arXiv:2603.18724v1 [math.AC] 19 Mar 2026

局部上同调模在首个和最后一个非消失层级上的贝斯数

M. JAHANGIRI 和 R. AHANGARI MALEKI

ABSTRACT. 设 R 为交换诺特环， $\mathfrak{a}$ 为 R 的一个理想，且 M 为有限生成的 R-模。本文研究关于理想 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ 的局部上同调模的贝斯数 $\{\mu^i(\mathfrak{p}, H^j_{\mathfrak{a}}(M))\}$，考察以下各种情形：

(1) $i \in \{0,1,2\}$ 且 $j =$的深度$_{\mathfrak{a}}(M)$，(2) R为正则环且 $i \in${的高$_{\mathfrak{p}}()$，$\mathfrak{p}$的高 $-1\}$，以及 $j =$的上同调维数$_{\mathfrak{a}}\operatorname{cd}M($ M $)$，即 $\mathfrak{a}$关于 的上同调维数。

1. 引言

全文中，设 R 为含单位元的非平凡交换诺特环，$\mathfrak{a}$为 R 的一个理想，且 M 为非零有限生成的 R-模。 $\mathbb{Z}$、 $\mathbb{N}_0$ 和 $\mathbb{N}$分别表示整数集、非负整数集和正整数集。

对于任意 $i \in \mathbb{N}_0$, $H^i_{\mathfrak{a}}(-)$ 表示关于 $\mathfrak{a}$ 的第 i 个局部上同调函子，它是挠函子 $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ 的第 i 个右导出函子，其中 $\mathfrak{a}$。回忆一下，对于任意 R-模X,

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(X) := \cup_{t\in\mathbb{N}}(0 :_X \mathfrak{a}^t) = \{x \in \mathbb{N} | \exists t \in \mathbb{N}, \mathfrak{a}^t x = 0\}.$$

关于局部上同调模的基本性质，请读者参阅 [5]。局部上同调模的消失与有限性性质是该理论中的核心问题之一，受到了广泛关注，例如参见 [1, 7, 10, 14] 和 [16]。在 [10], Huneke 猜想：

猜想 1.1. 若$(R, \mathfrak{m})$ 是一个正则局部环，则对于任意 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$，*Bass* 数 s

$$\mu^i(\mathfrak{p}, H^j_{\mathfrak{a}}(R)) := \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}(\operatorname{Ext}^i_{R_{\mathfrak{p}}}(\kappa(\mathfrak{p}), H^j_{\mathfrak{a}}(R)_{\mathfrak{p}}))$$

局部上同调模的 *Bass* 数对所有 $i, j \in \mathbb{N}_0$. 都是有限的

其中， $\kappa(\mathfrak{p}) := \frac{R_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}$ 是 $R_{\mathfrak{p}}$的剩余域。显然，如果$H^j_{\mathfrak{a}}(R)$是有限生成的，那么 Bass 数 $\mu^i(\mathfrak{p}, H^j_{\mathfrak{a}}(R))$是有限的。但是，局部上同调模几乎从来都不是有限生成的！当$(R,$ $\mathfrak{m})$是一个含有域的正则局部环时，上述猜想有肯定的答案。实际上，Huneke 和 Sharp ([11])在.....的情形下

2020 数学主题分类。 13D45, 14B15,13H05,13C11, 13E05.关键词与短语。 局部上同调模，Bass 数，谱序列，内射维数，正则环。

正特征下，Lyubeznik ([13])证明，在这种情况下 $\mu^i(\mathfrak{m}, H^j_{\mathfrak{a}}(R)) < \infty$对所有 $i, j \in \mathbb{N}_0$.

