arXiv:2603.18932v1 [math.AT] 19 Mar 2026

´Eilenberg-MacLane 谱的拓扑 André-Quillen 同调

CYRIL BARLASOV

Abstract. 基于 Dundas、Lindenstrauss 和 Richter 的工作，我们计算了 Eilenberg-MacLane 谱（如 $H\mathbb{Z}$ 和 $H\mathbb{Z}/p^n$）的带约化系数的拓扑 Andr´é-Quillen 同调。$H\mathbb{F}_p$ 的情形已由 Basterra 和 Mandell 在一篇未发表的工作中解决，后来 Brantner 和 Mathew 在谱分拆李代数的框架下对其进行了改进。我们的方法类似于 Cartan 对 Steenrod 代数的计算，而且最终更为简短。我们还给出了关于 $H\mathbb{Z}$ 基的若干计算。

1. Introduction

在 90 年代末，Basterra [1] 为 $\mathbb{E}_\infty$-环谱构造了 Postnikov 塔的一个结构化版本，其基础是一种新的上同调理论 TAQ*。从字面意义上说，这是对普通交换环的 Andr´é-Quillen 上同调（即导出余切复形）在“勇敢新世界”意义下的推广。然而，拓扑版本还可以描述为高阶拓扑 Hochschild 同调 THH$^{[n]}$的稳定化。这些理论也被视为通过迹方法研究迭代 K-理论的适当工具。

我们回顾 第 2 节中关于拓扑 Hochschild 同调 THH 以及第 3 节中关于 TAQ 的必要且相关的预备知识。一段关于普通普通 An 的 （作为后者的动机）见第 5 节。

本文旨在澄清 Lazarev 关于 *TAQ$H\mathbb{F}_p, \mathbb{S}$ 在 [10] 中的论述。尽管他对 $p = 2$ 给出了正确答案，我们仍无法独立完成论证概要。相应结果归功于 Basterra 和 Mandell（1999 年未发表），并通过 Miller 型谱序列得以确立。从现代观点来看，这属于 Brantner 和 Mathew 对自由谱分拆李代数的同伦群的计算，见第 6 节及 [4]。

$$\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{F}_p, \mathbb{S}) \simeq \pi_{-2-*}\left(\mathrm{Lie}^{\pi}_{\mathbb{F}_p}(\Sigma^{-3}\mathbb{F}_p)\right) \simeq \mathbb{F}_p\left\langle (a_1, ..., a_k) \middle| \begin{smallmatrix} a_i{=}0 \text{ or } 1 \pmod{2p{-}2}; \\ a_1{\geq}4(p{-}1);\ a_i{\geq}pa_{i-1} \text{ for } 2{\leq}i{\leq}k; \\ \deg{=}1{+}a_1{+}...{+}a_k. \end{smallmatrix} \right\rangle \tag{4.9}$$

我们在第 4 节中基于 Dundas、Lindenstrauss 和 Richter [6] 关于高阶拓扑 Hochschild 同调 THH$^{[n]}$ 的工作给出一种新的论证。事实证明，这样的解法与 Eilenberg-MacLane 空间 $K(\mathbb{Z}/p, n)$ 同调的一个经典问题完全平行。此外，同样的方法还可得到

$$\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Z}, \mathbb{S}; H\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p\left\langle (a_0, a_1, ..., a_k) \middle| \begin{smallmatrix} a_i{=}0 \text{ or } 1 \pmod{2p{-}2} \text{ for } 1{\leq}i{\leq}k; \\ a_1{\geq}2(p{+}a_0)(p{-}1);\ a_i{\geq}pa_{i-1} \text{ for } 2{\leq}i{\leq}k; \\ a_0{=}0 \text{ or } 1; \quad \deg{=}2p{+}a_0{+}a_1{+}...{+}a_k. \end{smallmatrix} \right\rangle \tag{4.11}$$

绝对整系数下的完整答案需要掌握高阶 Bockstein 算子；由于 TAQ 除了模结构外没有任何清晰且有用的结构，我们未能确定这些算子。相比之下，在李代数框架下求出 Bockstein 运算或许可行，但也更困难。显然，这项工作尚未完成，甚至仅针对约化系数的计算也还没有完成。尽管没有任何有力证据，我们仍预期这种情况可能类似于对称群的整系数同调，也就是说，答案具有算法性质，且

是如此。尽管如此，不难证明，群 $\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Z},\ \mathbb{S})$ 在有理化后是平凡的，因此不含自由 $\mathbb{Z}$直和项（见命题 4.12），这使我们能够从表达式中提取 p-幂扭结的秩。对于带有剩余域中适当系数的整数环的 TAQ，也可以得到相同的表达式，不过我们不在此列出。我们的另一项结果是

$$\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Z}/p^n,\mathbb{S};H\mathbb{F}_p)\simeq \mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Z},\mathbb{S};H\mathbb{F}_p)\oplus \mathbb{F}_p\left\langle (b_1,...,b_k)\middle|\begin{smallmatrix} b_i=0 \text{ or } 1 \pmod{2p-2} \text{ for } 1\leq i\leq k;\\ b_1\geq 2(p-1);\ b_i\geq pb_{i-1} \text{ for } 2\leq i\leq k;\\ \deg=1+b_1+...+b_k.\end{smallmatrix}\right\rangle \tag{4.14}$$

由关于 Loday 构造中广义 Brun 杂耍的工作 [3] 推导而来。确定 Bockstein 运算的问题依然存在。

策略如下：给定代数 $\mathrm{THH}_*(R;H\mathbb{F}_p)$，依次运用 Eilenberg-Moore 谱序列，得到所有 n 的高阶拓扑 Hochschild 同调 $\mathrm{THH}^{[n]}_*$。随后只需运用组合学，将 TAQ_* 表示为余极限，因为稳定化映射在第二页上诱导，并消去可分解元（这一观察本质上归功于 Moore，见命题 2.5）。一般而言，若这些谱序列退化，便可由此得到 TAQ_* 的一个上界。在特定情形下，它们确实会退化，而其中复杂的组合学部分已由 Cartan 在 [5]中处理。

有必要谈谈一个令人满意的否定结果。B¨okstedt 最初研究 $\mathrm{THH}_*(H\mathbb{F}_p)$的方法依赖于繁复的谱序列考量，但有一条捷径*：利用 Mahowald 型定理，证明 Eilenberg-MacLane 谱是 Thom 谱，再结合 Blumberg、Cohen 和 Schlichtkrull 关于 Thom 谱的拓扑 Hochschild 同调的结果，见 [9]。然而，这种方法不适用于我们的情形。虽然 Basterra 和 Mandell 针对 $\mathbb{E}_\infty$-Thom 谱的 TAQ 给出了类似定理 [2], ，但 Mahowald 的定理只建立了一个 $\mathbb{E}_2$- 等价，因此前一结果毫无用处。我们在此不进一步探讨精确的不可实现性陈述，不过这似乎是有望做到的。

偏好代数方法的读者也可以参考 Kaledin [8]的著作。特别是，该书给出了一个从拓扑中提炼出的 B¨okstedt 周期性证明，并计算了 Steenrod 代数。我们认为，沿着上述文献的思路，或许可以找到 $\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{F}_p,\ \mathbb{S})$ 的代数解法，因为本文的主要工具——稳定化过程——完全可以用代数方法实现，而另一个重要的输入就是 B¨okstedt 周期性本身。

或许没那么有趣的是，在 §5 中，我们考察了底域 $H\mathbb{Z}$ 上的情形，而非球谱 $\mathbb{S}$上的情形。请注意，这自然归结为代数问题，事实上是函子同调问题。借助 Richter 谱序列 [12] ，我们计算得到

命题 5.6. 存在一个分次 $\mathbb{F}_p$-模的同构

$$\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Z}/p^n,H\mathbb{Z})\simeq \Sigma^2\mathcal{A}_p/\beta$$

