arXiv:2603.18997v1 [math.CO] 19 Mar 2026

双曲均匀圆盘图的乘积结构与树宽

Thomas Bläsius 卡尔斯鲁厄理工学院，德国
Emil Dohse 卡尔斯鲁厄理工学院，德国
Deborah Haun 卡尔斯鲁厄理工学院，德国
LauraMerker 卡尔斯鲁厄理工学院，德国

摘要

双曲均匀圆盘图（HUDG）是双曲平面中半径为 r 的圆盘的交图，其中 r 可以是常数，也可以随一族 HUDG 中顶点的数量而变化。我们证明，团数为常数的 HUDG 不具有乘积结构，也就是说，不存在常数 c，使得每个这样的图都是 $H \boxtimes P$ 的子图，其中图 H 的树宽至多为 c。这印证了文献中将 HUDG 描述为不具有网格状结构的观点；这与欧几里得平面中的单位圆盘图形成对照，后者的网格状结构显而易见，因为它们是两条路径与一个大小为常数的团的强积的子图 [Dvořák 等人，'21, MATRIX 年刊]。若允许 H 是任意具有常数树宽的图，而非类路径图，我们便可排除网格状结构存在的可能性；其原因并非最大度（HUDG 的最大度无界），而是其全局结构。作为补充，我们证明，对于任意（次）常数 r，HUDG 都具有乘积结构；而当 r 随顶点数增长时，则会呈现典型的双曲特性。

我们的证明涉及一族具有 n 个顶点、半径为 $\log n$ 的双曲均匀圆盘图，其团数有界而树宽无界；其中一张图的树宽与团数之比为 $\log n / \log\log n$。除一个 $\log\log n$ 因子外，这一结果否定地回答了 Bläsius 等人 [在 SoCG '25] 提出的问题：半径为 $\log n$ 的双曲均匀圆盘图的平衡分隔集能否由少于 $\log n$ 个团覆盖？我们的结果还表明，双曲均匀圆盘图的局部树独立数和分层树独立数均无界，从而回答了 Dallard 等人 [arXiv '25]提出的一个开放问题。

2012 年 ACM 学科分类 计算数学 → 图论

关键词与短语 双曲均匀圆盘图、乘积结构、树宽

相关版本 本文的扩展摘要已发表于《第 42 届国际计算几何研讨会论文集》（SoCG2026）

致谢 感谢 Torsten Ueckerdt 和 Marcus Wilhelm 富有成效的讨论。项目由德国研究联合会（DFG，即德国研究基金会）资助 – 项目编号 524989715

1 引言

本文研究双曲均匀圆盘图（*HUDGs*）的结构，即图 G 满足存在一个 r 使得 G 是双曲平面中半径为 r的圆盘的交图。这些图的结构在很大程度上取决于 r，其中，对于一个 HUDGs 族， r 可以是常数，也可以是取决于顶点数量 n 的函数。在文献中，具有非常小 r 的 $[2,4]$, HUDGs 被描述为近欧几里得或网格状，而具有较大 r的 HUDGs 则被描述为强双曲或更具层级性；见图 1。然而，现有研究尚不能完全解释网格状结构以何种方式取决于 r。我们通过形式化图何时具有网格状结构，并证明除非半径较小，否则 HUDGs 确实不具备这种结构，从而加深了对 HUDGs 结构的理解。具体而言，我们证明 HUDGs 不具有所谓的乘积结构，并由此进一步深化了对这一概念的理解。在准确陈述我们的结果之前，我们先回顾关于 HUDGs 结构的已有研究，以及其如何取决于半径 r。

我们从较小的半径开始，逐步增大。从局部来看，双曲平面的性质与欧几里得平面相似，因此可以预期，当 r 非常小时，得到的图与欧几里得单位圆盘图（*EUDG*）相似；欧几里得单位圆盘图定义为欧几里得平面上单位圆盘的交图。无论我们将 r选得多小，总存在并非 EUDG 的 HUDG；但事实上，只要将 r 选得足够小，每个 EUDG 都是 HUDG。这里所谓足够小，是指 r 必须随顶点数 n增加而缩小。EUDG [8] 是一类经过深入研究的图类，具有平衡分隔集，且这些分隔集可由 O个团覆盖，其中团数为$\sqrt{n}$（ [14]）。我们指出，平衡分隔集可以说是 HUDG、EUDG，以及更一般的圆盘图在算法领域引人关注的主要原因之一。对于 HUDG，存在可由 O个团覆盖的平衡分隔集，其中团数为$1+1/r$（n）$\log n$ （ [4]）。有趣的是，当 $r \in \Theta$为$1/\sqrt{n}$时，这与欧几里得情形的界相差一个 $\log n$ 因子；而当 r较大时，界有所改善。事实上，若 $r \in$ 为 $\Omega(1)$，则存在可由 $\log n$ 个团覆盖的分隔集。这有力地表明，HUDG 的结构在 r从次常数增至至少常数时会发生变化。结构上的这种变化也反映在以下事实中：与欧几里得情形 [4,30]相比，对于常数 r ，若干问题可以更高效地求解。总而言之，有充分证据表明，HUDG 的结构在 r为次常数与 r为常数之间会发生显著变化。

这引出了一个问题：常数r 与超常数 r之间是否存在类似的结构差异。虽然上述分隔集不会继续变小，但有迹象表明，超常数 r 确实会带来差异，尤其是 $r \in \Theta(\log n)$

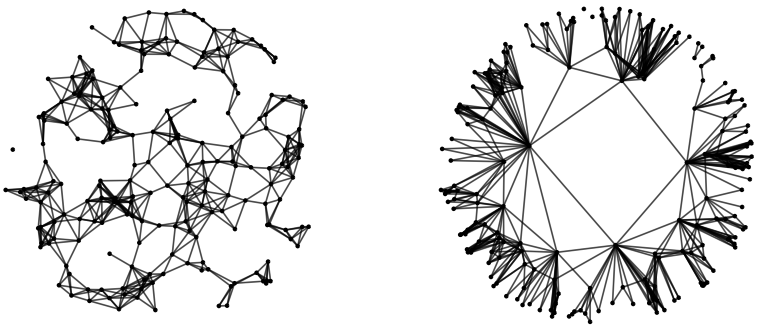

图 1 随机顶点位置的双曲均匀圆盘图。左：半径 r 非常小（可将其视为 $1/\sqrt{n}$），因此与欧几里得情形无法区分。右：圆盘半径 r 关于 n 呈对数级增长。

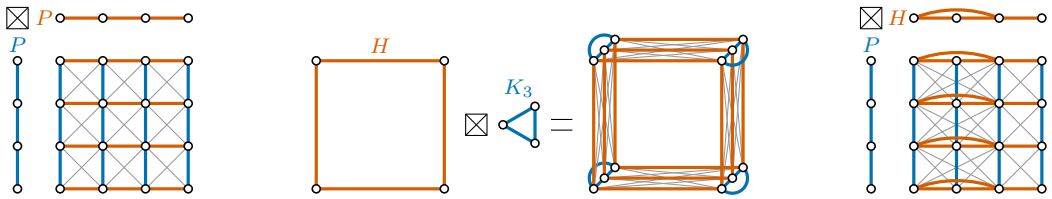

图 2 两条路径的强积（左）、图 H 与一个团的强积（中），以及图 H 与一条路径的强积（右）

是一个值得研究的情形。对于 $r \in \Theta(\log n)$的双曲均匀圆盘图，独立集问题可以在多项式时间内求解 [4], ，这与常数 r [30]形成对比。此外，半径为 $r \in \Theta(\log n)$且随机顶点位置的双曲均匀圆盘图，就是所谓的双曲随机图 [31]；这是一种颇受欢迎的随机图模型，因为它在聚类、直径和度分布等性质上与现实世界网络相似 [22, 23, 26]。这表明常数与增长的 r之间存在显著差异，但现有研究尚未明确揭示这种结构差异。我们所知的唯一结构性结论是，大型星图，或者更一般地说，具有稀疏邻域的高次顶点，要求 r随度呈对数级增长 [2]。

