arXiv:2603.18820v1 [math.RT] 19 Mar 2026

AN AU 基于TOMATA的字符串代数上砖模的检验

AMIT KUBER 和 ANNOY SENGUPTA

印度理工学院坎普尔分校数学与统计学系，坎普尔 *208016*，北方邦，印度

ABSTRACT. 受 Deaconu、Mousavand 和 Paquette 关于某些温和代数的无限字符串砖与 Sturmian 词之间联系的近期研究启发，我们发展了一种确定自动机的装饰版本，称为 *multi-entry inverse automaton*（简称 *MIA*），该自动机接受带指针词。随后，我们将一个 MIA $\mathrm{M}_{\Lambda\delta}$ 与字符串代数 Λ上的 $\{0,1\}$ 关联起来，并证明，Λ 上的字符串可以视为 $\mathrm{M}_{\Lambda\delta}$所接受的带指针词的某些等价类。通过在该 MIA 上定义 *(weak) brick words*，我们证明，一个有限/无限字符串模（分别为带模）是砖模，当且仅当与之对应的二进制带指针词等价类中的每个词都是 $\mathrm{M}_{\Lambda\delta}$上的砖块词（分别为弱砖词）。Deaconu 等人的结果由此立即得到。

1. INTRODUCTION

固定一个代数闭域 $\mathcal{K}$。研究 $\mathcal{K}$ 上有限维代数的表示论时，一个基本问题是对不可分解模进行分类。对于字符串代数这一类代数，Butler 和 Ringel [BR87] 在 Gelfand 和 Ponomarev[GP67]，的工作基础上最初引入了这一概念；其有限维不可分解模的分类已完整解决：每个有限维不可分解模要么是字符串模，要么是带模。这些模由从底层箭图及其关系中导出的纯组合数据构造而成。

近年来，关于砖模 [MP25b, MP25a, DLP+25, SK24, DMP25], 的研究蓬勃发展。砖模是指自同态代数同构于基域的模。根据定义，砖模是不可分解的。由于这种刚性，砖模的分类通常比所有不可分解模的分类更容易处理，因此它们是理解表示范畴的自然起点。

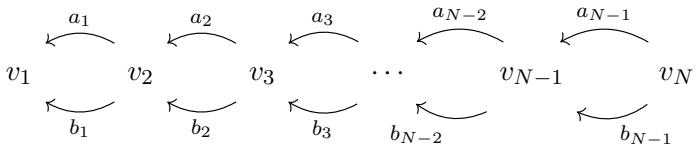

FIGURE 1. Λ_N与 $\rho = \{a_1b_2, a_2b_3, \cdots, a_{N-2}b_{N-1}, b_1a_2, b_2a_3, \cdots, b_{N-2}a_{N-1}\}$

在字符串代数上砖模分类的研究方向中，人们发现，某一类 Λ_N 温和代数上的一些带砖模（图1）与 Dequˆene 等人 [DLP+25] 所称的、基于线性有序字母表的完美聚类词之间存在一种令人惊讶的联系。作者 [SK24] 将这一联系推广，给出了一个词论刻画，描述了一个包含温和代数在内的大类字符串代数上的所有带砖模。最近，Deaconu 等人 [DMP25], 通过 Sturmian 词刻画了双Kronecker代数上的无限字符串砖模Λ_3（图1），推动了无限维砖模的研究。这些进展共同凸显了一种现代趋势：无论模是有限维还是无限维，其“砖性”都可以通过词组合的视角来刻画。

本文旨在推广 [DMP25] 的主要结果。在讨论我们的贡献之前，了解 Sturmian词 很重要。字母表 {a,b} 上无限词 w 的 复杂度 是指其长度为 n的每个 $n \in \mathbb{N}$ 所对应的不同子词的数量，其中 $\mathbb{N}$ 表示所有正

E-mail address: askuber@iitk.ac.in, sengupta.annoy44@gmail.com。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16G10, 16G20, 16D80, 68R15, 05A05, 68Q45, 03D05。

Key words and phrases. 字符串代数，砖模，自动机，词理论，Sturmian。

整数。周期词的复杂度绝对有界。*Sturmian*词 [Lot97，第 2]章，是在 {a、b} 上的无限非周期词，在所有非周期词中具有最小复杂度。Sturmian 词的复杂度对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都恰好为 $n+1$。

从几何角度看，Sturmian 词可以形象地表示为整数格上一条斜率为无理数的直线的“切割序列”：直线与竖直线（分别与水平线）的交点计为字母 a（分别为 b）的一次出现。特征斯图姆词是将这条直线平移至经过原点后得到的唯一“切割序列”。以下给出 Sturmian 词和特征斯图姆词的刻画，这些刻画有助于研究砖模。

命题 1.1. [Lot97, 命题 2.1.3, 2.1.22] 无限非周期词w 在 {a,b} 上是 *Sturmian* 词，当且仅当不存在有限词w′，使得aw′a 和bw′b 都作为子词出现在w中。右无限斯特姆词w 是特征斯图姆词，当aw 和bw 均为 *Sturmian* 词时成立。

设 a := $b_1 a_1^{-1}$、b := $a_2^{-1} b_2$ 是 Λ_3上的字符串。令 $\mathfrak{S}$(a,b) 表示所有能够写成 {a,b}上的无限词的 Λ_3 上的无限字符串的集合。现在我们可以陈述 Deaconu 等人的主要结果了。

定理 1.2。 [DMP25，定理 4。10] 设 w 是 {上的一个无限词，其中字母为a、b}，并且 $\mathfrak{S}(w) \in \mathfrak{S}$(a、b) 是相应的无限字符串。

(1) 若 w 是右无限的，则 w 是特征斯图姆词，当且仅当相应的（直和）字符串模 $M(\mathfrak{S}(w))$ 是砖模。*(2)* 若 w 是双无限的，则 w 是 *Sturmian* 词，当且仅当相应的（直和）字符串模$M(\mathfrak{S}(w))$ 是砖模。

分别用它们的“奇偶词” d(a) := 01 和 d(b) := 10 替换 a 和 b 后，命题 1.1 中给出的 Sturmian 词 w 的刻画可转化为以下陈述：不存在 $\{0,1\}$ 上的有限词 z，使得 01z01 和 10z10 都是 d(w) 的子词。注意，对应于 $\{0,1\}$ 上词 z 的字符串是一个以 v_2开头（并以其结尾）的循环字符串；而且， $\{0,1\}$上的任意无限词包含 1z0（分别为 0z1）作为子词，当且仅当它包含 01z01（分别为 10z10）作为子词。因此，在这个受限情形下，{a,b} 上的 Sturmian 词可以刻画为一个不含子词 z 的词 w，其中 0z1 和 1z0 都是 w 的子词；前提是我们能够捕捉对应于 z 的字符串的循环性——我们通过自动机来实现这一点。

自动机为识别和生成给定字母表上满足规定限制的词集提供了有效的计算框架。更正式地说，字母表 A 上的自动机 是一种以 A 上的词作为输入，并判断输入词是否被“接受”的机器。如果存在一个自动机 M，使得 M 所接受的词集为 W，则称 A 上的有限词集 W 是正则 的。作为箭表示论与自动机理论之间的首次交汇，Rees [Ree08]构造了一个自动机，证明单项代数上的字符串集合是正则的。沿着这一研究方向，Srivastava 与第一作者 [SK26] 实现了特殊双串代数稳定秩计算的自动化。

在本文中，我们构造了一种称为多入口逆自动机（*MIA*）（定义 4.1）的自动机的装饰版本，用于给出字符串代数上某些砖模的词论刻画。顾名思义，MIA 具有多个初始状态，而确定自动机只有一个初始状态。因此，该机器以 A 上的一个词 w 和一个初始状态 v 作为输入，然后判断“带指针词”（v，w）是否被接受。对于一个底层箭图为 $Q = (Q_0, Q_1)$ 的字符串代数 Λ，我们给出了在字母表 $Q_1 \sqcup Q_1^{-1}$上构造 MIA M_Λ 的方案（定义 5.1），并证明 Λ上的有限（分别为无限）字符串集合与 M_Λ所接受的有限（分别为无限）带指针词的某些等价类之间存在双射（定理 5.6）。

传统上，不可分解模的代数性质“砖性”是通过相关字符串中存在公共因子和像子串来刻画的 [CB88, Kra91, CB98]。本文最重要的贡献是在 MIA 的框架下引入了砖块词 （定义 4.7）和弱砖词 （定义 4.8）。给定 A 上的一个 MIA M，某个从字母表 A $\to$ 到 A′ 的满射 φ，称为局部双射 （定义 4.11），它使我们能够定义一个记作 M_φ、在 A′ 上的 MIA，从而得到 M 上的（弱）砖词与 Mφ 上的（弱）砖词之间的一个双射（推论 4.13）。奇偶映射δ： $Q_1 \sqcup Q_1^{-1} \to \{0,1\}$ 在 Q_1 上的限制（其中 $\delta^{-1}(\{0\}) = Q_1$）是一个局部双射。本文的主要结果如下。

