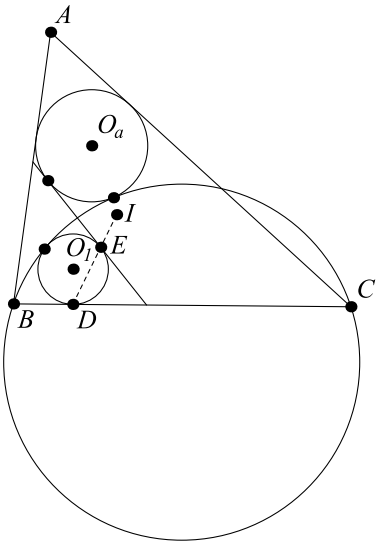

FIGURE 7. 定理2.3——构形 2。

证明。 为简化证明，我们采用图 6 所示的构形。图 7 中的构形也可类似证明。

如果圆 ω_a 是一个点（即其半径为零），则问题变得平凡，因为它归结为经典的泽山引理。因此，从现在起我们假设该圆是非退化的。

设点 O 和 O_a 分别表示圆 ω 和 ω_a的中心 .

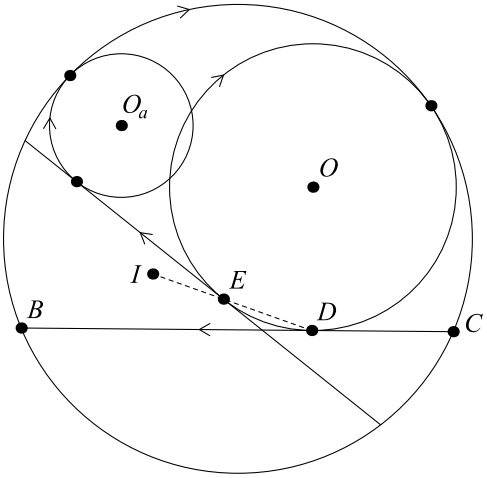

FIGURE 8. 变换前。

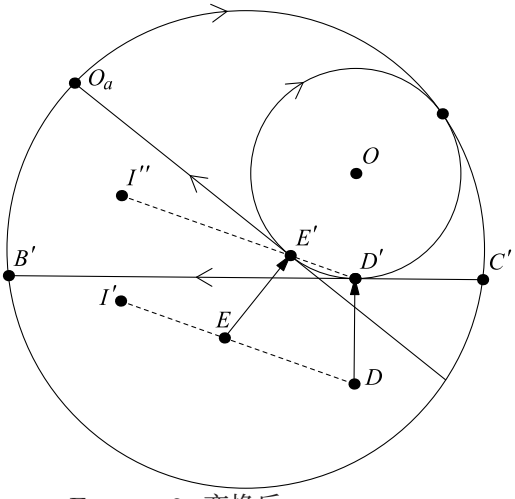

FIGURE 9. 变换后。

按照图 8所示确定圆和直线的方向，然后考虑平面上的一种变换——伸缩变换（轴向圆变换） [23] 映射ω_a 到点 O_a。

变换后的情形如图 9所示。设 B' 和C' 分别为变换后圆 Ω 与直线 BC 的交点。设 D' 和 E' 分别为变换后 ω 与直线 BC 和 k的切点。为清楚起见，值得指出的是，在这种伸缩变换下， $D \rightarrowtail D'$ 或 $E \rightarrowtail E'$ 并不成立，因为我们的变换将直线映射为直线，而非将点映射为点（特别地，在伸缩变换下，一个点对应于半径为零的圆）。由泽山引理应用于三角形 $O_aB'C'$，可得直线 $E'D'$ 经过不动点 I''，该点是三角形 $O_aB'C'$的内心。

此外，我们在图中标出9 变换前的原始点 D 和 E （见图8）。注意，根据伸缩变换的定义，向量长度 DD' 等于 EE' （我们将直线 BC 平移的距离与直线 k相同）。由于点 O、 E'、 E 和 O、 D'、 D 共线，且 $OE' = OD'$ 和 $EE' = D'D$，我们得出 $E'D' \parallel ED$。

