arXiv:2603.18890v1 [math.AC] 19 Mar 2026

# 交换环中若干特殊元素的 $S$版本

D. Bennis、A. Bouziri、S. D. Kumar 和 T. Singh

**摘要**

本文引入并研究交换环中若干基本元素的 $S$版本。具体而言，对于带单位元的交换环 $R$ 和乘法子集 $S$，我们定义并探讨 $S$-可逆、$S$-幂等、 $S$-冯·诺伊曼正则以及 $S$-$\pi$-正则元的概念。我们建立了它们的基本性质、相互关系和结构性包含关系，并利用它们刻画环类。我们特别关注布尔环和 $\pi$-正则环的统一 $S$对应概念，并给出例子以区分这些概念与其经典对应概念。我们建立了若干关于同态和直积构造的传递结果，并着重说明它们与现有 $S$对应概念（统一 $S$-冯·诺伊曼正则、统一 $S$-阿廷等）之间的联系。全文还指出了若干未解决问题，为进一步研究提供方向。

**2020年数学主题分类**：13A15, 13A99, 13F99。

**关键词**： $S$-幂等元， $S$-冯·诺伊曼正则元， $S$-$\pi$-正则元， $S$-布尔环， $S$-$\pi$-正则环。

## 1 引言

在本文中， $R$ 是一个带单位元的交换环， $S$ 是 $R$的一个乘法子集，且所有模都是单位模。我们用 idem($R$)、vnr($R$)、 $\pi$-reg($R$)、reg($R$)、 $Z(R)$ 和 nil($R$) 分别表示 $R$的幂等元、冯·诺伊曼正则元、 $\pi$-正则元、正则元、零因子和幂零元的集合。

回顾一下，元素 $a \in R$ 称为幂等元，如果 $a^2 = a$；称为冯·诺伊曼正则元，如果存在 $x \in R$ 使得 $a = xa^2$； $\pi$-正则元，如果存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 使得 $a^n = xa^{2n}$ ，其中某个 $x \in R$；称为幂零元，如果 $a^n = 0$ ，其中 $n \in \mathbb{N}^*$为某个非零整数。在 [1], 中，Anderson 和 Badawi 研究了这些元素及其相应集合之间的关系，特别是在某些特殊的环类中，例如布尔环、冯·诺伊曼正则环和$\pi$-正则环，并证明了这些环可以根据这些关系进行刻画。若环 $R$ 中的每个元素 $R$ 都是幂等元（分别为冯·诺伊曼正则元、 $\pi$-正则元），则称环 $R$ 为布尔环（分别为冯·诺伊曼正则环、 $\pi$-正则环）。

近年来，利用乘法子集推广经典概念的做法，吸引了同调代数和环论领域研究者的广泛关注。这一方法由 Anderson 和 Dumitrescu 于 2002年 开创，他们提出了 $S$-Noetherian 环的概念，即每个理想 $I$ 都是 $S$-有限的。也就是说，对于 $I$的某个有限生成子理想 $I'$ ，存在一个元素 $s \in S$ 使得

属于 $s(I/I')=0$ [2]。此后，许多研究者对各种经典结构的 $S$-版本进行了研究，包括 $S$-强 Mori 整环 [9]、$S$-相干环和模[6]、$S$-Artinian 环和模 [15]、$S$-完备环 [3]、$S$-平坦模 [13], 以及 $S$-（FP-）内射模 [4, 5]。

尽管许多经典结果都有 $S$对应版本，但在某些情况下，建立这类类比结果已被证明颇具挑战。特别是，从模论视角研究 $S$-诺特环一直困难重重。这促成了所谓一致 $S$-挠理论的发展：从乘法子集 $S$ 中选取元素时，采用“统一”的方式。例如，一致$S$-诺特环是指存在元素 $s\in S$，使得环 $R$ 的每个理想$I$ 都相对于 $s$是 $S$-有限的，也就是说，对某个有限生成子理想 $I'$（其为 $I$的子理想），有 $s(I/I')=0$。这一视角使研究者能够给出一致 $S$-诺特环 [12], 的模论刻画，并建立许多经典结果的“一致” $S$对应版本（例如，参见 [18, 19, 20, 22, 23]）。然而，即便对于一致 $S$版本，某些经典结果的一致 $S$对应版本仍不尽如人意。例如，在 [12], 中，一致 $S$-诺特环被刻画为满足以下断言的环：单射模的直和是一致 $S$-单射的。不过，更合适的断言似乎应是：一致 $S$-单射模的直和是一致 $S$-单射的。这仍是一个开放问题；其他相关未解决问题见 [7] 。

还值得注意的是，近年来，已有多位研究者尝试从模论视角研究 $S$-诺特环和 $S$-相干环（例如，参见 [4, 5, 13, 17, 21]）。

本文旨在介绍并研究交换环中某些特殊元素的 $S$ 版本。具体而言，我们考察可逆元、幂等元、冯·诺伊曼正则元和 $\pi$-正则元的 $S$ 类比，并利用这些概念刻画某些环类。此外，我们还引入并分析布尔环和 $\pi$-正则环的统一 $S$ 版本，从而推广若干相关结果。进一步地，我们给出一些例子，以区分这些新结构与经典结构。

本文分为两节。第一节介绍并研究环中若干经典元素类型的 $S$ 类比，包括可逆元、冯·诺伊曼正则元和 $\pi$-正则元。我们定义 $S$-可逆性、$S$-冯·诺伊曼正则性和 $S$-$\pi$-正则性的概念，并考察它们的基本性质及相互关系。

在第二节中，我们研究这些 $S$概念在全局范围内成立的环。具体而言，我们引入并研究 $S$-布尔环、$S$-冯·诺伊曼正则环和 $S$-$\pi$-正则环类，以及它们的一致 $S$对应类。我们还探讨这些不同环类之间的关系，并提供例子加以区分。

## 2 $S$-可逆元及其推广

回顾 [8] ，若存在 $s\in S$ 使得 $sa=a^2$，则称元素 $a\in R$ $S$-幂等。本节引入并研究可逆元、冯·诺伊曼正则元和 $\pi$-正则元的 $S$版本。

**定义 2.1**。设 $S$ 是交换环环 $R$ $R$的一个乘法子集。那么，

1. 若存在某个 $b\in R$，使得 $ab\in S$，则称元素 $a\in R$ 为 $S$-可逆；也就是说，存在 $b\in R$ 和 $s\in S$，使得 $ab=s$。

*2.* 若存在 $b \in R$ 和 $s \in S$，使得 $sa = a^2b$，则称元素 $a \in R$ 为 $S$-冯·诺伊曼正则 。

*3.* 若存在 $b \in R$、 $s \in S$ 和 $n \in \mathbb{N}$，使得 $n \geq 1$，且满足 $sa^n = a^{2n}b$，则称元素 $a \in R$ 为 $S$-$\pi$- 正则 。

我们用 S-u($R$)（分别用 S-idem($R$)、S-vnr($R$)、S-$\pi$-reg($R$)）表示 $R$ 中所有$S$-可逆（分别为 $S$-幂等、 $S$-冯·诺伊曼正则、 $S$-$\pi$-正则）元素的集合。

对于每个 $s \in S$，我们用 $s$-u($R$)（分别用 $s$-idem($R$)、 $s$-vnr($R$)、 $s$-$\pi$-reg($R$)）表示 $R$ 中关于 $s$ 为 $S$-可逆（分别为 $S$-幂等、 $S$-冯·诺伊曼正则、 $S$-$\pi$-正则）的所有元素的集合。