其中 $\mathcal{A}_p$ 是模 p*Steenrod* 代数。商是关于由 *Bockstein* 运算 β生成的双边理想取的。次数1 处有一个 $\mathbb{F}_p$ 的副本，而次数2处没有。

与光滑代数的情形一样，谱序列会退化，而问题最终归结为对整数 Steenrod 代数的了解；这一代数同样归功于 Cartan。我们没有在文献中找到合适的定量表述，因此在此给出一个简短证明，见命题 5.5。

作为谱范畴的一个具体点集模型，我们在全文中使用 $\mathbb{S}$-模和 [7]代数。

致谢。我感谢 Fedor Vylegzhanin 向我传授相关的代数拓扑知识，也感谢 Dmitry Kaledin 的耐心、建议与批评。

*如果希望以这种方式来看

2. 拓扑 Hochschild 同调

为与参考文献保持一致，我们将采用 [13] 中那样将拓扑 Hochschild 同调定义为 Loday 构造。这是某种特定形式的相容同伦余极限的一个特殊模型。

定义 2.1。给定一个单纯集合 X 和一个交换环谱 R，*Loday* 构造是 $\mathbb{S}$-模范畴中的范畴张量积 $\Lambda_X R :=X\otimes R$。

更明确地说，考虑定义在有限集合上的函子 $Y\to \wedge_{y\in Y}R$：对于满射，它将原像的各个分量相乘；对于单射，则插入单位元。将其定义域延拓到单纯集合。由此得到的图表的同伦余极限就是 Loday 构造。例如， R 上的双边 bar 构造与 $\Lambda_{\Delta^1}R$相同，其中 Δ^1 是标准 1-单纯形，在维数 q中有$q+2$ 个元素。

定理 2.2 ([13])。*Loday* 构造具有以下性质

(i) 单纯集合的等价 $X\xrightarrow{\sim} Y$诱导出等价 $\Lambda_X R\xrightarrow{\sim}\Lambda_Y R$。*(ii)* 给定任意单纯集合 Y，存在等价 $\Lambda_Y\Lambda_X R\simeq \Lambda_{X\times Y}R$。*(iii)* 给定余纤维化 $L\to X$ 和单纯集合的映射 $L\to K$，存在等价 $\Lambda_{X\coprod_L K}R\simeq \Lambda_X R\wedge_{\Lambda_L R}\Lambda_K R$。□

定义 2.3. THH(R) $:=\Lambda_{S^1}R$，其中 S^1 是单纯圆。

注意，THH(R) 是一个交换 R-Hopf 代数。基点的包含诱导出单位映射 η: $R\simeq \Lambda_{\mathrm{pt}}R\to\Lambda_{S^1}R\simeq$ THH(R)。收缩 $S^1\to$ pt 诱导出增广ε: THH(R) $\simeq\Lambda_{S^1}R\to\Lambda_{\mathrm{pt}}R\simeq R$。将两点捏合在一起 ψ： $S^1\to S^1\vee S^1$、折叠μ： $S^1\vee S^1\to S^1$ 和反射 χ： $S^1\to S^1$ 分别诱导出余乘法、乘法和对极。取同伦群后，THH$_*$(R) 成为一个 π_*(R)-Hopf 代数。

在 Loday 构造中用楔代替楔积会得到一个谱 $\vee_X R=X_+\wedge R$，以及一个自然映射 ω_X： $\vee_X R\to\Lambda_X R$。与

$$\omega_X : X_+\wedge\Lambda_Y R\to\Lambda_X\Lambda_Y R\simeq\Lambda_{X\times Y}R$$

商 $X\times Y\to X\wedge Y$所诱导的映射复合，得到自然映射

$$\widehat{\omega}_X : X_+\wedge\Lambda_Y R\to\Lambda_{X\wedge Y}R.$$

定义 2.4（悬挂映射 σ_*）。将 $\widehat{\omega}_{S^1}$与 $S^1_+\simeq S^0\vee S^1$的一个选定分裂复合，诱导出一个映射

$$\widehat{\omega}_{S^1}:\pi_*(S^1_+\wedge\Lambda_X R)\simeq H_*(S^1)\otimes\pi_*(\Lambda_X R)\to\pi_*(\Lambda_{S^1\wedge X}R)$$

定义

$$\sigma_*:\pi_*(\Lambda_X R)\to\pi_*(\Lambda_{S^1\wedge X}R)$$

通过将 $x\in\pi_*$($\Lambda_X R$)映射到 $\widehat{\omega}_{S^1}$ 作用于 $\widetilde{H}_*$(S^1的一个选定生成元所得的 $[S^1]\otimes x$ 的像)。**命题 2.5**。悬挂映射

$$\sigma_*:\pi_*(\Lambda_{S^n}R)\to\pi_*(\Lambda_{S^1\wedge S^n}R)$$

其核包含 π_*R-代数 $\pi_*(\Lambda_{S^n}R)$中的所有可分解元。

证明。注意，源和目标都是交换的 π_*R-Hopf 代数 s.

根据 [13], 命题 8.5， σ_* 悬挂映射 $z\in\pi_{m-1}$将一个元素 $\Lambda_{S^n}R($ $[z]$ $)$ 送到骨架过滤谱序列第一页中的类 $E^1_{1,\ m}\simeq B_1$(π_*R， π_*($\Lambda_{S^n}R$) π_*R)$_m\simeq\pi_m$($\Lambda_{S^n}R$)。但是微分是 $d[x|y]=\pm[xy]$，因此形如 $[xy]$ 的可分解元素是边界，并在谱序列的第二页上消失。 E^2 □

3. Topological André-Quillen homology

对于 A 和 B，若它们是交换的 $\mathbb{S}$-代数，我们将交换的 A-增广 B-代数范畴记作 CAlg_B/A，将交换的非幺 A-代数范畴记作 $\mathsf{CAlg}^{\mathrm{nu}}_A$。

定义 3.1。增广理想 $I_A(X) \in \mathsf{CAlg}^{\mathrm{nu}}_A$属于 $X \in \mathsf{CAlg}_A/A$，是增广映射的纤维

$$I_A(X) \to X \xrightarrow{\varepsilon} A$$

不可分解元模 $Q_A(N) \in \mathsf{Mod}_A$ 属于 $N \in \mathsf{CAlg}^{\mathrm{nu}}_A$，是乘法映射的余纤维

$$N \wedge_A N \xrightarrow{\mu} N \to Q_A(N)$$

如 [1], 所示，分裂平方零扩张函子 $B \vee -\colon \mathsf{Mod}_B \to \mathsf{CAlg}_A/B$ 在导出意义下是 $QI(- \wedge_A B) : \mathsf{CAlg}_A/B \to \mathsf{Mod}_B$ 的右伴随。

定义 3.2。余切复形 属于 $B \in \mathsf{CAlg}_A$，是 B-模

$$\Omega_{B|A} := QI(B \wedge_A B)$$

拓扑 *Andr´e-Quillen*（上）同调 关于 B 在 A 系数取模 $M \in \mathrm{Mod}_B$ 时为

$$\mathrm{TAQ}_*(B, A; M) := \pi_*(\Omega_{B|A} \wedge_B M)$$

$$\mathrm{TAQ}^*(B, A; M) := \pi_{-*}\mathrm{Map}_B(\Omega_{B|A}, M).$$

TAQ 还有一种不同的定义，即将其视为一种稳定化。带基点空间范畴中的伴随 (Σ,Ω) 以通常的方式导出序列谱范畴。范畴 $\mathsf{CAlg}^{\mathrm{nu}}_B$具有 $E := - \otimes S^1$ 和 $\Omega := (-)^{S^1}$，分别作为悬挂函子和环路函子，也就是说，它们分别是沿初始对象的推出和拉回。虽然遗忘代数结构到 Mod_B 后，$E(C) = B \wedge_C B$ 与 Σ 不同，但环路 $\Omega(C) \simeq \Sigma^{-1}C \simeq \mathsf{Map}(\Sigma^\infty S^1, C)$ 作为模彼此相同。在后一种情形中，B-代数结构由映射函子的第二个变量诱导（见 VII.2.8, 3.10 [7]）。现在通常将 $\mathsf{CAlg}^{\mathrm{nu}}_B$ 中的 (E,Ω)-谱范畴定义为类似于等价的增广情形 CAlg_B/B。