注意，无论选择哪条切线 k，向量 DD' 都是定向量——其方向垂直于 BC，其取向固定（因为圆 ω 和 ω_a 的取向固定），且其长度等于ω_a的半径，这也是常量。现在考虑将直线 $E'D'$ 平移定向量 $\overrightarrow{D'D}$ （即向量 $\overrightarrow{DD'}$的相反向量）。随后，这些直线变为直线 DE，不动点 I'' 变为某个不动点 I'。因此，无论选择哪条直线 k，直线 DE 都经过某个不动点 I'。还需证明 $I' = I$。

现在考虑与圆 ω_a 在点 A' 相切的直线 k。设 M 为不包含点 A' 的弧 BC 的中点。那么点 A'、 D 和 M 共线。因此，点 I' 位于角 $BA'C$ 的角平分线上。

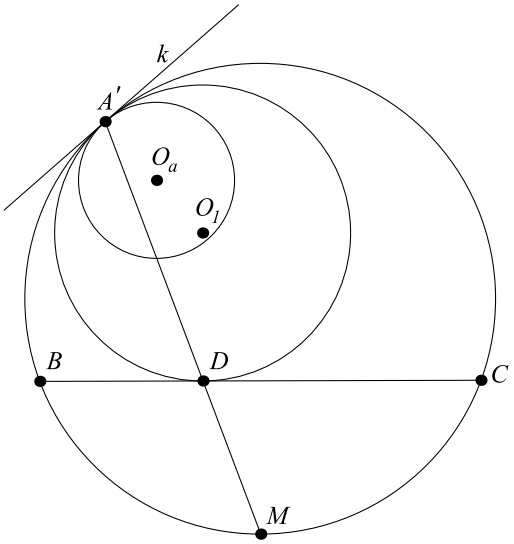

FIGURE 10. 在点 A' 处相切的直线 k。

设 P 和 F 分别为圆 Ω 与 ω 的切点，以及圆 ω_a 与直线 k 的切点。此外，设点 A' 为圆 Ω 与 ω_a 的切点。

引理 2.4. 点 F， I'， E， P和 A'共圆（图 *11*）。

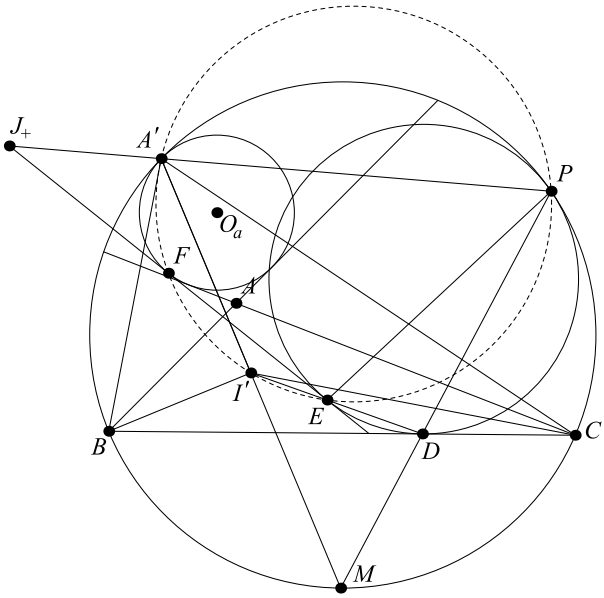

FIGURE 11. 点 F、 I'、 E、 P、 A'共圆。

证明。 我们首先证明四边形 $PEFA'$是共圆四边形。设 $J_+ = k \cap A'P$。根据蒙日定理（见 [4]），对于圆 Ω、 ω_a和 ω，将 ω_a 映射到 ω 的正位似变换的中心位于直线 PA'上。显然，该中心也位于 k上。因此， J_+ 是将ω_a 映射到 ω的正位似变换的中心，因而也是将 ω 映射到 ω_a的正反演的中心。在此映射下，$P \rightarrowtail A'$ 和 $E \rightarrowtail F$。由此，根据点幂，四边形 $PEFA'$共圆。

接下来，我们证明四边形 $A'PEI'$ 共圆。我们仍用M 表示圆 Ω 上不包含点 A'的弧 BC 的中点。于是，直线 DP经过点 M。此外，点 A'、 I'和 M 共线。考虑将 ω 映射到圆 Ω 的位似变换。我们有：

$$\sphericalangle DEP = \sphericalangle MA'P = \sphericalangle I'A'P, \tag{2.14}$$