**注记 2.2**。 以下断言显然易于验证。

*1.* 任意元素 $s \in S$ 都是 $S$-可逆的，因为 $s = s \cdot 1$。

*2.* 环 $R$ 中任意可逆（分别地，幂等、冯·诺伊曼正则、 $\pi$-正则）元都是 $S$-可逆的（分别地， $S$-幂等、 $S$-冯·诺伊曼正则、 $S$-$\pi$-正则）。然而，反向结论一般不成立。此外，$u(R)$-可逆（分别地，$u(R)$-冯·诺伊曼正则、$u(R)$-$\pi$-正则）元恰好是 $R$中的可逆（分别地，冯·诺伊曼正则、 $\pi$-正则）元。*3.* $u(R)$-幂等元未必是幂等元。例如，设 $R$ 是一个非布尔冯·诺伊曼正则环。则存在一个非幂等的 $a \in R$ 。根据 [1, 定理 2.2], ，存在一个可逆元 $u \in R$ ，使得$ua = a^2$。因此， $a$ 是一个非幂等的 $u(R)$-幂等元。事实上，由 [1, 定理 2.2]可知，$u(R)$-幂等元恰好是 $R$中的冯·诺伊曼正则元。*4.* $R$ 中的每个 $S$-可逆元都是 $S$-冯·诺伊曼正则的。事实上，若对某个 $a$、 $b \in R$ 和 $s \in S$，有 $ab = s$ ，则在等式两边同乘 $a$ ，得到 $sa = a^2b$。*5.* $R$ 中的每个 $S$-幂等元都是 $S$-冯·诺伊曼正则的，而每个 $S$-冯·诺伊曼正则元都是 $S$-$\pi$-正则的。

因此，我们有以下包含关系：

$$S \subseteq \text{S-u}(R), \quad \text{idem}(R) \cup S \subseteq \text{S-idem}(R) \subseteq S \cup \text{Z}(R),$$

$$\text{vnr}(R) \cup \text{S-u}(R) \cup \text{S-idem}(R) \subseteq \text{S-vnr}(R) \subseteq \text{S-u}(R) \cup \text{Z}(R),$$

$$\pi\text{-reg}(R) \cup \text{S-vnr}(R) \cup \text{S-nil}(R) \subseteq \text{S-}\pi\text{-reg}(R) \subseteq \text{S-u}(R) \cup \text{Z}(R).$$

其中

$$\text{S-nil}(R) = \{r \in R \mid sr^n = 0 \text{ for some } n \in \mathbb{N}^* \text{ and } s \in S\}.$$

下面的例子2.3 说明， $S$-可逆元素不一定属于 $S$。

**例 2.3.** 设 $R$ 是一个整环， $p$ 是一个素元；令 $s = p^2$ 并设 $S = \{s^n / n \in \mathbb{N}\}$。那么 $p$ 是一个 $S$-可逆元素，但不属于 $S$。

回顾 [8]，元素 $a \in R$ 称为 $S$-零元，如果存在 $s \in S$ 使得 $sa = 0$。

设 $P$ 是 $R$ 的一个素理想。如果一个元素 $r \in R$ 是 $(R \setminus P)$-可逆、$(R \setminus P)$-幂等，等等，则称其为 $P$-可逆、$P$-幂等，等等。

对于环 $R$，我们用 $\mathrm{Max}(R)$ 表示 $R$ 的所有极大理想构成的集合。下面的命题揭示了经典概念与其相对于 $m$ 的对应概念之间的联系，其中 $M$ 遍历 $\mathrm{Max}(R)$。

**命题 2.4.** 以下断言成立：

1. $\{0\} = \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(R)} M\text{-}zero(R)$;
2. $\mathrm{u}(R) = \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(R)} M\text{-}\mathrm{u}(R)$;
3. $\mathrm{nil}(R) = \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(R)} M\text{-}\mathrm{nil}(R)$;
4. $\mathrm{idem}(R) \subseteq \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(R)} M\text{-}\mathrm{idem}(R) \subseteq \mathrm{vnr}(R)$;
5. $\mathrm{vnr}(R) = \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(R)} M\text{-}\mathrm{vnr}(R)$.

证明。(1) 设 $a \in \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(R)} M\text{-}zero(R)$。对于每个极大理想 $M$，存在一个元素 $t_M \notin M$ 使得 $t_M a = 0$。由于由族 $\{t_M : M \in \mathrm{Max}(R)\}$ 生成的理想等于 $R$，因此存在元素 $r_1, \ldots, r_n \in R$ 以及极大理想 $M_1, \ldots, M_n \in \mathrm{Max}(R)$，使得

$$1 = r_1 t_{M_1} + \cdots + r_n t_{M_n}.$$

由此可得

$$a = r_1 t_{M_1} a + \cdots + r_n t_{M_n} a = 0.$$

(2) 设 $a \in \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(R)} M\text{-}\mathrm{u}(R)$。对于每个极大理想 $M$，存在 $t_M \notin M$ 和 $x_M \in R$，使得 $a x_M = t_M$。与 (1) 中一样，族 $\{t_M : M \in \mathrm{Max}(R)\}$ 生成单位理想，因此

$$1 = r_1 t_{M_1} + \cdots + r_n t_{M_n}$$

对于某个 $r_i \in R$ 和 $M_i \in \mathrm{Max}(R)$。因此，

$$1 = r_1 a x_{M_1} + \cdots + r_n a x_{M_n} = a(r_1 x_{M_1} + \cdots + r_n x_{M_n}),$$

这表明 $a \in \mathrm{u}(R)$。

(3) 设 $a \in \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(R)} M\text{-}\mathrm{nil}(R)$。对于每个极大理想 $M$，存在 $t_M \notin M$ 和 $p_M \in \mathbb{N}$，使得 $t_M a^{p_M} = 0$。由于族 $\{t_M : M \in \mathrm{Max}(R)\}$ 生成单位理想，存在 $r_1, \ldots, r_n \in R$ 和 $M_1, \ldots, M_n \in \mathrm{Max}(R)$，使得

$$1 = r_1 t_{M_1} + \cdots + r_n t_{M_n}.$$

令 $N = p_{M_1} + \cdots + p_{M_n}$。那么，

$$a^N = a^N(r_1 t_{M_1} + \cdots + r_n t_{M_n}) = \sum r_i a^N t_{M_i} = 0,$$

因为每个 $t_{M_i} a^{p_{M_i}} = 0$，并且对于某个 $q \geq 0$，$a^N = a^q a^{p_{M_i}}$。因此 $a \in \mathrm{nil}(R)$。

(4) 第一个包含关系显然。设 $a \in \bigcap_{M\in\text{环 R 的极大理想集合}(R)} M$-幂等$(R)$。那么对每个 $M$，都存在 $t_m \notin M$ 使得 $t_M a = a^2$。如上所述，我们记

$$1 = r_1 t_{M_1} + \cdots + r_n t_{M_n}.$$

于是，

$$a = r_1 t_{M_1} a + \cdots + r_n t_{M_n} a = r_1 a^2 + \cdots + r_n a^2 = (r_1 + \cdots + r_n)a^2,$$

所以 $a \in \text{vnr}(R)$。若 $a$ 是正则的，则

$$1 = (r_1 + \cdots + r_n)a.$$

(5) 这可通过采用与前述命题类似的论证得出。

□

回顾 [16]，环 $R$ 的理想 $P$ 称为 $S$-素的，如果 $P \cap S = \emptyset$ 且存在一个固定的 $s \in S$，使得每当 $ab \in P$ 对于某个 $a$，$b \in R$时，我们有$sa \in P$ 或 $sb \in P$。

环 $R$ 的理想 $M$ 称为 $S$-极大理想，若 $M \cap S = \emptyset$ 且存在一个固定的 $s \in S$，使得对于环 $R$ 的任意理想 $I$，只要 $M \subseteq I$，就有 $sI \subseteq M$ 或 $I \cap S \neq \emptyset$。

还可回顾 [15]，若存在一个固定的$s \in S$，使得每当 $ab = 0$ 对于某个 $a$，$b \in R$时，环 $R$ 就称为 $S$-整环；此时，要么 $sa = 0$，要么 $sb = 0$。注意，每个整环都是 $S$-整环。此外，环 R 是 $S$-整环，当且仅当零理想 (0) 是 $S$-素理想。