本文的主要结果表明，每个常数半径为 r 的双曲均匀圆盘图类都具有乘积结构，而半径不断增大的双曲均匀圆盘图则未必如此。这填补了文献中的两个空白：首先，这说明了为何具有较大半径的双曲均匀圆盘图不应被视为网格状。其次，与常数半径的双曲均匀圆盘图形成的对比，凸显了常数半径与更大半径（例如 $\log n$）之间显著的结构差异。

关于网格状结构的概念，需要注意的是， $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$-网格是欧几里得单位圆盘图，因此在半径较小时也是双曲均匀圆盘图。不过，欧几里得单位圆盘图的网格状结构远不止于包含网格。事实上，欧几里得单位圆盘图总体上相当具有网格状特征：局部可能存在大团，但每个欧几里得单位圆盘图的全局结构都类似于网格（的子图）。这种“网格状”特征可以用图的强积加以形式化，我们将在第 2 节正式介绍。现在只需知道，分别含有 a 个和 b 个顶点的两条路径的强积，是带对角线的 $a \times b$-网格。此外，图 H 与含有 k 个顶点的完全图 K_k 的强积，会将 H 的每个顶点扩展为一个 k-团，如图 2 所示。Dvořák、Huynh、Joret、Liu 和 Wood [20] 证明，每个欧几里得单位圆盘图 G 都是 $P \boxtimes P \boxtimes K_k$ 的子图，其中 P 是一条路径， k 关于 G 的团数 ω 呈线性增长。等价地，可以将欧几里得单位圆盘图的顶点划分为大小为 $O(\omega)$ 的集合，使得将每个子集收缩为单个顶点后，得到一个网格（带对角线）的子图 H，从而形成 $H \boxtimes K_k$ 这种形式的乘积。

更一般地，乘积结构这一概念使我们能够将某个图类中的图视为较简单图的乘积的子图；通常，这些较简单的图是一个树宽较小的图和一条路径。若对每个 $G \in \mathcal{G}$，都有 $G \subseteq H'' \boxtimes P$，其中 H'' 是一个树宽为常数的图， P是一条路径，则称图类$\mathcal{G}$ 具有乘积结构 。在我们的证明中，我们证明了一个更强的结论：我们考虑的图是某个双曲铺砌 H的子图 $H \boxtimes K_k$ 。由于平面图（包括双曲铺砌）具有乘积结构，这意味着 $H \subseteq H' \boxtimes P \boxtimes K_3$，其中 H 是某个树宽为常数的图

树宽 [16,17],，因此结合 $H'' = H' \boxtimes K_3 \boxtimes K_k$，我们得到形如 $H'' \boxtimes P$的乘积。注意，关于 EUDG 的上述结果可以通过选取 $H = P \boxtimes P$ 置于这一框架下理解。我们指出，将乘积 $P \boxtimes P \boxtimes K_k$ 中的一条路径替换为图 H'，就能涵盖超出欧几里得方格网的图。特别是，这允许出现高次顶点。也就是说，通过乘积结构否定网格状结构，远比证明某个图类无法进行形如 $P \boxtimes P \boxtimes K_k$的分解更有力。为了结束对网格状结构的讨论，我们提一下，“具有乘积结构”不必被视为一个二元判断。为此，图 G 的行树宽 是满足以下条件的最小 t：存在一个树宽为 t 的图H'' 和一条路径 P，使得 $G \subseteq H'' \boxtimes P$。图类的行树宽是其中所有图的行树宽的最大值；若该值无界，也可以将其表示为依赖于顶点数的函数。现在，在具有乘积结构的图类中，若行树宽较小，我们就认为该类具有更强的网格状结构。也就是说，在行树宽为 1 的最强情形下， H 是一棵树，甚至是一条路径。同样，若界定行树宽的函数较小，则该图类就接近具有乘积结构。

我们的结果表明，某些双曲均匀圆盘图族具有乘积结构，而另一些则不具有，这也使双曲均匀圆盘图从乘积结构的角度来看颇具研究价值。乘积结构已被证明是许多图论（参见 [28] 综述）和算法 [1,6]应用中的实用工具。虽然文献自然主要关注具有乘积结构的图类 [7,15,16,19,27,28],，但寻找不具有乘积结构的图类也很有意义，尤其是出于大团以外的原因。值得注意的是，许多已知构造都是几何交图，即具有常数团数的不同类型的弦图 [29,32]。通过证明双曲均匀圆盘图不具有乘积结构，我们有助于进一步理解这一概念的局限性。

1.1 主要结果与讨论

以下定理陈述了我们的主要结果：即使将双曲均匀圆盘图限制为团大小为常数的情形，它们仍不具有乘积结构，从而排除了存在全局网格结构的可能性。

▶**定理 1.** 团数为常数的双曲均匀圆盘图不具有乘积结构。

我们对定理 1 的证明要求半径随图规模增长。这确有必要，因为双曲均匀圆盘图在圆盘半径为常数或次常数时确实具有乘积结构。

▶**定理 2.** 每个团数和圆盘半径属于 $O(1)$ 的双曲均匀圆盘图族都具有乘积结构。与此相反，对于每个超常数 r，都存在团数为常数且圆盘半径属于$\Theta(r)$ 的双曲均匀圆盘图族，它们不具有乘积结构。

这证实了先前研究的观察结果 $[2,4]$ ：半径较小时，双曲均匀圆盘图会变得类似于欧几里得情形；而半径较大时，两者则有显著差异。由于在某种意义上，具有乘积结构会限制单个顶点邻域的复杂度，这尤其表明，允许半径随图规模增长时，双曲均匀圆盘图会变得更加复杂（也因此对某些应用更有趣）。我们在第 4 节证明定理 2 的第一部分，在第 3 节证明第二部分。

行树宽的界。 实际上，我们证明了更精细的结果，超越了是否具有乘积结构这一二元问题。回顾一下，图类具有乘积

结构，当且仅当其行树宽有界；也就是说，行树宽的超常数下界和常数上界分别可以否定和证明乘积结构。我们关于行树宽的下界和上界取决于团数ω和圆盘半径 r，如表1所示。前两行展示了我们的下界，这些下界随 r增长（只要 $r \in O(\log n)$），其中分为两种情况：$\omega \in O(1)$和 $\omega \in O(\log\log n)$。第一种情况与乘积结构最为相关，因为团大小一旦增长，就会立即否定乘积结构；而第二种情况则给出了更强的下界。接着，第三行给出我们的上界，最后一行的结果来自文献，我们将在本节末尾讨论。在此之前，我们将更详细地讨论表1中的每项结果。

表1 行树宽的上下界概览。下界表示，对于给定范围内的每个半径 r，都存在一个半径为 $\Theta(r)$的双曲均匀圆盘图族，其团数 ω 和行树宽满足给定界。上界适用于所有半径为 r 且团数为 ω 的双曲均匀圆盘图（两者都可能取决于图规模 n）。

ω	行树宽 $r \in O(\log n)$	 $r \in \Omega(\log n)$	注释
$O(1)$	$\Omega(\log r)$	$\Omega(\log\log n)$	推论20和21；蕴含定理1和2
$O(\log\log n)$	$\Omega(r)$	$\Omega(\log n)$	推论20和21
变量	$O(\omega \cdot 3^{8r})$		定理 22；由此得出定理 2，对应 r，$\omega \in O(1)$
变量	$O(\omega(1+\frac{1}{r})\log n)$		由树宽界 [4] 得出