注意，如果 R不是正则的，那么 Bass 数 $\mu^i(\mathfrak{p}, H^j_{\mathfrak{a}}(R))$ 可能是无限的，Hartshorne 的一个例子（[8]）就证明了这一点。他证明了 $\mu^0((x, y, z, w) H^j_{(x, y)}(K[x,y,z,w]/(xz-yw)))=\infty$，其中 K 是一个域。

此外，Bahmanpour 等人在 [3] 中证明，若 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个正则局部环，那么对于所有 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, $\mu^0(\mathfrak{p}, H^2_{\mathfrak{a}}(R))$ 和 $\mu^1(\mathfrak{p}, H^2_{\mathfrak{a}}(R))$ 都是有限的；并且当 $\dim(R) \leq 3$时，对于任意理想 $\mathfrak{a}$（属于 R）和 $i \in \mathbb{N}_0$, $H^j_{\mathfrak{a}}(M)$ 的 Bass 数都是有限的，见 [2]。

关于不同条件下局部上同调模的 Bass 数研究，可参见 [1, 9] 和 [20] 。

本文对猜想1.1给出了部分解答，并考察了 $H^j_{\mathfrak{a}}(M)$ 的 Bass 数，其中 j是 M 关于 $\mathfrak{a}$ 的局部上同调模在第一个和最后一个非消失层级上的情形。更具体地说，我们证明以下结论。这里，$\operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(M$表示 M 关于 $\mathfrak{a}$的上同调维数，即 M 关于 $\mathfrak{a}$的局部上同调模最后一个非消失层级，定义见 2.8 。

定理 1.2。 假设 R是正则的，且 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(H^c_{\mathfrak{a}}(M))$，并设 $d := \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ 以及$c := \operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(M)$。则以下结论成立。

(1) $\mu^d(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) = \mu^{d+c}(\mathfrak{p}, M) < \infty$。*(2)* $\mu^{d-1}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{d+c-1}(\mathfrak{p}, M) < \infty$。当 $\mu^d(\mathfrak{p}, H^{c-1}_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$ 时，等式成立。*(3)* 若 $\mu^d(\mathfrak{p}, H^{c-1}_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$，则 $\mu^{d-2}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{d+c-2}(\mathfrak{p}, M) < \infty$。

上述定理给出了关于局部上同调模内射维数的以下结果。

定理 1.3. 设 R 是正则环且 $c := \operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(M)$。则以下结论成立。

(1) 若 $c > 0$，则 $\operatorname{id}_R(H^c_{\mathfrak{a}}(M)) < \dim(R)$，且 $H^c_{\mathfrak{a}}(M)$ 不是有限生成的。*(2)* 若 $c > 1$，则 $\operatorname{id}_R(H^c_{\mathfrak{a}}(M)) < \dim(R) - 1$。*(3)* 若 $c > 2$ 且对任意 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, $\mu^{\operatorname{ht}(\mathfrak{p})}(\mathfrak{p}, H^{c-1}_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$，则 $\operatorname{id}_R(H^c_{\mathfrak{a}}(M)) < \dim(R) - 2$。

此外，若 $\operatorname{grade}_{\mathfrak{a}}(M)$ 表示包含在 M中的极大 $\mathfrak{a}$-正则序列的长度，则我们建立了关于 $H^{\operatorname{grade}_{\mathfrak{a}}(M)}_{\mathfrak{a}}(M)$的 Bass 数的以下结果。注意，根据 [5, 定理 6. 2. 7], $\operatorname{grade}_{\mathfrak{a}}(M)$ 是关于 M 的局部上同调模的第一个非消失层，其中 $\mathfrak{a}$。

下面的定理也可视为将 [3, 定理 2. 1], 推广到非正则情形，其中深度大于 1。

定理 1.4. 设 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Var}(\mathfrak{a})$ 且 $g \leq$ 深度$_{\mathfrak{a}}(M)$。则以下结论成立。

(1) $\mu^0(\mathfrak{p}, H^g_{\mathfrak{a}}(M)) = \mu^g(\mathfrak{p}, M) < \infty$.

(2) $\mu^1(\mathfrak{p}, H^g_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{g+1}(\mathfrak{p}, M)$，并且若 $\mu^0(\mathfrak{p}, H^{g+1}_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$，则等式成立。*(3)* 若 $\mu^2(\mathfrak{p}, H^g_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$，则 $\mu^0(\mathfrak{p}, H^{g+1}_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{g+1}(\mathfrak{p}, M) < \infty$。*(4)* 若 $\mu^3(\mathfrak{p}, H^g_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$，则 $\mu^1(\mathfrak{p}, H^{g+1}_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{g+2}(\mathfrak{p}, M) < \infty$。