此外，回顾 [16, 定义 9]，$R$ 称为 $S$-域，当且仅当 (0) 是一个$S$-极大理想。根据定义，每个域也是一个 $S$-域，而每个 $S$-域都是一个$S$-整环。

现在给出以下结果，它推广了域的经典刻画：环 $R$ 是域，当且仅当 $R$ 的每个非零元素都可逆。

**命题 2.5**。以下断言等价：

1. $R$ 是一个 $S$-域。
2. 存在 $s \in S$，使得 $R$ 的每个元素相对于 $s$要么是 $S$-可逆的，要么是 $S$-零元。

证明。 1. $\Rightarrow$ 2. 假设对于某个 $s \in S$，(0) 是 $S$-极大的。设 $a \in R$ 是一个非$S$-零元。由于 (0) $\subseteq Ra$，且 (0) 是 $S$-极大的，我们有 $Ra \cap S \neq \emptyset$ 或 $sRa = 0$。但 $a$ 不是 $S$-零元，所以 $sa \neq 0$，从而 $sRa \neq 0$。因此，$Ra \cap S \neq \emptyset$，也就是说，存在 $r \in R$ 和 $t \in S$，使得 $ra = t$。这表明 $a$ 是 $S$-可逆的。

2. $\Rightarrow$ 1. 设 $I$ 是环 $R$ 的一个理想，且满足 $I \cap S = \emptyset$。那么 $I$ 中没有元素是 $S$-可逆的。根据假设 (2)，$I$ 中的每个元素都必须相对于某个固定的 $s \in S$ 是 $S$-零元。也就是说，对于所有 $a \in I$，都有 $sa = 0$，因此 $sI = 0$。所以，(0) 关于 $s$ 是 $S$-极大的，证明完毕。

□

我们将子集 $A \subseteq R$ 定义为 $S$-扭子集，如果其中每个元素 $a \in A$ 都是 $S$-零元。

**命题 2.6**。设 $R$ 是一个交换环，且 $S$ 是$R$的一个乘法子集。

1. 若 $a, b \in R$ 满足 $ab \in$ 乘法子集 S-u$(R)$，则 $a \in$ 乘法子集 S-u$(R)$。

*2.* 若 $e$ 关于 $s \in S$ 是 $S$-幂等的，则 $s-e$ 也如此。

*3.* 令 $a \in R$。若对某些 $b \in R$、 $s \in S$ 和 $n \geq 1$，有 $sa = a^2b$ （分别地， $sa^n = a^{2n}b$），则 $ab \in$ 乘法子集 S-idem$(R)$ （分别地， $a^nb \in$乘法子集 S-idem$(R)$）。

*4.* 子集 乘法子集 S-u$(R)$、乘法子集 S-idem$(R)$、 $S$-vnr$(R)$ 和 $S$-$\pi$-reg$(R)$ 均为乘法封闭的。

*5.* 交集 乘法子集 S-vnr$(R) \cap$ 乘法子集 S-nil$(R)$ 是 $S$-挠的。因此，子集乘法子集 S-idem$(R)$ $\cap$乘法子集 S-nil$(R)$也具有这一性质。

*6.* 令 $s$、 $t \in S$。若集合 $\{s^n : \ n \in \mathbb{N}\}$ 是有限的，则集合 $s$-vnr$(R)$ $\cap$ $t$-nil$(R)$ 是统一的 $S$-挠的， $s$-idem$(R) \cap t$-nil$(R)$也具有这一性质。

证明。 1. 令 $s \in S$ 和 $c \in R$，使得 $(ab)c = t$，其中 $t \in S$。因此， $a(bc) = t \in S$，这意味着 $a$ 在 $R$ 中是 $S$- 可逆的，故 $a \in$S-u$(R)$。

2. 如果 $se = e^2$，则：

$$(s-e)^2 = s^2 - 2se + e^2 = s(s-e).$$

因此， $s-e$ 也是 $S$-幂等的。

3. 设 $a \in R$ 是关于某个 $s \in S$ 的 $S$-冯·诺伊曼正则元，即存在 $b \in R$ 使得 $sa = a^2b$。则

$$s(ab) = (sa)b = a^2b^2 = (ab)^2,$$

因此 $ab \in$S-幂等$(R)$。"分别"部分的结论类似可得。

4. 设 $a$， $b \in R$ 是分别关于 $s$ 和 $t$ 的两个冯·诺伊曼正则元。则存在 $x$， $y \in R$ 使得 $sa = a^2x$ 和 $tb = b^2y$。于是

$$st(ab) = (sa)(tb) = a^2xb^2y = (ab)^2(xy),$$

这表明 $ab \in$ S-vnr$(R)$。

其余子集也适用类似的论证。

5. 设 $a \in$S-vnr$(R) \cap$S-nil$(R)$。那么存在 $s, t \in S$, $x \in R$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 使得$sa = a^2x$ 且 $ta^n = 0$。于是

$$ts^{n-1}a = txs^{n-2}a^2 = tx^2s^{n-3}a^3 = \cdots = tx^{n-1}a^n = 0.$$

因此， $a$ 是一个 $S$-零元，且该交是 $S$-挠的。

6. 与（3）的证明类似，利用集合 $\{s^n : \ n \in \mathbb{N}\}$ 的有限性即可得出。 □

作为 $S$-类比于 [1, 定理 2.2], 该定理给出了冯·诺依曼正则元的刻画，我们陈述如下定理。

**定理 2.7.** 设 $R$ 是一个交换环。对于$a \in R$，以下命题等价：

*1.* $a \in$ 乘法子集 S-vnr$(R)$。

*2.* 存在 $s \in S$ 和 $u \in$乘法子集 S-u$(R)$ 使得 $sa = a^2u$。

*3.* 存在 $s \in S$, $u \in$ 乘法子集 S-u$(R)$，以及 $e \in$ 乘法子集 S-idem$(R)$ 使得 $sa = ue$。

*4.* 该 存在 $s \in S$ 和 $b \in$ 乘法子集 S-vnr$(R) \setminus \{a\}$，使得 $sab = 0$ 且 $sa + b \in$ 乘法子集 S-u$(R)$。

*5.* 存在 $s \in S$ 和 $b \in R$，使得 $sab = 0$ 且 $sa + b \in U(R)$。

证明。 1. $\Rightarrow$ 2. 令 $s \in S$ 和 $x \in R$ 满足 $sa = xa^2$。令 $e = ax$。根据命题 2.6，我们有 $se = e^2$ 和 $s(s-e) = (s-e)^2$。此外，我们有 $a(s-e) = 0$。令$u = ex + s - e$ 和 $v = a + s - e$。于是，我们有 $uv = s^2$，因此 $u \in$ 乘法子集 S-u$(R)$，并且

$$a^2u = a^2(ex + s - e) = a^2ex + a^2(s - e) = a^2ex = sae = sa^2x = s^2a.$$

2. $\Rightarrow$ 3. 假设对于某个 $s \in S$，有 $sa = a^2u$ 且 $u \in$ 乘法子集 S-u$(R)$。令 $t \in S$ 和 $v \in R$满足 $uv = t$。设 $e = au$，于是我们有 $se = e^2 \in$ idem$(R)$，并且

$$ve = v(au) = ta.$$

3. $\Rightarrow$ 4. 假设 (3) 成立，即对于某个 $u \in$ S-u$(R)$ 和 $e \in$S-幂等$(R)$，有 $sa = ue$。令 $v \in R$和 $t \in S$满足 $uv = t$，并令 $r \in S$满足 $re = e^2$。那么，对于 $b = u(r-e)$，我们有

$$b^2v = u^2(r-e)^2v = tru(r-e) = trb,$$

因为 $(r-e)^2 = r(r-e)$ 根据命题 2.6(2)。因此， $b \in$ 乘法子集 S-vnr$(R)$。此外，

$$sab = (ue)(u(r-e)) = u^2e(r-e) = 0,$$

and

$$sa + b = ue + ur - ue = ru.$$

因此， $sa + b \in$ S-u$(R)$，如所求。

4. $\Rightarrow$ 5. 这是显然的。

5. $\Rightarrow$ 1. 假设 $sa + b = u \in U(R)$，并且对于某个 $b \in R$, $s \in S$，有 $sab = 0$。令 $v \in R$和 $t \in S$ 满足 $uv = t$。那么，

$$sau = sa(sa + b) = s^2a^2 + sab = s^2a^2.$$

因此，

$$a^2(s^2v) = (s^2a^2)v = (sau)v = sta,$$

因此 $a \in$ 乘法子集 S-vnr$(R)$，如所求。 □

回顾 [14, 引理 4] 指出，若 $a$ 是一个冯·诺伊曼正则元，则存在唯一的元 $x \in R$ 使得 $a = a^2x$且 $x = x^2a$。定理2.8 可视为这一结果的一个 $S$类比。