表1中的第一个下界假设团数为常数 $\omega \in O(1)$。注意，半径 r 分为两种情况。对于小于 $\log n$ 的半径，下界会随半径增大而增长，直到半径为 $r \in \Theta(\log n)$ 时达到 $\Omega(\log\log n)$ 的行树宽。对于更大的半径，下界不再随 r 增长。我们指出，任何超常数半径都意味着超常数行树宽，从而否定乘积结构，得出定理 1 和定理 2 的第二部分。也就是说，这些具体下界远强于定理 1，因为它们对每一种不断增大的半径都否定了乘积结构，而不仅限于全体双曲均匀圆盘图。对于表1下一行给出的下界，我们允许团数略微增长至 $\omega \in O(\log\log n)$，这使行树宽的下界相比第一行呈指数级增长。我们指出，我们的所有下界都与最大团小图的规模呈线性关系；最大团小图的规模也称为哈德维格数。

接下来讨论我们的上界（表1下半部分）。注意，它只取决于 ω和 r。假设二者均为常数，便可直接推出定理 2 的第一部分。此外，当团数 ω 增长（但 r保持常数）时，这是所能期望的最佳上界，因为团数是行树宽的下界。关于半径增长的情形，注意半径 r 对行树宽的贡献是指数级的。虽然这个上界或许还有改进空间，但我们的半径增长情形下界表明，行树宽必然依赖于 r。我们还指出，我们以乘积结构的形式强化了上界。为此，回顾一下：行树宽的上界意味着，每个半径为 r 的双曲均匀圆盘图都是某个树宽为$O(\omega \cdot 3^{8r})$的图 H'' 的子图，其中 $H'' \boxtimes P$。我们证明了一个更强的结论：对于每个半径为 r 且团数为 ω的双曲均匀圆盘图 G，都有 $G \subseteq H \boxtimes K_k \subseteq H' \boxtimes P \boxtimes K_k$；其中 H是某个双曲镶嵌，H' 是某个树宽为 3 的图， P是某条路径，且 $k \in O(\omega \cdot 3^{8r})$。我们的证明与欧几里得情形 [20]，类似，但我们没有使用欧几里得方格网，而是构造了双曲平面的一个恰当镶嵌。有趣的是，该镶嵌取决于 r，并且当

r 较大时更具双曲性，而 r较小时则更具欧几里得性。借助这一镶嵌，我们也为构造具有各种优良性质的双曲镶嵌这一丰富领域作出了贡献 [9, 13, 33]。

▶ **定理 3.** 对于每个 $r > 0$，都存在一种双曲平面的（不规则）铺砌，使得每块铺砖都可以由 $O(3^{8r})$ 个半径为 r 的圆盘覆盖，并且任意两个距离不超过 $2r$ 的点都位于同一块铺砖内或两块相邻的铺砖内。

表1中的最后一个上界直接来自文献，我们将在下一段中讨论。

与当前研究水平的联系。 我们的下界基于这样一个事实：行树宽渐近地以下界方式受顶点 [18] 邻域内的树宽所约束。值得注意的是，双曲均匀圆盘图的邻域称为强双曲均匀圆盘图（*SHUDG*），本身就是一类有趣的图 [2]。事实上，备受研究的双曲随机图是顶点位置随机的 SHUDG [31]。我们关于双曲均匀圆盘图行树宽的下界，其核心是以下关于 SHUDG 树宽的界。

▶**定理 4**。 存在一些具有 n 个顶点的强双曲均匀圆盘图族，其半径为 Θ（对数 n），且

- 团数为 O（对数对数 n），树宽为 Ω（对数 n）；
- 团数为 O（1），树宽为 Ω（对数对数 n）。

为将此结果与 Bläsius、von der Heydt、Kisfaludi-Bak、Wilhelm 和 Van Wordragen 的结果联系起来， [4], 回顾一下，他们证明了具有 n 个顶点、半径为 r 的双曲均匀圆盘图具有平衡分隔集，这些分隔集可由 $(1 + 1/r)$ 个对数 n 团覆盖。这意味着树宽为 $O(\omega(1 + 1/r)$ 个对数 $n)$ [21],，这是行树宽的一个上界（因此我们在表 1 中列出它）。对于至少为常数的 r，这给出了可由 O(对数 n) 个团覆盖的分隔集，即树宽为 $O(\omega$ 对数 $n)$。 [4] 的作者提出了这样一个问题：这是否可以改进，尤其是在半径 r 增大的情况下。借助定理 4，我们对此给出了否定答案，差一个对数对数 n 因子：团数为 $\omega \in O$(对数对数 n) 的图族具有 Ω(对数 n) $= \Omega(\omega$ 对数 $n/$对数对数 $n)$ 的树宽。

此外，定理 4 给出了首个已知例子：一族团数为常数但树宽无界的 SHUDG。具有这一性质的图类也称为非(tw ω)-有界。根据 Dallard、Milanič 和 Štorgel [12], ，树独立数有界的图类是 (tw ω)-有界的，因此我们构造的 SHUDG 族的树独立数无界。由于 SHUDG 是 HUDG 中顶点的邻域，由此可知 HUDG 的局部树独立数无界，进而其分层树独立数也无界 [24]。这对 Dallard、Milanič、Munaro 和 Yang [11] 提出的一个开放问题给出了否定答案。

▶**推论5.** 双曲均匀圆盘图的局部树独立数和分层树独立数 r 均无界。

请注意，对于这两个已解答的开放问题，第一个源于双曲均匀圆盘图方面，另一个则与乘积结构的关系更为密切。这凸显了双曲均匀圆盘图与乘积结构这一组合的趣味性。

还要注意，推论5揭示了超常数半径的双曲均匀圆盘图与常数半径的双曲均匀圆盘图之间的另一项结构差异，因为后者的分层树独立数有界 [11]。

2 预备知识

2.1 基本图论记号

设 $G = (V, E)$是一个顶点集为 V、边集为 $E \subseteq \binom{V}{2}$的图。除非另有说明，我们所说的图均为简单图，不含多重边和自环，即 E 中的每条边只出现一次，且每条边连接两个不同的顶点。若需区分不同的图，我们分别用 $V(G)$和$E(G)$表示 G 的顶点和边。对于 $uv \in E$，我们称 u 和 v 彼此相邻，并与边 uv关联。我们还称 u和 v 为 uv的端点。

若存在一个顶点序列 $u = v_0, \dots, v_k = v$，使得其中相邻的顶点两两相邻，则称两个顶点 $u, v \in V$是可达的，即 $v_{i-1}v_i \in E$ for $i \in [k]$。使得此类序列存在的最小k for称为 u 与 v 在 G中的距离。可达关系是顶点间的一种等价关系，其等价类称为连通分支。若图只有一个连通分支，则称其为连通的。

顶点 $v \in V$ 的邻域 $N(v)$是与 v相邻的顶点集合，即$N(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$。闭邻域 $N[v] = N(v) \cup \{v\}$还包含v 自身。 v 的度是其邻域的大小 $|N(v)|$ 。若顶点的度为 0，则称其为孤立的。

图运算。我们将从 $G = (V, E)$ 中删除单个顶点 $v \in V$ 或顶点子集 $S \subseteq V$ 后得到的图分别记为 $G - v$ 和 $G - S$。对于顶点子集 $S \subseteq V$，收缩 S 是将 S 中的所有顶点及其在边中的出现替换为单个顶点的操作；随后移除多重边和自环。若图 H 满足 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$，则称其为 G 的子图；也就是说， H 可以通过从 G 中删除边和顶点得到。如果仅通过顶点删除即可得到该子图，则称其为诱导子图。在这种情况下， H 完全由 G 和 $V(H)$ 决定，我们将该诱导子图记为 $G[V(H)]$。如果 H 可以通过从 G 中取一个子图并收缩边得到，则称图 H 是图 G 的 minor。对于顶点 V 的一个划分 P，商图 G/P 是通过收缩 P 的每个块，从 G 得到的图。