由上述定理可推得， $H^{\mathrm{grade}_{\mathfrak{a}}(M)}_{\mathfrak{a}}(M)$具有有限的 Goldie 维数。

值得一提的是，在 [12], 中，作者计算了 μ^0（$\mathfrak{p}$，$H^g_{\mathfrak{a}}$（R））和 μ^1（$\mathfrak{p}$，$H^g_{\mathfrak{a}}$（R））的 Bass 数，其中 R 是含有一个域的正则局部环，$\mathfrak{a}$ 是一个理想，且其 $g =$ 深度$_{\mathfrak{a}}$（R），使得对每个极小素理想$\mathfrak{p}$）$= g$，ht($\mathfrak{p}$ 属于 $\mathfrak{a}$。

本文始终沿用引言中引入的假设和记号。

2. Results

本文将使用以下版本的 Grothendieck 谱序列。

引理 2.1. *(*[17, 定理 10. 47]*)* 设 $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{B} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{C}$ 为协变加性函子，其中$\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$和 $\mathcal{C}$ 是有足够多内射对象的阿贝尔范畴。假设 $\mathcal{F}$ 是左正合的，且对于 $\mathcal{A}$中的每个内射对象 E， $\mathcal{G}(E)$ 都是右 $\mathcal{F}$- 无环的。那么，对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 A，存在如下第三象限谱序列，

$$E_2^{i,j} = R^i\mathcal{F}(R^j\mathcal{G}(A)) \underset{i}{\Rightarrow} R^{i+j}\mathcal{F}\mathcal{G}(A).$$

下述 谱序列的收敛性在本文中起着至关重要的作用。

引理 2.2. 假设$(R, \mathfrak{m})$ 是局部的，且 N 是一个 R-模。那么存在如下谱序列收敛性。

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^i_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, H^j_{\mathfrak{a}}(N)) \underset{i}{\Rightarrow} \mathrm{Ext}^{i+j}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, N). \tag{2.1}$$

证明.设 E 是一个内射 R-模。于是，根据 [5, 命题 2. 1. 4]， $\Gamma_{\mathfrak{a}}(E)$ 也是一个内射 R-模。此外，我们有如下 R-模同构

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)) &\cong \mathrm{Hom}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, \varinjlim_{t\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{a}^t}, N)) && \text{(by [5, Theorem 1. 3. 8])}\\
&\cong \varinjlim_{t\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, \mathrm{Hom}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{a}^t}, N)) && \text{(by ([19, 24. 10])}\\
&\cong \varinjlim_{t\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}} \otimes_R \tfrac{R}{\mathfrak{a}^t}, N)\\
&= \mathrm{Hom}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, N).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

上述同构具有函子性，即

$$\mathrm{Hom}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, \Gamma_{\mathfrak{a}}(-)) \cong \mathrm{Hom}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, -) : \mathfrak{C}_R \to \mathfrak{C}_R, \tag{2.3}$$

其中 $\mathfrak{C}_R$ 表示所有 R-模及 R-同态组成的范畴。现在，引理2.1完成了证明。 □

在以下定理中，我们考察 Bass 数 $\mu^i(\mathfrak{p}, H^g_{\mathfrak{a}}(M))$，其中 g 接近深度$_{\mathfrak{a}}(M)$，即包含在 $\mathfrak{a}$ 中的极大 M-正则序列的长度。

回顾一下，若 X 是一个 R-模且 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$，则对任意 $i \in \mathbb{N}_0$，i阶 Bass 数定义为 X 关于 $\mathfrak{p}$的

$$\mu^i(\mathfrak{p}, X) := \dim_{\kappa(p)}(\operatorname{Ext}^i_{R_{\mathfrak{p}}}(\kappa(\mathfrak{p}), X_{\mathfrak{p}})). \tag{2.4}$$

X 关于 $\mathfrak{p}$ 的 i阶 Bass 数的一个非常重要的性质：当 X 的极小内射分解中（唯一确定的） i项表示为不可分解内射 R-模的直和时，它给出其中与 $E_R(\frac{R}{\mathfrak{p}})$同构的直和项的个数；$E_R(\frac{R}{\mathfrak{p}})$是 R-模 $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ 的内射包。