因此，四边形 $A'PEI'$ 共圆。

由于点 P、 E、 F和 A'在同一圆上，且点 A'、 P、 E和 I'在同一圆上，因此点 P、 E、 I'、 F、 A'共圆。□

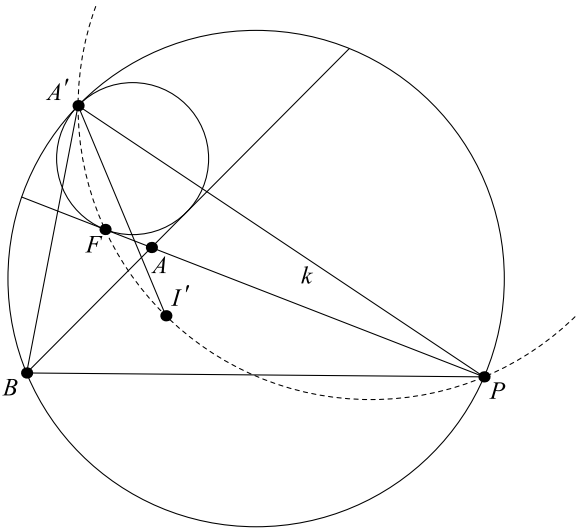

FIGURE 12. 退化圆 $\omega = C$。

由引理 2.4 可知，对于对应于非退化圆 ω的点 P的任意位置，点 A'、 F、 I'和 P在同一圆上。考虑一条经过点 C 的直线 k，使得点 A' 和 B 位于其两侧。于是，圆 ω 退化为点 C，故 $P = C$。由点 A'、 F、 I'和 P的共圆性的连续性可得， A'、 F、 I'和 $P = C$在同一圆上（否则，我们可以在不包含 B 的弧 $A'C$ 上找到一点 P，使得圆 $A'FI'P$不共圆）。根据引理 2.2 的证明，我们知道点 A'、 AC 与 ω 的切点（此处为点F）、点 I和点 C 在同一圆上。因此，点 I 和 I'都位于三角形 $A'FC$ 的外接圆上，也位于直线 $A'I$上。由于这两点均不同于 A'，故 $I' = I$，从而证明直线 DE 经过一个不动点——三角形 ABC的内心。

□

3. Sawayama–Th´ebault 定理的推广

本节将证明 Sawayama–Th´ebault 定理的推广，这是本文的第二个主要结果。证明的关键步骤是应用上一节证明的 Sawayama 引理的推广（定理 2.3），这与 Yazaburo Sawayama 在其原始证明中使用经典版本（引理 1.2）的方式类似。此外，我们还运用了射影对合理论 [5]。

首先，我们证明一个引理，它将在证明《Sawayama–Th´ebault 定理的推广》时发挥作用。

引理 3.1. 设圆 Ω 与 ω 在点 A 处内切，且 $B \neq A$ 是平面上的一个点。设 X 是圆 ω 上的一点，且 f 是该圆上的一个对合。定义 $Y = (AXB) \cap \Omega$（第二交点），以及 $Y' = (Af(X)B) \cap \Omega$（第二交点）。则映射

$$Y(\Omega) \rightarrowtail Y'(\Omega) \tag{3.1}$$

是一个对合。

证明。 考虑以点 A 为中心、半径任意非零的反演。这就得到图 14所示的情形。将点 X 关于点 B 反射到直线 Ω′上，我们看到 Y 和 Y' 在直线 Ω 上构成一对对合点′。因此，映射 $Y(\Omega) \rightarrowtail Y'(\Omega)$ 也是一个对合，证毕。 □

