连通理想的亚历山大对偶的 Simis 性质和打包性质

OM PRAKASH BHARDWAJ、KANOY KUMAR DAS 和 RUTUJA SAWANT

Abstract. 本文研究图的连通理想的亚历山大对偶的普通幂与符号幂何时相等，并对所有这类图给出完整分类。此外，我们证明了 Conforti–Cornu`ejols 猜想对这类理想成立。

arXiv:2603.18751v1 [math.AC] 19 Mar 2026

1. Introduction

设 $R = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 是域 $\mathbb{K}$上的多项式环， $I \subseteq R$ 是一个理想。 I的符号幂记作 $I^{(s)}$，定义为

$$I^{(s)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(I)} I^s R_{\mathfrak{p}} \cap R.$$

理想的符号幂长期以来一直是交换代数和代数几何中的核心研究主题。从几何角度看，素理想的第 s 个符号幂由所有满足以下条件的元素构成：它们在相应簇的每个闭点处的消失阶至少为 s 。此外，符号幂在这些领域许多基本结果的证明中发挥着至关重要的作用。

对于平方自由单项式理想，判断等式 $I^{(s)} = I^s$何时成立，可以通过相关超图获得组合解释。尤其是，这个问题与 Conforti 和 Cornuéjols 提出的一个著名猜想密切相关´，[8],该猜想通常称为装填问题。Conforti 和 Cornuéjols 最初提出的猜想´由 Gitler、Valencia 和 Villarreal 用交换代数的语言重新表述 [20], ，其内容如下。

猜想 1.1. 对于平方自由单项式理想 I，其所有符号幂与普通幂相等，当且仅当该理想 I 具有打包性质。

对于任何未加解释的术语，请参阅第2节。猜想的一个方向已为人所知，且相对容易证明：如果 $I^{(s)} = I^s$ 对所有 $s \geq 1$都成立，那么 I 具有打包性质（见 [9, 第 4]节）。非平凡的方向是证明：如果 I 具有打包性质，那么 I 的符号幂与普通幂相等。该猜想已对若干类理想得到验证，包括图的边理想、图的 [31], 3-路径理想、图的 [2], 4-路径理想、[24], 补边理想 [30], 以及拟阵理想 [16]。对于等式 $I^{(s)} = I^s$ 对所有 $s \geq 1$都成立的单项式理想，称为*Simis*理想。除平方自由单项式理想外，文献中还对各种单项式理想类的 Simis 性质进行了广泛研究；例如参见[4, 5, 10, 18, 23, 25, 26, 27]。

2020 数学主题分类。 13C05、13F55、05C70、05E40。关键词与短语。 平方自由单项式理想、符号幂、打包性质、亚历山大对偶。

设 G 是一个简单图，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。G的边理想记为 $I(G)$，它是由对应于 G的边的二次单项式生成的平方自由单项式理想。根据 Stanley–Reisner对应，存在一个单纯复形 $\Delta(G)$，使得 $I(G) = I_{\Delta(G)}$，其中 $I_{\Delta(G)}$ 表示 $\Delta(G)$的 Stanley–Reisner理想。单纯复形 $\Delta(G)$通常称为G的独立复形。在 [28], 中，Paolini 和 Salvetti 引入了图的高阶独立复形这一概念，它推广了独立复形。对于 $t \geq 2$，G的 t-独立复形记为 $\mathrm{Ind}_t(G)$，由所有满足以下条件的子集 $A \subseteq V(G)$组成：诱导子图 $G[A]$ 的每个连通分支至多含有 $t-1$ 个顶点。特别地，$\mathrm{Ind}_2(G)$与独立复形 $\Delta(G)$重合。

$\mathrm{Ind}_t(G)$ 的 Stanley–Reisner理想的极小单项式生成元与具有 t 个顶点的 G 的连通子图相对应。因此，理想 $I_t(G) := I_{\mathrm{Ind}_t(G)}$称为 G [3, 11] 的 t-连通理想 。这些理想自然地推广了边理想，因为 $I_2(G) = I(G)$，并引起了学界的广泛关注，参见 [1, 12, 13, 14, 15, 17, 29]。此外，对于任意图 G，经典3-路径理想与3-连通理想相同。

本文研究图的 t-连通理想的亚历山大对偶所涉及的 Conforti–Cornu´ejols 猜想。在 [6], Bodas 等人的研究中，他们考察了打包性质在亚历山大对偶下的表现。他们证明，若 I 是一致超图的边理想且 I 满足打包性质，则其亚历山大对偶 $I^\vee$ 也满足打包性质；但反向结论通常不成立（见 [6, 例 5.9]）。在 [2],Alilooee 和 Banerjee 的研究中，他们刻画了3-路径理想的打包性质，并验证了这一情形下的 Conforti–Cornu´ejols 猜想。因此，若 $I_3(G)$ 满足打包性质，则其亚历山大对偶 $I_3(G)^\vee$ 也满足打包性质。

在这些结果的基础上，我们对所有 $t \geq 3$ 的图的 t-连通理想的亚历山大对偶，彻底解决了 Conforti–Cornu´ejols 猜想。特别地，我们证明如下结论。

定理 1.2（定理 3.8）。设 G 是一个具有 n 个顶点的连通图，且 $t \geq 3$ 是一个整数。设 $J_t(G)$ 表示 t-连通理想的亚历山大对偶，其中该理想属于 G。则以下陈述等价：

(1) $J_t(G)$ 满足打包性质；*(2)* $J_t(G)^{(s)} = J_t(G)^s$ 对所有 $s \geq 1$ 均成立；*(3)* 以下情况之一成立：*(a)* $n = t$；*(b)* 对某个 $n \geq t$，$G = P_n$；*(c)* $G = C_n$，且以下情况之一成立：*(i)* $t = 3$ 且 $n \in \{3, 6, 9\}$；*(ii)* $t = 4$ 且 $n \in \{4, 8\}$；*(iii)* $t \geq 5$ 且 $n = t$。

本文组织如下。在第2节中，我们回顾必要的定义和背景结果。主要定理的证明见第3节。作为应用，我们证明，Simis理想的这一刻画为一个线性规划对偶性问题提供了解。

2. Preliminaries

在本节中，我们回顾必要的定义和结果，并确定全文所用的记号。设 $\mathbb{K}$ 为一个域，$R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 为系数属于 $\mathbb{K}$的多项式环。对于单项式 $m = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$，$a_i \geq 0$表示集合 $\{x_i \mid a_i \neq 0\}$，称为 m的支撑，记作 Supp(m)。对于单项式理想 $I \subseteq R$，$\mathcal{G}(I)$ 表示理想 I的所有极小单项式生成元的集合。单项式理想I 的符号幂可以利用该理想的主分解表示（见 [7, 定理 3.7]）。对于平方自由单项式理想，其符号幂的表达式可如下给出。设 $I \subseteq R$为一个平方自由单项式理想，并设 $I = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_k$为其主分解。那么，$I$ 的 s 次符号幂为

$$I^{(s)} = P_1^s \cap \ldots \cap P_k^s.$$

如果对所有 $s \geq 1$ 都有 $I^{(s)} = I^s$，则称理想 I 为$Simis$。高度为 c 的平方自由单项式理想 $I \subseteq R$ 若在 I 中存在长度为 c 的单项式正则序列，则称其为$K\ddot{o}nig$。若通过将任意数量的变量设为 0 或 1，从 I 得到的每个理想都是 K$\ddot{o}$nig，则称理想 I 具有打包性质。在理想中将某些变量设为 0，是交换代数中一种众所周知的技巧，通常称为限制。一般而言，限制运算有助于识别相对于与限制相容的性质而言的极小禁结构。对于平方自由单项式理想，普通幂与符号幂相等就是这样一种性质。简单图的边理想的普通幂与符号幂相等的经典刻画有效地运用了这一思想：如果图包含奇圈，那么某个符号幂就不同于相应的普通幂。另一方面，将变量设为 1 可以视为对这些变量进行局部化。