此处，$\operatorname{Var}(\mathfrak{a})$表示集合 $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$。

定理 2.3。 设 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Var}(\mathfrak{a})$ 且 $g \leq$ 深度$_{\mathfrak{a}}(M)$。则以下结论成立。

(1) $\mu^0(\mathfrak{p}, H^g_{\mathfrak{a}}(M)) = \mu^g(\mathfrak{p}, M) < \infty$。*(2)* $\mu^1(\mathfrak{p}, H^g_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{g+1}(\mathfrak{p}, M)$，且若 $\mu^0(\mathfrak{p}, H^{g+1}_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$，则等式成立。*(3)* 若 $\mu^2(\mathfrak{p}, H^g_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$，则 $\mu^0(\mathfrak{p}, H^{g+1}_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{g+1}(\mathfrak{p}, M) < \infty$。*(4)* 若 $\mu^3(\mathfrak{p}, H^g_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$，则 $\mu^1(\mathfrak{p}, H^{g+1}_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{g+2}(\mathfrak{p}, M) < \infty$。

证明。 首先注意到，深度$_{\mathfrak{a}}(M) \leq$ 深度$_{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$，并且由于 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Var}(\mathfrak{a})$，根据平坦基变换定理（[5, 定理 4. 3. 2]），将 R 替换为 $R_{\mathfrak{p}}$ 后，我们可以假设 $(R, \mathfrak{m})$ 是局部的，且 $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$。现在，考虑谱序列 2.1的收敛性，

$$E_2^{i,j} = \operatorname{Ext}^i_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, H^j_{\mathfrak{a}}(M)) \underset{i}{\Rightarrow} \operatorname{Ext}^{i+j}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, M).$$

(1) 由于 $g \leq$ 深度$_{\mathfrak{a}}(M)$，根据 [5, 定理 6. 2. 7],

$$0 = \operatorname{Ext}^i_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, H^j_{\mathfrak{a}}(M)) = E_2^{i,j} = E_\infty^{i,j} \quad \text{for all } i \in \mathbb{N}_0 \text{ and all } j < g. \tag{2.5}$$

此外，存在一个滤过

$$0 \subseteq \Phi_g \subseteq \cdots \subseteq \Phi_1 \subseteq \Phi_0 = \operatorname{Ext}^g_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, M),$$

由 $\operatorname{Ext}^g_R(\frac{R}{\mathfrak{m}}, M)$ 的子模构成，使得

$$E_\infty^{i,j} \cong \tfrac{\Phi_i}{\Phi_{i+1}}, \text{ for all } i, j \in \mathbb{N}_0 \text{ with } i + j = g.$$

现在，2.5表明

$$\operatorname{Hom}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, H^g_{\mathfrak{a}}(M)) = E_2^{0,g} = E_\infty^{0,g} \cong \operatorname{Ext}^g_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, M).$$

(2) 利用2.5 我们得到

$$\operatorname{Ext}^1_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, H^g_{\mathfrak{a}}(M)) = E_2^{1,g} = E_\infty^{1,g}.$$

此外，存在一个滤过

$$0 \subseteq \Phi_{g+1} \subseteq \cdots \subseteq \Phi_2 \subseteq \Phi_1 \subseteq \Phi_0 = \operatorname{Ext}^{g+1}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, M), \tag{2.6}$$

$\operatorname{Ext}^{g+1}_R(\frac{R}{\mathfrak{m}}, M)$ 的子模，使得

$$E_\infty^{i,j} \cong \tfrac{\Phi_i}{\Phi_{i+1}}, \text{ for all } i, j \in \mathbb{N}_0 \text{ with } i + j = g + 1.$$

2.5意味着滤过 2.6 实际上具有如下形式

$$0 = \Phi_{g+1} = \cdots = \Phi_2 \subseteq \Phi_1 \subseteq \Phi_0 = \mathrm{Ext}_R^{g+1}(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, M).$$

因此,

$$\mathrm{Ext}_R^1(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, H_{\mathfrak{a}}^g(M)) \cong \Phi_1, \tag{2.7}$$