**定理 2.8**。设 $R$ 是一个交换环，且 $a \in R$ 是一个 $S$-冯·诺伊曼正则元。那么，存在 $s \in S$ 和 $x \in R$，使得 $a^2x = sa$ 且 $x^2a = sx$。此外，若 $y \in R$ 是另一个满足条件的元，则 $s^4y = s^4x$。特别地，若 $s$ 是一个正则元，则 $x = y$，因此 $x$ 是唯一的。

证明。 设 $a \in R$ 是一个 $S$-冯·诺伊曼正则元。则存在 $b \in R$ 和$s \in S$，使得 $sa = ba^2$。令 $x = ab^2$。我们计算：

$$xa^2 = ab^2a^2 = a(ba)^2 = (ba)^2a = s^2a, \quad \text{so } s^2a = xa^2,$$

and

$$ax^2 = a(ab^2)^2 = a^2b^4 = s^2b^2 = s^2x, \quad \text{so } s^2x = ax^2.$$

因此，这样的 $x$ 存在。

现在，假设 $y \in R$ 还满足 $s^2a = ya^2$ 和 $s^2y = ay^2$。那么：

$$s^4y = s^2ay^2 = xa^2y^2 = x(a^2y)y = s^2xya = ax^2ya = (a^2y)x^2 = s^2ax^2 = s^4x.$$

因此，$s^4y = s^4x$。特别地，如果 $s$ 是一个正则元，那么消去律意味着 $y = x$，并且 $x$ 的唯一性随之成立。 □

在 [1, 定理 2.1] （分别为 [1, 定理 4.1]）中已经证明，vnr($R$)（分别为 $\pi$-reg($R$)）在乘法下总是封闭的。此外，$R$的加法封闭性已在 [1, 定理 2.9 和 2.11]中进行了研究。主要结果如下：如果 vnr($R$) 关于加法封闭，则 $R$ 是约化的 [1, 定理 2.9]；并且如果 $2 \in$u($R$)，那么 vnr($R$) 关于加法封闭，当且仅当 $R$ 中任意四个单位元之和是一个冯·诺伊曼正则元 [1, 定理 2.11]。

这些观察自然引出了以下问题：

**问题 2.9.** 何时 S-vnr$(R)$ 对加法封闭？换言之，何时它是 $R$ 的一个子环？

我们先回顾：若一个环 $R$ 不含非零的 $S$-幂零元，则称其为 $S$-约化；即，S-幂零($R$) $= 0$。若存在$s \in S$ 和 $n \in \mathbb{N}^*$ 使得 $sa^n = 0$ [8]，则称元素 $a \in R$ 为 $S$-幂零。

此外，若 nil($R$) 是一致 $S$-挠的[10]，则称环 $R$ 为一致 $S$-约化。

注意，每个约化环既是一致 $S$-约化的，也是 $S$-约化的；并且若 $R$ 是 $S$-约化的，则 $S \subseteq$ reg($R$)。在我们的设定中，我们关注如下相关概念。

**定义 命题 2.10。** 若环 $R$ 满足nil$(R) = 0$ 是 $S$-挠的，则称其为弱 $S$-约化环 .

显然，任何约化环都是弱 $S$<style id='4}-约化环；然而，反之一般并不成立。事实上，只需考虑一个不是约化环的统一 $S$<style id='7}-约化环即可。在例 2.11中，我们给出了一个不是统一 $S$<style id='14}-约化的弱 $S$-约化环的例子。

**例 2.11。** 设 $R$ 为交换环，$S$ 为 $R$ 的一个乘法子集，使得：

1. $R_S$ 是冯·诺伊曼正则的。
2. 存在一个 $S$-挠 $R$-模 $M$，但它不是统一的 $S$-挠模。

参见 *[18, 例 3.15]*，其中给出了这样的一个例子。于是，平凡扩张 $R \ltimes M$是一个弱 $S \ltimes \{0\}$-约化环，但不是统一的 $S \ltimes \{0\}$-约化环。

证明。设 $x \in R$ 满足条件：对某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $x^n = 0$。于是

$$\frac{x^n}{1} = \left(\frac{x}{1}\right)^n = \frac{0}{1}$$

在 $R_S$ 中。由于 $R_S$ 是约化的，因此 $\frac{x}{1} = \frac{0}{1}$，故存在 $s \in S$ 使得 $sx = 0$。于是，$R$ 是弱 $S$-约化的。

由于 $M$ 是 $S$-挠的，且 nil($R \ltimes M$) $=$ nil($R$) $\ltimes M$，因此 $R \ltimes M$ 也是弱 $S \ltimes \{0\}$-约化的。然而，$R \ltimes M$ 并非一致 $S \ltimes \{0\}$-约化的，因为 $M$ 并非一致 $S$-挠的。

□

**命题 2.12**。以下断言等价：

*1.* $R$ 是弱 $S$-约化的。

*2.* 乘法子集 S-幂零($R$)是 $S$-挠的。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 令 $a \in$ 乘法子集 S-幂零($R$)。那么，存在 $s \in S$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $sa^n = 0$。因此，$(sa)^n = 0$，这意味着 $sa \in$幂零($R$)。于是，存在 $t \in S$ 使得$tsa = 0$。因此，乘法子集 S-幂零($R$) 是 $S$-挠的。

(2) $\Rightarrow$(1) 这由以下事实可得：幂零($R$) $\subseteq$ 乘法子集 S-幂零($R$)。 □

由命题 2.12 可知，每个 $S$-约化环都是弱 $S$-约化的。然而，例 2.11 表明，逆命题一般并不成立。

利用与命题 2.12证明中类似的论证，我们可以得到以下结果，即命题 2.13。

**命题 2.13**。 以下断言等价：

*1.* $R$ 是均匀 $S$-约化的。 *2.* 存在 $s \in S$，使得 $s$-幂零($R$) 是均匀 $S$-挠的。

**定理 2.14**。 以下断言成立：

*1.* 若乘法子集 S-vnr($R$) 是 $R$ 的子环，则 $R$ 是弱 $S$-约化的。

*2.* 假设存在 $s \in S$，使得 $\{s^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是有限的，且 $s$-vnr($R$) 是 $R$ 的子环，则 $R$ 是均匀 $S$-约化的。

证明。 1. 令 $a \in$ nil($R$)，并令 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $a^n = 0$。因此， $1 + a \in U(R) \subseteq$vnr($R$) $\subseteq$ S-vnr($R$)。由于 S-vnr($R$) 对加法封闭，我们有：

$$a = -1 + (1 + a) \in \text{S-vnr}(R).$$

因此， $a \in$ 幂零($R$) $\cap$ 乘法子集 S-vnr($R$) $\subseteq$ 乘法子集 S-幂零($R$) $\cap$乘法子集 S-vnr($R$)。由命题 2.6，存在$t \in S$ 使得 $ta = 0$ 属于 $R$。因此， $R$ 是弱 $S$-约化的。