定理 3.3 （参见 [2]）。以下三对伴随函子均为范畴等价 .

$$\mathrm{Mod}_B \underset{(-)_0}{\overset{\Sigma^\infty}{\rightleftarrows}} \mathrm{Sp}(\mathrm{Mod}_B) \overset{\mathbb{P}^{\mathrm{nu}}}{\rightleftarrows} \mathrm{Sp}(\mathrm{CAlg}^{\mathrm{nu}}_B) \underset{I}{\overset{B\vee-}{\rightleftarrows}} \mathrm{Sp}(\mathrm{CAlg}_B/B)$$

其中最右边的一对由底层范畴的等价所诱导。最左边的一对则源于模范畴已经是稳定的。中间的一对是自由-遗忘伴随的稳定化，使得 $\mathbb{P}^{\mathrm{nu}}(M) = \vee_{k>0} M^{\wedge_B k} /\!\!/ \mathfrak{S}_k$是一个 B-模上的自由交换非幺代数，而 $/\!\!/$ 表示同伦商。□

在这些等价下，复合函子将一个交换 $\mathbb{S}$-代数 B 映射为一个增广代数 $B \wedge B \in \mathsf{CAlg}_B/B$，其增广为 $\mu\colon B \wedge B \to B$；然后映射为 E-悬挂谱$\{m \mapsto E^m(B \wedge B)\}$，接着映射为增广理想 $\{m \mapsto IE^m(B \wedge B)\}$，最后映射为$B$-模

$$\mathrm{TAQ}(B, \mathbb{S}) \simeq \operatorname*{hocolim}_n \Sigma^{-n} IE^n(B \wedge B).$$

最后一个等价是因为不可分解元函子 Q 与稳定化一致。思路如下：由于这里涉及的所有函子都是伴随函子，它们与余极限交换；再用 Bar 构造对代数作分解后，所要证明的结论便归结为自由代数的情形。在这种情况下，我们有

定理 3.4 ([2])。**给定** $X \in$ 模$_R$，以及 $\mathbb{P}_R$ 一个自由增广的 R-代数函子，存在一个 $\mathbb{P}_R X$-模的等价

$$\mathrm{TAQ}(\mathbb{P}_R X, R) \simeq \mathbb{P}_R X \wedge_R X. \qquad \square$$

作为结构化 Postnikov 塔理论的一个简单而实用的推论 [1]，我们回顾一下 Mandell 引理。它指出，在交换增广代数中，存在一个在弱等价意义下唯一的代数，其同伦群为外代数。

定理 3.5 （见 [6] 中的 2.1）。设 k 为一个交换环，且 $C \in \mathrm{CAlg}_{Hk}/Hk$ 为一个交换增广 Hk-代数。假设存在一个 k-代数同构 $\pi_* C \simeq E_k(x)$，其中$\deg(x) = m > 0$。那么 $C \simeq Hk \vee \Sigma^m Hk$。□

4. Iterated bar construction

定义 4.1。关于 $R \in$CAlg$_{\mathbb{S}}$ 的高阶拓扑 *Hochschild* 同调为

$$\mathrm{THH}^{[n]}(R) := \Lambda_{S^n} R$$

n维球的 Loday 构造。

与圆的情形 S^1 类似，它是一个 R-Hopf 代数。作为 R，我们仍将 $\mathbb{E}_\infty$-环谱视为对象，因此 $\mathrm{THH}^{[n]}(R)$ 也是一个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱。将球谱构造成同伦推出$S^n \simeq D^n \coprod_{S^{n-1}} D^n \simeq \mathrm{pt} \coprod_{S^{n-1}} \mathrm{pt}$，根据性质 2.2 (iii)，我们有如下等价

$$\mathrm{THH}^{[n]}(R) \simeq R \wedge_{\mathrm{THH}^{[n-1]}(R)} R.$$

目前我们感兴趣的是 $R \simeq H\mathbb{F}_p$ 的情形。用于计算同伦群的 Eilenberg–Moore 谱序列（见 [7]）如下

$$E^2_{*,*} = \mathrm{Tor}^{\mathrm{THH}^{[n-1]}_*(H\mathbb{F}_p)}_{*,*}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \Rightarrow \mathrm{THH}^{[n]}_*(H\mathbb{F}_p).$$

Dundas、Lindenstrauss 和 Richter 定理指出，该谱序列每次都会在第二页退化，并归结为一个代数问题：从基本情形 $\mathrm{THH}_*(H\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p[\mu]$ 开始计算迭代 Tor 函子。

定理 4.2 ([6])**.** 令 $B^1 = P(\mu)$ 为以次数为 *2* 的生成元 μ 生成的多项式 $\mathbb{F}_p$-代数。归纳地，令 $B^n = \mathrm{Tor}^{B^{n-1}}_*(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$。则

$$\mathrm{THH}^{[n]}_*(H\mathbb{F}_p) \simeq B^n. \qquad \square$$

回顾 Tor 函子的以下性质。对于交换环 k上的分次交换代数 A，双边 bar 构造 $B_*(k, A, k)$ 是一个带有洗牌积的 k 上的交换微分分次代数。$\mathrm{Tor}^A_*(k,k)$ 是 $B_*(A)$ 的同调环。我们将考虑情形 $k = \mathbb{F}_p$，并取代数 $P(x)$ $E(x)$ 和 $\Gamma(x)$ 作为 A，也就是说，它们分别是多项式代数、外代数和除幂代数。此外，假设 p 为奇数，则代数 $\Gamma(x)$ 化为截断多项式 $P_p(x)$：由于 K¨unneth 定理以及基环的选取，$= k[x]/x^p$ 即 $\Gamma(x) = \otimes_{n=0}^{\infty} P_p\big(\gamma_{p^n}(x)\big)$。

引理 4.3 (见 [3])。

(i) 对于一个多项式代数 $P(x)$，其中 $\deg(x)$ 为偶数

$$\mathrm{Tor}^{P(x)}_*(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \simeq E(\sigma x)$$

其中 $\deg(\sigma x) = \deg(x) + 1$。

(ii) 对于外代数 $E(x)$，其中 $\deg(x)$ 为奇数

$$\mathrm{Tor}^{E(x)}_*(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \simeq \Gamma(\rho^0 x)$$

其中 $\deg(\rho^0 x) = \deg(x) + 1$。

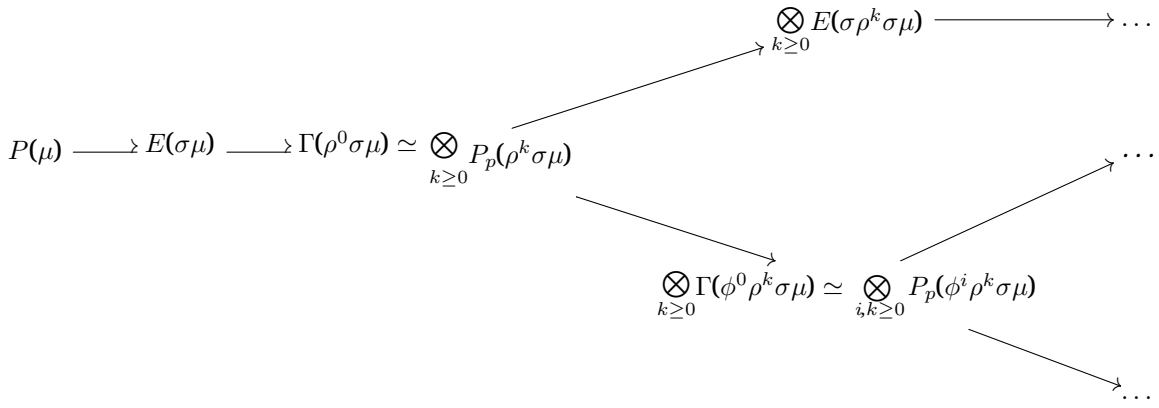
(iii) 对于截断多项式 $P_p(x)$，其中 $\deg(x)$ 为偶数

$$\operatorname{Tor}_*^{P_p(x)}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \simeq E(\sigma x) \otimes \Gamma(\phi^0 x)$$