是 $\mathrm{Ext}_R^{g+1}(\frac{R}{\mathfrak{m}}, M)$ 的子模。如果 $\mu^0(\mathfrak{p}, H_{\mathfrak{a}}^{g+1}(M)) = 0$那么

$$0 = E_\infty^{0,g+1} = \frac{\mathrm{Ext}_R^{g+1}(\frac{R}{\mathfrak{m}}, M)}{\Phi_1}.$$

因此，利用 2.7 可得

$$\mathrm{Ext}_R^1(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, H_{\mathfrak{a}}^g(M)) \cong \mathrm{Ext}_R^{g+1}(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, M),$$

结果即得。

(3) 假设 $\mu^2(\mathfrak{p}, H_{\mathfrak{a}}^g(M)) = 0$。则 $E_2^{2,g} = 0$由 2.5 我们可推得

$$\mathrm{Hom}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, H_{\mathfrak{a}}^{g+1}(M)) = E_2^{0,g+1} = E_\infty^{0,g+1}.$$

利用第 (1) 和 (2) 部分中使用的谱序列收敛性概念，后一个模是 $\mathrm{Ext}_R^{g+2}(\frac{R}{\mathfrak{m}}, M)$ 的子商。这就证明了该结论。

(4) 设 $\mu^3(\mathfrak{p}, H_{\mathfrak{a}}^g(M)) = 0$。那么 $E_2^{3,g} = 0$并且由 2.5 可得

$$\mathrm{Ext}_R^1(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, H_{\mathfrak{a}}^{g+1}(M)) = E_2^{1,g+1} = E_\infty^{1,g+1}.$$

因此，运用与上述各部分类似的论证，$\mathrm{Ext}_R^1(\frac{R}{\mathfrak{m}}, H_{\mathfrak{a}}^{g+1}(M))$ 是 $\mathrm{Ext}_R^{g+2}(\frac{R}{\mathfrak{m}}, M)$ 的子商。换言之，

$$\mu^1(\mathfrak{m}, H_{\mathfrak{a}}^{g+1}(M)) \leq \mu^{g+2}(\mathfrak{m}, M) < \infty.$$

□

回顾一下，若一个 R-模 X 满足 X 不含非零子模的无限直和，则称其具有有限 Goldie 维数；等价地，其内射包 $E_R(X)$ 可分解为有限个不可分解（内射）子模的直和。

注意，由 [4, 定理 2. 2], $H^{\mathrm{grade}_{\mathfrak{a}}(M)}_{\mathfrak{a}}(M)$ 有有限多个关联素理想。上述定理现在给出以下推论。

推论 2.4。 $H^{\mathrm{grade}_{\mathfrak{a}}(M)}_{\mathfrak{a}}(M)$ 具有有限的 *Goldie* 维数。

相对于 $\mathfrak{a}$ 的 R-模 X 的上同调维数定义为

$$\mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(X) := \sup\{i \in \mathbb{N}_0 | H_{\mathfrak{a}}^i(X) \neq 0\}. \tag{2.8}$$

注意，鉴于 [5, 推论 3. 3. 3], $\mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(X) < \infty$. 上同调维数（即局部上同调最后一个非消失层次）是该理论中的一个重要不变量，已受到广泛关注；例如参见 [7, 14] 和 [16]。

在下述定理中，我们研究 $\mu^i(\mathfrak{p}, H_{\mathfrak{a}}^j(M))$ 的 Bass 数，其中 R 是正则的，且 $j \in \{\mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(M), \mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(M) - 1\}$。

定理 2.5。 假设 R 是正则的， $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(H^c_{\mathfrak{a}}(M))$，并令 $d := \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ 和 $c := \operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(M)$。则以下陈述成立。

(1) $\mu^d(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) = \mu^{d+c}(\mathfrak{p}, M) < \infty$。 *(2)* $\mu^{d-1}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{d+c-1}(\mathfrak{p}, M) < \infty$。当 $\mu^d(\mathfrak{p}, H^{c-1}_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$ 时等式成立。 *(3)* 如果 $\mu^d(\mathfrak{p}, H^{c-1}_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$，那么 $\mu^{d-2}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{d+c-2}(\mathfrak{p}, M) < \infty$。