2. 设 $a \in$幂零($R$)。则 $1 + a \in U(R) \subseteq$ vnr($R$) $\subseteq$乘法子集 S-vnr($R$)。由于乘法子集 S-vnr($R$)在加法下封闭，我们再次得到：

$$a = -1 + (1 + a) \in \text{S-vnr}(R).$$

因此， $a \in$ 幂零($R$) $\cap$ $s$-vnr($R$) $=$ 1-幂零($R$) $\cap$ $s$-vnr($R$)。因此，幂零($R$) $=$ 1-幂零($R$) $\cap$ $s$-vnr($R$)，它一致地是 $S$-挠的，由命题 2.6。 □

**命题 2.15**。 设 $R$ 是一个带有 $2 = 1 + 1 \in$ 乘法子集 S-u($R$)的交换环，并设 $a \in R$是一个 $S$-冯·诺伊曼正则元。则存在 $s \in S$ 使得 $sa$ 是 $R$中两个 $S$-可逆元之和。

证明。 设 $x \in R$ 和 $k \in S$ 满足 $2x = k$。设 $a \in$ 乘法子集 S-vnr($R$)。由定理 2.7，可得 $sa = ue$ 其中某个 $u \in$ 乘法子集 S-u($R$) 和 $e \in$ 乘法子集 S-idem($R$)。设 $t \in S$ 满足 $te = e^2$。注意到

$$(2e - t)^2 = 4e^2 - 4te + t^2 = t^2,$$

因此 $w = 2e - t \in$ 乘法子集 S-u($R$)，因为 $w^2 = t^2 \in S$。于是，我们有：

$$ke = xw + xt,$$

因此

$$ksa = kue = u(ke) = u(xw + xt) = xuw + xut.$$

因此， $ksa$ 是 $R$中两个 $S$-可逆元之和，结论得证。 □

作为对问题 2.9 的部分回答，我们建立以下结果——定理 2.16，它可以被视为 [1, 定理 2.11]的推广。

**定理 2.16.** 设 $R$ 是一个带有 $2 \in$ 乘法子集 S-u($R$)的交换环。那么以下命题等价：

*1.* 乘法子集 S-vnr($R$) 是 $R$的子环。

*2.* 任意四个 $S$-可逆元之和都是$R$中的 $S$-冯·诺伊曼正则元。

*3.* $u(s + k) + v(t + m) \in$乘法子集 S-vnr($R$) 当且仅当 $s, t \in S$和 $u, v, k, m \in$乘法子集 S-u($R$) 满足$k^2, m^2 \in S$。

证明。 1. $\Rightarrow$ 2. 这直接由包含关系 乘法子集 S-u($R$) $\subseteq$乘法子集 S-vnr($R$)可得，正如备注 2.2(5)(5)。

2. $\Rightarrow$ 3. 由命题 2.6(4) 可立即得出，因为给定元素是四个 $S$-可逆元素之和。

(3) $\Rightarrow$ (1) 由命题 2.6(4)，只需证明 乘法子集 S-vnr($R$) 对加法封闭。设 $a, b \in$乘法子集 S-vnr($R$)。我们要证明 $a + b \in$乘法子集 S-vnr($R$)。设 $x \in R$ 且$k \in S$ 使得 $2x = k$。

根据命题 2.15的证明，存在 $s_a, s_b, t_a, t_b \in S$，以及 $u_a, u_b, w_a, w_b \in$乘法子集 S-u($R$) 使得 $w_a^2 = t_a^2, w_b^2 = t_b^2$, 并且

$$ks_a a = xu_a w_a + xu_a t_a, \quad ks_b b = xu_b w_b + xu_b t_b.$$

因此,

$$ks_a s_b(a + b) = s_b(ks_a a) + s_a(ks_b b) = xs_b u_a(w_a + t_a) + xs_a u_b(w_b + t_b).$$

由 (3)， $ks_a s_b(a + b) \in$ S-vnr($R$)。由于 $ks_a s_b \in S$，我们得出 $a + b \in$ S-vnr($R$)。 □

本节其余部分将致力于考察沿各种环构造对上述不同概念的传递。

设 $f : R \to R'$ 是一个环同态，且 $S$ 是 $R$ 的一个乘法子集。显然，只要 $0 \notin f(S)$, $f(S)$ 就构成 $R'$ 的一个乘法子集。

**命题 2.17。** 设 $f : R \to R'$ 是交换环的一个同态，且 $S$ 是 $R$ 的一个乘法子集。那么，

*1.* $f$(乘法子集 S-u($R$)) $\subseteq f(S)$-u($R'$);

*2.* $f$(乘法子集 S-幂等($R$)) $\subseteq f(S)$-幂等($R'$);

3. $f$(乘法子集 S-幂零($R$)) $\subseteq f(S)$-幂零($R'$);

4. $f$(乘法子集 S-$\pi$-reg($R$)) $\subseteq f(S)$-$\pi$-reg($R'$).

此外，如果 $f$ 是满射，那么上述所有包含关系都是等式。

证明。 显然。 □

接下来，我们给出 $S$-版本的命题 2.17。

**命题 2.18**。 设 $f: R \to R'$ 是交换环的同态，且 $S$ 是环 $R$ 的乘法子集。设 $s \in S$。那么，

1. $f$($s$-u($R$)) $\subseteq f(s)$-u($R'$); 2. $f$($s$-idem($R$)) $\subseteq f(s)$-idem($R'$); 3. $f$($s$-vnr($R$)) $\subseteq f(s)$-vnr($R'$); 4. $f$($s$-$\pi$-reg($R$)) $\subseteq f(s)$-$\pi$-reg($R'$).

此外，如果 $f$ 是满射，那么上述所有包含关系都是等式。

设 $R = \prod_{i\in I} R_i$ 是一族交换环 $(R_i)_{i\in I}$ 的直积。设 $e_i$ 表示 $R$ 中第 $i$ 个分量为 1、其余分量为 0 的元素。注意，如果 $S$ 是环 $R$ 的乘法子集，那么对每个 $i \in I$，子集 $e_iS := \{r_i \in R_i/\pi_i(s) = r_i$ （其中某个 $s \in S\}$，且 $\pi_i: R \to R_i$ 表示典范投影）是 $R_i$ 的乘法子集（当然可能包含零）。反过来，如果对每个 $i$， $S_i$ 都是 $R_i$ 的乘法子集，那么 $S = \prod_{i\in I} S_i$ 就是 $R$ 的乘法子集。

**命题 2.19**。 设 $R$ 是一族交换环 $\{R_i\}_{i\in I}$ 的直积，且 $S$ 是环 $R$ 的乘法子集。那么我们有：

*1. S-u* $(\prod R_i) = \prod e_i$*S-u*$(R_i)$*. 2. S-*幂等 $(\prod R_i) = \prod e_i$*S-*幂等$(R_i)$。*3. S-vnr*$(\prod R_i) = \prod e_i$*S-vnr*$(R_i)$*. 4.* 如果 $I$ 是有限的，则 *S-*$\pi$*-reg* $(\prod R_i) = \prod e_i$*S-*$\pi$*-reg*$(R_i)$；*5.* 如果 $I$ 是有限的，则 *S-*幂零 $(\prod R_i) = \prod e_i$*S-*幂零$(R_i)$。特别地，当且仅当每个 $R_i$ 都是（弱） $S_i$-约化时， $R$ 是（弱） $S$-约化的。

证明。 证明是直接的。 □

现在，我们统一地陈述 $S$-版本的命题 2.19。

**命题 2.20**。 设 $R$ 是交换环族 $\{R_i\}_{i\in I}$的直积，且 $S$ 是 $R$的乘法子集。则有：

*1.* $s$*-u*$(\prod R_i) = \prod s_i$*-u*$(R_i)$；*2.* $s$*-idem*$(\prod R_i) = \prod s_i$*-idem*$(R_i)$；*3.* $s$*-vnr*$(\prod R_i) = \prod s_i$*-vnr*$(R_i)$；*4.* 若 $I$ 有限，则 $s$*-*$\pi$*-reg*$(\prod R_i) = \prod s_i$*-*$\pi$*-reg*$(R_i)$*. 5.* 若 $I$ 有限，则 $s$*-nil*$(\prod R_i) = \prod s_i$*-nil*$(R_i)$*.* 特别地， $R$ 是均匀 $S$-约化的，当且仅当每个 $R_i$ 都是均匀 $S_i$-约化的。