定理 1.3. *(*定理 *5.10)* 给定一个字符串代数 Λ 和一个有限或无限的非周期串 $\mathfrak{x}$，其（直和）字符串模 $M(\mathfrak{x})$ 是砖模，当且仅当关联的、关于 $\mathsf{M}_{\Lambda\delta}$ 的词的等价类中的每个指向词都是砖块词。

定理 1.2 可由上述结果推得（见推论 6.1）。

定理 1.4。*(定理 5.11)* 给定一个字符串代数 Λ、一个带 $\mathfrak{b}$, $n \in \mathbb{N}$ 和 $\Lambda \in \mathcal{K}^{\times}$，带模$B(\mathfrak{b}, n, \lambda)$ 是一个砖模，当且仅当 $n = 1$，并且与字符串代数 $M_{\Lambda\delta}$ 上词的等价类相关联的每个指向词都是弱砖词。

我们概述 了 § 7 中从 MIA $\mathrm{M}_{\Lambda\delta}$ 构造字符串代数 Λ 的表示的方法。

2. Preliminaries on string algebras

本节将介绍本文所需的记号，并概述与本文相关的字符串代数背景。本文采用的表示方式与 [SK24] 一致，仅作必要的细微调整。我们首先定义一些称为（有限和无限）字符串与带的组合对象，它们由箭图中箭所对应的字母组成的词构成。这些组合对象是构造称为字符串模和带模的不可分解模的关键。字符串代数上的所有有限维不可分解模都属于这两类；一个基本归功于 [GP67], 的证明见于 [BR87]。

定义 2.1. 若单项代数 $\mathcal{K}Q/\langle\rho\rangle$ 满足以下条件，其中 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ 是一个有限箭图，则称其为字符串代数 。

(I) 对每个 $v \in Q_0$，至多有两条箭 $\alpha, \beta \in Q_1$ 满足 $s(\alpha) = s(\beta) = v$；且至多有两条箭 $\alpha', \beta' \in Q_1$ 满足 $t(\alpha') = t(\beta') = v$。*(II)* 对每个 $\alpha \in Q_1$，至多有一条箭 $\gamma \in Q_1$ 满足 $\alpha\gamma \notin \rho$，且至多有一条箭 γ' 满足 $\gamma'\alpha \notin \rho$。*(III)* 存在 $M \geq 0$，使得对于每条不含 ρ 中子路径的路径 p，均有 $|p| \leq M$。

若 ρ 中的所有关系的长度均为 *2*，且将条件（*II*）替换为以下条件，则称 $\mathcal{K}Q/\langle\rho\rangle$ 为温和代数。

(IIa) 对每个 $\alpha \in Q_1$，至多有一条箭 $\beta \in Q_1$ 满足 $\alpha\beta \notin \rho$，且至多有一条箭 $\beta' \in Q_1$满足 $\alpha\beta' \in \rho$。*(IIb)* 对每个 $\alpha \in Q_1$，至多有一条箭 $\gamma \in Q_1$ 满足 $\gamma\alpha \notin \rho$，且至多有一条箭 $\gamma' \in Q_1$满足 $\gamma'\alpha \in \rho$。

如果 $\Lambda = \mathcal{K}Q/\langle\rho\rangle$ 是字符串代数，那么我们也称 (Q, ρ) 是字符串代数 Λ 的一个表示，并称 Q 为 Λ的底层箭图。

对于每个字符串代数，选取并固定满足以下性质的映射 ς, $\varepsilon\colon Q_1 \to \{-1, 1\}$ 是有用的。
(a) 如果 α, $\beta \in Q_1$ 满足 $\alpha \neq \beta$，且 $s(\alpha) = s(\beta)$，那么 $\varsigma(\alpha) = -\varsigma(\beta)$。(b) 如果 α, $\beta \in Q_1$ 满足 $\alpha \neq \beta$，且 $t(\alpha) = t(\beta)$，那么 $\varepsilon(\alpha) = -\varepsilon(\beta)$。(c) 如果 α, $\beta \in Q_1$ 满足 $t(\alpha) = s(\beta)$，且 $\alpha\beta \notin \rho$，那么 $\varepsilon(\alpha) = -\varsigma(\beta)$。
对于每个 $\alpha \in Q_1$，令 α^{-1} 为 α 的形式逆元，使得 $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$。我们定义 $s(\alpha^{-1}) := t(\alpha)$ 和$t(\alpha^{-1}) := s(\alpha)$。定义 $Q_1^{-1} := \{\alpha^{-1} : \alpha \in Q_1\}$。$Q_1 \sqcup Q_1^{-1}$的元素称为音节。

定义 2.2。音节的有限序列 $\alpha_1 \cdots \alpha_k$称为长度为 k 的（有限）字符串，如果满足以下条件。

- 对于每个 $i \in \{1, \cdots, k-1\}$, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$。
- 对于每个 $i \in \{1, \cdots, k-1\}$, $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}^{-1}$。
- 对于所有 $1 \leq i \leq i+j \leq k$, $\alpha_i \cdots \alpha_{i+j} \notin \rho$和 $\alpha_{i+j}^{-1} \cdots \alpha_i^{-1} \notin \rho$。

此外，对于每个 $v \in Q_0$，都有零长度字符串 $1_{(v,1)}$ 和 $1_{(v,-1)}$。

对于字符串 $\mathfrak{x} := \alpha_1 \cdots \alpha_k$，我们以显而易见的方式扩展逆、起始顶点和终止顶点的概念：$\mathfrak{x}^{-1} := \alpha_k^{-1} \cdots \alpha_1^{-1}$, $s(\mathfrak{x}^{-1}) := t(\mathfrak{x})$ and $t(\mathfrak{x}^{-1}) := s(\mathfrak{x})$。我们将 α_1称为 $\mathfrak{x}$的首音节，将 α_k称为 $\mathfrak{x}$的末音节。对于任意 $i \in \{-1, 1\}$，我们还有 $1_{(v,i)}^{-1} = 1_{(v,-i)}$ and $s(1_{(v,i)}) = t(1_{(v,i)}) = v$。我们用 $\mathfrak{St}^{\mathrm{fin}}(\Lambda)$ 表示字符串代数 Λ 的所有（有限）字符串的集合，用 $\mathfrak{St}_{>0}^{\mathrm{fin}}(\Lambda)$ 表示所有正长度（有限）字符串的集合。ς 和 ε 映射按以下方式扩展到 $\mathfrak{St}(\Lambda)$。对于 $\alpha \in Q_1$, $\varsigma(\alpha^{-1}) := \varepsilon(\alpha)$ and $\varepsilon(\alpha^{-1}) := \varsigma(\alpha)$。如果 $\mathfrak{u} = \alpha_1 \cdots \alpha_k \in \mathfrak{St}_{>0}(\Lambda)$，则 $\varsigma(\mathfrak{u}) := \varsigma(\alpha_1)$ and $\varepsilon(\mathfrak{u}) := \varepsilon(\alpha_k)$。此外，对于每个 $i \in \{-1, 1\}$，我们有$\varsigma(1_{(v,i)}) := -i =: -\varepsilon(1_{(v,i)})$。

对于字符串 $\mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{y}$，如果定义了 $\mathfrak{xy}$，则 $\varsigma(\mathfrak{y}) = -\varepsilon(\mathfrak{x})$。对于顶点 $v \in Q_0$ 和 $i \in \{-1, 1\}$，我们称拼接 $\mathfrak{x}1_{(v,i)}$ 有定义，且等于 $\mathfrak{x}$，当且仅当 $t(\mathfrak{x}) = v$ 并且 $\varepsilon(\mathfrak{x}) = i$。类似地，我们称拼接$1_{(v,i)}\mathfrak{x}$ 有定义，且等于 $\mathfrak{x}$，当且仅当 $s(\mathfrak{x}) = v$ 并且 $\varsigma(\mathfrak{x}) = -i$。

类似于 有限字符串，无限字符串 可以用无限音节序列来定义。

定义 2.3. 一个由音节组成的序列 $\cdots\alpha_2\alpha_1$ 称为左 $\mathbb{N}$字符串，如果对每个 $k\in\mathbb{N}$， $\alpha_k\cdots\alpha_1$ 都是一个字符串。用 $\overleftarrow{\mathfrak{St}}(\Lambda)$ 表示所有左 $\mathbb{N}$-字符串构成的集合。一个由音节组成的序列 $\alpha_1\alpha_2\cdots$ 称为右 $\mathbb{N}$字符串，如果对每个 $k\in\mathbb{N}$， $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ 都是一个字符串。用 $\overrightarrow{\mathfrak{St}}(\Lambda)$ 表示所有左 $\mathbb{N}$- 字符串构成的集合。一个序列 $\cdots\alpha_1\alpha_0\alpha_{-1}\cdots$ 由音节组成的序列称为 $\mathbb{Z}$字符串，如果对每一对整数 $i\leq j$， $\alpha_i\cdots\alpha_j$ 都是一个字符串。用 $\overleftrightarrow{\mathfrak{St}}(\Lambda)$ 表示所有左 $\mathbb{N}$-字符串构成的集合。用 $\mathfrak{St}(\Lambda)$ 表示所有字符串构成的集合。