证明。 令 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(H^c_{\mathfrak{a}}(M)$ 。于是，根据平坦基变换定理（[5, 定理 4. 3. 2]），$\operatorname{cd}^{\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(M) = c$。因此，我们可以假设（$R, \mathfrak{m}$）是维数为 d 且 $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$的正则局部环。

(1) 考虑以下谱序列收敛性（2.1）

$$E_2^{i,j} = \operatorname{Ext}^i_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, H^j_{\mathfrak{a}}(M)) \underset{i}{\Rightarrow} \operatorname{Ext}^{i+j}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, M).$$

由于 R 是维数为 d 的正则 $c = \operatorname{cd}_{\mathfrak{a}}(M)$，我们有

$$E_\infty^{i,j} = E_2^{i,j} = 0 \quad \text{for all } i, j \in \mathbb{N}_0 \text{ with } i > d \quad \text{or } j > c. \tag{2.9}$$

因此，可以推导出

$$\operatorname{Ext}^d_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) = E_2^{d,c} = E_\infty^{d,c} \cong \operatorname{Ext}^{d+c}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, M),$$

这证明了（1）部分。

（2）由2.9,

$$\operatorname{Ext}^{d-1}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) = E_2^{d-1,c} = E_\infty^{d-1,c}. \tag{2.10}$$

此外，存在一个滤过

$$0 \subseteq \Phi_{d+c-1} \subseteq \cdots \subseteq \Phi_2 \subseteq \Phi_1 \subseteq \Phi_0 = \operatorname{Ext}^{d+c-1}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, M), \tag{2.11}$$

$\operatorname{Ext}^{d+c-1}_R(\frac{R}{\mathfrak{m}}, M)$ 的子模，使得

$$E_\infty^{i,j} \cong \tfrac{\Phi_i}{\Phi_{i+1}}, \text{ for all } i, j \in \mathbb{N}_0 \text{ with } i + j = d + c - 1.$$

利用 2.9，上述滤过实际上具有以下形式

$$0 = \Phi_{d+c-1} = \cdots = \Phi_{d+1} \subseteq \Phi_d \subseteq \Phi_{d-1} = \cdots = \Phi_0 = \operatorname{Ext}^{d+c-1}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, M). \tag{2.12}$$

因此，由 2.10,

$$\operatorname{Ext}^{d-1}_R(\tfrac{R}{\mathfrak{m}}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) \cong \tfrac{\operatorname{Ext}^{d+c-1}_R(\frac{R}{\mathfrak{m}}, M)}{\phi_d}$$

是 $\operatorname{Ext}^{d+c-1}_R(\frac{R}{\mathfrak{m}}, M)$ 的子商，因此 $\mu^{d-1}(\mathfrak{m}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{d+c-1}(\mathfrak{m}, M)$。若 $\mu^d(\mathfrak{p}, H^{c-1}_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$，则 $E^{d, c-1}_\infty = E^{d,2}_{\infty}{}^{c-1} = 0$，且在滤过 2.12 中，$0 = \Phi_{d+1} = \Phi_d$。因此，$\operatorname{Ext}^{d-1}_R(\frac{R}{\mathfrak{m}}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) \cong \operatorname{Ext}^{d+c-1}_R(\frac{R}{\mathfrak{m}}, M)$，结论得证。 –

(3) 若 $\mu^d(\mathfrak{p}, H^{c-1}_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$，则 $E^{d, c-1}_2 = 0$。因此，

$$E_2^{d-2,c} = E_3^{d-2,c} = E_\infty^{d-2,c}.$$

再次利用谱序列收敛性的概念，$E^{d-2, c}_\infty$ 是 $\operatorname{Ext}^{d+c-2}_R(\frac{R}{\mathfrak{m}}, M)$ 的子商，这就证明了该断言。 –

□

作为上述定理的推论，我们在下面的推论中研究 R 为正则时的内射维数 $\mathrm{id}_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M))$。