其中 $\deg(\sigma x) = \deg(x) + 1$ 且 $\deg(\phi^0 x) = 2 + p \cdot \deg(x)$。 □

此外，在所有这些情形下，都可以构造出 Bar 构造代数与其同调之间的乘法拟同构。因此，以多项式代数为起点迭代 Bar 构造，将依次得到外代数、除幂代数，随后得到外代数与除幂代数的乘积。为方便起见，我们将除幂的分解中生成元的记号改为 $\rho^e x := \gamma_{p^e}(\rho^0 x)$ 和 $\phi^e x := \gamma_{p^e}(\phi^0 x)$。

FIGURE 1. 代数 B^n 对于 $1 \leq n \leq 4$



定义 4.4. 在字母表 $\{\mu, \sigma, \rho^k, \phi^k\}$ 中，其中 $k \geq 0$，可容许字如下：

- 它以 μ结尾
- 如果 μ 前面有一个字母，那么它是 σ
- 如果 σ 前面有一个字母，那么它是 ρ^k
- 如果 ρ^k 或 ϕ^k 前面紧接着一个字母，则它是 σ 或 ϕ^l。

如果可容许字以字母 μ、σ、ρ^0、ϕ^0中的一个开头，则它是 稳定的 。次数递归定义如下：

$$\begin{aligned} \deg(\mu) &= 2 & \deg(\rho^k x) &= p^k\big(1 + \deg(x)\big) \\ \deg(\sigma x) &= 1 + \deg(x) & \deg(\phi^k x) &= p^k\big(2 + p \cdot \deg(x)\big). \end{aligned}$$

命题 4.5。 代数 B^n 是由次数为奇数的、长度为 n 的稳定可容许字所索引的生成元上的外代数，与由次数为偶数的字所生成的除幂代数的张量积。

$$B^n \simeq \left(\bigotimes_{|w|\equiv 1} E(w)\right) \otimes \left(\bigotimes_{|w|\equiv 0} \Gamma(w)\right)$$ □

这总结了 [13] 和 [3] 的相关结果。然而，我们希望得到的不只是一个简单的算法。

我们先回顾 Cartan 对 Eilenberg-MacLane 空间上（同）调经典问题的处理方法。透镜空间的上同调代数，其系数为 $\mathbb{F}_p$ ，是 $H^*K(\mathbb{Z}/p,\ 1) \simeq P(\phi^0) \otimes E(\sigma)$ 多项式代数与外代数的乘积，生成元的次数分别为 2 和 1。对偶地，同调代数为

$$H_*K(\mathbb{Z}/p,1) \simeq \Gamma(\phi^0) \otimes E(\sigma).$$

此外，在以下情形中，链 DG 代数与其作为带平凡微分的分次代数的同调之间存在拟同构，即

$$C_*K(\mathbb{Z}/p,n) \xrightarrow{\sim} H_*K(\mathbb{Z}/p,n)$$

因此，我们可以在右侧的 Bar 构造中将它们互换

$$H_*K(\mathbb{Z}/p,n+1) \simeq H_*B_\bullet\big(C_*K(\mathbb{Z}/p,n)\big).$$

这种形式的同构归功于 Milgram，但 Eilenberg 和 MacLane 本人在更早之前就利用了相关情形。示意地说，

$$H(n+1) = \mathrm{Tor}_*^{H(n)}(\mathbb{F}_p,\mathbb{F}_p), \quad \text{where } H(n) := H_*K(\mathbb{Z}/p,n).$$

接下来我们计算外代数和除幂代数的迭代条构造；引理 4.3 已讨论过这一问题。

定义 4.6. 非负整数序列 $I = (a_0, ..., a_k)$ 称为可容许的，如果

$$\begin{gathered} a_0 = 0 \text{ or } 1; \\ a_i = 0 \text{ or } 1 \pmod{2p-2} \text{ for } 0 \le i \le k; \\ a_1 \ge 2p-2; \quad a_{i+1} \ge pa_i \text{ for } 1 \le i \le k-1. \end{gathered}$$

次数定义为 $|I| = a_0 + a_1 + ... + a_k$。

定理 4.7（见 §6，[5]）。设 $n \ge 1$ 和 p 为奇数，则

$$H_*K(\mathbb{Z}/p,n) \simeq \left(\bigotimes_{\text{odd}} E(I)\right) \otimes \left(\bigotimes_{\text{even}} \Gamma(I)\right)$$

K（$\mathbb{Z}/p, n$）的模 p 同调代数是奇次数生成元上的外代数与偶次数生成元上的除幂代数的张量积。生成元由满足 $pa_k <$（$p-1$）（$n + |I|$）的可容许序列 $I =$（a_0, ..., a_k）标记，其次数为 $|I| + n$。

证明。与迭代条构造所得字之间的双射如下。设 α 是定义 4.4 意义下的可容许字，其中省略了 μ 。Cartan 对它们的定义有所不同：他将符号 γ_{p^n} 视为一个单独的字 $\gamma_p...\gamma_p$；我们暂且沿用这一约定。

考虑由 α 中的字母组成的序列（可以为空），这些字母不同于 σ 或 ρ^0，并从右向左编号。对于 α_i，令 $2k_i$ 为其中第 i 个字母在整个 α 中严格位于 α_i 右侧的子字 β_i 的次数；根据定义 4.4，显然这是一个偶整数。于是，字$\alpha_i\beta_i$ 在 $\alpha_i = \gamma_p$ 时的次数为 $2pk_i$，在 $\alpha_i = \phi^0$ 时的次数为 $2pk_i + 2$。令 a_i 为 $\alpha_i\beta_i$ 与 β_i 的次数之差的“修正值”，使得

$$\begin{aligned} a_i = 2k_i(p-1) + \varepsilon_i \quad & \text{with } \varepsilon_i = 0 \text{ if } \alpha_i = \gamma_p; \\ & \varepsilon_i = 1 \text{ if } \alpha_i = \phi^0. \end{aligned}$$

这定义了 a_i 对于 $i \ge 1$。令 $a_i = 0$，如果 i 大于 α 中 γ_p 和 ϕ^0 出现的次数。

这个字仅包含 σ 和 ρ^0，它定义了一个带有 $a_i = 0$的序列。由定义还可直接得出， $a_i = 0$ 或 1（模 $2p-2$）。至于条件 $a_{i+1} \geq pa_i$，注意到 $\deg(\alpha_i\beta_i) = 2k_ip + 2\varepsilon_i$，于是对于任意 $i \leq k-1$，都有 $2k_{i+1} \geq 2k_ip + 2\varepsilon_i$。

超额不等式 $pa_k < (p-1)(n+|I|)$ 通过 n 限制可容许字的长度。因子 $n+|I|$ 等于 $\deg(\alpha)$，根据 a_i 的定义，需要在两种情况下检验其必要性：最左边的字母为 ϕ^0 或 γ_p 时。