# 3 （Un一致地） $S$-布尔且一致地 $S$-$\pi$-正则环 s

按照 Zhang 的定义， [17], 环 $R$ 称为均匀 $S$-冯·诺伊曼正则，如果存在一个元素 $s \in S$ 使得 $R$ 中的每个元素 $S$相对于 $s$都是 [17, 命题 310], 表明 $R_S$ 是冯·诺伊曼正则的，当且仅当 $R$ 中的每个元素 $S$都是-冯·诺伊曼正则。

类似地，乍看之下，考虑每个元素都是 $S$-$\pi$-正则的环类似乎是很自然的。然而，当且仅当局部化 $R_S$ 是 $\pi$-正则时，才会出现这种情况。事实上，如果每个元素 $a \in R$ 都是 $S$-$\pi$-正则的，那么根据定义，存在 $s \in S$、 $b \in R$和 $n \geq 1$ ，使得 $sa^n = a^{2n}b$。于是，对于任意 $t \in S$，我们有

$$\left(\frac{a}{t}\right)^n = \frac{sa^n}{st^n} = \frac{a^{2n}b}{st^n} = \left(\frac{a}{t}\right)^{2n}\frac{t^nb}{s},$$

这表明$\frac{a}{t}$ 在 $R_S$中是 $\pi$-正则的。反之，假设 $R_S$ 是 $\pi$-正则的。那么对于每个 $a \in R$ ，存在 $n \geq 1$ 和 $\frac{b}{t} \in R_S$ ，使得

$$\left(\frac{a}{1}\right)^n = \left(\frac{a}{1}\right)^{2n}\frac{b}{t}.$$

通分后，我们得到 $sa^n = a^{2n}b'$，其中 $s \in S$ 和 $b' \in R$满足相应条件。因此， $a$ 是$S$-$\pi$-正则的。

因此，“每个元素都是 $S$-$\pi$-正则的”这一性质并未带来任何本质上的新内容。相比之下，对于 $S$-幂等元而言，情况则有所不同，因为正如例3.3所示， $R$ 中的每个元素都是 $S$-幂等的这一事实，并不意味着 $R_S$ 是布尔的。

这些观察促使我们给出以下定义。

**定义 3.1**。 设 $S$ 是交换环 $R$的一个乘法子集。

*1.* 若环 $R$ 中的每个元素都是 $S$-幂等的，则称其为 $S$-布尔 环。若存在 $s \in S$ ，使得 $R$ 中的每个非幂等元关于 $s$都是 $S$-幂等的，则称其为一致 $S$-布尔 环。*2.* 若存在 $s \in S$ ，使得环 $R$ 中的每个元素关于 $s$都是 $S$-$\pi$-正则的，则称该环为一致 $S$-$\pi$-正则 环。

**注3.2**。 以下断言很容易验证：

*1.* 任意布尔环都是一致 $S$-布尔环（相对于1），而任意一致 $S$-布尔环都是 $S$-布尔环。*2.* 任意一致 $S$-布尔环都是一致 $S$-冯·诺伊曼正则环，而任意一致 $S$-冯·诺伊曼正则环都是一致 $S$-$\pi$-正则环。*3.* 任意 $\pi$-正则环都是一致 $S$-$\pi$-正则环。

下面给出一些例子，说明备注3.2中的断言的逆命题一般不成立。我们首先给出一个一致的 $S$-布尔环的例子，它不是布尔环。

**例 3.3**。 考虑环 $R = \mathbb{Z}_6$，并设 $S = \{\bar{1}, \bar{5}\}$ 是 $R$的一个子集。显然， $R$ 的幂等元为 0、1、3、4，而2 和5 不是幂等元。¯取 $s = 5$。于是

$$(\bar{2})^2 = \bar{2}s \qquad and \qquad (\bar{5})^2 = \bar{5}s.$$

¯因此，环 $R$ 中的每个非幂等元都是关于 $s = 5$的 $S$-幂等元。因此， $R$ 是一个一致 $S$-布尔环。

接下来，我们给出一个一致 $S$-布尔环的例子，它不是一个 $S$-布尔环。

**例3.4**。 考虑环 $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 及其乘法闭子集

$$S = \{(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2})\}.$$

容易验证，环 $R$ 中的非幂等元为

$$\alpha_1 = (\bar{2}, \bar{0}), \quad \alpha_2 = (\bar{0}, \bar{2}), \quad \alpha_3 = (\bar{1}, \bar{2}), \quad \alpha_4 = (\bar{2}, \bar{1}), \quad \alpha_5 = (\bar{2}, \bar{2}).$$

对于元素 $\alpha_1$ 和 $\alpha_3$，取 $s = (\bar{1}, \bar{2}) \in S$，并注意到

$$\alpha_1^2 = s\alpha_1, \qquad \alpha_3^2 = s\alpha_3.$$

类似地，对于 $\alpha_2$ 和 $\alpha_4$，令 $s' = (\bar{2}, \bar{1}) \in S$。那么

$$\alpha_2^2 = s'\alpha_2, \qquad \alpha_4^2 = s'\alpha_4.$$

最后，对于元素 $\alpha_5$，取 $s'' = (\bar{2}, \bar{2}) \in S$，我们得到

$$\alpha_5^2 = s''\alpha_5.$$

显然，我们无法找到一个单一的 $s \in S$，使得 $R$ 的每个非幂等元都是关于 $s$的$S$-幂等元。然而，对于每个 $a \in R$，都存在某个 $s \in S$，使得 $a$ 是 $R$的一个 $S$-幂等元。因此， $R$ 不是一致 $S$-布尔环，但它是一个 $S$-布尔环。

下面给出一个一致 $S$-冯·诺伊曼正则环的例子，它不是一致$S$-布尔环：

例*3.5*（[18], 例*3.18*）。令 $T = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$和 $s =$*(1, 0)* $\in T$。令 $R = T[x]/\langle sx, x^2\rangle$，其中 $x$ 是一个不定元，并令 $S = \{1, s\}$ 是 $R$的一个乘法子集。于是，根据 *[18,* 例*3.18]*， $R$ 是一个一致 $S$-冯·诺伊曼正则环，但 $R$不是冯·诺伊曼正则的。此外， $R$ 不是一致 $S$-布尔环；事实上，如果 $R$ 是一致 $S$-布尔环，那么它必定是相对于 $s$而言的，因为 $R$ 不是布尔环。但是

$$s(1 + \overline{x}) = s + s\overline{x} = (1 + \overline{x})^2 = 1 + \overline{x}^2 = 1 + s\overline{x},$$

这意味着 $1 = s$，矛盾。因此 $R$ 不是一致 $S$-布尔环，正如所要求的那样。此外，注意到 $R_S = R$ 不是布尔环。这表明，“ $R$ 的每个元素都是 $S$-幂等的”这一条件并不一定意味着局部化 $R_S$是布尔环，这与定义*3.1*之前的注释一致。

对于其他反例，我们将使用以下结论。

**命题 3.6.** 设 $R$ 是一个交换环族 $\{R_i\}_{i\in I}$的直积，且令 $S$ 为 $R$的一个乘法子集。则

*1.* 当且仅当对每个 $i \in I$， $R$ 都是（统一） $S$-布尔的。*2.* 当且仅当对每个 $i \in I$， $R$ 都是统一 $S$-冯·诺伊曼正则的。*3.* 若 $I$ 有限，则当且仅当对每个 $i \in I$， $R$ 都是统一 $S$-$\pi$-正则的。

证明。 这直接由命题2.20得出。 □

现在给出一个统一 $S$-$\pi$-正则环的例子，它不是 $\pi$-正则的。

**例 3.7**。 设 $R'$ 是一个 $\pi$-正则环，且 $R''$ 是一个非 $\pi$-正则环。令$R = R' \times R''$ 和 $S = S' \times \{0\}$，其中 $S'$ 是 $R'$的任意乘法子集。则 $R$ 相对于(1,0)是统一 $S$-$\pi$-正则的，但它不是 $\pi$-正则的。