定义 2.4。 对于（可能是无限的）字符串 $\mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{y}$，如果对于某些（可能是无限的）字符串 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{v}$，$\mathfrak{y}=\mathfrak{u}\mathfrak{x}\mathfrak{v}$，则称 $\mathfrak{x}$ 是 $\mathfrak{y}$ 的子串，记作 $\mathfrak{x}\sqsubseteq\mathfrak{y}$。如果对于某个（可能是无限的）字符串 $\mathfrak{u}$，$\mathfrak{y}=\mathfrak{x}\mathfrak{u}$，则称 $\mathfrak{x}$ 是 $\mathfrak{y}$ 的左子字符串，记作 $\mathfrak{x}\sqsubseteq_l\mathfrak{y}$。对偶地，如果对于某个（可能是无限的）字符串 $\mathfrak{u}$， $\mathfrak{y}=\mathfrak{u}\mathfrak{x}$，则称 $\mathfrak{x}$ 是 $\mathfrak{y}$ 的右子串，记作 $\mathfrak{x}\sqsubseteq_r\mathfrak{y}$。如果 $\mathfrak{x}\sqsubseteq\mathfrak{y}$ （分别为 $\mathfrak{x}\sqsubseteq_l\mathfrak{y}$、$\mathfrak{x}\sqsubseteq_r\mathfrak{y}$），但 $\mathfrak{x}\neq\mathfrak{y}$，则称 $\mathfrak{x}$ 是 $\mathfrak{y}$ 的真子串（分别为真左子字符串、真右子串）。

定义 2.5。 给定一个（可能是无限的）字符串 $\mathfrak{x}$，如果一个（可能是无限的）子串 $\mathfrak{u}$ 是 $\mathfrak{x}$ 的因子子串，则以下条件之一成立：

- $\mathfrak{u}=\mathfrak{x}$；
- $\mathfrak{u}\alpha\sqsubseteq_l\mathfrak{x}$ 对于某个 $\alpha\in Q_1$；
- $\beta^{-1}\mathfrak{u}\sqsubseteq_r\mathfrak{x}$ 对于某个 $\beta\in Q_1$；
- $\beta^{-1}\mathfrak{u}\alpha\sqsubseteq\mathfrak{x}$ 对于某个 α， $\beta\in Q_1$。

对偶地，若干（可能是无限的）字符串 $\mathfrak{x}$ 的一个（可能是无限的）子串 $\mathfrak{u}$，如果满足以下条件之一，则称为 像子字符串：

- $\mathfrak{u}=\mathfrak{x}$；
- $\mathfrak{u}\alpha^{-1}\sqsubseteq_l\mathfrak{x}$ 对某个 $\alpha\in Q_1$；
- $\beta\mathfrak{u}\sqsubseteq_r\mathfrak{x}$ 对某个 $\beta\in Q_1$；
- $\beta\mathfrak{u}\alpha^{-1}\sqsubseteq\mathfrak{x}$ 对某个 α、$\beta\in Q_1$。

定义 *2.6.* *</style}*右 $\mathbb{N}$-字符串 $\mathfrak{x}=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$ 称为周期的 *</style}*，如果存在 $k\in\mathbb{N}$，使得对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都有 $\alpha_n=\alpha_{n+k}$。在 *A* *</style}*上的右 $\mathbb{N}$-字符串 $\mathfrak{x}=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$ 称为几乎周期的 *</style}*，如果 $\mathfrak{x}$有一个周期右子串。在 *A* *</style}*上的右无限词 $\mathfrak{x}=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$ 称为非周期的 *</style}*，如果 $\mathfrak{x}$ 不是几乎周期的。

左 $\mathbb{N}$-字符串 $\mathfrak{x}=\cdots\alpha_3\alpha_2\alpha_1$ 称为周期的 （分别地，几乎周期的、非周期的），如果 $\mathfrak{x}^{-1}$ 是周期的（分别地，几乎周期的、非周期的）。

若存在 $k\in\mathbb{Z}$，使得对每个$n\in\mathbb{Z}$都有 $\alpha_n=\alpha_{n+k}$，则称 $\mathbb{Z}$-字符串 $\mathfrak{x}=\cdots\alpha_{-1}\alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots$ 为周期的 。字符串 $\mathfrak{x}$称为右几乎周期的 （分别地，左几乎周期的），如果字符串 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$（分别地，$\cdots\alpha_2\alpha_1\alpha_0$）是几乎周期的。若词 $\mathfrak{x}$既不是左几乎周期的，也不是右几乎周期的，则称其为非周期的 。

定义 2.7. 若字符串 $\mathfrak{b}\in\mathsf{St}^{\mathrm{fin}}_{>0}(\Lambda)$ 满足以下所有条件，则称其为一条带：

- $\mathfrak{b}$ 是循环的，即 $s(\mathfrak{b})=t(\mathfrak{b})$；
- $\mathfrak{b}$ 是本原的，即对于任意 $m\geq1$ 和任意字符串 $\mathfrak{u}$，都有 $\mathfrak{b}\neq\mathfrak{u}^m$；
  对于每个 $m\geq1$， $\mathfrak{b}^m$ 都是一个字符串；•
- $\mathfrak{b}$ 的首音节是逆，且 $\mathfrak{b}$的末音节是正向。

将字符串代数 Λ 的所有带记为 $\mathfrak{Ba}(\Lambda)$。

对于有限字符串 $\mathfrak{x}$，可以关联一个称为字符串模 $M(\mathfrak{x})$ 的不可分解模（参见 [Sch98，第 1.9] 节或 [Lak16，第 2.3.1] 节）。类似地，对于无限字符串 $\mathfrak{x}$，可以定义无限维直和字符串模 $M(\mathfrak{x})$（参见 [Lak16，第 2.3.3] 节）。当且仅当 $\mathfrak{x}=\mathfrak{y}$或 $\mathfrak{x}=\mathfrak{y}^{-1}$时，有 $M(\mathfrak{x})\cong M(\mathfrak{y})$。对于带 $\mathfrak{b}$、$l\geq1$ 和 $\lambda\in\mathcal{K}^\times$，可以关联一个称为带模 $B(\mathfrak{b},\ l,\ \lambda)$ 的不可分解模（参见 [Sch98，第 1.11] 节或 [Lak16，第 2.3.2] 节）。当且仅当 $l=l'$、 $\lambda=\lambda'$，且 $\mathfrak{b}'$ 是 $\mathfrak{b}$ 或 $\mathfrak{b}^{-1}$ 的循环置换时，有 $B(\mathfrak{b},\ l,\ \lambda)\cong B(\mathfrak{b}',\ l',\ \lambda')$。以下结果给出了字符串模和带模成为砖模的充要判据。

定理 2.8. [CB89, CB98] 设 $\mathfrak{x}$ 是一个（可能无限的）字符串。当且仅当 $\mathfrak{x}$ 是非周期的，且不存在字符串 $\mathfrak{y}$ 既是 $\mathfrak{x}$ 的因子子串，又是 $\mathfrak{x}$ 或 $\mathfrak{x}^{-1}$的像子串时，字符串模 $M(\mathfrak{x})$ 才是一个砖模。

定理 2.9。 [Kra91] 设 $\mathfrak{b}$ 是一个带， $l\in\mathbb{N}$ 且 $\lambda\in\mathcal{K}^\times$。那么，带模 $B(\mathfrak{b},l,\lambda)$ 是一个砖模，当且仅当 $l=1$，并且不存在有限字符串 $\mathfrak{y}$，使其既是 $^\infty\mathfrak{b}^\infty$ 的因子子串，也是 $^\infty\mathfrak{b}^\infty$或 $^\infty(\mathfrak{b}^{-1})^\infty$的像子串。

3. Preliminaries on word combinatorics

本节介绍一些预备知识，并为字母表上的词组合学设定一些记号。希望深入探索词组合的读者可参阅 [Lot97]。

设 A 为一个字母表。A 的每个元素称为一个字母。

定义 *3.1.* A 上的有限词 w 是由 A 中字母组成的有限序列 $b_1b_2\cdots b_n$。A 上的有限词配备一种称为拼接的二元运算，其定义为 $(b_1\cdots b_n)(b'_1\cdots b'_m) := b_1\cdots b_n b'_1\cdots b'_m$。有限词的长度定义为 $|b_1\cdots b_n| := n$。我们还定义一个零长度词，记作 ϵ，它是拼接运算的单位元。我们用 A^* 表示 A 上所有有限词的集合。

定义 *3.2.* A 上的右无限词是由字母组成的无限序列 $b_1b_2\cdots$。A 上的左无限词是由字母组成的无限序列 $\cdots b_2b_1$。拼接以显而易见的方式扩展到有限词和这些无限词。A 上的双无限词是由字母组成的无限序列 $\cdots b_{-1}b_0b_1b_2\cdots$。我们用 $\overrightarrow{A}^*$ 表示右无限词的集合，用 $\overleftarrow{A}^*$ 表示左无限词的集合，并用 $\overleftrightarrow{A}^*$ 表示双无限词的集合。令 $A^\infty := A^* \sqcup \overrightarrow{A}^* \sqcup \overleftarrow{A}^* \sqcup \overleftrightarrow{A}^*$。