现在， $K(\mathbb{Z}/p,\ n)$ 的同调代数有两类生成元，分别来自外代数或 除幂代数。第一种情况下，生成元以 $\ldots\rho^0\sigma$ 结尾；第二种情况下以 $\ldots\phi^0$ 结尾，因此，当下一个字母为 γ_p 时， a_1 取得最小值，从而得到条件 $a_1 \geq 2(p-1)$。第二类生成元由一个值为 1 的附加数 a_0 计入。

很容易验证，这样的 $(a_1,\ \ldots,\ a_k)$ 满足可容许性条件 4.6，并唯一确定一个字。更确切地说，Cartan 给出了一个从序列构造字的算法。□

现在，作为一个分次模，模 p Steenrod 代数的对偶是以下余极限

$$\mathcal{A}_p \simeq \operatorname*{colim}_n \Sigma^{-n}\widetilde{H}_*\big(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{F}_p\big)$$

取遍 $\Sigma K(\mathbb{Z}/p,n) \xrightarrow{\sigma} K(\mathbb{Z}/p,n+1)$ (Σ,Ω)-伴随的余单位映射（参见 2.4）。

我们回到拓扑 Hochschild 同调$^{[n]}(H\mathbb{F}_p)$。定理 4.7 的证明可逐字照用，唯一的区别是 $B^1 \simeq P(\mu)$。

命题 4.8。对于 $n>1$ 和奇数 p

$$\mathrm{THH}^{[n]}_*(H\mathbb{F}_p) \simeq \left(\bigotimes_{\text{odd}} E(I)\right) \otimes \left(\bigotimes_{\text{even}} \Gamma(I)\right)$$

生成元由可容许序列 $I=(a_1,\ldots,a_k)$ 标记，满足

$$\begin{gathered} a_i = 0 \text{ or } 1 \pmod{2p-2} \text{ for } 1 \leq i \leq k; \\ a_1 \geq 4(p-1);\quad a_{i+1} \geq pa_i \text{ for } 1 \leq i \leq k-1; \\ pa_k < (p-1)(n+|I|); \end{gathered}$$

其次数为 $n+|I|$，其中 $|I| = 1 + a_1 + \ldots + a_k$。

证明。 利用定理 4.2，我们必须从 $n=2$ 开始归纳，因为 $n=1$ 的多项式代数在此处无法统一适用。因此，序列的次数发生了平移。

双射如定理 4.7 中所述，但可容许字最终将得到 $\ldots\rho^0\sigma\mu$，它在 $n \geq 2$中扮演同调类 $\ldots\rho^0\sigma \in H_*K(\mathbb{Z}/p,n)$ 的角色，并且次数为 4。因此，对 a_1的限制中出现了粗体的 4。

指标 a_i 按照相同的步骤定义，因此它们满足其余的条件。数值 $|I|+n$ 等于一个可容许字的次数，该可容许字对应于序列 $(a_1,\ldots,a_k)$。□

与从定理 4.7 推导出 Steenrod 代数类似，我们将使用上述命题，并将 TAQ 定义为一种稳定化

$$\mathrm{TAQ}(R,\mathbb{S}) \simeq \operatorname*{hocolim}_n \Sigma^{-n} IE^n(R\wedge R) =: \operatorname*{hocolim}_n \Sigma^{-n}\overline{\mathrm{THH}}^{[n]}(R).$$

$\mathrm{THH}^{[n]}(R)$ 上方的横线表示该 $\mathbb{S}$-代数的增广理想。根据纤维化长正合序列，当 $R \simeq Hk$ 时，它的同伦群就是增广理想。因此

$$(*) \qquad \mathrm{TAQ}_*(R) \simeq \operatorname*{colim}_n \left(\overline{\mathrm{THH}}_{*+1}(R) \xrightarrow{\sigma_*} \overline{\mathrm{THH}}^{[2]}_{*+2}(R) \to ... \to \overline{\mathrm{THH}}^{[n]}_{*+n}(R) \to ... \right)$$

余极限取遍由下列复合诱导的映射（见 2.4）

$$\begin{array}{ccccc} \sigma_* : S^1 \wedge \Lambda_{S^n} R & \xrightarrow{\widehat{\omega}_{S^1}} & \Lambda_{S^1 \times S^n} R & \xrightarrow{\Lambda_\pi} & \Lambda_{S^1 \wedge S^n} R \\ \wr| & & & & \wr| \\ \Sigma \mathrm{THH}^{[n]}(R) & & & & \mathrm{THH}^{[n+1]}(R) \end{array}$$

THH 中非约化悬挂 $\widehat{\omega}_{S^1}$ 以及由乘法到 smash π 的投影诱导的映射 Λ_π: $S^1 \times S^n \to (S^1 \times S^n)/(S^1 \vee S^n) \simeq S^1 \wedge S^n$。回想一下，根据命题 2.5，$\sigma_*$ 会消去可分解元；根据其证明中对该映射的描述，它对生成元（即 $\mathrm{THH}^{[n]}_*(H\mathbb{F}_p)$ 中的可容许字$x \in$）的作用为

$$\sigma_*(x) = \begin{cases} \sigma x & \deg(x) \text{ even}, \\ \rho^0 x & \deg(x) \text{ odd}. \end{cases}$$

余极限中的元素是一个等价类，其中仅在左侧的 $\{...\sigma\rho^0\sigma\rho^0...\}$ 串不同的字被视为相同。根据可容许序列的构造，在左侧添加 σ 或 ρ^0 不会改变数值 a_i，因此 $\sigma_*(I) = I$。

命题 4.9（参见 §6）。分次 $\mathbb{F}_p$-模

$$\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{F}_p, \mathbb{S})$$

有一组以序列 $I = (a_1, ..., a_k)$ 为指标的基，满足

$$a_i = 0 \text{ or } 1 \pmod{2p-2} \text{ for } 1 \le i \le k;$$
$$a_1 \ge 4(p-1); \quad a_{i+1} \ge p a_i \text{ for } 1 \le i \le k-1;$$

次数为 $|I| = 1 + a_1 + ... + a_k$。

证明。尽管 $\sigma_*(I) = I$ 是一个序列，悬挂映射会使次数增加 1。由命题 4.8 和上面的公式 $(*)$，即可得到所述结论。事实上，应用 σ_* 后，只有不可分解元，即 $\mathrm{THH}^{[n]}_*(H\mathbb{F}_p)$ 的生成元，能在余极限中保留下来（见命题 2.5）。它们的指标在这里相应转换，而限制次序 $[n]$ 的超额条件 $pa_k < (p-1)(n + |I|)$ 则消失。□

定理 4.2 曾在 [6] 中作为一条注记出现；作者主要关注的是整数环，而他们的主要结果是

定理 4.10（[6]）。对于 $n \ge 1$ 和奇数 p

$$\mathrm{THH}^{[n]}_*(H\mathbb{Z}; H\mathbb{F}_p) \simeq B^n(x_{2p}) \otimes B^{n+1}(y_{2p-2})$$

其中，*Bar* 构造的迭代分别从 $P_{\mathbb{F}_p}(x_{2p})$ 和 $P_{\mathbb{F}_p}(y_{2p-2})$ 开始。 □

命题 4.11. 分次 $\mathbb{F}_p$-模

$$\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Z}, \mathbb{S}; H\mathbb{F}_p)$$

有一个以序列 $I = (a_0, a_1, ..., a_k)$ 为指标的基，使得

$$a_0 = 0 \text{ or } 1;$$
$$a_i = 0 \text{ or } 1 \pmod{2p-2} \text{ for } 1 \le i \le k;$$
$$a_1 \ge 2\,(p + a_0)(p-1); \quad a_{i+1} \ge p a_i \text{ for } 1 \le i \le k-1;$$