推论 2.6. 设 R 是一个正则环，且 $c := \mathrm{cd}_{\mathfrak{a}}(M)$。则下列命题成立。

(1) 若 $c > 0$，则 $id_R(H^c_{\mathfrak{a}}(M)) < dim(R)$，且 $H^c_{\mathfrak{a}}(M)$ 不是有限生成的。*(2)* 若 $c > 1$，则 $id_R(H^c_{\mathfrak{a}}(M)) < dim(R) - 1$。*(3)* 若 $c > 2$ 且对任意 $\mathfrak{p} \in Spec(R)$，$\mu^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})}(\mathfrak{p}, H^{c-1}_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$，则 $id_R(H^c_{\mathfrak{a}}(M)) < dim(R) - 2$。

证明。 由于 R 是正则的，对于任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{pd}_{R_{\mathfrak{p}}}(\kappa(\mathfrak{p}))$。

(1) 若 $c > 0$ 则对任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $\mathrm{Ext}^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})+c}_{R_{\mathfrak{p}}}(\kappa(\mathfrak{p}) \ M_{\mathfrak{p}}) = 0$，根据2.5(1)

$$\mu^{\dim(R)}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) = 0, \text{ for all } \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R),$$

因此 $\mathrm{id}_R(H^c_{\mathfrak{a}}(M)) < \dim(R)$。

现在反设， $H^c_{\mathfrak{a}}(M)$ 是有限生成的。那么，根据[15,第 1 引理，页码 154],对于任意 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(H^c_{\mathfrak{a}}(M))$,

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})}_{R_{\mathfrak{p}}}(\kappa(\mathfrak{p}), H^c_{\mathfrak{a}}(M)_{\mathfrak{p}}) \neq 0,$$

this，根据 2.5(1)，可得 $\mu^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})+c}(\mathfrak{p}, M) \neq 0$，这与之矛盾 .

(2) 设 $c > 1$ 和 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$。则

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})+c-1}_{R_{\mathfrak{p}}}(\kappa(\mathfrak{p}), M_{\mathfrak{p}}) = 0. \tag{2.13}$$

若 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(R)$，则利用 2.13 和 2.5(2),

$$\mu^{\dim(R)-1}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{\dim(R)+c-1}(\mathfrak{p}, M) = 0.$$

若 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(R) - 1$，则由 2.13 和 2.5(1),

$$\mu^{\dim(R)-1}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) = \mu^{\dim(R)-1+c}(\mathfrak{p}, M) = 0.$$

若 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \dim(R) - 1$，则由于 R是正则的， $\mu^{\dim(R)-1}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$.因此，$\mu^{\dim(R)-1}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$均成立。

(3) 现在，设 $c > 2$ 和 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$。则

$$\mathrm{Ext}^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})+c-2}_{R_{\mathfrak{p}}}(\kappa(\mathfrak{p}), M_{\mathfrak{p}}) = 0. \tag{2.14}$$

若 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(R)$，则根据假设， $\mu^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})}(\mathfrak{p}, H^{c-1}_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$并利用2.14和2.5(3),

$$\mu^{\dim(R)-2}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{\dim(R)+c-2}(\mathfrak{p}, M) = 0.$$

当 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(R) - 1$时，根据 2.14 和 2.5(2),

$$\mu^{\dim(R)-2}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \mu^{\dim(R)+c-2}(\mathfrak{p}, M) = 0.$$

如果 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(R) - 2$，那么根据 2.14 和 2.5(1)，

$$\mu^{\dim(R)-2}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) = \mu^{\dim(R)+c-2}(\mathfrak{p}, M) = 0.$$

当 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \dim(R) - 2$ 时，由于 R 是正则的，有 $\mu^{\dim(R)-2}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$. 因此，对于所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$，都有 $\mu^{\dim(R)-2}(\mathfrak{p}, H^c_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$。故 $\mathrm{id}_R(H^c_{\mathfrak{a}}(M)) < \dim(R) - 2$.