最后，我们给出一个一致 $S$-$\pi$-正则环的例子，但它不是一致$S$-冯·诺伊曼正则的。注意，环 $R$ 是冯·诺伊曼正则的（分别地，是 $\pi$-正则的），当且仅当它是一致 $\mathrm{u}(R)$-冯·诺伊曼正则的（分别地，是一致 $\mathrm{u}(R)$-$\pi$-正则的），其中 $\mathrm{u}(R)$ 表示 $R$的单位群。

**例 3.8**。 设 $R'$ 是一个 $\pi$-正则环，且 $R''$ 是一个非冯·诺伊曼正则的 $\pi$-正则环。令 $R = R' \times R''$ 和 $S = S' \times \mathrm{u}(R'')$，其中 $S'$ 是 $R'$的任意乘法子集。那么， $R$ 关于(1,1)是一致 $S$-$\pi$-正则的，但它不是一致$S$-冯·诺伊曼正则的。

回顾一下，如果环 $R$ 的每个理想降链 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都是 $S$-稳定的，则称其为 $S$-阿廷环。这意味着存在一个正整数 $k$ 和一个元素 $s \in S$，使得对于所有 $n \geq k$，都有 $sI_k \subseteq I_n$ [15]。

若环 $R$ 满足上述定义中的元素 $s$ 可以选取为与降链无关，则称其为一致 $S$-阿廷环；也就是说，存在 $s \in S$，使得环 $R$ 的任意理想降链 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都关于 $s$[22] 为 $S$-平稳。

**命题 3.9.** 以下结论成立。

*1.* 若 $R$ 是 $S$-阿廷环，则 $R$ 的每个元素都是 $S$-$\pi$-正则的；等价地， $R_S$ 是一个$\pi$-正则环。*2.* 任意一致 $S$-阿廷环都是一致 $S$-$\pi$-正则的。

证明。 1. 假设 $R$ 是 $S$-阿廷环。取 $r \in R$，并考虑理想的降链

$$Rr \supseteq Rr^2 \supseteq Rr^3 \supseteq \cdots .$$

根据 $S$-阿廷性质，存在正整数 $k$ 和一个元素 $s \in S$，使得对所有 $n \geq k$，$sRr^k \subseteq Rr^n$。特别地， $sRr^k \subseteq Rr^{2k}$，这表明 $r$ 是 $S$-$\pi$-正则的。根据定义 3.1 之前的讨论， $R_S$ 是 $\pi$-正则环这一等价表述也随之成立 3.1。

2. 这可由类似的论证得出。 □

当然，一个一致 $S$-$\pi$-正则环不一定是一致的 $S$-阿廷环；可以利用与例子 3.7和3.8.

回顾 [1, 定理 2.6]，交换环 $R$ 是布尔环，当且仅当 $R$ 的每个元素要么是幂等元，要么是幂零元；也就是说，$R = \mathsf{idem}(R) \cup \mathsf{nil}(R)$。将布尔环替换为 $S$-布尔环，可得：

**命题 3.10**。设 $S$ 是 $R$ 的一个乘法子集，且除1外不含任何单位元。那么，$R$ =乘法子集 $\mathsf{S}\text{-idem}(R) \cup \mathrm{nil}(R)$ 当且仅当 $R$ 是一个 $S$-布尔环。

证明。假设 $R$ = 乘法子集 $\mathsf{S}\text{-idem}(R) \cup \mathsf{nil}(R)$。那么 $U(R) \subseteq$ 乘法子集 $\mathsf{S}\text{-idem}(R)$。设 $a \in U(R)$。则对于某个 $s \in S$，有 $a^2 = sa$，这意味着 $a = s$，因此 $U(R) = \{1\}$。于是，$\mathsf{nil}(R) = \{0\}$，因为 $U(R) + \mathsf{nil}(R) = U(R)$。因此，$R =$ 乘法子集 $\mathsf{S}\text{-idem}(R)$，从而 $R$ 是一个$S$-布尔环。反之显然。 □

尚不清楚命题 $S$ 中的条件3.10是否可以去掉，也不清楚是否可以将$\mathrm{nil}(R)$ 替换为乘法子集 $\mathsf{S}\text{-nil}(R)$；也就是说，如果 $R =$ 乘法子集 $\mathsf{S}\text{-idem}(R) \cup$乘法子集 $\mathsf{S}\text{-nil}(R)$，那么 $R$是否必然是一个 $S$-布尔环？这个问题仍是一个未解决问题。

定理 [1, 2.7] 的另一个结果指出，对于含有至少一个非零零因子的交换环 $R$，要使 $R$ 成为布尔环，只需每个零因子都是幂等元。目前，我们无法证明这一结果的 $S$版本；不过，我们可以给出以下部分结果：

**命题3.11**。设 $s \in S$。假设 $Z(R)$ 含有一个非零元素 $x \neq s$。若$\mathrm{Z}(R) \subseteq s\text{-idem}(R)$，则 $s^2y \in S$ 对每个 $y \in R \setminus Z(R)$都成立。因此，$R$ 是统一$S$冯·诺伊曼正则的。

证明。设 $x \in Z(R) \setminus \{0\}$。由于 $x \in s\text{-idem}(R)$，我们有 $x^2 = sx$。根据命题 2.6，我们还有 $s(s-x) = (s-x)^2$。

现在设 $y \in R \setminus Z(R)$。那么 $xy$ 和 $(s-x)y$ 都属于 $Z(R)^* \subseteq s\text{-idem}(R)$，因此

$$sxy = (xy)^2 = sxy^2 \quad \text{and} \quad s(s-x)y = ((s-x)y)^2 = s(s-x)y^2.$$

由于 $y$ 是正则的，可知

$$sx = sxy \quad \text{and} \quad s(s-x) = s(s-x)y.$$

将这些等式相加，得到

$$s^2 = sx + s(s-x) = sxy + s(s-x)y = (sx + s(s-x))y = s^2y.$$

因此，对于任意 $y \in R \setminus Z(R)$，都有 $s^2y = s^2y^2$。所以，$R$ 关于 $s^2$是均匀 $S$-冯·诺伊曼正则的。 □

众所周知，在交换布尔环上，或者更一般地，在冯·诺伊曼正则环上，每个主理想都是极大的（因而也是素的）。在定理 3.12中，我们将这一结果推广到 $S$-情形。

回顾 [11, 定义 2.1]：环 $R$ 中与 $S$ 不相交的真理想 $P$，如果存在 $s \in S$，使得对于所有 $a, b \in R$，只要 $ab \in P$，则或者有 $sa \in P$，或者有 $sb \in \mathsf{rad}(P)$，其中 $\mathsf{rad}(P)$ 表示 $P$ 的根基，则称其为 $S$-*primary*。

还要回顾一下，任意 $S$-极大理想都是 $S$-素理想，见 [16, 命题 10]。

**定理 3.12.** 设 $R$ 是一个（均匀）$S$-布尔环，且 $P$ 是 $R$ 的一个 $S$-主理想。那么 $P$ 是 $R$ 的一个 $S$- 极大理想，因此是 $S$- 素理想。

证明. 假设 $P$ 关于某个 $t \in S$ 是 $S$-主理想。设 $Q$ 是一个理想，使得$P \subseteq Q$ 且 $Q \cap S = \emptyset$。我们断言 $tQ \subseteq P$。

取 $x \in Q$。由于 $R$ 是 $S$-布尔的，存在 $s \in S$ 使得 $x^2 = sx$。因此，$(s-x)x = 0 \in P$。根据 $P$ 的 $S$-拟主性，要么 $tx \in P$，要么对于某个$n \geq 1$，$(t(s-x))^n \in P$。