次数为 $|I| = 2p + a_0 + a_1 + ... + a_k$。

证明。 记 $\nu := x_{2p}$ 和 $\theta := y_{2p-2}$。 于是

$$B^2 \simeq E(\sigma\nu) \otimes \Gamma(\rho^0\sigma\theta)$$

它们的次数分别为 $2p+1$ 和 $2p$。略去拓扑 Hochschild 同调$^{[n]}$的一步中间计算，直接构造如下双射。两组可容许字 $...\rho^0\sigma\nu$ 和 $...\rho^0\sigma\theta$ 都对应于如下形式的可容许序列（回忆定理 4.7 中的构造）

$$\begin{array}{ccc} ...\rho^0\sigma\nu & & ...\rho^0\sigma\theta \\ & (a_1, ..., a_k) & \\ a_1 \geq (\mathbf{2p}+\mathbf{2})(p-1) & & a_1 \geq \mathbf{2p}(p-1) \\ |I| = 1 + a_1 + ... + a_k + \mathbf{2p} & & |I| = 2 + a_1 + ... + a_k + \mathbf{2p} - \mathbf{2} \end{array}$$

此处的粗体数字与命题 4.8 中的相同。度数中的数字，因为它们是 ν和 θ的次数。 a_1的条件中的数字，因为它们是 $\rho^0\sigma\nu$ 和 $\rho^0\sigma\theta$的次数；而 a_1 的最小值在下一个字母为 γ_p时取得。

由于归纳步骤中的延迟，这两个序列的次数都平移 1（和式左侧的数字），参见命题 4.8。第二个序列还会额外平移 1，这与 Eilenberg-MacLane 情形类似：在归纳基底中引入一个额外指标 a_0，以计入除幂代数。仿照该情形，我们引入 a_0，使得 $a_0 = 1 \leftrightarrow ...\nu$ 和$a_0 = 0 \leftrightarrow ...\theta$。

关于稳定化的其余推理与命题 4.9 中相同，即对于最后一个指标 a_k，我们可以省略超额条件。现在很容易验证，给定的指标化是一个保持次数的双射。□

关于更一般系数，我们得到的最佳结果是

命题 4.12。
(i) $\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Q}, \mathbb{S}) \simeq 0$。 *(ii)* $\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Z}, \mathbb{S}; H\mathbb{Q}) \simeq 0$。 *(iii)* 群 $\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Z}, \mathbb{S})$ 是有限的。

证明。 (i) 从余切复形的定义可以看出

$$\Omega_{H\mathbb{Q}|\mathbb{S}} \simeq QI(H\mathbb{Q} \wedge H\mathbb{Q}),$$

由于乘法映射 $\mu: H\mathbb{Q} \wedge H\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} H\mathbb{Q}$ 是一个同伦等价，增广理想是平凡的，因此余切复形本身也是平凡的。

(ii) $\mathbb{S} \to H\mathbb{Z} \to H\mathbb{Q}$的传递性余纤维序列与标准单位映射给出长正合序列

$$... \to \mathrm{TAQ}_{*+1}(H\mathbb{Q}, H\mathbb{Z}) \to \mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Z}, \mathbb{S}; H\mathbb{Q}) \to \mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Q}, \mathbb{S}) \to ...$$

此处右侧的项由断言 (i) 可知是平凡的。左侧的项由引理 5.4 可知是平凡的。

(iii) 由于 $\Omega^{H\mathbb{Z}|\mathbb{S}}$ 是一个 $H\mathbb{Z}$-模，它以与其同伦群相同的方式分解为直和项。由前一个断言可得，

$$H\mathbb{Q} \wedge_{H\mathbb{Z}} \Omega_{H\mathbb{Z}|\mathbb{S}} \simeq \mathrm{pt}.$$

因此，同伦群不含自由的 $\mathbb{Z}$-直和项。由于它们是有限生成阿贝尔群，所以它们是有限群。□

注： 由此，p 幂扭元 $T_n(p) = \mathrm{TAQ}_n(H\mathbb{Z},\ \mathbb{S}) \otimes \mathbb{Z}_p$的秩（作为阿贝尔群）可以根据 $t_n(p) = \mathrm{TAQ}_n(H\mathbb{Z},\ \mathbb{S};\ H\mathbb{F}_p)$ 归纳地读出，如下所示：

$$\mathrm{rk}\ T_n(p) = \mathrm{rk}_{\mathbb{F}_p} t_n(p) - \mathrm{rk}\ T_{n-1}(p).$$

最后，我们继续讨论 $H\mathbb{Z}/p^m$ 的情形。高阶 $\mathrm{THH}^{[n]}$ 的识别归功于 to

定理 4.13 （见 [3]）。

$$\mathrm{THH}^{[n]}(H\mathbb{Z}/p^m; H\mathbb{F}_p) \simeq \mathrm{THH}^{[n]}(H\mathbb{Z}; H\mathbb{F}_p) \underset{H\mathbb{F}_p}{\wedge} \mathrm{HH}^{[n]}(\mathbb{Z}/p^m; \mathbb{F}_p),$$

其中 $\mathrm{HH}^{[n]}$ 表示高阶（代数）*Hochschild* 同调，并视为一个单纯 $\mathbb{F}_p$-代数。这些可计算为迭代的 Tor函子

$$\mathrm{HH}^{[n]}_*(\mathbb{Z}/p^m; \mathbb{F}_p) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathrm{HH}^{[n-1]}_*(\mathbb{Z}/p^m; \mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p),$$

只要 $\mathrm{HH}^{[1]}_*(\mathbb{Z}/p^m;\ \mathbb{F}_p) \simeq \Gamma_{\mathbb{F}_p}(\mu)$ 满足 $\deg(\mu) = 2$。

命题 4.14。分次 $\mathbb{F}_p$-模

$$\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Z}/p^m, \mathbb{S}; H\mathbb{F}_p)$$

同构于 $\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Z}, \mathbb{S};\ H\mathbb{F}_p)$ 的直和，以及一个以以下序列为索引、*e*-列 $I = (b_1, \ldots, b_k)$ 的模，使得

$$b_i = 0 \text{ or } 1 \pmod{2p-2} \text{ for } 1 \le i \le k;$$
$$b_1 \ge 2(p-1); \quad b_{i+1} \ge p b_i \text{ for } 1 \le i \le k-1;$$

次数为 $|I| = 1 + b_1 + \ldots + b_k$。

证明。上一个定理中存在 $H\mathbb{F}_p$-模的楔积，这意味着存在直和分解。

至于第二个直和项，它来自 $\Gamma(\mu)$ 的迭代 Tor，已在 Eilenberg-MacLane 计算过程中出现过，其论证与定理 4.7 中的相同。□

5. Richter spectral sequence

回顾普通 Andr´e-Quillen 同调的构造 [11]。交换代数 A 到模 M 的 k-导数是一个 k-线性映射 $D\colon A \to M$，满足莱布尼茨法则$D(ab) = aDb + bDa$。将所有导数组成的集合记为 $\mathrm{Der}_k(A, M)$。那么函子 $\mathrm{Der}_k(A, -)$ 可由相对 K¨ahler 微分 $\Omega^{A|k}$ 的 A-模表示：

$$\mathrm{Der}_k(A, M) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A|k}, M).$$

可以证明 $\Omega_{A|k} = I/I^2$，其中 $I = \ker(A \otimes_k A \xrightarrow{\mu} A)$ 是增广理想。它是由 $dx,\ x \in A$ 生成的自由 A-模对以下关系取商所得

$$d(x+y) = dx + dy, \qquad d(xy) = xdy + ydx, \qquad d(\alpha x) = \alpha dx \ \text{ for } \alpha \in k.$$

平方零扩张 $A \vee M \in \mathrm{CAlg}_k/A$ 是一个交换的增广 k-代数，在阿贝尔群意义下与$A \oplus M$ 一致，其环结构

$$(x, m) \cdot (y, m') = (xy, xm' + ym).$$

平凡平方零扩张函子 $M \to A \vee M$是 $\mathrm{Ab}(X) = A \otimes_X \Omega^{X|k}$ 的右伴随

$$\mathrm{Ab}\colon \mathrm{CAlg}_k/A \rightleftarrows \mathrm{Mod}_A\colon A \vee -.$$