设 G 是一个简单图，其顶点集为 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，边集 $E(G)$由 $V(G)$的二元子集构成。给定子集 $S \subseteq V(G)$，$G[S]$ 表示 G 在顶点集 S上诱导的子图。对于 $t \geq 2$，G 的 t-连通理想 记作 $I_t(G)$，它是由下式定义的平方自由单项式理想

$$I_t(G) := \langle x_{i_1} \cdots x_{i_t} \mid G[\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\}] \text{ is connected} \rangle \subseteq R.$$

t-连通理想可视为经典边理想的高次推广。与 $I_t(G)$相关联的单纯复形称为 t-独立复形。

我们的主要研究对象是 t-连通理想的亚历山大对偶。设 I 是一个由 $\{\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{a}_r}\}$极小生成的平方自由单项式理想。 I的亚历山大对偶 记作 $I^\vee$，定义如下：

$$I^\vee := \mathbf{m}_{\mathbf{a}_1} \cap \cdots \cap \mathbf{m}_{\mathbf{a}_r},$$

其中 $\mathbf{m}_{\mathbf{a}_i} = \langle x_j : \ x_j \mid \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} \rangle$，$1 \leq i \leq r$。注意，$I^\vee$ 仍然是一个平方自由单项式理想，其极小单项式生成元对应于与 I 相关联的超图的极小顶点覆盖。因此，I 的亚历山大对偶通常称为 I的覆盖理想。本文始终将 $J_t(G) := I_t(G)^\vee$ 记作图 G的 t-连通理想的覆盖理想。如果 $x_{i_1} \cdots x_{i_r} \in \mathcal{G}(J_t(G))$，那么集合 $C = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\}$是与 $I_t(G)$相关联的超图的一个极小顶点覆盖。我们称 C 为 G的一个 t-覆盖。下面我们回顾图的边理想的亚历山大对偶的 Simis 性质。

定理 2.1 ([19, 见推论 3.17、定理 4.6、命题 4.27])。 设 G 是一个简单图。那么， $J_2(G)$ 是 *Simis*，当且仅当 G 是二部的。

以下事实是专家们所熟知的（例如，参见 [9]）。证明普通幂与符号幂相等后，以下引理足以得出 Conforti–Cornu´ejols 猜想的一个方向。

引理 2.2. 设 $I \subseteq R$ 是一个平方自由单项式理想。若 I 是 *Simis*，则 I 满足打包性质。

3. Main Results

本节中，我们证明本文的主要结果。设 G 是一个连通简单图。若顶点 $v \in V(G)$ 满足 $G \setminus v$ 不连通，则称其为割点；否则，称 v 为非割点。以下引理是证明主要定理的关键步骤之一。

引理 3.1. 设 G 是一个图， $H \subseteq G$ 是 G 的一个连通诱导子图，满足 $|V(H)| = t+1$，且 H 恰有 $r \geq 3$ 个非割点。则

(1) $J_t(G)^{(r-1)} \neq J_t(G)^{r-1}$。

(2) $J_t(G)$不是打包的。

证明。 (1) 不失一般性，假设 $V(H) = \{x_1, \ldots, x_{t+1}\}$，其中非割点为 $\{x_1, \ldots, x_r\}$。考虑素理想 $P = \langle x_1, x_2, \ldots, x_{t+1}\rangle$，并取 $J_t(G)R_P$。注意到

$$J_t(G)_P \coloneqq J_t(G)R_P = \bigcap_{i=1}^{r} \langle x_1, \ldots, x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, \ldots x_{t+1}\rangle R_p.$$

若令 $f = \prod_{i=1}^{r} x_i$，则对所有 $1 \leq i \leq r$， $f \in \langle x_1, \ldots, x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, \ldots x_{t+1}\rangle^{r-1}$，因此 $f \in J_t(G)_P^{(r-1)}$。另一方面，很容易看出

$$J_t(G)_P = \langle x_i x_j \mid 1 \leq i < j \leq r\rangle R_P + \langle x_{r+1}, \ldots, x_{t+1}\rangle R_P.$$

由于 $r \geq 3$，通过比较 f 的次数和 J_t 的极小生成集$(G)_P$，我们有$f \notin J_t(G)_P^{r-1}$。因此，$J_t(G)_P^{(r-1)} \neq J_t(G)_P^{r-1}$，从而 $J_t(G)^{(r-1)} \neq J_t(G)^{r-1}$，如所求。

(2) 为了说明 $J_t(G)$ 不是打包的，考虑通过对所有 $i \notin V(H)$ 将 $x_i = 1$ 代入而得到的理想 I。于是我们有，

$$\begin{aligned} I &= \bigcap_{i=1}^{r} \langle x_1, \ldots, x_{i-1}, \widehat{x_i}, x_{i+1}, \ldots x_{t+1}\rangle \\ &= \langle x_i x_j \mid 1 \leq i < j \leq r\rangle + \langle x_{r+1}, \ldots, x_{t+1}\rangle. \end{aligned}$$

注意，height$(I) = t$，并且 I 的单项式正则序列长度至多为 $t+1-r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor = t+1-\lceil \frac{r}{2} \rceil < t$，因为 $r \geq 3$。□

众所周知，任何具有 $n \geq 2$ 个顶点的连通图至少有两个非割点。此外，恰好具有两个非割点的图只有路径。因此，根据上述引理，如果 $J_t(G)$是 Simis，或者如果 $J_t(G)$是打包的，那么任意

具有 G 个顶点的连通诱导子图都必须是一条路径。这表明，对于 G 而言，使 $J_t(G)$成为 Simis（或打包）的可能图是路径和圈。

我们首先考虑 G 为一条路径的情形。设 P_n 表示具有 n个顶点的路径图，其中

$$V(P_n) = \{x_1, \ldots, x_n\},$$
$$E(P_n) = \{x_i x_{i+1} \mid 1 \le i \le n-1\}.$$

我们证明，对于所有 $t \ge 1$， $J_t(G)$ 既是 Simis 的，也是打包的。以下命题完整描述了 P_n 的 t-连通理想的覆盖理想的极小生成集。

命题 3.2. 对于 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n$，$\mathbf{x}^\alpha = x_{i_1} \cdots x_{i_r} \in \mathcal{G}(J_t(P_n))$ 当且仅当满足以下条件：