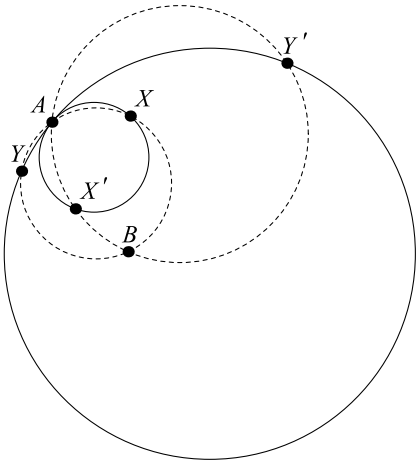

FIGURE13. 反演前。

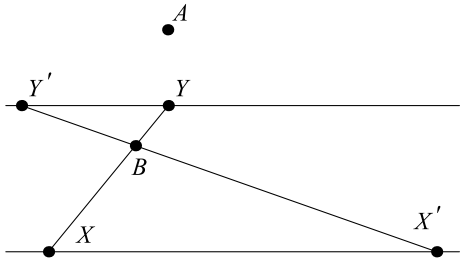

FIGURE14. 反演后。

现在我们给出本文的最终结果。

定理 3.2。（广义 Sawayama–Th ´ebault 定理）在三角形 ABC 中，设 ω_a 是与边 AB 和 AC 相切的圆，Ω 是经过 B 和 C 且与 ω_a 相切的圆。设 P 是定直线 t 上的任意一点。圆 ω_1 和 ω_2 与线段 BC、圆 Ω 相切，并分别与直线 k 和 l 相切。那么，对于 t 上任意选取的点 P，直线 O_1O_2 都经过一个不动点 I，即三角形 ABC 的内心。

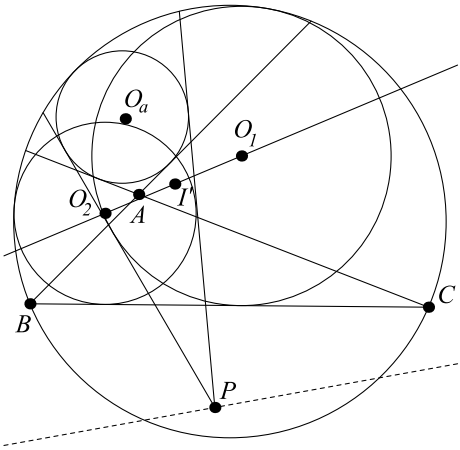

FIGURE 15. 定理 3.2—构形 1。

同样，在开始证明之前，我们需要说明定理 3.2 的构形。只需指出，该构形与定理2.3中的构形相同。因此，为求清晰起见，此处不作详细说明。我们只假设定直线 t 不与圆 ω_a 相交，因为点 P 必须位于该圆外，才能作切线。

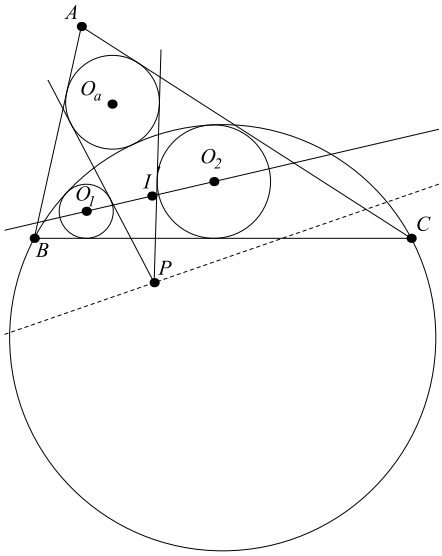

FIGURE 16. 定理 3.2—构形 2。

证明。若圆 ω_a 退化为一点 A，则得到经典的 Sawayama–Th´ebault 定理。以下假设 ω_a 非退化。

为简化证明，我们假设构形如图 15所示。图 16 所示构形的证明类似。

定义以下各点（图 17）：

- D ——圆 ω_1 与 BC的切点，
- E ——圆 ω_1 与直线 k的切点，
- F —圆 ω_2 的切点（与 BC相切），
- G —圆 ω_2 与直线 l的切点，
- X —直线 k 与圆 ω_a的切点，
- X' —直线 l 与圆 ω_a的切点，
- I —三角形 ABC的内心，
- A' —圆 ω_a 与Ω的切点，
- Y — Ω 与 ω_1 的切点，
- Y' — Ω 与 ω_2 的切点，
- O — 三角形 $A'BC$外接圆的中心。

现在考虑关于圆 ω_a 的极变换。由于点 P 位于一条定直线上，该映射

$$X(\omega_a) \rightarrowtail X'(\omega_a) \tag{3.2}$$

是一个对合。由引理 2.4，我们得到五边形 $A'XEIY$和 $A'X'GIY'$ 共圆。此外，点 I 和 A' 是固定的，与点 P的位置无关。由引理 3.1，取 $\Omega = \Omega$，$\omega = \omega_a$，$A = A'$，$B = I$，以及对合

$$f := X(\omega_a) \rightarrowtail X'(\omega_a), \tag{3.3}$$

我们得出该映射

$$Y(\Omega) \rightarrowtail Y'(\Omega) \tag{3.4}$$

是一个对合。

设直线 m 为与 BC 平行、与其距离为 R，且位于直线 BC 与点 A' 同侧的直线，其中 R 为圆 Ω 的半径。考虑准线为 m 、焦点为 O 的抛物线 $\mathcal{P}$。根据构造，$B \in \mathcal{P}$ 且 $C \in \mathcal{P}$。令

$$D' = O_1 D \cap m. \tag{3.5}$$

注意：

$$O_1 D' = DD' - O_1 D = R - O_1 Y = O_1 O \implies O_1 \in \mathcal{P}. \tag{3.6}$$