要定义非加性的 Ab 的导出函子，需要使用单纯形分解。由单纯交换 k-代数组成的范畴 $\Delta^{op}\mathrm{CAlg}_k$ 具有一种模型结构，其中映射 $f\colon X \to Y$ 是弱等价（分别为纤维化），当且仅当它是底层单纯形集合之间的弱等价（纤维化）。根据公理，这已经足以确定模型结构，但也可以明确描述余纤维化。此数据可推广到增广情形，而 $\Delta^{op}\mathrm{CAlg}_k/A$ 中的一个对象是如下形式的图表：$k_\bullet \to X \to A_\bullet$，其左右两侧为常值单纯形对象，映射分别是逐次数单位和增广。所需的 A 的单纯形分解，是 $P_\bullet \in \Delta^{op}\mathrm{CAlg}_k/A$ 中表示其余纤维替换的一个对象。

定义 5.1. 余切复形 of $A \in \mathrm{CAlg}_k/A$ 是一个单纯形 A-模

$$L_{A|k} := \mathbf{L}\mathrm{Ab}(A) = A \otimes_{P_\bullet} \Omega_{P_\bullet|k}$$

Andr´e-Quillen 同调 of A 系数取自模 M 的

$$\mathrm{AQ}_*(A|k; M) := \pi_*(L_{A|k} \otimes_A M).$$

根据 Dold-Kan 对应，单纯形 A-模范畴等价于有下界链复形的 A-模范畴。同伦群对应于归一化复形的同调。

定理 5.2. 余切复形具有以下性质

- *(局部化)* 对于 A 中的乘法子集 S，有 $L_{S^{-1}A|A} \simeq 0$。
- （光滑消失）对于 $A \to B$ 光滑态射，有 $L_{B|A} \simeq \Omega^{B|A}$。 □

引理 5.3（见 [11]）。设 $B = A/I$。那么对于 I 正则理想，有 $L_{B|A} \simeq I/I^2[1]$。

因此 $\mathrm{AQ}_*(\mathbb{Z}/p^n|\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p^n[1]$，但请注意，奎伦定理的适用范围要广泛得多，而在此情形下，进行单纯形分解计算是直接的。

在 [12] 中，Richter 构造了一个 Atiyah-Hirzebruch 型谱序列，该谱序列以代数 Andr´e-Quillen 同调为输入，并收敛到拓扑同调。这里基点的作用源于一个一元多项式环。设 A 为任意交换增广 k-代数，则谱序列具有如下形式

$$E^2_{p,q} = \mathrm{TAQ}_q\big(Hk[x], Hk; Hk\big) \otimes \mathrm{AQ}_p(A|k; k) \Rightarrow \mathrm{TAQ}_{p+q}(HA, Hk; Hk)$$

Richter 的另一个深刻定理表明，$\mathrm{TAQ}(Hk[x],\ Hk) \simeq H\mathbb{Z} \wedge Hk$。这就完成了识别-第二页项的分类。作为直接推论

引理 5.4。$\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Q},\ H\mathbb{Z}) \simeq 0$。

证明。代数 $\mathbb{Q}|\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$的局部化。根据性质 5.2，其同调是平凡的 $\mathrm{AQ}_*(\mathbb{Q}|\mathbb{Z}) \simeq 0$。通过谱序列论证可得 TAQ_* 的平凡性。□

为了在非平凡情形下处理 $H\mathbb{Z}$ 基，我们需要明确阐述一个关于整数 Steenrod 代数的民间结论

命题 5.5。存在一个阿贝尔群同构 $H\mathbb{Z}^*H\mathbb{Z} \simeq \bigoplus_p \mathcal{A}_p/\beta$，其与 $\mathbb{Z}$在零次数处的一个副本同构。这里 $\mathcal{A}_p$ 是 模 p *Steenrod* 代数，商是关于由 *Bockstein* 运算 β生成的双边理想取得的。

证明。根据 Serre，$H\mathbb{F}_p^*H\mathbb{Z} \simeq \mathcal{A}_p/\beta$。对于 $p = 2$，Bockstein β 与第一个 Steenrod 平方 Sq^1一致。我们将运行 Adams 谱序列

$$\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}_p}(\mathcal{A}_p, \mathcal{A}_p/\beta) \Rightarrow H\mathbb{Z}^{t-s}H\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_p$$

此外，使用换环同构，或利用自由分解计算 Ext

$$... \xrightarrow{\beta} \mathcal{A}_p \xrightarrow{\beta} \mathcal{A}_p \to \mathcal{A}_p/\beta$$

应用 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{A}_p}(-,\ \Sigma^*\mathcal{A}_p/\beta)$，得到复形

$$\Sigma^*\mathcal{A}_p/\beta \xrightarrow{\beta} \Sigma^*\mathcal{A}_p/\beta \xrightarrow{\beta} ...$$

该复形处处正合，除 $s=0$ 外，并且在该次数上的同调为 $\mathcal{A}/\beta$。因此，Adams 谱序列退化，且 $H\mathbb{Z}^*H\mathbb{Z}_p \simeq \mathcal{A}_p/\beta$。

接下来，将 $\pi_*\mathrm{Map}(H\mathbb{Z},\ -)$ 应用于一个 Bousfield 方形

$$\begin{array}{ccc} H\mathbb{Z} & \longrightarrow & \prod_p H\mathbb{Z}_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ H\mathbb{Q} & \longrightarrow & \prod_p H\mathbb{Q}_p \end{array}$$

从而得到所声称的同构。 □

命题 5.6。

$$\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{Z}/p^n, H\mathbb{Z}) \simeq \Sigma^2\mathcal{A}_p/\beta$$

是分次 $\mathbb{F}_p$-模的一个同构。次数 *1* 而非 *2* 处有一个 $\mathbb{F}_p$。

证明。 根据泛系数定理，从同调转到上同调时，挠元会移动 -1

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{i-1}, \mathbb{Z}) \to H^i \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i, \mathbb{Z}) \to 0$$

$$H^i \simeq \mathrm{Free}(H_i) \oplus \mathrm{Tors}(H_{i-1})$$

根据前面的命题 5.5，上同调 $H\mathbb{Z}^*H\mathbb{Z}$ 除了次数 0 外全是挠元。因此，同调 $H\mathbb{Z}_*H\mathbb{Z} \simeq \bigoplus \Sigma\mathcal{A}_p/\beta$ 会移动一个次数，但需注意上述限定条件。

由命题 5.3 可得 $\mathrm{AQ}_*(\mathbb{Z}/p^n|\mathbb{Z}) \simeq \Sigma\mathbb{Z}/p^n$。Richter 谱序列集中在唯一的第一行，因此退化，并且

$$H\mathbb{Z}_*H\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \Sigma\mathbb{Z}/p^n \simeq \Sigma^2\mathcal{A}_p/\beta$$

其中，由上述说明可知，$\mathbb{F}_p$ 位于次数 1，而非 2。 □

备注。 类似地，任意光滑 $\mathbb{Z}$-代数的 TAQ_* 是其 K¨ahler 微分与对偶 Steenrod 代数的张量积。

6. Spectral Lie algebras

现在我们为自由交换代数函子 $\mathbb{P}$ 和谱 $X \in \mathrm{CAlg}_{\mathbb{S}}/H\mathbb{F}_p$ 构造一个双边 bar 构造，即 $\mathrm{CAlg}_{\mathbb{S}}/H\mathbb{F}_p$ 中的一个形如

$$\left|... \ \mathbb{P}^3X \rightrightarrows \mathbb{P}^2X \rightrightarrows \mathbb{P}X\right| \xrightarrow{\sim} X$$