定义 *3.3.* 给定词 w、$w' \in A^*$，若存在某个词 w''、$w''' \in A^*$，使得 $w = w''w'w'''$，则称 w' 是 w 的子词，记作 $w' \sqsubseteq w$。若存在某个词 $w'' \in A^*$，使得 $w = w'w''$，则称 w' 是 w 的左子词，记作 $w' \sqsubseteq_l w$。若存在某个词 $w'' \in A^*$，使得 $w = w''w'$，则称 w' 是 w 的右子词，记作 $w' \sqsubseteq_r w$。若 $w' \sqsubseteq w$（分别地，$w' \sqsubseteq_l w$、$w' \sqsubseteq_r w$）但 $w \neq w'$，则称 w' 是 w 的真子词（分别地，真左子词、真右子词）。

令 b^{-1} 表示字母 $\mathsf{b} \in \mathsf{A}$ 的形式逆元。设 $\mathsf{A}^{-1} := \{\mathsf{b}^{-1} \mid \mathsf{b} \in \mathsf{A}\}$，$\mathsf{A}^{\pm} := \mathsf{A} \sqcup \mathsf{A}^{-1}$，且 $\mathsf{S(A)} := \mathsf{A}^{\pm *}$。

对于有限词或右无限词 $\mathsf{w} = \mathsf{b}_1\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3\cdots$，定义 $\mathsf{w}^{-1} := \cdots \mathsf{b}_3^{-1}\mathsf{b}_2^{-1}\mathsf{b}_1^{-1}$。对于左无限词 w，w^{-1} 是唯一满足 $(\mathsf{w}^{-1})^{-1} = \mathsf{w}$ 的左无限词。对于双无限词 $\mathsf{w} = \mathsf{w}^{\mathrm{l}}\mathsf{w}^{\mathrm{r}}$，$\mathsf{w}^{-1} := (\mathsf{w}^{\mathrm{r}})^{-1}(\mathsf{w}^{\mathrm{l}})^{-1}$。

定义 3.4. 若存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有右无限词 $\mathsf{w} = \mathsf{b}_1\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3\cdots$ 在 A 上是周期的。若 w 含有一个周期的右子词，则右无限词 $\mathsf{w} = \mathsf{b}_1\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3\cdots$ 在 A 上称为几乎周期的。若 w 不是几乎周期的，则右无限词 $\mathsf{w} = \mathsf{b}_1\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3\cdots$ 在 A 上称为非周期的。

左无限词 $\mathsf{w} = \cdots \mathsf{b}_3\mathsf{b}_2\mathsf{b}_1$ 称为周期的（分别称为几乎周期的、非周期的），如果 w^{-1} 是周期的（分别是几乎周期的、非周期的）。

双无限词 $\mathsf{w} = \cdots \mathsf{b}_{-1}\mathsf{b}_0\mathsf{b}_1\mathsf{b}_2\cdots$ 称为周期的，如果存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得对于每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都有 $\mathsf{b}_n = \mathsf{b}_{n+k}$。如果词 w 是右几乎周期的（分别是左几乎周期的），则称词 $\mathsf{b}_1\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3\cdots$（分别是 $\cdots \mathsf{b}_2\mathsf{b}_1\mathsf{b}_0$）几乎周期。如果词 w 既不是左几乎周期的，也不是右几乎周期的，则称其为非周期的。

4. Multi-entry inverse automaton

本节将构造一种有限自动机的装饰版本，用于在字符串代数上构造字符串。

定义 *4.1.* 多入口逆自动机（简称 *MIA*）是一个元组 $M := (M_0, I \subseteq M_0, e : M_0 \to I, (-)^{-1} : I \to I, A, t : M_0 \times A^{\pm} \rightharpoonup M_0)$，其中 M_0 是有限状态集，I 是 M_0 的子集，包含初始状态；A 是有限字母表，t 是一个用于规定状态转移的部分函数，并满足以下条件：

(1) $(-)^{-1}$ 是一个没有不动点的对合；*(2)* $e(v) = v$ 对于所有 $v \in I$ 都成立；*(3)* 若 $t(v, b)$ 对于 $v \in M_0$ 有定义，则 $t(e(v), b)$ 有定义，且 $e(t(v, b)) = e(t(e(v), b))$。

注意，M 是一个具有多个初始状态的确定自动机，且所有状态都是接受状态。具有多个初始状态的自动机可以通过引入一个新的唯一初始状态 ι，并定义从 ι 到旧初始状态的零长度转移，将其转换为传统自动机。

将转移函数 t 扩展为 $\widetilde{\mathsf{t}} : \mathsf{M}_0 \times (\mathsf{A}^{\pm})^* \rightharpoonup \mathsf{M}_0$，如下所示：

$$\widetilde{\mathsf{t}}(v, \mathsf{w}) := \begin{cases} v & \text{if } \mathsf{w} = \epsilon, \\ \mathsf{t}(\widetilde{\mathsf{t}}(v, \mathsf{w}'), \mathsf{b}) & \text{if } \mathsf{w} = \mathsf{w}'\mathsf{b} \text{ for some } (\mathsf{w}', \mathsf{b}) \in (\mathsf{A}^{\pm})^* \times \mathsf{A}^{\pm}. \end{cases}$$

由于 MIA 与传统自动机不同，具有多个初始状态，因此自动机接受的词必须包含初始状态的数据。牢记这一点，我们在下面定义 *MIA* 上的词这一形式概念。

定义 4.2. 设 $\mathsf{M} := (\mathsf{M}_0, \mathsf{I}, \mathsf{e}, (-)^{-1}, \mathsf{A}, \mathsf{t})$ 为一个 *MIA*。

(1) M 上的一个有限右词是一个二元组 (v, w)，其中 $w \in (A^{\pm})^*$，且 $v \in I$，并且 $\widetilde{t}(v, w)$ 有定义。记 *M* 上所有有限右词构成的集合为 $\overrightarrow{W}_{\mathrm{fin}}(M)$。*(2) M* 上的一个 $\mathbb{N}$-词是一个二元组 (v, w)，其中 w 是由 $\mathbb{N}$ 索引的 A 上无限词，且 $v \in I$，使得对每个 $w' \sqsubset_l w$，$\widetilde{t}(v, w')$ 都有定义。记 *M* 上所有 $\mathbb{N}$-词构成的集合为 $\overrightarrow{W}_{\mathrm{inf}}(M)$。令 $\overrightarrow{W}(M) := \overrightarrow{W}_{\mathrm{fin}}(M) \cup \overrightarrow{W}_{\mathrm{inf}}(M)$，并称其中每个元素为右词。*(3) M* 上的一个有限左词是一个二元组 $(w\ v)$，使得 (v^{-1}, w^{-1}) 是 *M* 上的一个有限右词。记 *M* 上所有有限左词构成的集合为 $\overleftarrow{W}_{\mathrm{fin}}(M)$。*(4) M* 上的一个 $\mathbb{N}^{\mathrm{op}}$-词是一个二元组 $(w\ v)$，使得 (v^{-1}, w^{-1}) 是一个 $\mathbb{N}$-词。记 *M* 上所有 $\mathbb{N}^{\mathrm{op}}$-词构成的集合为 $\overleftarrow{W}_{\mathrm{inf}}(M)$。令 $\overleftarrow{W}(M) := \overleftarrow{W}_{\mathrm{fin}}(M) \cup \overleftarrow{W}_{\mathrm{inf}}(M)$，并称其中每个元素为左词。*(5) M* 上的一个词是一个元组 $w := (w^{\mathrm{l}}, v, w^{\mathrm{r}})$，其中 $(w^{\mathrm{l}}, v) \in \overleftarrow{W}(M)$，$(v, w^{\mathrm{r}}) \in \overrightarrow{W}(M)$，$v \in I$，并且对每个有限 $w' \sqsubseteq_l w^{\mathrm{r}}$，$(w^{\mathrm{l}}w', e(\widetilde{t}(v, w'))) \in \overleftarrow{W}(M)$。记 *M* 上所有词构成的集合为 $W(M)$。

MIA 上的一个词，可以直观地看作字母表上的一个词，并附加一项数据：MIA 的一个初始状态位于该词的某个特定“间隙”或“基点”。借助转移函数 t 和函数 e，也可以将词看作“间隙标记词”——即每个间隙都附有一个初始状态的词。下一个定义使我们能够改变自动机上一个词的“基点”，而不改变其间隙标记词。

定义4.3。 给定 *M* 上的词 $\mathsf{w}_1 := (\mathsf{w}_1^{\mathrm{l}}, v_1, \mathsf{w}_1^{\mathrm{r}})$ 和 $\mathsf{w}_2 := (\mathsf{w}_2^{\mathrm{l}}, v_2, \mathsf{w}_2^{\mathrm{r}})$，若存在 $\mathsf{w}_1 \sim \mathsf{w}_2$，使得 $\mathsf{w} \in \mathsf{S}(\mathsf{A})$

(1) $\mathsf{w}_1^{\mathrm{l}}\mathsf{w}_1^{\mathrm{r}} = \mathsf{w}_2^{\mathrm{l}}\mathsf{w}_2^{\mathrm{r}}$；*(2)* $\mathsf{w}_1^{\mathrm{l}} = \mathsf{w}_2^{\mathrm{l}}\mathsf{w}$；*(3)* $\mathsf{e}(\widetilde{\mathsf{t}(v_2, \mathsf{w})}) = v_1$。