特殊图。 有 $n = |V|$ 个顶点的完全图 K_n 是指每一对顶点都相邻的图，即 $E = \binom{V}{2}$。完全图也称为团 （通常是在它作为另一个图的子图出现时）。图 G 的团数 ω 是 G 的子图中最大的团。

一条路径 是一个连通图，其中除两个顶点的度为 1 外，其余每个顶点的度均为 2。这两个度为 1 的顶点也称为路径的端点 。我们通常用 P 表示路径。一个环 是一个连通图，其中每个顶点的度均为 2。含有 3 个顶点的环也称为三角形。不含环作为子图的图称为无环的。树 是无环且连通的图。图 G 的一个生成树 是 G 的一个子图，它是一个包含 G 所有顶点的树。有根树 是指指定了一个称为根的顶点的树。设 $T = (V, E)$ 是一棵以 $v \in V$ 为根的树。对于每个非根顶点 $u \in V$， T 中都存在一条从 u 到根 v 的唯一路径。该路径上与 u 相邻的顶点是 u 的父节点 。此外， u 是其父节点的一个子节点 。如果有根树 T 的每个顶点都有两个子节点，则称其为二叉的 。祖先 关系和后代 关系分别是父节点关系和子节点关系的传递闭包。

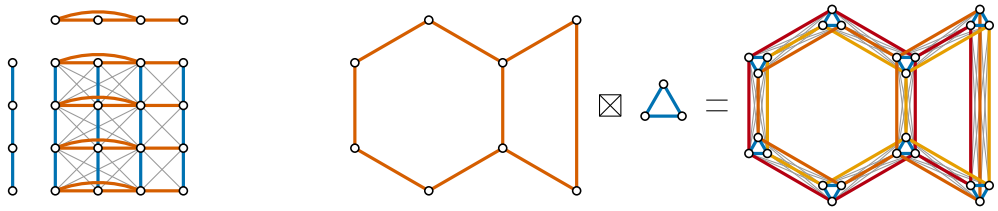

图 3 左：图 H（红色）与路径 P（蓝色）的强积。三种不同类型的边分别用红色（H中的边，P中的同一顶点）、蓝色（P中的边，H中的同一顶点）和灰色（H和 P中的边）标示。右：图（红色）与 K_3（蓝色）的强积。

2.2 乘积结构

分隔集与树宽。设 $G=(V,E)$ 是一个含有 $n=|V|$ 个顶点的连通图。顶点集 $S\subseteq V$ 是一个分隔集，如果删除 S 会使 G 不连通。若 $G-S$ 中的每个连通分支至多含有 $2/3\cdot n$ 个顶点，则该分隔集称为平衡分隔集。注意，每棵树都有一个大小为 $|S|=1$ 的平衡分隔集。图 G 的树宽[1] $\mathsf{tw}(G)$ 是一个参数，用来衡量 G 在平衡分隔集方面与树的相似程度。从本质上说，$\mathsf{tw}(G)$ 是此类平衡分隔集的大小，而树的树宽为 1。下面给出更精确的表述。Dvořák 和 Norin [21] 证明，如果 G 的每个子图都有一个大小至多为 s 的平衡分隔集，那么 $\mathsf{tw}(G)\le 15s$。反过来，众所周知，G 有一个大小至多为 $\mathsf{tw}(G)$ [10, 的平衡分隔集（引理 7）。后一个结论对 G 的每个子图也成立，因为树宽具有小闭合性；也就是说，如果 H 是 G 的一个 minor，那么 $\mathsf{tw}(H)\le\mathsf{tw}(G)$。因此，若 s 是使 G 的每个子图都有大小为 s 的平衡分隔集的最小数，则 G 的树宽在常数因子意义下为 s。具有 n 个顶点的完全图 K_n 的树宽为 $\mathsf{tw}(K_n)=n-1$。因此，如果 G 含有大小为 k 的团小图，那么 $\mathsf{tw}(G)\ge k-1$。

强积。对于两个图 G 和 H，强积 $G\boxtimes H$ 定义如下；另见图 3。 $G\boxtimes H$ 的顶点集为 $V(G\boxtimes H)=V(G)\times V(H)$，也就是说，$G\boxtimes H$ 的每个顶点$u=(u_G,u_H)$都对应于 G 中的一个顶点 u_G，以及 H中的一个顶点 u_H。若以下条件之一成立，则两个顶点 $u=(u_G,u_H)$ 和 $v=(v_G,v_H)$在 $G\boxtimes H$ 中相邻。u 和 v 是 G 中的同一顶点，且在 H中相邻，即 $u_G=v_G$ 和 $u_Hv_H\in E(H)$。u 和 v 是 H 中的同一顶点，且在 G中相邻，即 $u_H=v_H$ 和 $u_Gv_G\in E(G)$。u 和 v 在 G 中相邻，且 H，即 $u_Gv_G\in E(G)$和 $u_Hv_H\in E(H)$。

行树宽与乘积结构。我们通常关注形如$H\boxtimes P$的乘积，其中 H 的树宽较小，而 P是路径（长度任意）。假设 G 是此类乘积 $G\subseteq H\boxtimes P$的子图，并假设 H 的选取使得 $\mathsf{tw}(H)$ 在满足此性质的情况下最小。那么，我们称 $\mathsf{tw}(H)$ 为 G的行树宽 。如果图族$\mathcal{G}$ 中的图具有乘积结构 ，我们就说图族$\mathcal{G}$ 具有乘积结构；也就是说，其中的图具有行树宽 $O(1)$，即存在一个常数，对每个图 $G\in\mathcal{G}$的行树宽给出上界。

对于形如 $H\boxtimes P$ 的图乘积，通常可以将 $H\boxtimes P$看作由 H 的副本组成的一条链。更准确地说，如果 P有 k 个顶点，那么 $H\boxtimes P$包含 k 个副本 H_1，……，H_k

[1] 本文不要求通过树分解对树宽作形式化定义。详尽定义请见[10, 第 7] 节。

H。请注意，从这一视角来看，$v \in V(H)$ 的一个副本 $v_i \in V(H_i)$ 与其相邻副本 $v_{i-1} \in V(H_{i-1})$ 和 $v_{i+1} \in V(H_{i+1})$ 相邻，也与 v 在 H_{i-1}、H_i 和 H_{i+1} 中的邻点对应的副本相邻。类似地，考虑乘积 $G = H \boxtimes K_k$ 时，可以通过将 H 中的每个顶点替换为一个 k-团，并将 H 中的每条边替换为对应的 k-团之间的一个完全二部图，从 H 得到 G。$H \boxtimes K_k$ 的树宽为 $(\mathrm{tw}(H) + 1) \cdot k - 1$。

2.3 双曲几何与铺砌

本文讨论的是双曲平面中的图，但大部分内容只需具备少量双曲几何知识便能理解。因此，我们只作简要介绍。形式上，双曲几何是通过替换欧几里得几何中的平行公理得到的：不再是过直线外某一点恰有一条直线与该直线平行，而是有无穷多条；若两条直线不相交，则称它们平行。因此，只要不涉及平行公理，许多欧几里得几何中熟悉的概念仍然适用，例如距离、角、圆盘、（正则）多边形和全等的定义都不变，且三角不等式仍然成立。不过，有些几何定律（如三角公式）的形式有所不同，我们只在需要时才会介绍。相关内容可参见双曲几何教科书，例如 [25]。