(1) $r \ge \lfloor \frac{n}{t} \rfloor$; *(2)* $i_1 \le t$， $i_2 \ge t+1$; *(3)* $i_r \ge n-t+1$， $i_{r-1} \le n-t$; *(4)* 对所有 $1 \le j \le r-1$， $i_{j+1} - i_j \le t$; *(5)* 对所有 $1 \le j \le r-2$， $i_{j+2} - i_j \ge t+1$ 。

证明。 假设$\mathbf{x}^\alpha = x_{i_1} \cdots x_{i_r}$满足给定条件。注意， P_n 的每个连通诱导子图本身都是一条路径。条件 (2) –(4) 表明，从路径 P_n 中移除顶点 $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ 后，所得的图不包含任何长度为 t 的路径。换言之，集合 $C = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\}$ 是 P_n的一个 t-覆盖。现在，为了证明这个 t-覆盖的极小性，我们将证明，对于任意 $1 \le k \le r$， $C' = C \setminus x_{i_k}$ 都不能构成 P_n 的 t-覆盖。如果 $k = 1$，或者 $k = r$，那么分别由条件 (2) 和 (3) 可知， C' 不是 P_n的 t-覆盖。另一方面，如果 $2 \le k \le r-1$，那么条件 (5) 表明， C' 仍然不是 P_n的 t-覆盖。

对于逆向部分，假设$\mathbf{x}^\alpha = x_{i_1} \cdots x_{i_r} \in \mathcal{G}(J_t(P_n))$. 于是，顶点集 $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\}$ 对应于 P_n的一个极小 t-覆盖。现在很容易验证，任意极小 t-覆盖都满足 (1) –(5) 中给出的条件。□

命题 3.3。 对于 $n \ge t \ge 2$，对所有 $s \ge 1$，都有 $J_t(P_n)^{(s)} = J_t(P_n)^s$ 。特别地，$J_t(P_n)$具有打包性质。

证明。 我们只需证明，对所有 $s \ge 1$， $J_t(P_n)^{(s)} \subseteq J_t(P_n)^s$ 。我们对 $n+s$ 作归纳。注意，如果 $s = 1$或者 $n = t$，则断言总是成立。对于后一种情况， $J_t(P_n)$ 是由这些变量生成的素理想，因此是一个完全交理想。现在假设 $n + s > t + 1$。令 $f \in J_t(P_n)^{(s)}$。我们可以写成 $J_t(P_n)^{(s)} = \langle x_1, \ldots, x_t \rangle^s \cap J_t(P_n \setminus x_1)^{(s)}$。于是有 $f \in J_t(P_n \setminus x_1)^{(s)} = J_t(P_n \setminus x_1)^s$，其中最后一个等式由归纳假设得出。因此，存在某个 $g \in \mathcal{G}(J_t(P_n \setminus x_1))$，使得 $g \mid f$ 且 $\frac{f}{g} \in J_t(P_n \setminus x_1)^{s-1}$。我们将证明分为两种情况：

Case 1: 假设 $x_1 \mid f$。我们进一步考虑以下子情形：

Subcase 1(A): 假设 $\mathrm{Supp}(g) \cap \{x_2, \ldots, x_t\} \ne \emptyset$。由于 $g \in \mathcal{G}(J_t(P_n \setminus x_1))$，由命题 3.2(2)可得 $|\mathrm{Supp}(g) \cap \{x_2, \ldots, x_t\}| = 1$，因此 $g \in \mathcal{G}(J_t(P_n))$。此外，由于 $x_1 \nmid g$，我们有 $\frac{f}{g} \in \langle x_1, \ldots, x_t \rangle^{s-1}$。再者，根据归纳假设， $\frac{f}{g} \in J_t(P_n \setminus x_1)^{s-1} = J_t(P_n \setminus x_1)^{(s-1)}$。这意味着 $\frac{f}{g} \in \langle x_1, \ldots, x_t \rangle^{s-1} \cap J_t(P_n \setminus x_1)^{(s-1)} =$

$J_t(P_n)^{(s-1)} = J_t(P_n)^{s-1}$，其中最后一个等式同样由归纳假设得出。最后，由于 $g \in \mathcal{G}(J_t(P_n))$，我们有 $f \in J_t(P_n)^s$。

Subcase 1(B)：假设 $\mathrm{Supp}(g) \cap \{x_2, \ldots, x_t\} = \emptyset$。那么根据命题 3.2，$x_{t+1} \mid g$。在这种情况下，我们取 $g' = x_1 g$。由于 $x_1 \mid f$，$g' \mid f$，而且 $\frac{f}{g'} \in \langle x_1, \ldots, x_t\rangle^{s-1}$。另一方面，由于 $\frac{f}{g} \in J_t(P_n \setminus x_1)^{s-1}$，我们有 $\frac{f}{g'} \in J_t(P_n \setminus x_1)^{s-1} = J_t(P_n \setminus x_1)^{(s-1)}$，其中最后一个等式用到了归纳假设。因此，我们得到 $\frac{f}{g'} \in \langle x_1, \ldots, x_t\rangle^{s-1} \cap J_t(P_n \setminus x_1)^{(s-1)} = J_t(P_n)^{(s-1)} = J_t(P_n)^{s-1}$，其中最后一个等式同样由归纳假设得出。根据命题 3.2，$g' \in J_t(P_n)$，因此，$f \in J_t(P_n)^s$，即得所求。

Case 2：假设 $x_1 \nmid f$。若 $\mathrm{Supp}(g) \cap \{x_2, \ldots, x_t\} \neq \emptyset$，则通过与子情形 1(A) 中类似的论证，可得 $g \in J_t(P_n)$，且 $\frac{f}{g} \in J_t(P_n)^{s-1}$。因此，我们有$f \in J_t(P_n)^s$。最后，假设 $\mathrm{Supp}(g) \cap \{x_2, \ldots, x_t\} = \emptyset$。由于 $x_1 \nmid f$和 $f \in \langle x_1, \ldots, x_t\rangle^s$，存在整数 $a_i \geq 0, 2 \leq i \leq t$ 使得 $x_2^{a_2} x_3^{a_3} \cdots x_t^{a_t} \mid f$和 $\sum_{i=2}^{t} a_i = s$。现在，考虑满足 $a_\ell \neq 0$ 的最小 $\ell, 2 \leq \ell \leq t$，并取 $g' = x_\ell g$。注意，由命题 3.2 可得 $g' \in J_t(P_n)$。此外，由于 $\mathrm{Supp}(g) \cap \{x_1, \ldots, x_t\} = \emptyset$，且 $f \in J_t(P_n)^{(s)}$，对所有 $1 \leqq i \leq \ell$，我们有 $\frac{f}{g'} \in \langle x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+t-1}\rangle^{s-1}$。进一步，由于 $\frac{f}{g} \in J_t(P_n \setminus x_1)^{(s-1)} \subseteq J_t(P_n \setminus \{x_1, \ldots, x_\ell\})^{(s-1)}$，我们有 $\frac{f}{g'} \in J_t(P_n \setminus \{x_1, \ldots, x_\ell\})^{(s-1)}$。因此，$\frac{f}{g'} \in \bigcap_{i=1}^{\ell} \langle x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+t-1}\rangle^{s-1} \cap J_t(P_n \setminus \{x_1, \ldots, x_\ell\})^{(s-1)} = J_t(P_n)^{(s-1)} = J_t(P_n)^{s-1}$，其中最后一个等式由归纳假设得出。由于 $g' \in J_t(P_n)$，可知$f \in J_t(P_n)^s$，证明至此完成。□