□

Huneke 和 Sharp（[11]），以及独立地，Lyubeznik（[13]），证明了：如果（R, $\mathfrak{m}$）是一个含有域的正则局部环，那么

$$\mathrm{id}_R(H^i_{\mathfrak{a}}(R)) \leq \dim(H^i_{\mathfrak{a}}(R)).$$

此外，在 [9] 中，Hellus 证明了等式

$$\mathrm{id}_R(H^i_{\mathfrak{a}}(R)) = \dim(H^i_{\mathfrak{a}}(R))$$

当 R 是一个含有域的正则局部环时，在某些情况下成立。

注意，根据平坦基变换定理（[5, 定理 4. 3. 2]）以及 Grothendieck 消失定理（[5,定理 . 1. 2]），可以得到

$$\dim(H^i_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \dim(R) - i,$$

当 R 是 Cohen–Macaulay 环时。

现在，鉴于上述讨论和前面的推论，自然会提出如下问题。

问题 2.7. 设 R 为正则环。该不等式何时

$$\mathrm{id}_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M)) \leq \dim(R) - i$$

成立？

注意，即使在非正则情形下，也存在用 $\mathrm{id}_R(M)$ 来估计 $\mathrm{id}_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ 的一些界。例如，[18] 中证明，若 $(R, \mathfrak{m})$ 是局部的，且 $t \in \mathbb{N}_0$ 满足对所有 $i \neq t$ 都有 $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$，则 $\mathrm{id}_R(H^t_{\mathfrak{a}}(M)) = \mathrm{id}_R(M) - t$.

References

˜1. J. Alvarez Montaner, F. Sohrabi, 图的覆盖理想的局部上同调的 *Bass* 数, J. Alg. Comb. **53**(2021) 263–297, https://doi.org/10.1007/s10801-019-00928-0. 2. N. Abazari and K. Bahmanpour, 关于局部上同调模 *Bass* 数的有限性, J. Alg. Appl. 10 (2011) 783-791. 3. K. Bahmanpour, R. Naghipour, M. Sedghi, 关于局部上同调模 *Bass* 数的有限性与共极大性, Houston J. Math. 40 (2014), 319-337. 4. M. P. Brodmann and A. Lashgari Faghani, 局部上同调模关联素理想有限性的一个结果, Proc. Amer. Math. Soc., **128**:10 (2000) 2851–2853 5. M. Brodmann, R.Y. Sharp, 《局部上同调：代数导论及其几何应用》, 第2版，剑桥大学出版社，(2012). 6. W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay* 环, 第 2 版，剑桥大学出版社，(1998).

7. K. Divaani-Aazar, R. Naghipour and M. Tousi, 某些代数簇的上同调维数, Proc. Amer. Math. Soc.**130**(12) (2002) 3537-3544. 8. R. Hartshorne, 仿射对偶与余有限性, Inventiones Mathematicae, **9**:2 (1970) 145–64, https://doi.org/10.1007/BF01404554. 9. M. Hellus, 关于局部上同调模的内射维数札记, Proc. Amer. Math. Soc.,**136**:7 (2008) 2313–2321. 10. C. Huneke, 局部上同调问题 , 交换代数与代数几何中的自由分解，Res. Notes Math. 2 (1992), 93-108. 11. C. Huneke and R. Y. Sharp, 局部上同调模的 *Bass* 数，Trans. Amer. Math. Soc. 339 (1993) 765-779. 12. A. J. Soto Levins, 第一个非零局部上同调模的 *Bass* 数, https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.15667. 13. G. Lyubeznik, 局部上同调模的有限性性质（*D*-模在交换代数中的应用）, Invent. Math., 113 (1993) 41-55. 14. G. Lyubeznik, 关于特征为 $p > 0$ 时局部上同调的消失, Compositio Math., **142**(2006) 207-221. 15. H. Matsumura, 交换环理论, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 8 (剑桥大学出版社，剑桥，1986). 16. A. Ogus, 代数簇的局部上同调维数, Ann. Math.,**98**:2 (1973) 327-365. 17. J. J. Rotman,同调代数导论, 第2版。Academic press (2008). 18. A. Vahidi, 局部上同调模的内射维数，Bull. Korean Math. Soc., **54**: 4 (2017) 1331–1336. https://doi.org/10.4134/BKMS.b160571. 19. R. Wisbauer,模与环理论基础, Algebra, Logic and Applications, 3, 阿姆斯特丹：Gordon and Breach (1991). 20. K. Yanagawa, 支集于单项式理想的局部上同调模的 *Bass* 数, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **131** (2001) 45-60.

Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, Tehran, Iran.

电子邮件地址： jahangiri@khu.ac.ir, jahangiri.maryam@gmail.com

电子邮件地址： ahangari.rasoul@gmail.com