极坐标。我们通常使用极坐标来表示双曲平面上的点。任意选取原点 O 和以 O为起点的参考射线后，点 (ρ, φ)由其到 O 的距离 ρ （称为半径）以及它与参考射线之间的角 φ 确定。两点 $p_1 = (\rho_1, \varphi_1)$ 和 $p_2 = (\rho_2, \varphi_2)$ 之间的双曲距离由两个半径 ρ_1、ρ_2以及角距离 $\min\{|\varphi_1 - \varphi_2|, 2\pi - |\varphi_1 - \varphi_2|\}$决定。对于固定的双曲距离 d，以及分别对应于点 p_1 和 p_2 的半径 ρ_1 和 ρ_2，我们用 $\theta_d(\rho_1, \rho_2)$ 表示 p_1 和 p_2 之间的角距离，使得它们之间的距离为 d。虽然我们没有给出极坐标下两点之间距离的公式（参见例如 [2]），但我们需要 $\theta_d(r_1, r_2)$ 的公式，即

$$\theta_d(r_1, r_2) = \arccos\left(\frac{\cosh(r_1)\cosh(r_2) - \cosh(d)}{\sinh(r_1)\sinh(r_2)}\right), \tag{1}$$

其中双曲正弦$(x) = (e^x - e^{-x})/2$，且双曲余弦$(x) = (e^x + e^{-x})/2$。

基本性质。 我们的插图有时会使用庞加莱圆盘模型，将双曲平面映射到欧几里得平面的一个单位圆盘中。不过，我们不需要了解该模型，插图无论如何都能起到帮助作用。与本文相关的双曲平面的核心性质如下：双曲平面以指数方式扩展，同时在局部表现得如同欧几里得平面。具体来说，考虑一个半径为 r 的圆盘。如果半径 r 较小，那么圆盘的面积和周长分别关于 r 呈二次和线性关系，这与我们在欧几里得平面中的认识一致。然而，如果半径 r 增大，面积和周长都会像 $\Theta(e^r)$ 一样呈指数增长。这会带来两个有趣的效果。首先，与欧几里得平面相比，双曲平面有更多空间。这种效应在更大的尺度上会更加明显，也就是说，当我们观察一个较大的区域时尤其如此。其次，在欧几里得几何中，可以通过缩放物体来改变其大小，同时保持其结构不变，例如相似三角形。然而，在双曲平面中，尺度会造成显著的结构差异，而且不存在能够以相同倍数改变所有距离的缩放操作。

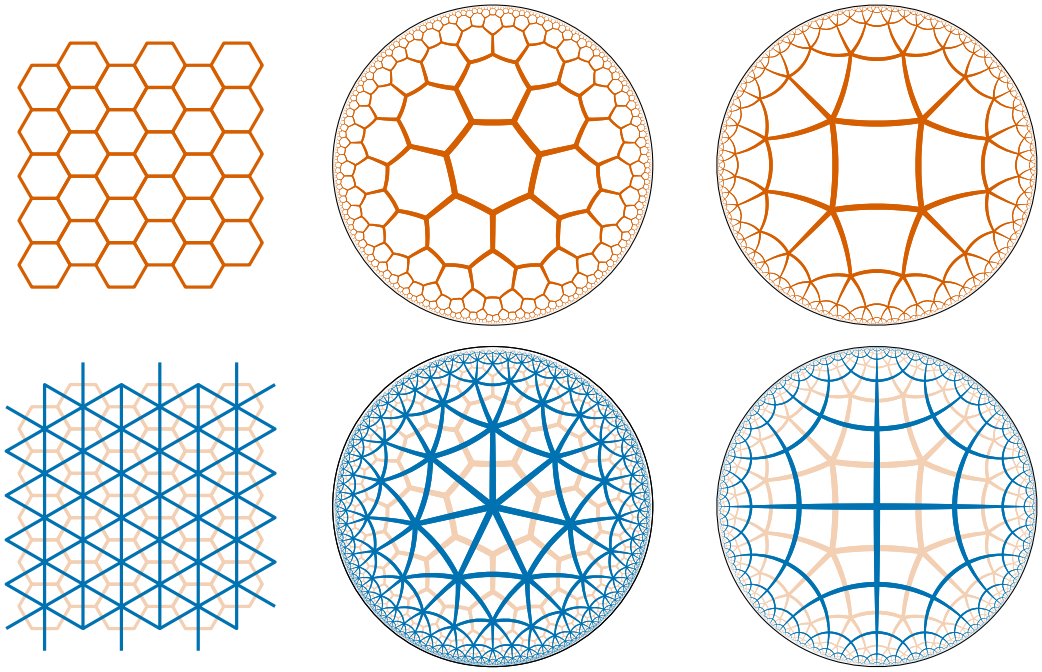

图 4 正则铺砌（上）及其对偶图（下）。从左至右：欧几里得{6, 3} 铺砌、双曲{7,3} 铺砌，以及双曲{4, 5}铺砌。双曲镶嵌展示在庞加莱圆盘中。虽然铺块看起来越靠近圆盘边界就越小，但它们全都全等。

双曲镶嵌。 正则铺砌 是指将平面划分为全等的正多边形；另见图 4。欧几里得平面可以用三角形、正方形和六边形铺砌。这些铺砌的施莱夫利符号分别为 {3,6}、{4,4} 和 {6,3}，其中 $\{p, q\}$ 表示每块铺块都是 p 边形，且每个角处有 q 个这样的 p 边形相交。对于满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ 的任意 p 和 q，我们都能得到双曲平面的正则铺砌；示例见图 4。欧几里得铺砌可以任意缩放，而双曲 $\{p, q\}$ 铺砌中铺块的大小则由 p 和 q 决定。以下引理给出了铺块大小的公式，可直接由基本三角学推得。

▶ **引理 6.** 考虑一个双曲 $\{p, q\}$-铺砌中的铺块，设其边长为 ℓ，内切圆和外接圆的半径分别为 r_1和 r_2 。则有以下结论。

$$\cosh\frac{\ell}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{p}}{\sin\frac{\pi}{q}} \qquad \cosh r_1 = \frac{\cos\frac{\pi}{q}}{\sin\frac{\pi}{p}} \qquad \cosh r_2 = \cot\frac{\pi}{p}\cdot\cot\frac{\pi}{q}$$

对于 $\{4,5\}$-铺砌，我们得到 $\ell/2 \approx 0.62$ 和 $r_1 \approx 0.53$。对于 $\{7, 3\}$-铺砌，我们得到 $r_2 \approx 0.62$.

另请观察图 4：双曲平面的指数扩张体现在铺砌中，铺砌可以看作平面的离散化。我们也考虑（不规则）铺砌，其中铺砖不必全等。

我们通常将铺砌（正则和非正则）理解为无限的[2] 平面图，即在绘制时不存在边交叉的图。此时，角是顶点，边是

[2] 本文中，我们默认所考虑的图都是有限的。铺砌是唯一的例外。不过，对于铺砌，我们通常也只关心有限子图。

边，而 p-边形是面。这类平面图的对偶图 中每个面对应一个顶点；如果两个面共享一条边，则它们相邻。同样，请参见图 4 的示意图，并注意，$\{\{p,q\}$-铺砌与$\{\{q,p\}$-铺砌互为对偶。

2.4 几何图

图 G 是（欧几里得）单位圆盘图（*EUDG*），当且仅当它是欧几里得平面上半径为 1 的圆盘的交图；也就是说，每个顶点由一个圆盘表示，且两个顶点相邻当且仅当对应的圆盘相交。我们还将圆盘中心视为对应顶点的位置，并使用距离等术语；也就是说，两个顶点相连当且仅当它们之间的距离至多为 2。类似地，可以定义双曲平面上等大圆盘的交图。若存在半径 r，使得 G 是半径为 r的双曲圆盘的交图，则称 G为双曲均匀圆盘图（*HUDG*）。需要注意的是，半径 r 可以因图而异，这是一个重要区别。为明确区分上述半径 r与极坐标中点的半径，我们通常称其为圆盘半径。