接下来，我们考察圈的 t-连通理想。令 C_n 表示具有 n个顶点的圈，其中

$$V(C_n) = \{x_1, \ldots, x_n\},$$
$$E(C_n) = \{x_i x_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\}.$$

以下命题给出了 $J_t(C_n)$ 的极小生成集的完整描述。

命题 3.4。对于 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$，$\mathbf{x}^\alpha = x_{i_1} \cdots x_{i_r} \in \mathcal{G}(J_t(C_n))$ 当且仅当满足以下条件：

(1) $r \geq \lceil \frac{n}{t} \rceil$;
(2) $i_{j+1} - i_j \leq t$ *for all* $1 \leq j \leq r-1$, $n + i_1 - i_r \leq t$;
(3) $i_{j+2} - i_j \geq t+1$ *for all* $1 \leq j \leq r-2$, $n + i_1 - i_{r-1} \geq t+1$, $n + i_2 - i_r \geq t+1$.

证明。假设 $\mathbf{x}^\alpha = x_{i_1} \ldots x_{i_r}$ 满足给定条件。条件 (2) 表明，从 C_n 中移除顶点 $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ 后，所得的图不含任何长度为 t 的路径。换言之，集合 $C = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\}$ 是 C_n 的 t-覆盖。为证明该 t-覆盖的极小性，取 $C' = C \setminus \{x_{i_k}\}$，其中 $1 \leq k \leq r$。事实上，由条件 (3) 可知，C' 不是 C_n 的 t- 覆盖。因此，C 是 C_n 的一个极小 t- 覆盖，从而 $\mathbf{x}^\alpha \in \mathcal{G}(J_t(G))$。

反之，设 $\mathbf{x}^\alpha = x_{i_1} \cdots x_{i_r} \in \mathcal{G}(J_t(C_n))$. 于是，集合 $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\}$ 对应于圈 C_n的一个最小 t-覆盖。由于连续选取的顶点之间若存在超过 t 个顶点的间隔，其中就会包含一条 t-路径，因此连续索引之间的距离必须满足不等式 (2)。此外，覆盖的极小性意味着移除任意一个顶点后都必须产生长度至少为 t 的线段，从而得到不等式 (3)。

最后，将长度为 n 的圈划分为大小至多为 t 的间隔至少需要 $\lceil n/t \rceil$ 个顶点，因此条件 (1) – (3) 成立。□

命题 3.5。 $J_t(C_n)$ </style>是 $K\ddot{}onig$，当且仅当 $n = t\ell$ 对于某个 $\ell \geq 1$成立。

证明。假设对于某个 $\ell \geq 1$，有 $n = t\ell$。根据命题 3.4， $f_i := x_i x_{i+t} \cdots x_{i+(\ell-1)t} \in J_t(C_n)$ 对所有 $1 \leq i \leq t$ 均成立。注意，height$(J_t(C_n)) = t$，且 $f_1, \ldots, f_t$ 构成一个单项式正则序列。因此， $J_t(C_n)$ 是 K¨onig。反过来，假设对于某个 $1 \leq m \leq t-1$，有 $n = t\ell + m$ 。如果可能，假设存在一个单项式正则序列$g_1, \ldots, g_t \in \mathcal{G}(J_t(C_n))$。根据命题 3.4，对于所有 $1 \leq i \leq t$, deg$(g_i) \geq \lceil \frac{n}{t} \rceil = \ell + 1$。由于对于所有 $i \neq j \in [t]$， Supp$(g_i) \cap$ Supp$(g_j) = \emptyset$，因此我们有 $\sum_{i=1}^{t} |\text{Supp}(g_i)| \geq t(\ell+1) = t\ell + t > n$，矛盾。因此， $J_t(C_n)$ 不是 K¨onig。□

引理 3.6. 设 $n > t$ 为正整数，满足 $(n,t) \notin \{(6,3), (9,3), (8,4)\}$. 那么$J_t(C_n)$不是打包的。

证明。 注意，如果 $n \neq \ell t$，那么由命题 3.5 可知 $J_t(C_n)$ 不是 K¨onig，因此 $J_t(C_n)$ 不是打包的。因此，在证明的其余部分中，我们可以假设$n = \ell t$ 对某个整数 $\ell \geq 2$成立。我们先考虑 $t = 3$的情形。假设 $n = 3\ell$ 且$\ell \geq 4$。此时，理想 $J_3(C_n$具有如下形式

$$J_3(C_n) = \langle x_{n-1}, x_n, x_1 \rangle \cap \langle x_n, x_1, x_2 \rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-2} \langle x_i, x_{i+1}, x_{i+2} \rangle \right). \tag{1}$$

我们的策略是将适当的变量设为零，使所得理想成为某个奇圈的覆盖理想。定理 2.1 由此推出 $J_3(C_n)$ 不是打包的。我们接下来分以下几种情况讨论。

Case 1: $n = 12k$ 与 $k \geq 1$。
Subcase 1(A): 假设 k 为偶数。令 $x_1 = x_4 = x_7 = x_{10} = 0$并令 $x_{4i+13} = 0$对于 $0 \leq i \leq 3k-4$。将这些值代入方程（1）得

$$\begin{aligned} I = &\langle x_n, x_2 \rangle \cap \langle x_2, x_3 \rangle \cap \langle x_3, x_5 \rangle \cap \langle x_5, x_6 \rangle \cap \langle x_6, x_8 \rangle \cap \langle x_8, x_9 \rangle \\ &\cap \langle x_9, x_{11} \rangle \cap \langle x_{11}, x_{12} \rangle \cap \langle x_{12}, x_{14} \rangle \\ &\cap \left(\bigcap_{i=0}^{3k-5} \left(\langle x_{4i+14}, x_{4i+15} \rangle \cap \langle x_{4i+15}, x_{4i+16} \rangle \cap \langle x_{4i+16}, x_{4i+18} \rangle \right) \right) \\ &\cap \langle x_{12k-2}, x_{12k-1} \rangle \cap \langle x_{12k-1}, x_{12k} \rangle, \end{aligned}$$

这是 C_{9k-1}的覆盖理想。由于 k 是偶数， $9k-1$ 是奇数。
Subcase 1(B): 假设 k 是奇数。令 $x_{4i+1} = 0$ 对于 $0 \leq i \leq 3k-1$。于是

$$I = \langle x_n, x_2 \rangle \cap \left(\bigcap_{i=0}^{3k-2} \left(\langle x_{4i+2}, x_{4i+3} \rangle \cap \langle x_{4i+3}, x_{4i+4} \rangle \cap \langle x_{4i+4}, x_{4i+6} \rangle \right) \right) \cap \langle x_{12k-1}, x_{12k} \rangle,$$