$\sim$ 在对称性下的闭包仍记作 $\sim$。

下一个结果的证明很直接，因此省略。

命题 4.4. 上面定义的关系 $\sim$ 是一个等价关系。

定义 *4.5.* 给定 *M* 上的词 $w_1 := (w_1^{\mathrm{l}}, v_1, w_1^{\mathrm{r}})$ 和 $w_2 := (w_2^{\mathrm{l}}, v_2, w_2^{\mathrm{r}})$，若存在 $w_3 := (w_3^{\mathrm{l}}, v_1, w_3^{\mathrm{r}}) \sim w_2$，使得 $w_1^{\mathrm{l}} \sqsubseteq_r w_3^{\mathrm{l}}$ 且 $w_1^{\mathrm{r}} \sqsubseteq_l w_3^{\mathrm{r}}$，则称 w_1 是 w_2, 的子词，记作 $w_1 \sqsubseteq w_2$, 。若 $w_1 \sqsubseteq w_2$ 且 $w_1 \not\sim w_2$，则称 w_1是 w_2, 的真子词，记作 $w_1 \sqsubset w_2$ 。

定义 4.6. 给定 $\mathsf{w}_1 := (\mathsf{w}_1^{\mathrm{l}}, v_1, \mathsf{w}_1^{\mathrm{r}}) \sqsubseteq \mathsf{w}_2 := (\mathsf{w}_2^{\mathrm{l}}, v_2, \mathsf{w}_2^{\mathrm{r}})$ 这两个 *M* 上的词，令 $\mathsf{w}_3 \sim \mathsf{w}_2$ 为定义 *4.5* 中的词。若满足以下条件之一，则称 w_1 是因子子词 w_2 ：

- $\mathsf{w}_1 = \mathsf{w}_3$;
- $\mathsf{w}_{1}^{\mathrm{l}} = \mathsf{w}_{3}^{\mathrm{l}}$ 以及 $\mathsf{w}_{1}^{\mathrm{r}}\mathsf{b} \sqsubset_l \mathsf{w}_{3}^{\mathrm{r}}$，其中某个 $\mathsf{b} \in \mathsf{A}$;
- $\mathsf{w}_{1}^{\mathrm{r}} = \mathsf{w}_{3}^{\mathrm{r}}$ 以及 $\mathsf{b}^{-1}\mathsf{w}_{1}^{\mathrm{l}} \sqsubset_r \mathsf{w}_{3}^{\mathrm{l}}$，其中某个 $\mathsf{b} \in \mathsf{A}$;
- $\mathsf{b}^{-1}\mathsf{w}_{1}^{\mathrm{l}} \sqsubset_r \mathsf{w}_{3}^{\mathrm{l}}$ 以及 $\mathsf{w}_{1}^{\mathrm{r}}\mathsf{b}' \sqsubset_l \mathsf{w}_{3}^{\mathrm{r}}$，其中某个 $\mathsf{b} \in \mathsf{A}$ 以及 $\mathsf{b}' \in \mathsf{A}$。

若以下条件之一成立，我们称 w_1 是 w_2 的一个像子词：

- $\mathsf{w}_3 = \mathsf{w}_4$;
- $\mathsf{w}_{3}^{\mathrm{l}} = \mathsf{w}_{3}^{\mathrm{l}}$ 以及 $\mathsf{w}_{3}^{\mathrm{r}}\mathsf{b}^{-1} \sqsubset_l \mathsf{w}_{4}^{\mathrm{r}}$，对于某个 $\mathsf{b} \in \mathsf{A}$;
- $\mathsf{w}_{3}^{\mathrm{r}} = \mathsf{w}_{3}^{\mathrm{r}}$ 以及 $\mathsf{b}\mathsf{w}_{3}^{\mathrm{l}} \sqsubset_r \mathsf{w}_{4}^{\mathrm{l}}$，对于某个 $\mathsf{b} \in \mathsf{A}$;
- $\mathsf{b}\mathsf{w}_{3}^{\mathrm{l}} \sqsubset_r \mathsf{w}_{4}^{\mathrm{l}}$ 以及 $\mathsf{w}_{3}^{\mathrm{r}}\mathsf{b}'^{-1} \sqsubset_l \mathsf{w}_{4}^{\mathrm{r}}$，对于某个 $\mathsf{b} \in \mathsf{A}$ 以及 $\mathsf{b}' \in \mathsf{A}$。

定义 *4.7.* 若 $w := (w^{\mathrm{l}}, v, w^{\mathrm{r}}) \in W(M)$ 是一个砖块词，则称 $w^{\mathrm{l}}w^{\mathrm{r}}$ 是非周期的，并且不存在一个词 $w = (w^{\mathrm{l}}, v, w^{\mathrm{r}})$，它既作为因子子词出现在 $\overline{w}$ 中，又作为 w 或 w^{-1} 的像子词出现，其中 $w \sqsubset w$、$w \sqsubset w$ 或 w^{-1} 均不成立。所有砖块词的集合记为 $\overline{Br}(M)$。

定义 *4.8.* 若不存在有限词 $w = (w^{\mathrm{l}}, v, w^{\mathrm{r}})$，使其既是 w 的因子子词，又是 w 或 w^{-1} 的像子词（无论 $w \sqsubset \overline{w}$、$\overline{w} \sqsubset \overline{w}$ 还是 w^{-1}），则称 $w := (w^{\mathrm{l}}, v, w^{\mathrm{r}}) \in W(M)$ 为弱砖词。所有弱砖词组成的集合记为 $Br^{\mathrm{weak}}(M)$。

注 4.9. 容易看出，$\mathsf{Br}(\mathsf{M}) \subseteq \mathsf{Br}^{\mathrm{weak}}(\mathsf{M})$。对于$\mathsf{W}(\mathsf{M})$中的有限词，这两种概念是一致的。

注 4.10. 设w_1 和w_2 是字母表M 上的两个词，且$\mathsf{w}_1 \sim \mathsf{w}_2$。如果$\mathsf{w}_1$ 是砖块词（分别为弱砖词），那么w_2 也是如此。

现在我们引入一种字母表之间的"特殊"映射，它将使我们能够构造一个保持其语言（=所有词的集合）不变的新自动机。

定义 *4.11.* 设 $M := (M_0, I, e, (-)^{-1}, A, t)$ 是一个 *MIA*，且 $\varphi : A \to A'$ 是字母表之间的一个满射。若对于每个 $v \in M_0$, ，诱导映射 $\varphi^{\pm} : A^{\pm} \to (A')^{\pm}$ 在集合 $\{b \in A^{\pm} \mid t(v, b)$ 上的限制$\}$ 是单射，则称 φ 是 M 的一个局部双射。

给定 M 的一个局部双射 $\varphi: \mathsf{A} \to \mathsf{A}'$，我们可以按 $\mathsf{t}'(v, \mathsf{b}') := \mathsf{t}(v, \mathsf{b})$ 的方式定义一个 MIA $\mathsf{M}\varphi := (\mathsf{M}_0, \mathsf{I}, \mathsf{e}, (-)^{-1}, \mathsf{A}', \mathsf{t}')$，其中 $v \in \mathsf{M}_0, \mathsf{b}' \in (\mathsf{A}')^{\pm}$，当且仅当存在 $\mathsf{b} \in \mathsf{A}^{\pm}$ 使得 $\varphi^{\pm}(\mathsf{b}) = \mathsf{b}'$，且 $\mathsf{t}(v, \mathsf{b})$ 有定义；根据定义 4.11，这样的 b 是唯一的。

映射 φ 可以按显然的方式扩展为映射 $\mathsf{S}\varphi: \mathsf{S}(\mathsf{A}) \to \mathsf{S}(\mathsf{A}')$。

命题 4.12。这 个映射 $\Phi: \mathsf{W}(\mathsf{M}) \to \mathsf{W}(\mathsf{M}\varphi)$ 由 $\Phi(\mathsf{w}^{\mathrm{l}}, v, \mathsf{w}^{\mathrm{r}}) := (\mathsf{S}\varphi(\mathsf{w}^{\mathrm{l}})\ v, \mathsf{S}\varphi(\mathsf{w}^{\mathrm{r}}))$ 定义，是一个双射 .

证明。局部双射的定义保证，对于每个 $v \in {}_0$, φ v $\in$ M，S 在 $\{\mathsf{w} \mid (\mathsf{w}) \in \mathsf{W}(\mathsf{M})\}$ 上的限制是单射，其像为 $\{\mathsf{w}' \mid (v, \mathsf{w}') \in \overrightarrow{\mathsf{W}}(\mathsf{M}\varphi)\}$。用 $(\mathsf{S}\varphi)^{-1}(v, -)$ 表示该限制的逆。类似地，用 $(\mathsf{S}\varphi)^{-1}(-, v)$ 表示 $\mathsf{S}\varphi$ 在 $\{\mathsf{w} \mid (\mathsf{w}\ v) \in \overleftarrow{\mathsf{W}}(\mathsf{M})\}$ 上的限制的逆。Φ 的逆为 $((\mathsf{w}')^{\mathrm{l}}, v, (\mathsf{w}')^{\mathrm{r}}) \mapsto ((\mathsf{S}\varphi)^{-1}((\mathsf{w}')^{\mathrm{l}}), v)\ v, (\mathsf{S}\varphi)^{-1}(v, (\mathsf{w}')^{\mathrm{r}}))$。□

上述双射 Φ 也保持并反映砖块词和弱砖词 s.