我们通常关注 r 相对于图规模 n的渐近分析。若一个 HUDG G 的圆盘半径为 r，则称它是半径为 r的双曲圆盘的交图。此外，若一个 HUDG 族 $\mathcal{G}$ 的圆盘半径为 $r(n)$，则表示每个具有 n 个顶点的 $G\in\mathcal{G}$的圆盘半径均为 $r(n)$。这样我们便可以使用渐近分析，即，如果存在常数 c_1, c_2，使得每个足够大的、具有 n个顶点的图 $G\in\mathcal{G}$的圆盘半径都是 r_G，其中 $c_1 r(n) \le r_G \le c_2 r(n)$，那么 $\mathcal{G}$ 的圆盘半径为$\Theta(r(n))$。[3] 我们通常只写 r，并默认在图类的语境中，它是一个依赖于 n 的函数（其他图参数，如团数 ω，也是如此）。

如引言中所述，圆盘半径非常小的 HUDG 近似于欧几里得情形。为了研究能够体现双曲几何差异的 HUDG，可以研究圆盘半径为 $\Theta(\log n)$ [4] 的 HUDG 族。另一种方法是考察所谓的 强双曲均匀圆盘图（*SHUDG*） [2]。若一个图是圆盘半径为 r 的 HUDG，且所有顶点到原点的距离至多为 $2r$，则称其为 SHUDG。这意味着，将一个顶点放置在原点时，该顶点将是全邻顶点，即与图中的所有其他顶点相邻。注意，HUDG 中每个顶点的邻域都会诱导出一个 SHUDG；反过来，每个 SHUDG 都是某个 (S)HUDG 中某个顶点的开邻域或闭邻域。从某种意义上说，研究 SHUDG 与研究具有大圆盘半径的 HUDG 族类似：平均度有界的 SHUDG，其圆盘半径为 $\Omega(\log n)$ [2]。

3 双曲均匀圆盘图不具有乘积结构

本节中，我们证明团数为常数的双曲均匀圆盘图不具有乘积结构（定理 1），从而说明，与欧几里得均匀圆盘图不同，它们不具备网格状结构。值得注意的是，虽然我们的构造最初的圆盘半径为 $\Theta(\log n)$，但我们将其推广到任意超常数圆盘半径，以证明定理 2 的第二部分。我们指出，这一结果是紧的：正如我们在第 4 节中证明的那样，每个圆盘半径为 $O(1)$ 且团数为常数的双曲均匀圆盘图族确实具有乘积结构。类似地，我们给出一些双曲均匀圆盘图族，以论证对任意超常数圆盘半径，下界更强

[3] 我们指出，这是运用渐近分析的自然方式。我们之所以特别说明这一点，是因为在此语境下渐近分析可能不太直观，例如，“所有半径为 $\Theta(\log n)$ 的双曲均匀圆盘图所构成的类”并没有明确定义。

成立，即表1第二行中的下界。我们在本节末尾的推论20和21中总结了这些结果。

为了着手否定乘积结构，首先注意到，在网格中，每个顶点的邻域大小都有界，特别是其树宽也有界。尽管我们明确使用乘积结构，因此我们的图可能具有任意大的邻域，但我们利用了乘积结构蕴含每个顶点邻域的树宽有界这一事实。

▶ **引理 7** ([18, 引理 6], [16, 引理 6], 另见 [5])。对于任意图 H、路径 P以及 $H \boxtimes P$中的任意顶点 v， v的闭邻域的树宽至多为$3 \cdot (\mathrm{tw}(H)+1)-1$。

特别地，对于每个具有乘积结构的图类$\mathcal{G}$，存在常数 c，使得对于任意图 $G \in \mathcal{G}$和任意顶点 $v \in V(G)$，其邻域 $N[v]$的树宽至多为 c。因此，为了否定乘积结构，只需构造一个图族，使得某个顶点的邻域具有无界树宽。此外，引理 7 表明，从渐近意义上看，某个顶点邻域中的树宽是行树宽的一个下界。在 HUDG 的特定情形下，每个 SHUDG 都是某个 HUDG 中某个顶点的开邻域或闭邻域。因此，为了证明定理 1，我们现在要构造一个团数恒定但树宽无界的 SHUDG 族。

请注意，我们将团数限制为常数，因为团以及其顶点的邻域的树宽与其规模呈线性关系。不过，作为中间步骤，我们先构造一个 SHUDG 族，其团数为 $O(\log\log n)$，树宽为 $\Omega(\log n)$。这一结果本身也具有独立意义，因为团数与树宽之间已经存在指数级差距。由于我们可以假设 SHUDG 具有一个全邻顶点，因此顶点的邻域中也存在相同的差距，从而使团数与行树宽之间存在指数级差距。

▶ **定理 8**。存在一个由 n 个顶点的 *SHUDG* 组成的族，其圆盘半径为 $\Theta(\log n)$，团数为 $O(\log\log n)$，树宽为 $\Omega(\log n)$。

随后，我们在所构造的每个 SHUDG 中找出一个诱导子图，其团数为 $\Theta(1)$，树宽为 $\Omega(\log\log n)$，由此证明定理 1 不仅适用于双曲均匀圆盘图，也适用于其严格子类——强双曲均匀圆盘图；而且这里甚至适用于圆盘半径为 $\Theta(\log n)$ 的图。此外，定理 8 和定理 9 合起来证明了定理 4。

▶ **定理 9**。存在一族具有 n 个顶点的 *SHUDG*，其圆盘半径为 $\Theta(\log n)$，团数为 $\Theta(1)$，树宽为 $\Omega(\log\log n)$。

比较这两个定理，我们注意到，定理 8 给出了 SHUDG 树宽（因此也包括行树宽）的一个更强下界：存在一族 SHUDG，其树宽和行树宽均为 $\Omega(\omega \log n \log\log n)$，其中 ω 表示团数。不过请注意，我们只证明了当 $\omega \in \Theta(\log\log n)$ 时可以达到这一界，而非对任意团数都成立。值得注意的是，是否存在一族团数为常数且树宽为 $\Omega(\log n \log\log n)$ 的 SHUDG，仍是一个悬而未决的问题。然而，对于乘积结构，我们主要关注团数为常数的 SHUDG；根据定理 9，这类图的树宽和行树宽无界。

3.1 定理 8 的证明

对于每个整数 $r \geq 2$，我们通过在双曲平面中放置 $n \in \Theta(2^r)$ 个顶点，构造一个包含 n 个顶点的 SHUDG G_r，由此得到所需的圆盘半径 $r \in \Theta(\log n)$，正如

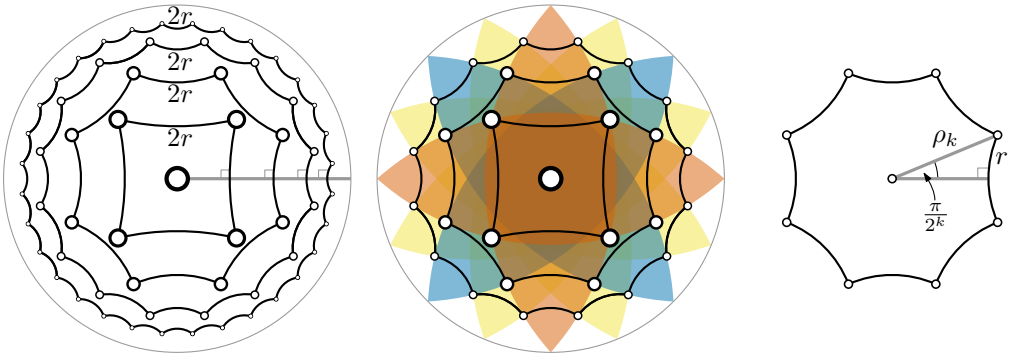

图 5 左：为定理 8 构造的 G_r 顶点位置，其中第 k 层 $k \geq 2$ 诱导出一个 2^k-环，且相邻顶点的角距离为 $2\pi/2^k$。中：受 [3]，中分隔集启发的等价构造，其中顶点被放置在超循环的交点处。右：用于证明观察 10 的一个直角三角形。