这是 C_{9k} 的覆盖理想。由于 k 为奇数， $9k$ 为奇数。

CASE 2: 设 $n = 12k+3$ 满足 $k \geq 1$。令 $x_1 = x_5 = x_9 = 0$ 并令 $x_{3i+13} = 0$ 为 $0 \leq i \leq 4k-4$。代入公式（1）得

$$\begin{aligned} I = &\langle x_n, x_2\rangle \cap \langle x_2, x_3\rangle \cap \langle x_3, x_4\rangle \cap \langle x_4, x_6\rangle \cap \langle x_6, x_7\rangle \\ &\cap \langle x_7, x_8\rangle \cap \langle x_8, x_{10}\rangle \cap \langle x_{10}, x_{11}\rangle \cap \langle x_{11}, x_{12}\rangle \cap \langle x_{12}, x_{14}\rangle \\ &\cap \left(\bigcap_{i=0}^{4k-5} (\langle x_{3i+14}, x_{3i+15}\rangle \cap \langle x_{3i+15}, x_{3i+17}\rangle)\right) \cap \langle x_{12k+2}, x_{12k+3}\rangle, \end{aligned}$$

它是奇圈 C_{8k+3}的覆盖理想。

CASE 3: 假设 $n = 12k+6$ 满足 $k \geq 1$。令 $x_{3i+1} = 0$ 对于 $0 \leq i \leq 4k-2$，并另外令 $x_{12k-1} = x_{12k+3} = 0$。则由等式（1）可得

$$\begin{aligned} I = &\left(\bigcap_{i=0}^{4k-3} (\langle x_{3i+2}, x_{3i+3}\rangle \cap \langle x_{3i+3}, x_{3i+5}\rangle)\right) \cap \langle x_{12k-4}, x_{12k-3}\rangle \cap \langle x_{12k-3}, x_{12k-2}\rangle \\ &\cap \langle x_{12k-2}, x_{12k}\rangle \cap \langle x_{12k}, x_{12k+1}\rangle \cap \langle x_{12k+1}, x_{12k+2}\rangle \cap \langle x_{12k+2}, x_{12k+4}\rangle \\ &\cap \langle x_{12k+4}, x_{12k+5}\rangle \cap \langle x_{12k+5}, x_{12k+6}\rangle \cap \langle x_{12k+6}, x_2\rangle, \end{aligned}$$

它是奇圈 C_{8k+5}的覆盖理想。

CASE 4: 假设 $n = 12k+9$ 满足 $k \geq 1$。令 $x_{3i+1} = 0$ 对于 $0 \leq i \leq 4k-1$，并另外令 $x_{12k+2} = x_{12k+6} = 0$。则由等式（1）可得

$$\begin{aligned} I = &\left(\bigcap_{i=0}^{4k-2} (\langle x_{3i+2}, x_{3i+3}\rangle \cap \langle x_{3i+3}, x_{3i+5}\rangle)\right) \cap \langle x_{12k-1}, x_{12k}\rangle \cap \langle x_{12k}, x_{12k+1}\rangle \\ &\cap \langle x_{12k+1}, x_{12k+3}\rangle \cap \langle x_{12k+3}, x_{12k+4}\rangle \cap \langle x_{12k+4}, x_{12k+5}\rangle \cap \langle x_{12k+5}, x_{12k+7}\rangle \\ &\cap \langle x_{12k+7}, x_{12k+8}\rangle \cap (x_{12k+8}, x_{12k+9}) \cap \langle x_{12k+9}, x_2\rangle, \end{aligned}$$

它是长度为 $8k+7$ 的圈的覆盖理想，这就完成了 $t = 3$ 的证明。接下来，考虑情形 $t = 4$。令 $\ell \geq 4$ 并写作 $n = 4\ell$。我们有

$$J_4(C_{4\ell}) = \langle x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_1\rangle \cap \langle x_{n-1}x_n, x_1, x_2\rangle \cap \langle x_n x_1, x_2, x_3\rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-3} \langle x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+2}\rangle\right).$$

令 I 为由 对所有 $1 \leq m \leq \ell$ 将 $J_4(C_{4\ell})$ 中的 $x_{4m} = 0$ 设为所得的理想。 n

$$\begin{aligned} I = &\langle x_1, x_2, x_3\rangle \cap \langle x_2, x_3, x_5\rangle \cap \langle x_3, x_5, x_6\rangle \cap \cdots \cap \langle x_{4\ell-3}, x_{4\ell-2}, x_{4\ell-1}\rangle \\ &\cap \langle x_{4\ell-2}, x_{4\ell-1}, x_1\rangle \cap \langle x_{4\ell-1}, x_1, x_2\rangle. \end{aligned}$$

注意到， I 可视为长度为 3ℓ 的圈的 3-连通理想的覆盖理想。事实上，该圈由 $C_{4\ell}$ 删除顶点 x_{4m}、 $1 \leq m \leq \ell$，并用一条边连接 x_{4m} 的两个邻点而得到。由于 $\ell \geq 4$，由前面的讨论可知， I 不是打包的。因此，对于 $\ell \geq 4$， $J_4(C_{4\ell})$ 不是打包的。现在，考虑 $J_4(C_{12})$。令 $x_1 = x_4 = x_6 = x_8 = x_{11} = 0$ ，得到理想 I ，它可视为圈 C_7 的边理想的覆盖理想。由于 $J_2(C_7)$ 不是打包的，因此 $J_4(C_{12})$ 也不是打包的。

最后，我们通过对 t 作归纳，证明对于所有 $t \geq 5$ 和 $\ell \geq 2$， $J_t(C_{t\ell})$ 都不是打包的。首先考虑 $t = 5$ 的情形。令 $\ell \geq 3$ ，并通过对所有 $x_{5m} = 0$ 令其为.....，从 $J_5(C_{5\ell})$ 得到理想 I

对于所有 $1 \leq m \leq \ell$。与前面的论证一样，理想 I 可以视为长度为 4ℓ 的圈的 4-连通理想的覆盖理想。由于 $\ell \geq 3$，由上述讨论可知 I 不是打包的。因此，对于 $\ell \geq 3$， $J_5(C_{5\ell})$ 不是打包的。对于 $J_5(C_{10})$，对 $1 \leq r \leq 5$ 令 $x_{2r} = 0$。所得理想 I 可以视为 5- 圈的边理想的覆盖理想，而后者不是打包的。因此， $J_5(C_{10})$ 不是打包的。

现在假设 $t \geq 6$，并且对于所有整数 $t' < t$，断言均成立。令 $n = \ell t$ 满足 $\ell \geq 2$，并通过对所有 $1 \leq m \leq \ell$ 设置 $x_{tm} = 0$，从 $J_t(C_{t\ell})$ 得到一个理想 I。如前所述，所得理想 I 可视为长度为 $(t-1)\ell$ 的圈的 $(t-1)$-连通理想的覆盖理想。根据归纳假设， I 不是打包的。因此， $J_t(C_{t\ell})$ 不是打包的。□

命题 3.7。 以下陈述成立：

(1) $J_t(C_n)^{(s)} = J_t(C_n)^s$ 对所有 $s \geq 1$ 成立，当且仅当 *(a)* $t = 3$、$n = 3$、6、9；*(b)* $t = 4$、$n = 4$、8；*(c)* 对于 $t \geq 5$， $n = t$。