同理，我们可以证明 $O_2 \in \mathcal{P}$。

设 M 为圆 Ω 上不包含点 A' 的弧 BC 的中点，并设 $\infty_{DD'}$ 为直线 DD' 上的无穷远点。由 DD' 垂直于准线 m，可得 $\infty_{DD'} \in \mathcal{P}$。现在考虑以下射影映射：

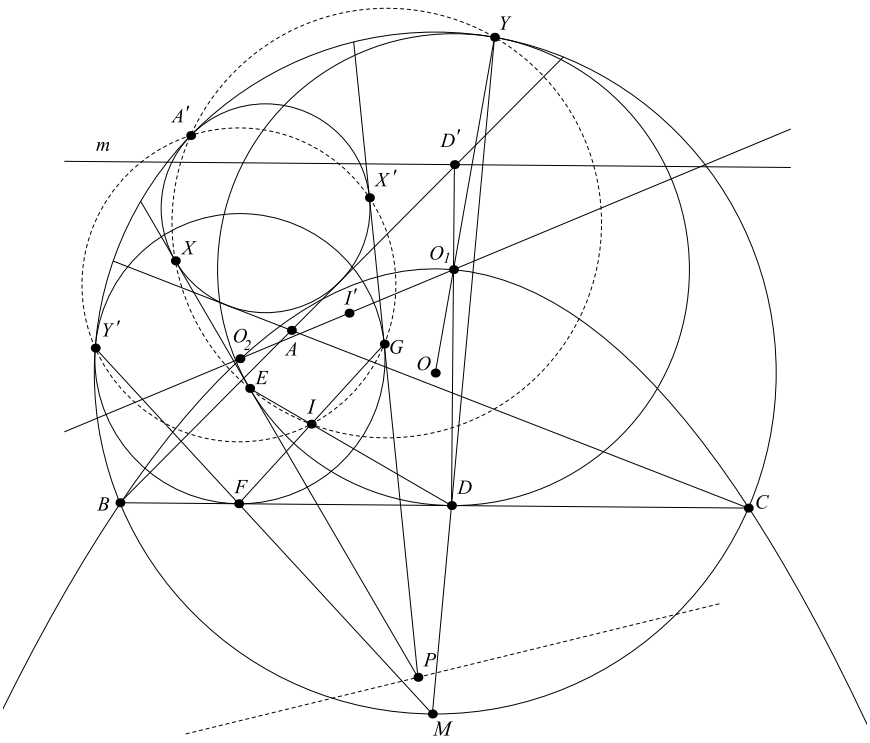

FIGURE 17. Sawayama–Th´ebault 定理的推广。

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &\rightarrowtail MY(M) \\ &\rightarrowtail MY \cap BC(BC) \\ &\rightarrowtail D(BC) \\ &\rightarrowtail \infty_{DD'} D(\infty_{DD'}) \\ &\rightarrowtail O_1(\mathcal{P}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

由于对于此射影变换，我们有：

$$Y(\Omega) \rightarrowtail O_1(\mathcal{P}) \quad \text{and} \quad Y'(\Omega) \rightarrowtail O_2(\mathcal{P}), \tag{3.8}$$

以及映射

$$Y(\Omega) \rightarrowtail Y'(\Omega) \tag{3.9}$$

是一个对合，由此可得映射

$$O_1(\mathcal{P}) \rightarrowtail O_2(\mathcal{P}) \tag{3.10}$$

也是一个对合。因此，根据圆锥曲线上的对合的定义，直线 O_1O_2 经过一个不动点，证毕。

□

注记 3.3. 点 I'（直线 O_1O_2上的不动点）会随着点 P移动所沿的直线而改变，因此并非一个特定的点。确定它最简单的方法是考虑两个退化情形：$P = AC \cap t$和 $P = AB \cap t$。

声明

Co利益冲突 作者声明不存在利益冲突 .