定理 8 和定理 9 所要求的那样。首先，我们在原点放置一个顶点，称其为根。其次，对于 $2 \leq k \leq r$，令 A_k 为一个中心位于原点、边长为 $2r$ 的正 2^k 边形。我们将这些多边形对齐，使得对于每个 $k > 2$，A_k 的每隔一条边都与 A_{k-1}的某条边具有相同的垂直平分线；见图 5。现在，令 V_k 表示 A_k 的顶点集，并令 V_1 恰好包含根。若一个顶点包含在 V_k中，我们称其位于第 k 层。G_r 的顶点集定义为所有 V_k、$k \in [r]$的并集，且当且仅当两个顶点之间的距离至多为 $2r$时，它们相邻。特别地，这些多边形的边也是 G_r中的边，并且同一层内不存在其他边，因为正多边形中的弦严格长于其边。也就是说，每一层都诱导出一个环，其中第 k 层中任意两个相邻顶点之间的角距离为 $2\pi/2^k$。请注意，顶点数确实属于 $\Theta(2^r)$，符合要求。这里不作详细说明，我们指出，上述构造的灵感来自 Bläsius 、Friedrich 和 Krohmer 对随机强双曲均匀圆盘图的树宽的分析 [3]；见图 5。

在为定理 8 的 G_r 界定团数和树宽之前，我们先分析不同层之间存在哪些边。为此，注意到顶点在第 k 层时的半径 ρ_k 与圆盘半径 r 之间存在如下关系是很方便的；这一关系源于直角三角形的三角学，参见图 5。

▶ **观察 10**。 对于每个 $2 \leq k \leq r$，第 k 层中顶点的半径 ρ_k 满足

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right) = \frac{\sinh(r)}{\sinh(\rho_k)}.$$

我们将边分析分为两部分：首先，我们证明 G_r 是一个强双曲均匀圆盘图，其中根是一个与所有其他顶点相邻的全邻顶点。其次，我们考察由正多边形定义的任意两层之间的边。

▶ **引理 11**。 对于每个整数 $r \geq 2$，所构造的图 G_r 是一个 *SHUDG*。

证明。 回顾 G_r 具有 r 层。因此，我们需要证明 ρ_r 层 r 中的顶点的半径至多为 $2r$，这意味着它们与根相邻。由于双曲正弦$(x) = (e^x - e^{-x})/2$ 是单调递增的，这等价于 双曲正弦$(\rho_r) \leq$ 双曲正弦$(2r)$。

根据观察 10，我们需要比较 $\sinh(r)$ 和 $\sin(\pi/2^r)$ 与 $\sinh(2r)$ 的比值，直观上可得 $\sinh(x) \approx e^x$ 和 $\sin(x) \approx x$ 得到 $\sinh(r)/\sin(\pi/2^r) \approx$

$e^r/2^{-r} = e^r \cdot 2^r \le e^{2r}$。事实上，根据 sinh 和 $\sin(x) \ge x/2$ for$x \in [0, \pi/2]$ 的精确定义，我们得到

$$\sinh(\rho_r) \overset{\text{Obs 10}}{=} \frac{\sinh(r)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^r}\right)} \le \frac{e^r - e^{-r}}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2^r}{\pi} = \frac{e^r 2^r - e^{-r} 2^r}{\pi} \le \frac{e^{2r} - e^{-2r}}{2} = \sinh(2r),$$

其中，最后一个不等式由 $2^r \le e^r$、 $2^r \ge e^{-r}$ 和 $\pi \ge 2$ 得出。 ◀

为考察除根之外顶点还有哪些邻居，我们先准备一些与构造无关的不等式。

▶ **引理 12.** 对于所有 $x \in \mathbb{R}_+$，以下结论成立：
(1) 双曲余弦(x) 双曲正弦(x) ≥ 1 **(2)** 双曲余弦$(2x)$ 双曲正弦$^2(x) \le 2.1$ 当 $x \ge 2$ **(3)** $\sqrt{2x} \le$ 反余弦$(1 - x) \le \pi\sqrt{\frac{x}{2}}$ 当 $x \le 2$

此外，*(2)* 和 *(3)* 在常数因子范围内是紧的。如果 x 至少为某个常数，*(1)* 也同样如此。

证明。 第一个不等式（1）（以及其所声称的紧性）直接由 双曲余弦$(x) = (e^x + e^{-x})/2$ 和双曲正弦 $(x) = (e^x - e^{-x})/2$ 的定义得出。

对于不等式（2）的上界，给出其倒数的下界更为方便。利用双曲正弦和双曲余弦的定义，可得

$$\frac{\sinh^2(x)}{\cosh(2x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(e^x - e^{-x})^2}{e^{2x} + e^{-2x}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

由于 $e^{2x} + e^{-2x}$ 递增，且根据假设有 $x \ge 2$，上述差值在 $x = 2$时达到最小，从而得到双曲正弦$^2(x)$/双曲余弦$(2x) \ge 0.48$。由于 0.48 的倒数小于 2.1，结论得证。紧性源于该项的下界为 2。

最后，（3）的下界源于 $\arccos(1 - x)$ 在$x = 0$处的级数展开；对于所有 $x \in [0, 2]$，该展开为 $\arccos(1 - x)$ 提供下界。对于上界，由于当 $y \in [0, \pi/2]$ 时，$\sin(y) \ge 2y/\pi$，因此 $\sin^2(y) \ge 4y^2/\pi^2$。利用倍角公式 $\cos(2y) = 1 - 2\sin^2(y)$，并令 $2y = \pi\sqrt{\frac{x}{2}}$为 $x \in [0, 2]$，可得 $\cos(\pi\sqrt{\frac{x}{2}}) = \cos(2y) = 1 - 2\sin^2(y) \le 1 - 8y^2/\pi^2 = 1 - 8(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x}{2}})^2/\pi^2 = 1 - x$，对两边取反余弦即可得到所需的界。紧性源于上下界仅相差一个常数因子。 ◀

现在，我们已具备所有条件，可以统计层 i 中的一个顶点在层 j 中有多少个邻居。就我们的目的而言，我们主要关注上界，也就是说，我们能够保证，将某些顶点视为不相邻时，它们确实没有共用一条边；而实际的边数可能会少于上界所给出的数量。

▶ **引理 13.** 对于每个 $2 \le i \le j \le r$，层 i 中 G_r 的每个顶点在层 j 中至少有两个、至多有 $4\sqrt{2^{j-i}}$ 个邻居，其中该上界在常数因子范围内是紧的。

在证明引理 13 之前，我们先讨论其对 G_r结构的影响。为此，考虑某一层 i 中的一个顶点 v，以及层 $i+1$中距离最近的两个顶点，其中一个在左侧，另一个在右侧。注意到，这两个顶点都与 v 相连，因为 v 至少有两个邻点。现在令 T 表示由从根到第一层的四条边，以及各层 2、.....、$r-1$中每个顶点与其两个最近邻点之间的边所诱导的树，见图 6。注意，除根的度为 4 外， T 是一棵生成二叉