(2) $J_t(C_n)^{(s)} = J_t(C_n)^s$ 对所有 $s \geq 1$ 成立，当且仅当 $J_t(C_n)$ 是打包的。

证明。(1) 对于“如果”部分，注意到当 $n = t$ 时，理想 $J_t(C_t)$ 由变量生成。因此，对于所有 $s \geq 1$，都有 $J_t(C_t)^{(s)} = J_t(C_t)^s$。现在假设 $n \neq t$。对于 n 和 t 的其余情形，我们分别进行处理。

我们首先考虑 $n = 6$ 和 $t = 3$ 的情形。我们证明，对于所有 $s \geq 1$，都有 $J_3(C_6)^{(s)} = J_3(C_6)^s$。证明通过对 s 进行归纳来完成。当 $s = 1$ 时，该断言显然成立。假设对于每个 $\ell < s$，都有 $J_3(C_6)^{(\ell)} = J_3(C_6)^\ell$。因此，只需证明 $J_3(C_6)^{(s)} \subseteq J_3(C_6)^s$。令 $f \in J_3(C_6)^{(s)}$。不妨设 $x_6 \mid f$。根据符号幂的描述，可知

$$J_3(C_6)^{(s)} = \langle x_4, x_5, x_6\rangle^s \cap \langle x_5, x_6, x_1\rangle^s \cap \langle x_6, x_1, x_2\rangle^s \cap J_3(P_5)^{(s)}.$$

特别地， $f \in J_3(P_5)^{(s)}$。因此，由命题3.3，存在 $g \in \mathcal{G}(J_3(P_5))$ 使得$g \mid f$ 并且 $\frac{f}{g} \in J_3(P_5)^{s-1} = J_3(P_5)^{(s-1)}$. 我们考虑生成元 g的所有可能取法。

（1）若 $g = x_1x_4$ 或 $g = x_2x_5$，则 $g \in \mathcal{G}(J_3(C_6))$ 且 $g \mid f$。注意到 $\frac{f}{g} \in J_3(C_6)^{(s-1)} = J_3(C_6)^{s-1}$，其中最后一个等式由归纳假设得到。因此$f \in J_3(C_6)^s$。（2）若 $g = x_3$，令 $g' = x_3x_6$。则 $g' \in \mathcal{G}(J_3(C_6))$ 且 $g' \mid f$。同样地，注意到$\frac{f}{g'} \in J_3(C_6)^{(s-1)} = J_3(C_6)^{s-1}$，其中最后一个等式来自归纳假设。于是 $f \in J_3(C_6)^s$。

（3）若 $g = x_2x_4$，我们可以假设 $x_1 \nmid f$、 $x_3 \nmid f$以及 $x_5 \nmid f$；否则前面的某种情形将适用。因此 $x_6^s \mid f$。若令 $g' = x_2x_4x_6$，则注意到$\frac{f}{g'} \in J_3(C_6)^{(s-1)} = J_3(C_6)^{s-1}$，从而 $f \in J_3(C_6)^s$。

因此 $J_3(C_6)^{(s)} \subseteq J_3(C_6)^s$，从而，对于所有 $s \geq 1$， $J_3(C_6)^{(s)} = J_3(C_6)^s$。

接下来，我们考虑 $n = 9$ 和 $t = 3$ 的情形。为了证明对所有 $s \geq 1$， $J_3(C_9)^{(s)} = J_3(C_9)^s$，我们再次对 s 进行归纳。该命题在 $s = 1$ 时成立。假设对每个 $\ell < s$， $J_3(C_9)^{(\ell)} = J_3(C_9)^\ell$。现在只需证明 $J_3(C_9)^{(s)} \subseteq J_3(C_9)^s$. 。令 $f \in J_3(C_9)^{(s)}$

并假设 $x_9 \mid f$。根据符号幂的表达式，我们得到

$$J_3(C_9)^{(s)} = \langle x_7, x_8, x_9\rangle^s \cap \langle x_8, x_9, x_1\rangle^s \cap \langle x_9, x_1, x_2\rangle^s \cap J_3(P_8)^{(s)}.$$

因此，由命题 3.3，存在 $g \in \mathcal{G}(J_3(P_8))$，使得 $g \mid f$ 且 $\frac{f}{g} \in J_3(P_8)^{s-1} = J_3(P_8)^{(s-1)}$.由命题 3.2，可得

$$\mathcal{G}(J_3(P_8)) = \left\{ \begin{array}{c} x_1x_4x_5x_8, x_1x_4x_6, x_1x_4x_7, x_2x_4x_6, x_2x_4x_7, x_2x_5x_6, \\ x_2x_5x_7, x_2x_5x_8, x_3x_4x_7, x_3x_5x_7, x_3x_5x_8, x_3x_6 \end{array} \right\}.$$

现在我们逐一考察生成元 g 的可能取值。

(1) 若 $g = x_1x_4x_7$ 或 $g = x_2x_5x_8$，则 $g \in \mathcal{G}(J_3(C_9))$。因此 $g \mid f$，并且，$\frac{f}{g} \in J_3(C_9)^{(s-1)} = J_3(C_9)^{s-1}$，其中最后一个等式由归纳得到。因此，$f \in J_3(C_9)^s$。

(2) 若 $g = x_3x_6$，令 $g' = x_3x_6x_9$。则 $g' \in \mathcal{G}(J_3(C_9))$ 且 $g' \mid f$。注意，$\frac{f}{g'} \in J_3(C_9)^{(s-1)}$，因此由归纳假设，$\frac{f}{g'} \in J_3(C_9)^{s-1}$。所以，$f \in J_3(C_9)^s$。

(3) 如果 $g = x_1x_4x_6$，我们可以假设 $x_3 \nmid f$ 和 $x_7 \nmid f$；否则前面的某种情况适用。于是可得 $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \mid f$，其中 $\alpha_1 + \alpha_2 \geq s$，以及 $x_8^{\beta_1}x_2^{\beta_2} \mid f$，其中 $\beta_1 + \beta_2 \geq s$。令 $g' = x_1x_4x_6x_9 \in J_3(C_9)$。然后注意到 $\frac{f}{g'} \in J_3(C_9)^{(s-1)} = \frac{f}{g'} \in J_3(C_9)^{s-1}$，其中等式由归纳法得出。因此，$f \in J_3(C_9)^s$。当 $g \in \{x_3x_5x_8, x_2x_4x_6, x_3x_5x_7, x_2x_5x_6, x_3x_4x_7, x_2x_4x_7, x_2x_5x_7\}$ 时，类似的论证同样适用。

(4) 若 $g = x_1x_4x_5x_8$，我们可以假设 x_2，x_3，x_6，$x_7 \nmid f$；否则，前面的某种情形适用。于是可得 $x_1^s \mid f$ 和 $x_8^s \mid f$。因此，$\frac{f}{g} \in J_3(C_9)^{(s-1)} = J_3(C_9)^{s-1}$，其中等式由归纳假设得出。由于 $g \in \mathcal{G}(J_3(C_9))$，我们得到 $f \in J_3(C_9)^s$。

Th在任何情况下，我们都有 $f \in J_3(C_9)^s$，因此对于所有 $s \geq$，$J_3(C_9)^{(s)} = J_3(C_9)^s$ 1.