推论 *4.13.* 设 $M := (M_0, I, e, (-)^{-1}, A, t)$ 是一个 *MIA*，且 $\varphi : A \to A'$ 是 M 的局部双射。命题 *4.12* 中定义的双射 $\Phi : W(M) \to W(M\varphi)$ 限制为双射 $Br^{\mathrm{weak}}(M) \cong Br^{\mathrm{weak}}(M\varphi)$ 和 $Br(M) \cong Br(M\varphi)$。

证明。 </style} $\sim$-等价类在 Φ 下保持并反映。因此，子词在 Φ 下保持并反映。映射 $\mathsf{S}\varphi$ 将 A 中的字母映到 A'，并将 A' 映到 A'^{-1}，因此 Φ 将因子子词（分别是像子词）映到因子子词（分别是像子词）。因此，很容易验证 Φ 保持并反映砖模和弱砖。□

5. Strings as $\sim$-equivalence classes of words over an MIA

给定一个字符串代数 Λ，现在我们给出一种构造自动机M_Λ 的方法，使我们能够通过M_Λ上的词来观察 Λ 的字符串。

定义 5.1. 设 $\Lambda := \mathcal{K}Q/\langle\rho\rangle$ 是一个字符串代数，其字符串集合为 $\mathfrak{St}(\Lambda)$ 。与 Λ 相关联的自动机为$\mathsf{M}_\Lambda := (\mathsf{M}_{\Lambda 0}, \mathsf{I}_\Lambda, \mathsf{e}_\Lambda, (-)^{-1}, \mathsf{A}_\Lambda, \mathsf{t}_\Lambda)$，其中

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}_\Lambda &:= Q_1;\\
\mathsf{I}_\Lambda &:= \{\mathfrak{x} \in \mathfrak{St}(\Lambda) \mid |\mathfrak{x}| = 0\};\\
1^{-1}_{(v,i)} &:= 1_{(v,-i)};\\
\mathsf{M}_{\Lambda 0} &:= \mathsf{I}_\Lambda \cup Q_1 \sqcup Q_1^{-1} \cup \{\mathfrak{y} \in \mathfrak{St}(\Lambda) \mid \mathfrak{y} \sqsubset_l \mathfrak{x},\ and\ \{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^{-1}\} \cap \rho = 1\};\ and\\
\mathsf{t}_\Lambda &:= \{(\mathfrak{x}, \mathsf{b}, \mathfrak{y}) \mid \mathfrak{x}\mathsf{b} \in \mathfrak{St}(\Lambda),\ \mathfrak{y}\ is\ the\ maximal\ right\ substring\ of\ \mathfrak{x}\mathsf{b}\ such\ that\ \mathfrak{y} \in \mathsf{M}_{\Lambda 0}\};\ and\\
\mathsf{e}_\Lambda(\mathfrak{x}) &:= 1_{(t(\mathfrak{x}),\varepsilon(\mathfrak{x}))}.
\end{aligned}
$$

命题 5.2. 元组M_Λ 是一个 *MIA*。

上述命题证明中唯一非平凡的部分是 t_Λ 是否为部分函数。这由下文的注 5.3 得出，而注 5.3 又由字符串代数定义中的条件（II）得出。

注 5.3. 给定一个状态 $\mathfrak{x} \in \mathsf{M}_{\Lambda 0}$，我们有

$$
\begin{aligned}
|\{\mathfrak{y} \in \mathsf{M}_{\Lambda 0} \mid (\mathfrak{x}, \mathsf{b}, \mathfrak{y}) \in \mathsf{t}_\Lambda\ for\ some\ \mathsf{b} \in \mathsf{A}_\Lambda\}| \le 1,\ and\\
|\{\mathfrak{y} \in \mathsf{M}_{\Lambda 0} \mid (\mathfrak{x}, \mathsf{b}, \mathfrak{y}) \in \mathsf{t}_\Lambda\ for\ some\ \mathsf{b} \in \mathsf{A}_\Lambda^{-1}\}| \le 1.
\end{aligned}
$$

注 5.4. M_Λ 中的每个I 都是一个源点，即对于 $v \in$I，不存在 $v' \in \mathsf{M}_{\Lambda 0}$ 和 $\mathsf{b} \in \mathsf{A}_\Lambda$，使得 $\mathsf{t}(v', \mathsf{b}) = v$。

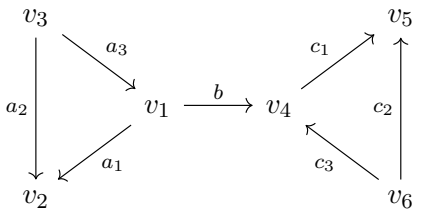

FIGURE 2. Γ 与 $\rho = \{a_3bc_1, a_3a_1, c_3c_1\}$

让我们回顾一下 [Mou23, § 1]中介绍的（广义）杠铃代数类。图2展示了一个具体的广义杠铃代数，我们将以此作为贯穿全文的示例。

例5.5。 考虑图*2*中的字符串代数 Γ 。我们按如下方式固定 ς 和 ε ：

$$(\varsigma(a_1), \varepsilon(a_1)) = (1,-1), (\varsigma(a_2), \varepsilon(a_2)) = (1,1), (\varsigma(a_3), \varepsilon(a_3)) = (-1,1),$$
$$(\varsigma(b), \varepsilon(b)) = (-1,1),$$
$$(\varsigma(c_1), \varepsilon(c_1)) = (-1,1), (\varsigma(c_2), \varepsilon(c_2)) = (1,-1), (\varsigma(c_3), \varepsilon(c_3)) = (-1,-1).$$