假设 $(t(s-x))^n \in P$。那么，由于 $P \subseteq Q$，我们也有 $(t(s-x))^n \in Q$。但注意，对于某个 $r \in R$，$(t(s-x))^n = t^n s^n + rx$。由于 $x \in Q$，可得$t^n s^n = (t(s-x))^n - rx \in Q$。但是 $t^n s^n \in S$，因此 $t^n s^n \in Q \cap S$，这与 $Q \cap S = \emptyset$ 的假设矛盾。因此，我们必有 $tx \in P$。

因此，$tQ \subseteq P$，这表明 $P$ 是 $S$-极大的。 □

通过采用与定理 3.12的证明中类似的论证，可以证明：在更弱的假设下仍然成立，即 $R$ 是一致 $S$-冯·诺伊曼正则的（甚至只需 $R$ 的每个元素都是 $S$-冯·诺伊曼正则的）。

最后给出如下结果，它可以看作布尔环上主分解的一个 $S$ 版本。

**定理 3.13**。 假设 $R$ 关于某个 $s \in S$ *with* $s^2 = s$ 是一致 $S$-布尔的。如果 $I$ 是与 $S$ 不相交的 $R$ 的理想，那么

$$s \cdot \bigcap_{\substack{M \supseteq I \\ M \in \mathrm{Max}_S(R)}} M \subseteq I \subseteq \bigcap_{\substack{M \supseteq I \\ M \in \mathrm{Max}_S(R)}} M,$$

其中 $\mathrm{Max}_S(R)$ 表示 $R$ 的所有 $S$-极大理想的集合。

证明。令

$$J = \bigcap_{\substack{M \supseteq I \\ M \in \mathrm{Max}_S(R)}} M.$$

显然，$I \subseteq J$。我们声称 $sJ \subseteq I$。反设 $sJ \nsubseteq I$。则存在 $x \in J$，使得 $sx \notin I$。考虑理想族

$$\mathcal{F} = \{ K \subseteq R \mid I \subseteq K,\ sx \notin K,\ K \cap S = \emptyset \}.$$

显然，$\mathcal{F} \neq \emptyset$，因为 $I \in \mathcal{F}$。此外，$\mathcal{F}$ 中的每条链在 $\mathcal{F}$ 中都有一个上界（即其并集）。根据佐恩引理，$\mathcal{F}$ 有一个极大元，记为 $M$。

现在证明 $M$是一个 $S$-素理想。设 $a$，$b \in R$且 $ab \in M$。若 $sa \in M$ 和 $sb \in M$都不成立，那么根据 $M$ 在 $\mathcal{F}$ 中的极大性，必有

$$sx \in M + Rsa \quad \text{and} \quad sx \in M + Rsb,$$

so

$$sx = m + r_1 sa \quad \text{and} \quad sx = m' + r_2 sb$$

对于某个 $m$，$m' \in M$以及 $r_1$，$r_2 \in R$。因此 $sx^2 \in M$。由于 $R$是均匀 $S$-布尔的，我们有 $x^2 = sx$ 或 $x^2 = x$。两种情况下都可推出 $sx \in M$，这与 $M \in \mathcal{F}$的事实矛盾。因此，$sa \in M$或 $sb \in M$，从而 $M$是关于 $s$的 $S$-素理想。

根据定理 3.12，在均匀 $S$-布尔环中，每个 $S$-素理想都是 $S$-极大理想。因此，$M$是 $S$-极大理想。但这样一来，$sx \in J \subseteq M$，这与 $sx \notin M$矛盾。

因此，$sJ \subseteq I$，证明完毕。 □

# 参考文献

[1] D. F. Anderson 和 A. Badawi，交换环中的冯·诺伊曼正则元及相关元。代数专论，19(2012)，1017-1040。[2]D. D. Anderson 和 T. Dumitrescu， $S$-诺特环。代数通讯，30(2002)，4407-4416。[3] D. Bennis 和 A. Bouziri，当每个 $S$-平坦模都是（平坦）投射模时。代数通讯，52(10)(2024)，4480-4491。https://doi.org/10.1080/00927872.2024.2348126[4] D. Bennis 和 A. Bouziri，关于 $S$-内射模。数学问题，(2025)，1-11。https://doi.org/10.2989/16073606.2025.2533744。[5] D. Bennis 和 A. Bouziri， $S$-FP-内射模。可从以下网址获取：https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.00167。[6] D. Bennis 和 M. El Hajoui，关于 $S$-相干性。韩国数学会杂志，55(6)(2018)，1499-1512。[7] A. Bouziri，关于 $u$-$S$-诺特环和 $u$-$S$-相干环的注记。代数及其应用杂志，(2025)，第2650302页。可从以下网址获取：https://doi.org/10.1142/S0219498826503020[8] B. Ersoy、Ü. Tekir 和 E. Yıldız，幂等元、纯理想和斯通型定理的 $S$-版本及 $S$-推广，韩国数学会公报，61(1)(2024)，83-92。[9]H. Kim、M. O. Kim 和 J. W. Lim，关于 $S$-强 Mori 域。代数学杂志，416(2014)，314-332。[10] H. Kim、N. Mahdou 和 E. H. Oubouhou，关于交换环的 $S$-Krull 维数，代数及其应用杂志，(2024)，第2650045页。[11] E. Massaoud，交换环的 $S$-主理想。代数通讯，50(2022)，988-997。https://doi.org/10.1080/00927872.2021.1977939[12] C. Mingzhao、H. Kim、W. Qi、F. Wang 和 W. Zhao，一致 $S$-诺特环。数学问题，47(5)(2024)，1019-1038。[13] W. Qi、X. Zhang 和 W. Zhao，S-相干环的新刻画。代数及其应用杂志，22(04)(2023)，第2350078页。[14] R. Raphael，关于正则环和强正则环的一些注记。加拿大数学公报，17(1975)，709–712。[15] E. S. Sevim、Ü. Tekir 和 S. Koç， $S$-阿廷环和有限 $S$-余生成环。代数及其应用杂志，19(3)(2020)，第2050051页。[16] E. Yildiz、B. A. Ersoy、Ü. Tekir 和 S. Koç，关于 $S$-Zariski 拓扑。代数通讯，49(3)(2021)，1212–1224。[17] X. Zhang，关于 $S$-相干环的注记。可从以下网址获取：https://arxiv.org/abs/2405.07271。

[18] X. Zhang，利用一致性刻画 $S$-平坦模和 $S$-冯·诺伊曼正则环。韩国数学会会刊，59(3)(2022年)，643–657。https://doi.org/10. 4134/BKMS.b210291。[19]X. Zhang，论一致 $S$-绝对纯模。韩国数学会杂志，60(3)(2023年)，521-536。[20] X. Zhang，论一致 $S$-相干环。即将发表于落基山数学杂志，可从以下网址获取：https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.07137[21] X. Zhang，$S$-相干环的一些新模论刻画。可从以下网址获取：https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.14142[22] X. Zhang 和 W. Qi，利用一致性刻画 $S$-阿廷性。可从以下网址获取：https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.12569[23] X. Zhang 和 W. Qi，利用一致性刻画 $S$-投射模和 $S$-半单环。交换代数杂志，15(1)(2023年)，139–149。Driss Bennis：摩洛哥拉巴特拉巴特穆罕默德五世大学理学院。电子邮件地址：driss.bennis@um5.ac.ma；driss_bennis@hotmail.com Ayoub Bouziri：摩洛哥拉巴特拉巴特穆罕默德五世大学理学院。电子邮件地址：ayoubbouziri66@gmail.com Shiv Datt Kumar：印度普拉亚格拉吉 211004，莫蒂拉尔·尼赫鲁国家理工学院阿拉哈巴德分校数学系。电子邮件地址：sdt@mnnit.ac.in Tushar Singh（通讯作者）：印度普拉亚格拉吉 211004，莫蒂拉尔·尼赫鲁国家理工学院阿拉哈巴德分校数学系。电子邮件地址：sjstusharsingh0019@gmail.com，tushar.2021rma11@mnnit.ac.in，