最后，考虑 $n = 8$ 和 $t = 4$ 的情形。我们通过对 s 进行归纳，证明对于所有 $s \geq 1$，$J_4(C_8)^{(s)} = J_4(C_8)^s$。假设对于每个 $1 \leq \ell < s$，都有 $J_4(C_8)^{(\ell)} = J_4(C_8)^\ell$。不妨设 $f \in J_4(C_8)^{(s)}$，其中 $x_8 \mid f$。根据符号幂的表达式，我们有

$$J_4(C_8)^{(s)} = \langle x_5, x_6, x_7, x_8\rangle^s \cap \langle x_6, x_7, x_8, x_1\rangle^s \cap \langle x_7, x_8, x_1, x_2\rangle^s \cap \langle x_8, x_1, x_2, x_3\rangle^s \cap J_4(P_7)^{(s)}.$$

由于 $f \in J_4(P_7)^{(s)}$，由命题3.3，$f \in J_4(P_7)^s$，因此存在 $g \in \mathcal{G}(J_4(P_7))$ 使得 $g \mid f$ 且 $\frac{f}{g} \in J_4(P_7)^{s-1}$。由命题3.2，我们有

$$\mathcal{G}(J_4(P_7)) = \{x_1x_5,\ x_2x_5,\ x_2x_6,\ x_3x_5,\ x_3x_6,\ x_3x_7,\ x_4\}.$$

现在我们逐一考虑生成元 g 的可能取值。

（1）如果 $g \in \{x_1x_5, x_2x_6, x_3x_7\}$，那么 $g \in \mathcal{G}(J_4(C_8))$。注意到 $\frac{f}{g} \in J_4(C_8)^{(s-1)} = J_4(C_8)^{s-1}$，其中等式由归纳假设得到。因此 $f \in J_4(C_8)^s$。

(2) 若 $g = x_4$，取 $g' = x_4x_8$。则 $g' \in \mathcal{G}(J_4(C_8))$ 且 $g' \mid f$。此外，$\frac{f}{g'} \in J_4(C_8)^{(s-1)} = J_4(C_8)^{s-1}$，因此 $f \in J_4(C_8)^s$。

(3) 若 $g = x_2x_5$，我们不妨设 $x_1 \nmid f$、$x_4 \nmid f$ 且 $x_6 \nmid f$；否则前面的某种情形适用。于是 $x_5^{\alpha_1}x_7^{\alpha_2} \mid f$ with $\alpha_1+\alpha_2 \geq s$、$x_7^{\beta_1}x_8^{\beta_2} \mid f$ with $\beta_1+\beta_2 \geq s$，且 $x_2^{\gamma_1}x_3^{\gamma_2} \mid f$ with $\gamma_1+\gamma_2 \geq s$。令 $g' = x_2x_5x_8$。则 $\frac{f}{g'} \in J_4(C_8)^{(s-1)} = J_4(C_8)^{s-1}$，从而 $f \in J_4(C_8)^s$。(4) 若 $g = x_3x_5$，我们不妨设 x_1、x_2、x_4、$x_7 \nmid f$；否则前面的某种情形适用。于是 $x_8^s \mid f$。令 $g' = x_3x_5x_8$。因此 $\frac{f}{g'} \in J_4(C_8)^{(s-1)} = J_4(C_8)^{s-1}$，故 $f \in J_4(C_8)^s$。(5) 若 $g = x_3x_6$，我们不妨设 x_2、x_4、x_5、$x_7 \nmid f$；否则前面的某种情形适用。因此 $x_3^s \mid f$ and $x_6^s \mid f$。令 $g' = x_3x_5x_8$ 则 $\frac{f}{g'} \in J_4(C_8)^{(s-1)} = J_4(C_8)^{s-1}$，所以 $f \in J_4(C_8)^s$。

因此，无论哪种情况 $f \in J_4(C_8)^s$。由此可得 $J_4(C_8)^{(s)} = J_4(C_8)^s$ 对所有$s \geq 1$均成立。至此，‘若’部分的证明完成。‘仅若’部分由引理 3.6和引理 2.2得出。

(2) 由 (1) 和引理 3.6得出。 □

设 G 是一个有 n 个顶点的连通图，并假设 $t = n$。那么 $I_t(G) \subseteq R$ 是由所有变量的乘积生成的主理想。因此，$J_t(G)$ 与极大理想 $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$重合。特别地，$J_t(G)$ 具有 Simis 性质并满足打包性质。结合引理 3.1、命题 3.3和命题 3.7，即可得到主要结果。

定理 3.8。设 G 是一个具有 n 个顶点的连通图，且 $t \geq 3$ 是一个整数。令$J_t(G)$ 表示 G的 t-连通理想的亚历山大对偶。则以下陈述等价：

(1) $J_t(G)$ 具有打包性质；*(2)* 对所有 $s \geq 1$，$J_t(G)^{(s)} = J_t(G)^s$；*(3)* 以下条件之一成立：*(a)* $n = t$；*(b)* 对某个 $n \geq t$，$G = P_n$；*(c)* $G = C_n$ 且以下条件之一成立：*(i)* $t = 3$ 且 $n \in \{3, 6, 9\}$；*(ii)* $t = 4$ 且 $n \in \{4, 8\}$；*(iii)* $t \geq 5$ 且 $n = t$。

线性优化的应用。设 $I = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{a}_m} \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个平方自由单项式理想，其中 $\mathbf{a}_i \in \{0,1\}^n$。设 A 为一个元素为 0 或 1 的 $n \times m$ 矩阵，其列向量为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$。考虑由下式给出的整数线性规划

$$A^T\mathbf{x} \geq 1, \mathbf{x} \in \{0,1\}^n. \tag{2}$$

注意，上述整数线性规划始终有解。我们关注上述系统的极小解。注意，上述系统的一个极小可行解$\mathbf{x}$（即对于任意$\mathbf{w} \in \{0,1\}^n$，若$\mathbf{x} - \mathbf{w} \in \{0,1\}^n$，则$\mathbf{x} - \mathbf{w}$ 不是可行解）对应于理想 I的亚历山大对偶的一个极小单项式生成元。令 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r\}$ 为

方程（2）中给出的系统的所有极小可行解的集合。考虑$n \times r$矩阵 B，其列向量为向量 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r$。考虑以下线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \alpha \cdot \mathbf{y} \\ &\text{subject to} \quad B^T\mathbf{y} \geq \mathbf{1},\ \mathbf{y} \in \mathbb{N}^n. \end{aligned} \tag{3}$$

and

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad \mathbf{z} \cdot \mathbf{1} \\ &\text{subject to} \quad B\mathbf{z} \leq \alpha,\ \mathbf{z} \in \mathbb{N}^r. \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\alpha \in \mathbb{N}^n$，而 $\mathbf{1}$ 是 $\mathbb{N}^r$ 中的向量，其每个分量都等于 1。设 $\tau_\alpha(B)$ 和 $\nu_\alpha(B)$ 分别为上述线性规划问题的最优值。根据上述记号和术语，并由主定理可得以下结论。

定理 3.9。设 $A = M_t(G)$为连通图 G中一个 t-连通理想所对应的关联矩阵，设 B 为整数线性规划 *(2)* 的最小可行解所对应的矩阵。那么对每个 $\alpha \in \mathbb{N}^n$，$\tau_\alpha(B) = \nu_\alpha(B)$ 当且仅当矩阵 A 具有以下形式之一：