竞争利益 作者声明不存在竞争利益。

参考文献

[1]Ayme, J. L., Sawayama 与 Th´ebault 定理，《Forum Geom.》，3，225–229（2003）。[2] Chou, S. C.,《机械几何定理证明》，D. Reidel 出版公司（Springer），多德雷赫特，荷兰（1987）。[3] Cerin, Z., 关于 Th´ebault 的问题3887，《J. Geom. Graph.》，15(2)，113–127（2011）。[4] Chen, E.,《数学奥林匹克中的欧几里得几何》，《MAA 问题集》27，MAA 出版社（美国数学会），华盛顿特区（2016）。https://doi.org/10.5948/9781614444114[5]Coxeter, H. S. M.,《射影几何》，第2版，施普林格出版社，纽约（1987）。[6] Demir, H.; Tezer, C., 对 V. Th´ebault 一个问题的思考，《Geom. Dedicata》，39(1)，79–92（1991）。https://doi.org/10.1007/BF00147305[7] English, B.J.,《说来话长：3887》，《Am. Math. Mon.》，110(2)，156–158（2003）。https://doi.org/10.2307/3647785[8] Gueron, S., 广义托勒密定理的两种应用，《Am. Math. Mon.》，109(4)，362–370（2002）。https://doi.org/10.1080/00029890.2002.11920897[9] Kodokostas, D., Th´ebault 定理的一个真正初等的证明，伍斯特理工学院，美国（2004）。[10] Nguyen, C. C., Dao 对 Sawayama 引理的推广的一个证明，《Int. J. Comput. Discov. Math.》，3，1–4（2018）。[11] Oai, D. T., Doai, C. M., Trung, Q., Xuong, K., Binh, T., Sawayama 与 Th´ebault 定理的另一种推广，《Int. J. Comput. Discov. Math.》，1(3)，36–39（2016）。[12] Oai, D. T., Doai, C. M., Trung, Q., Xuong, K., Binh, T., Sawayama 与 Th´ebault 定理的一种推广，《Int. J. Comput. Discov. Math.》，1，33–35（2016）。[13] Ogilvy, C. S.,《明日数学：业余爱好者未解问题》，牛津大学出版社，纽约–多伦多（1962）。[14] Reyes, W., Th´ebault 定理的一项应用，《Forum Geom.》，2，183–185（2002）。

[15] Sawayama, Y.,《一个新的几何命题》，《Am. Math. Mon.》，12(12)，222–224（1905年）。https://doi.org/10.1080/00029890.1905.11997270[16] Shail, R., Th´ebault 定理的一个证明，《Am. Math. Mon.》，108(4)，319–325（2001）。https://doi.org/10.1080/00029890.2001.11919755[17] St¨ark, R., Th´ebault 问题的另一种解法，《初等数学》，44(5)，130–133（1989）。https://doi.org/10.5169/seals-41621[18]Taylor, K. B., 问题3887的解答，《Am. Math. Mon.》，90(7)，486–487（1983）。[19] Th´ebault, V.,《圆心共线的三个圆（问题3887）》，《Am. Math. Mon.》，45(7)，482–483（1938年）。https://doi.org/10.2307/2304178[20] Turnwald, G., 关于 Th´ebault 一个猜想，《初等数学》，41(1)，11–13（1986）。[21] Veljan, D.; Volenec, V., Th´ebault 定理，《初等数学》，63(1)，6–13（2008）。https://doi.org/10.4171/EM/79[22] Yaglom, I. M., 关于 M¨obius、Laguerre 和 Lie 的圆变换，载于《几何脉络》，345–353（1981）。[23] Yaglom, I. M.,《几何变换 IV：圆变换》（A. Shenitzer 译），《安妮莉·拉克斯新数学丛书》44，MAA 出版社（美国数学会），多德雷赫特（2009）。[24] Ostermann, A.; Wanner, G.,《从历史看几何》，施普林格出版社，柏林/海德堡（2012）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-29163-0[25] Ostermann, A.; Wanner, G., Th´ebault 定理的一个动态证明，《初等数学》，65(1)，12–16（2010）。https://doi.org/10.4171/EM/133

Miłosz Płatek 独立研究者，
波兰克拉科夫。电子邮件：
milosz@platek.org