图*3*展示了 *MIA* M_Γ 的底层自动机。 ◊

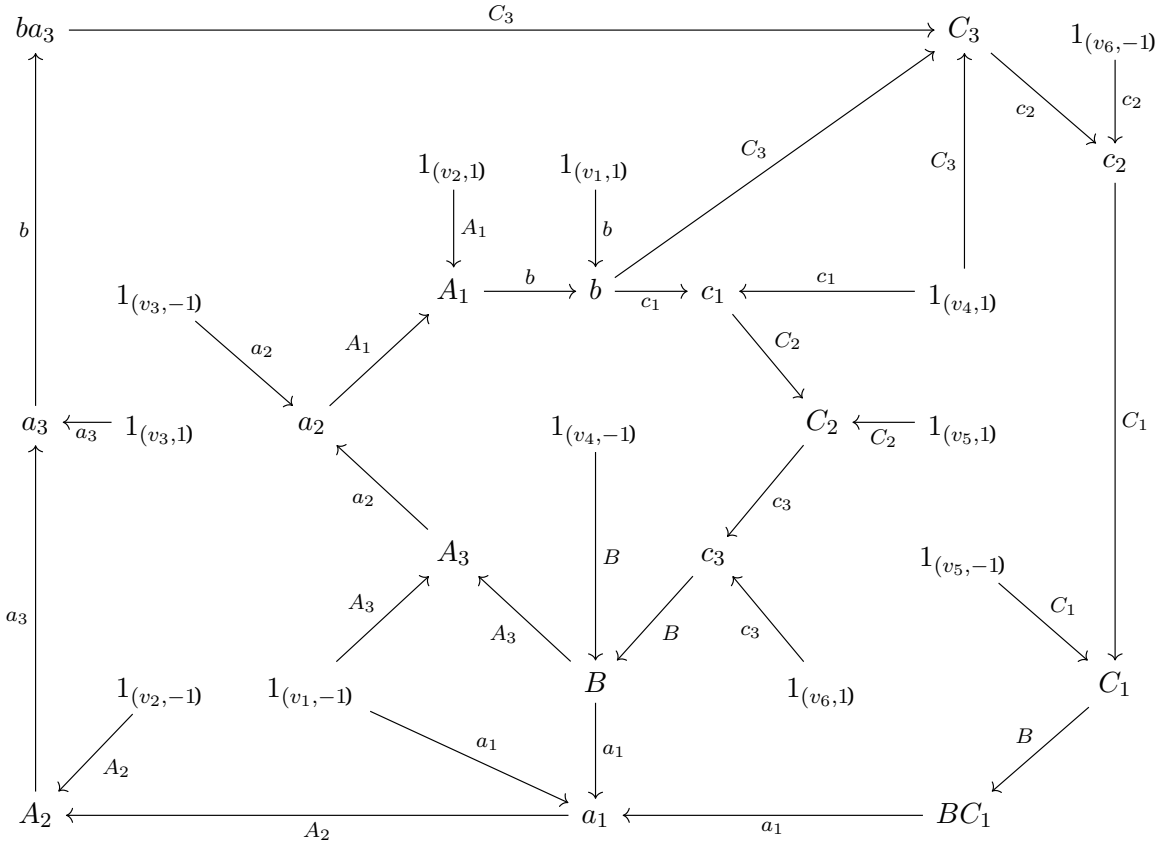

FIGURE 3. 例5中与该代数相关联的 MIA 的底层自动机。 5

定理 5.6。我们有 $\mathfrak{St}(\Lambda) \cong \mathsf{W}(\mathsf{M}_\Lambda)/\sim$。

证明。 令 $\mathfrak{x} \in \mathfrak{St}(\Lambda)$。则 $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}1_{(t(\mathfrak{x}),\varepsilon(\mathfrak{x}))}$。考虑映射 $\mathsf{W}: \mathfrak{St}(\Lambda) \to \mathsf{W}(\mathsf{M}_\Lambda)/\sim$ 定义为 $\mathsf{W}(\mathfrak{x}) := [(\mathfrak{x}, 1_{(t(\mathfrak{x}),\varepsilon(\mathfrak{x}))}, 1_{(t(\mathfrak{x}),\varepsilon(\mathfrak{x}))})]_\sim$。如果 $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^{\mathrm{l}}\mathfrak{x}^{\mathrm{r}}$ 对于某个 $\mathfrak{x}^{\mathrm{l}}, \mathfrak{x}^{\mathrm{r}} \in \mathfrak{St}(\Lambda)$，则 $(\mathfrak{x}, 1_{(t(\mathfrak{x}),\varepsilon(\mathfrak{x}))}, 1_{(t(\mathfrak{x}),\varepsilon(\mathfrak{x}))}) \sim (\mathfrak{x}^{\mathrm{l}}, 1_{(t(\mathfrak{x}^{\mathrm{l}})\,\varepsilon(\mathfrak{x}^{\mathrm{l}}))}\,\mathfrak{x}^{\mathrm{r}})$，因此映射 W 定义良好。

另一方面，考虑映射 $\mathfrak{St}: \mathsf{W}(\mathsf{M}_\Lambda)/\sim \to \mathfrak{St}(\Lambda)$，其定义为 $\mathfrak{St}([\mathfrak{x}^{\mathrm{l}}, 1_{(v,i)}, \mathfrak{x}^{\mathrm{r}}]_\sim) := \mathfrak{x}^{\mathrm{l}}\mathfrak{x}^{\mathrm{r}}$。根据定义4.3的条件（1），此映射定义良好。容易验证，映射 W 和$\mathfrak{St}$互为逆。 □

以下引理是定理 2.8 和 2.9 的重述。

引理 5.7。 设 $\mathfrak{x} \in \mathcal{St}(\Lambda)$。那么 $M(\mathfrak{x})$ 是砖模，当且仅当 $\mathsf{W}(\mathfrak{x}) \subseteq \mathsf{Br}(\mathsf{M}_\Lambda)$。

引理 5.8。 设 $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}\mathfrak{a}(\Lambda)$、 $l \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathcal{K}^\times$。那么 $B(\mathfrak{b}, l, \lambda)$ 是砖模，当且仅当 $l = 1$ 并且 $\mathsf{W}(\infty\mathfrak{b}^\infty) \subseteq \mathsf{Br}^{\mathrm{weak}}(\mathsf{M}_\Lambda)$。

引理 *5.7* 和 *5.8* 的证明。 在定理 5.6 的证明中定义的映射 W 下，子串被映射为子词。更准确地说，若 $\mathfrak{x} \sqsubseteq \mathfrak{y}$，则 $\mathsf{w} \sqsubseteq \mathsf{w}'$，其中 $\mathsf{w} \in \mathsf{W}(\mathfrak{x})$ 且 $\mathsf{w}' \in \mathsf{W}(\mathfrak{y})$。由因子子串和像子串的定义可知， $\mathfrak{x}$ 是 $\mathfrak{y}$ 的因子（分别为像）子串，当且仅当 w 是 w′的因子（分别为像）子词。其余论证由定理 2.8 和 2.9 得出。□

注 5.3 保证，如果 $Q_1 \neq \emptyset$，那么常值映射 $\delta : Q_1 \to \{0\}$ 是 M_Λ 的局部双射，因为 Λ 是一个字符串代数。令 $\mathsf{A}' := \{0\}$，并将 0^{-1} 记为 1，使得 $(\mathsf{A}')^\pm = \{0, 1\}$ 是二元字母表，且 $\delta^\pm : Q_1^\pm \to \{0, 1\}$ 是奇偶映射。

例 5.9. 图 *4* 展示了 *MIA* $\mathsf{M}_{\Gamma\delta}$ 的底层自动机。 ◊

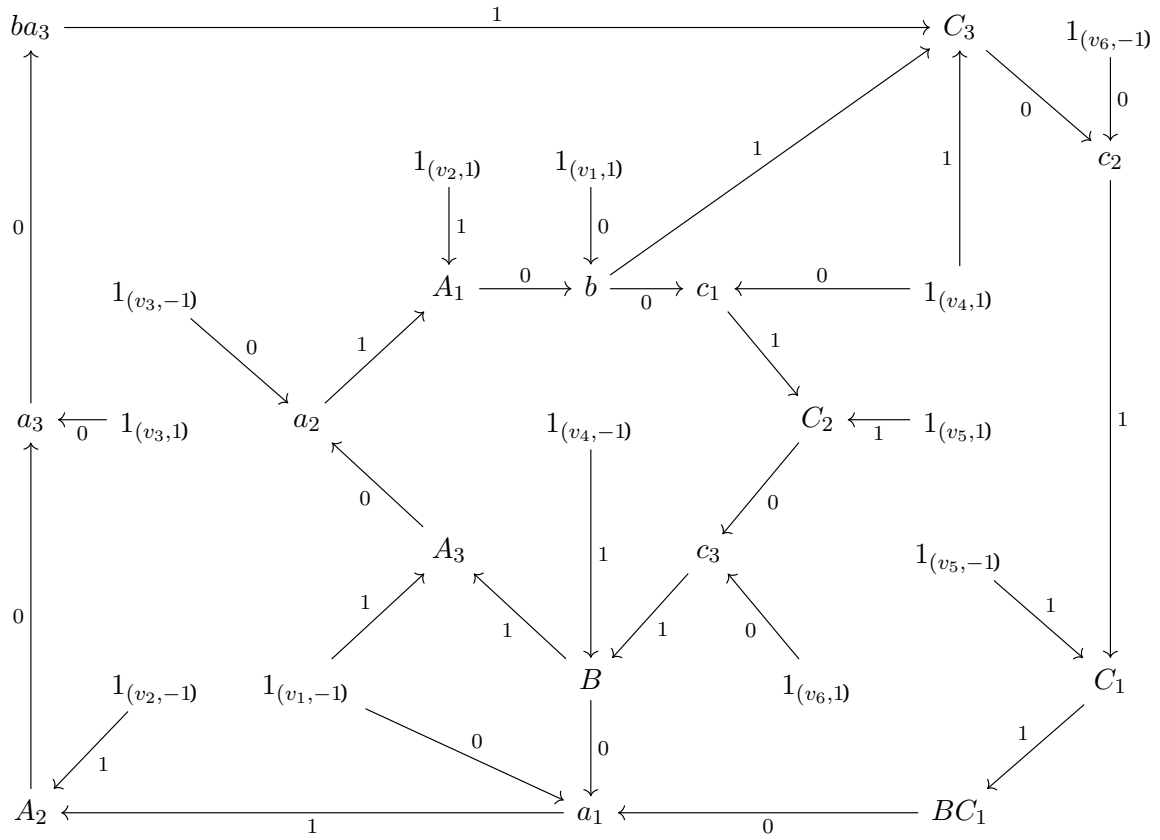

FIGURE 4. 例 5.9 中使用的 MIA $\mathsf{M}_{\Gamma\delta}$ 的底层自动机

将推论 4.13 应用于引理5.7和5.8，可得到关于字符串代数上砖模的如下刻画，它以二元（弱）砖词为依据。

The 定理 5.10。 设 $\mathfrak{x} \in \mathcal{St}(\Lambda)$。那么 $M(\mathfrak{x})$ 是砖模，当且仅当 $\Phi(\mathsf{W}(\mathfrak{x})) \subseteq \mathsf{Br}(\mathsf{M}_{\Lambda\delta}$).