(1) $A = M_t(P_n)$ $n \geq t$。注意，$M_t(P_n)$ 是路径图中 t-连通理想所对应的关联矩阵，路径图如下所示：

$$(M_t(P_n))_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } j \leq i \leq j + t - 1, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中 $1 \leq i \leq n$ 和 $1 \leq j \leq n - t + 1$。

(2) $A = M_t(C_n)$ 满足 $t = n$ 或 $(t, n) \in \{(3, 6), (3, 9), (4,8)\}$。注意，$M_t(C_n)$ 是与圈 C_n 的 t-连通理想对应的关联矩阵，由下式给出

$$(M_t(C_n))_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq (i - j \pmod n) \leq t - 1, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Acknowledgement

使用计算机代数软件 Macaulay2 [21] 和软件包 [22] 进行的实验提供了许多有价值的见解。第一作者获得 ANRF 国家博士后奖学金的资助。作者感谢 Infosys 基金会的支持。

References

[1] F. M. Abdelmalek, P.Deshpande, S. Goyal, A. Roy, 和 A. Singh。弦图、高阶独立性与顶点可分解复形。《国际代数与计算杂志》，33(03):481– 498，2023。2[2] A. Alilooee 和 A. Banerjee。三次无平方单项式理想的打包性质。《代数组合学杂志》，54(3):803–813，2021。1，2[3] H. Ananthnarayan、O. Javadekar 和 A. Maithani。图的连通理想的线性商。《代数组合学杂志》，61(3):34，2025。2

[4] A. Banerjee、B. Chakraborty、K. K. Das、M. Mandal 和 S. Selvaraja。带权有向图边理想的普通幂与符号幂相等。《通讯代数》，51(4):1575–1580，2023。1[5] A. Banerjee、K. K. Das 和 S. Selvaraja。带权有向图边理想的普通幂与符号幂。《马来西亚数学科学学会公报》，48(3):第 85 号论文，22，2025。1[6] H. Bodas、B. Drabkin、C. Fong、S. Jin、J. Kim、W. Li、A. Seceleanu、T. Tang 和 B. Williams。装填问题的推论。《代数组合学杂志》，54(4):1095–1117，2021。2[7] S. M. Cooper、R. J. D. Embree、H. T. H`a 和 A. H. Hoefel。单项式理想的符号幂。《爱丁堡数学学会会刊》(2)，60(1):39–55，2017。3[8] G. Cornu´ejols 和 M. Conforti。平衡矩阵、整数规划与组合优化的分解定理。74:147–169，1990。1[9] H. Dao、A. De Stefani、E. Grifo、C. Huneke 和 L. N´u˜nez Betancourt。理想的符号幂。载于《奇点与叶层：几何、拓扑与应用》，《施普林格数学与统计学会议录》第 222 卷，第 387–432 页。施普林格，尚，2018。1，4[10] K. K. Das。某些类单项式理想的普通幂与符号幂相等。《图与组合》，40(12)，2024。1[11] K. K. Das、A. Roy 和 K. Saha。弦图的高阶独立复形的斯坦利–赖斯纳理想。《国际代数与计算杂志》，在线先行版，2026。2[12]P. Deshpande、A. Roy 和 R. Sawant。 r-共连通子图复形、弦性与 Fr¨oberg 定理。arXiv:2510.25710。2[13] P. Deshpande、A. Roy、A. Singh 和 A. Van Tuyl。Fr¨oberg 定理、顶点可分裂性与高阶独立复形。《交换代数杂志》，16(4):391–410，2024。2[14] P. Deshpande、S. Shukla 和 A. Singh。图的距离 r-支配数与 r-独立复形。《欧洲组合学杂志》，102:第 103508 号论文，14，2022。2[15] P. Deshpande 和 A. Singh。图的高阶独立复形及其同伦类型。《拉马努金数学学会杂志》，第 53–71 页，2021年3月。2[16] A. Ficarra 和 S. Moradi。多拟阵理想的符号幂。《纯粹与应用代数杂志》，229(10):108082，2025。1[17]A. Ghosh 和 S. Selvaraja。连通图理想及其幂的线性分解。arXiv:2512.06346。2[18] P. Gimenez、J. Mart´ınez-Bernal、A. Simis、R. H. Villarreal 和 C. E. Vivares。单项式理想的符号幂与科恩–麦考利顶点加权有向图。载于《奇点、代数几何、交换代数及相关主题》，第 491–510 页。施普林格，尚，2018。1[19] I. Gitler、E. Reyes 和 R. H. Villarreal。平方自由单项式理想的膨胀代数及其与组合优化问题的一些联系。《落基山数学杂志》，39(1):71–102，2009。4[20] I. Gitler、C. Valencia 和 R. H. Villarreal。关于二部图的 Rees 代数的一则注记。《纯粹与应用代数杂志》，201(1-3):17–24，2005。1[21] D. R. Grayson 和 M. E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。网址：http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/。12[22] E. Grifo。SymbolicPowers：一个 Macaulay2 软件包。2.0 版。Macaulay2 软件包，网址：https://github.com/Macaulay2/M2/tree/stable/M2/Macaulay2/packages。12[23] G. Grisalde、J. Mart´ınez-Bernal 和 R. H. Villarreal。带权有向图的正规无挠边理想。《通讯代数》，52(4):1672–1685，2024。1[24] W. Hochst¨attler 和 M. Nasernejad。由图导出的梅格尔 4-一致超图分类。《组合艺术》，161:49–59，2024。1[25] M. Mandal 和 D. K. Pradhan。带权有向图中的符号幂。《国际代数与计算杂志》，31(3):533–549，2021。1[26] M. Mandal 和 D. K. Pradhan。比较带权有向图边理想的符号幂。《代数组合学杂志》，56(2):453–474，2022。1[27] F. O. M´endez、M. Vaz Pinto 和 R. H. Villarreal。符号幂：Simis 与加权单项式理想。《代数及其应用杂志》，24(13-14):第 2541001 号论文，28，2025。1[28] G. Paolini 和 M. Salvetti。加权层与阿廷群的同调。《代数几何与拓扑》，18(7):3943–4000，2018。2

[29] A. Roy 和 S. K. Patra。与图的联相关联的超边理想的分次贝蒂数。马来西亚数学科学学会通报，48，2025年。2[30] A. Roy 和 K. Saha。普通幂与符号幂相等以及康福蒂-科努尔斯猜想对于（$n-2$）-均匀杂乱图。2025年。1[31] A. Simis、W. V. Vasconcelos 和 R. H. Villarreal。关于图的理想理论。《代数杂志》，167(2):389– 416，1994。1

Chennai Mathematical Institute, Siruseri, Tamil Nadu, India
电子邮箱: omprakash@cmi.ac.in; opbhardwaj95@gmail.com

Chennai Mathematical Institute, Siruseri, Tamil Nadu, India
电子邮箱地址: kanoydas0296@gmail.com; kanoydas@cmi.ac.in

Chennai Mathematical Institute, Siruseri, Tamil Nadu, India
电子邮箱地址: rutuja@cmi.ac.in