其几何实现作为模等价于 X。严格来说，我们应当在每处都将 $\mathbb{P}$ 与遗忘函子复合，但这会使记号变得混乱。对该图表应用保持余极限的函子 $\mathrm{TAQ}(-,\ \mathbb{S};\ H\mathbb{F}_p)$。根据关于自由代数的引理 3.4，$\mathrm{TAQ}(\mathbb{P}^nX,\ \mathbb{S};\ H\mathbb{F}_p) \simeq H\mathbb{F}_p \wedge \mathbb{P}^{n-1}X$，并且存在一个等价

$$H\mathbb{F}_p \wedge |\mathrm{B}_\bullet(\mathrm{id}, \mathbb{P}, X)| \simeq \mathrm{TAQ}(X, \mathbb{S}; H\mathbb{F}_p).$$

左边的表达式应视为 Koszul 对偶李余代数协作上的自由余代数。现在，考虑余切复形 $\Omega^{(-)|H\mathbb{F}_p}$ 与平凡平方零扩张 $H\mathbb{F}_p \vee (-)$ 之间的伴随。它们的复合定义了模上的一个自函子。

$$\mathrm{Lie}^{\pi}_{\mathbb{F}_p}(-) := |\mathrm{B}_\bullet(\mathrm{id}, \mathbb{P}, H\mathbb{F}_p \vee (-)^*)|^*$$

这里，$-^*$ 表示对偶模，即 $M^* \simeq \mathrm{Map}^{H\mathbb{F}_p}(H\mathbb{F}_p, M)$。Brantner 和 Mathew 给出了有限生成模 M 的同伦群 $\pi_*\mathrm{Lie}^{\pi}_{\mathbb{F}_p}(M)$ 的显式描述。由可表性可知，这给出了所有 m元 TAQ 上同调运算。我们需要以下

定理 6.1 (见 [4]中的 7.7)。设 ℓ 是奇整数（若 p 为奇数）。则 $\pi_*\big(\mathrm{Lie}^{\pi}_{\mathbb{F}_p}(\Sigma^{\ell}\mathbb{F}_p)\big)$ 有一个以满足下述条件的序列为指标的基：$(i_1, ..., i_k)$

- 每个 i_j 模 $2(p-1)$ 都等于0 或1 。
- 对于所有 $1 \leq j < k$ ，都有 $i_j < pi_{j+1}$。
- 我们有 $i_k \leq (p-1)\ell$。

对应于$(i_1, ..., i_k)$ 的元素的次数等于 $\ell + i_1 + ... + i_k - k$。 □

以下计算最初归功于 Basterra 和 Mandell，但较难的第二部分据推测是通过一种不同于定理 6.1 中所用方法得到的。尤其是，当时尚未引入谱李代数这一概念。

命题 6.2。$\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{F}_p, \mathbb{S}) \simeq \pi_{-2-*}\big(\text{李}^{\pi}_{\mathbb{F}_p}(\Sigma^{-3}\mathbb{F}_p)\big)$.

证明。先像 [10] 中那样进行一些变换。首先，使用到 $H\mathbb{F}_p$ 的基变换，以及通过稳定化给出的定义

$$\begin{aligned}\Omega_{H\mathbb{F}_p|\mathbb{S}} \simeq \Omega_{H\mathbb{F}_p \wedge H\mathbb{F}_p|H\mathbb{F}_p} &\simeq \operatorname*{hocolim}_n \Sigma^{-n} IE^n(H\mathbb{F}_p \wedge H\mathbb{F}_p) \\ &\simeq \Sigma^{-2}\operatorname*{hocolim}_n \Sigma^{-n+2} IE^{n-2}\big(E^2\{H\mathbb{F}_p \wedge H\mathbb{F}_p\}\big)\end{aligned}$$

换句话说，除了一个移位之外，我们可以从该谱的任意一个成员开始稳定化。由 Eilenberg-Moore 谱序列退化可知，代数 $E^2\{H\mathbb{F}_p \wedge H\mathbb{F}_p\}$ 的同伦群为 $\mathrm{THH}^{[2]}_*(H\mathbb{F}_p) \simeq E(\sigma\mu)$

$$\mathrm{Tor}^{\mathrm{THH}_*(H\mathbb{F}_p)}_{*,*}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \Rightarrow \mathrm{THH}^{[2]}_*(H\mathbb{F}_p).$$

由 Mandell 引理 3.5 可知，具有此类同伦群的交换 $H\mathbb{F}_p$-代数等价于分裂平方零扩张 $H\mathbb{F}_p \vee \Sigma^3 H\mathbb{F}_p$。因此

$$\mathrm{TAQ}(H\mathbb{F}_p, \mathbb{S}) \simeq \Sigma^{-2}\mathrm{TAQ}(H\mathbb{F}_p \vee \Sigma^3 H\mathbb{F}_p, H\mathbb{F}_p; H\mathbb{F}_p).$$

根据定理 6.1，现在可以写出所述分次 $\mathbb{F}_p$-模的同构

$$\mathrm{TAQ}_*(H\mathbb{F}_p, \mathbb{S}) \simeq \pi_{-2-*}\big(\mathrm{Lie}^{\pi}_{\mathbb{F}_p}(\Sigma^{-3}\mathbb{F}_p)\big).$$ □

仔细处理这些负号后，可以看出所得不等式中的一个与我们的命题 4.9 不同：定理 6.1 最后一项中的数字是 4，而不是 3。不过，除了 $p = 2$ 在两个定理都要求进行修改之外，这一区别并不影响指标集。我们的证明只需做些微小改动，这与偶特征下除幂代数的行为有关。或者，也可以在 [10] 中查阅该情形的答案。

References

[1] Basterra 交换 S-代数的 André–Quillen 上同调 J. Pure Appl. Algebra ( )，第 – 号。[2] Basterra、Mandell 环谱的同调与上同调 Math. Z. 249 (2005)，第 4 号，903–944。[3] Bobkova、H¨oning、Lindenstrauss、Poirier、Richter、Zakharevich 高阶 THH 的分裂与计算技术 Algebr. Geom. Topol. 19 (7)，3711–3753，2019。[4] Brantner、Mathew 变形理论与分割李代数 Acta Math., 235 (2025), 1–148。[5] Cartan 对代数丶（π、n；Z_p）和 H^*（π、n；Z_p）的确定性，p 第一个奇素数 S´éminaire Henri Cartan，第 7 卷（1954–1955）第 1 号，第 9 讲，10 页。[6] Dundas、Lindenstrauss、Richter 整数环的高阶拓扑 Hochschild 同调 Mathematical Research Letters 25, 2 (2018), 489–507。[7] Elmendorf、Kriz、Mandell、May 稳定同伦理论中的环、模与代数 Mathematical Surveys and Monographs, 47。美国数学学会，Providence，RI，（1997），xii+249。
[8] arxiv:2004.04279 Kaledin 迹理论、
[9] p^k Bokstedt 周期性与 Bott 周期性 Kitchloo H(Z/) 作为 Thom 谱及拓扑 Hochschild 同调 Proc. Amer. Math. Soc., 148(8), 3647–3651。[10] Lazarev 高度结构化环谱的上同调理论 载于：Structured ring spectra，London Math. Soc. Lecture Note Ser., 315, 2004 201 231 Cambridge Univ. Press, Cambridge,
[11] （），– Quillen 交换环的（余）同调（Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVII, New York, 1968）Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 65–87。[12] Richter 拓扑 André–Quillen 同调的 Atiyah–Hirzebruch 谱序列 J. Pure Appl. Algebra 171 (2002)，第 1 号，59–66。[13] Veen 高阶拓扑 Hochschild 同调中的周期元素检测 Geom. Topol. 22 (2018) 第 2 号，693–756。

Affiliation：俄罗斯国立高等经济大学。*Email address*：
kirill.barlasov02@gmail.com