定理 5.11。 设 $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}\mathfrak{a}(\Lambda)$、 $l \in \mathbb{N}$ 和 $\lambda \in \mathcal{K}^\times$。那么 $B(\mathfrak{b}, l, \lambda)$ 是砖模，当且仅当 $l = 1$ 且$\Phi($ $\mathsf{W}(\infty\mathfrak{b}^\infty))$ $\subseteq \mathsf{Br}^{\mathrm{weak}}(\mathsf{M}_{\Lambda\delta})$。

6. Connection with Sturmian words

考虑双Kronecker代数 Λ_3 （图1）。设 $\mathfrak{x} \in \overleftrightarrow{\mathcal{St}}(\Lambda_3)$ 是一个非周期串。根据非周期性这一假设，定理 5.10 表明，字符串模 M（$\mathfrak{x}$）不是砖模，当且仅当 Φ（ W（$\mathfrak{x}$）） $\not\subseteq \mathsf{Br}^{\mathrm{weak}}$（$\mathsf{M}_{\Lambda_3\delta}$）。换言之，存在 $\mathsf{w}' \in \{0, 1\}^*$，使得 0w′1 和 1w′0 都是底层词的子词。

$\mathsf{w}(\mathfrak{x}) \in \overleftrightarrow{\{0,1\}}^*$（$\Phi(\tilde{}\mathsf{W}(\mathfrak{x}))$）的底层词。（观察底层箭图 Λ_3 可得一个循环字符串 $\mathfrak{x}'$，满足 $s(\mathfrak{x}') = t(\mathfrak{x}') = v_2$，使得 $\mathsf{w}(\mathfrak{x}') = \mathsf{w}'$。）鉴于 $\mathfrak{x}$ 是双无限的，当且仅当 $\mathsf{10w'10}$ 和 $\mathsf{01w'01}$都是 $\mathsf{w}(\mathfrak{x})$ 的子词时，这种情况才会发生。

令 $\mathsf{a} := b_1A_1$，$\mathsf{b} := A_2b_2 \in \mathfrak{Gt}(\Lambda_3)$，使得 $\mathsf{w}(\mathfrak{x})$ 可以写成字母表为 $\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ 上的一个（双无限）词 $\mathsf{z}(\mathfrak{x})$。使用这一新记法，上述段落最后一行中的条件可表述为：存在一个字母表为 $\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ 的有限词 y'，使得 $\mathsf{ay'a}$ 和 $\mathsf{by'b}$ 都是 $\mathsf{z}(\mathfrak{x})$ 的子词。鉴于命题 1.1，上述讨论可概括为定理 5.10 的以下推论的第（1）部分——得益于命题 1.1，第二部分也可用类似方法证明。

推论 6.1（定理 1.2 的重述）。令 $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Gt}(\Lambda_3)$ 为无限且非周期的。

（*1*）如果 $\mathfrak{x}$ 是双无限的，那么模 $M(\mathfrak{x})$ 是砖模，当且仅当 $\mathsf{z}(\mathfrak{x})$ 是字母表为 $\{\mathsf{a}、\mathsf{b}\}$ 上的 ***Sturmian*** 词。（*2*）如果w 是右无限的且 $s(\mathfrak{x}) = v_2$，那么模 $M(\mathfrak{x})$ 是砖模，当且仅当 $\mathsf{z}(\mathfrak{x})$ 是字母表为 $\{\mathsf{a}、\mathsf{b}\}$ 上的特征斯图姆词。

7. Recovering a string algebra from its associated MIA

本节旨在简要说明如何从 $\mathsf{M}_{\Lambda\delta}$恢复字符串代数 $\Lambda = \mathcal{K}Q/\langle\rho\rangle$。

定义 7.1。设 $\mathsf{M} := (\mathsf{M}_0, \mathsf{I}, \mathsf{e}, (-)^{-1}, \{0\}, \mathsf{t})$ 是一个 ***MIA***。我们构造一个箭图 Q_{M}，其顶点集为$Q_{\mathsf{M}0} := \mathsf{I}/\approx$，其中 $\approx$ 是满足以下条件的最小等价关系：$v \approx v^{-1}$ 对每个 $v \in \mathsf{I}$都成立；从 $[v]_\approx$ 到 $[v']_\approx$ 的箭数等于集合的基数

$$\{(v_1, v_1') \in \mathsf{I} \times \mathsf{I} \mid v_1 \approx v, v_1' \approx v', v_1' = \mathsf{e}(\mathsf{t}(v_1, 0))\}.$$

由 $v_1' = \mathsf{e}(\mathsf{t}(v_1,0))$ 贡献的箭 $[v]_\approx \to [v']_\approx$ 记作 $a_{(v_1,v_1')}$。

注 7.2。对于每个 $[v]_\approx \in Q_{\mathsf{M}0}$，在 Q_{M} 中至多有两个箭 α, β 满足 $s(\alpha) = s(\beta) = [v]_\approx$；但对于终点为 $[v]_\approx$的箭，类似的说法未必成立。

该集合

$$\rho_{\mathsf{M}} := \{p = a_{(v_1,v_1')}a_{(v_2,v_2')} \cdots a_{(v_k,v_k')} \mid p \text{ is a path in } Q, k \geq 2 \text{ and } \widetilde{\mathsf{t}}(v_1, 0^k) \text{ is undefined}\}$$

由路径组成，在箭图 Q_{M}上定义了一个关系集合。

定理 7.3。设 Λ 是一个字符串代数。则 $\mathcal{K}Q_{\mathsf{M}_{\Lambda\delta}}/\langle\rho_{\mathsf{M}_{\Lambda\delta}}\rangle \cong \Lambda$。

证明。对于每个顶点 $v \in Q_0$，有 $1_{(v,1)}$ 和 $1_{(v,-1)}$ 属于 I。因此，$Q_{\mathsf{M}_{\Lambda\delta}0} \cong Q_0$。注意，$\alpha \in Q_1$ 当且仅当 $1_{(s(\alpha),-\varsigma(\alpha))}\alpha 1_{(t(\alpha),\varepsilon(\alpha))} \in \mathfrak{Gt}(\Lambda)$，当且仅当元组 $(1_{(s(\alpha),-\varsigma(\alpha))}, 0, \alpha) \in \mathsf{t}_{\Lambda\delta}$，且 $\mathsf{e}_{\Lambda\delta}(\alpha) = 1_{(t(\alpha),\varepsilon(\alpha))}$。因此，$Q_{\mathsf{M}_{\Lambda\delta}1} \cong Q_1$。

对于路径 $p = a_{(v_1,v_1')}a_{(v_2,v_2')} \cdots a_{(v_k,v_k')} \in \rho$，其中 $k \geq 2$，且 $v_1 = 1_{(s(p),-\varsigma(p))}$，根据 $\mathsf{t}_{\mathsf{M}_{\Lambda\delta}}$ 的定义可知，$\tilde{}\mathsf{t}(v_1, 0^k)$ 未定义。另外注意，$\rho_{\mathsf{M}_{\Lambda\delta}}$ 中的任意路径 p' 都有一个位于 ρ中的左子字符串 p''。因此，我们有 $\langle\rho\rangle = \langle\rho_{\mathsf{M}_{\Lambda\delta}}\rangle$。□

References

[BR87] Michael CR Butler 和 Claus Michael Ringel. 具有较少中项的 Auslander-Reiten 序列及其在字符串代数中的应用. *Communications in Algebra*, 15(1-2):145–179, 1987. [CB88] William W. Crawley-Boevey. 关于温和代数与 bocs. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(3):451– 483, 1988. [CB89] William W. Crawley-Boevey. 零关系代数的表示之间的映射. *Journal of Algebra* 126 2 259 263, , ( ): 1989 – .[CB98] William W. Crawley-Boevey. 有限维代数表示论中的无限维模 . *Canadian Mathematical Society Conference Proceedings*, 23:29–54, 1998. [DLP+25] Benjamin Dequˆene、M´elodie Lapointe、Yann Palu、Pierre-Guy Plamondon、Christophe Reutenauer 和 Hugh Thomas. 某些温和代数中完美聚类词与带砖模的推广. *Combinatorial Theory*, 5(1), 2025.[DMP25] Mark Deaconu、Kaveh Mousavand 和 Charles Paquette. 某些温和代数上的无限字符串砖模与 Sturmian 词. *preprint, arXiv:2510.22377*, 2025. [GP67] I. M. Gel'fand 和 V. A. Ponomarev. 洛伦兹群不可分解无穷小表示的分类. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 176:502–505, 1967. [Kra91] Henning Krause. 树模与带模之间的映射 . *Journal of Algebra*, 137:186–194, 1991. [Lak16] Rosanna Laking. *String algebras in representation theory*. 博士论文，曼彻斯特大学（英国），2016.[Lot97] Monsieur Lothaire. *Combinatorics on words*, 第17卷. 剑桥大学出版社，1997.

[Mou23] Kaveh Mousavand. 双串代数的 τ-倾斜有限性. *Algebras and Representation Theory*, 26(6):2485–2522, 2023. [MP25a] Kaveh Mousavand 和 Charles Paquette. 双串代数与泛砖模. *Mathematische Zeitschrift*, 310(64), 2025. [MP25b] Kaveh Mousavand 和 Charles Paquette. 关于有限维代数的砖（Schur 表示）. *preprint, arXiv:2508.11789* 2025 , . [Ree08] Sarah Rees. 定义单项代数表示的自动机. *Algebras and Representation Theory*, 11 3 207 214, 2008 ( ): – . [Sch98] Jan Schr¨oer. *Hammocks for string algebras*. 博士论文，比勒费尔德大学（德国）, 1998. [SK24] Annoy Sengupta 和 Amit Kuber. 某些字符串代数上的带砖模特征及完美聚类词的一种变体. *preprint, arXiv:2402.05656*, 2024. [SK26] Suyash Srivastava 和 Amit Kuber. 特殊双串代数稳定秩计算的自动化. *Algebras and Representation Theory* 29 1 20, 2026 , : – .