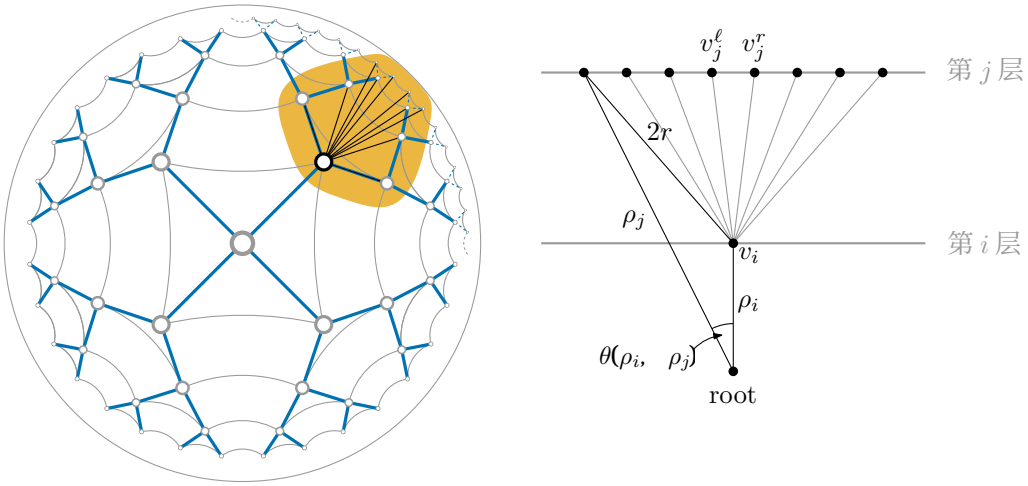

图 6 左：一棵引导 G_r 结构的生成树（蓝色），以及某个顶点的邻域（黑色和橙色）。注意，邻居的数量随层数增加，但增长速度慢于树中后代的数量；与此同时，顶点拥有邻居的角度范围逐渐缩小。右：顶点 v_i 在第 j 层拥有的邻居数量由 $\theta(\rho_i, \rho_j)$ 决定，其中 ρ_i 和 ρ_j 是两层的半径。角度 $\theta(\rho_i, \rho_j)$ 由图示三角形描述，其边长为 ρ_i、ρ_j 和 $2r$，并由公式 (1) 给出。

树。也就是说，某个顶点的后代数在 T中以底数 2 增长，而其在 G_r 中的邻居数以底数 $\sqrt{2}$ 增长。因此，从渐近意义上看，G_r 中相邻的顶点在 T中具有祖先—后代关系。此外，对于 i中的一个顶点，只要 $j-i$ 足够大，它在层 j中的邻点数就远少于后代数。这一观察对于界定 G_r的团数至关重要。我们指出，通过更仔细地分析并将图 5 所示的分隔集考虑在内，可以证明不同层之间的所有边实际上都遵循 T的祖先—后代关系；此处为采用更为简洁优雅的论证，我们略去这一点。

证明。 设 v_i 是第 i 层的一个顶点。若 $i=j$，则 v_i 在第 j 层恰有两个邻居，因为每一层都构成一个环，因此假设 $i<j$。

对于下界，考虑层 j 中与 v_i 的角距离最小的两个顶点 v_j^ℓ、v_j^r（图 6）。注意，根据对称性，其中一个位于 v_i 左侧，另一个位于其右侧。[4] 根据 v_j^ℓ、v_j^r 的选取，它们在层 j 所诱导的环上相邻，因此彼此相邻。要证明 v_j^ℓ、v_j^r 也与 v_i 相邻，考虑一个半径为 $2r$、中心为 v_j^ℓ 的圆盘，它恰好包含 v_j^ℓ 的邻居，特别是 v_j^r 和原点。因此，由 v_j^ℓ、v_j^r 与原点构成的三角形包含在圆盘内；由于 v_i 位于这个三角形内，v_i 也包含在圆盘内。根据对称性，v_j^ℓ、v_j^r 是 v_i 在层 j 中所需的两个邻点。

对于上界，令 ρ_i 和 ρ_j 分别表示层 i 和层 j 中顶点的半径。我们计算层 j 中 v_i 的左邻居数量，该数量由角距离 $\theta_{2r}(\rho_i,\rho_j)$（公式 (1)）决定，使得半径分别为 ρ_i 和 ρ_j 的两个顶点之间的距离为 $2r$，因此它们相邻。为简洁起见，我们省略下标，

[4] 从图中可以清楚看出“左”和“右”这两个术语的含义。更形式化地定义，考虑经过原点和 v_i 的直线，其方向为从原点指向 v_i。这条直线将平面分成左半平面和右半平面。v_i 的邻点根据其所在的半平面，分别称为左邻点或右邻点。

在下文中只写 θ 而不写 θ_{2r}。我们再次参见图 6。也就是说，我们要给出 $\theta(\rho_i,\rho_j)$ 的一个上界，它满足

$$\theta(\rho_i,\rho_j) \overset{(1)}{=} \arccos\left(\frac{\cosh(\rho_i)\cosh(\rho_j)-\cosh(2r)}{\sinh(\rho_i)\sinh(\rho_j)}\right)$$
$$\overset{\text{Obs 10}}{=} \arccos\left(\frac{\cosh(\rho_i)}{\sinh(\rho_i)}\frac{\cosh(\rho_j)}{\sinh(\rho_j)}-\frac{\cosh(2r)}{(\sinh(r))^2}\sin\left(\frac{\pi}{2^i}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^j}\right)\right)$$

根据公式 (1) 和观察 10，后者应用于 $\sinh(\rho_k)$，其中 $k=i,\ j$。我们指出，利用引理 12 中界的紧性，不难看出我们接下来给出的不等式也是渐近紧的，从而得到一个紧的上界。

由于 arccos 单调递减，我们的目标是给它的自变量一个下界。根据引理 12 (1)，差的第一部分有下界 1；而根据引理 12 (2)，$\cosh(2r)/(\sinh(r))^2$ 的上界为 2.1。请注意，对于后者，$r\geq 2$。由此可得

$$\theta(\rho_i,\rho_j) \overset{\text{Lem 12 (1,2)}}{\leq} \arccos\left(1-2.1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^i}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^j}\right)\right)$$
$$\overset{\text{Lem 12 (3)}}{\leq} \pi\sqrt{\frac{2.1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^i}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^j}\right)}$$
$$\leq \pi\sqrt{\frac{2.1}{2}\pi^2\cdot 2^{-i}\cdot 2^{-j}} = \sqrt{\frac{2.1}{2}}\pi^2\sqrt{2^{-(i+j)}},$$

其中，最后一个不等式成立，因为对所有 $x\geq 0$，$\sin(x)\leq x$。注意，我们确实可以应用引理 12 (3)，因为 $2.1\cdot\sin(\pi/2^i)\sin(\pi/2^j)\leq 2.1\cdot\pi^2\cdot 2^{-(i+j)}\leq 2.1\cdot\pi^2\cdot 2^{-(2+3)}\leq 2$。

这立即给出了 v_i 在第 j 层的左邻居数量的一个上界，因此也给出了第 j 层中所有邻居的数量 $\deg_j(i)$ 的上界。为此，回顾一下，第 j 层中两个顶点之间的角距离为 $2\pi/2^j$。因此，若要使所有邻居都处于角度 $2\theta(\rho_i,\rho_j)$ 范围内，我们有

$$\deg_j(i)\leq\frac{2\theta(\rho_i,\rho_j)}{2\pi/2^j}+1\leq\frac{2\sqrt{2.1/2}\pi^2\sqrt{2^{-(i+j)}}}{2\pi/2^j}+1=\sqrt{2.1/2}\pi\sqrt{2^{j-i}}+1\leq 4\sqrt{2^{j-i}},$$

其中，回顾一下，最后一个不等式成立是因为 $j-i\geq 1$。 ◀

了解构造的图 G_r中有哪些边之后，我们现在可以推导树宽的一个下界和团数的一个上界。树宽的下界确实可以直接由引理 13 的下界得出：收缩这 r 层后得到一个 r-团，因为任意两层之间都有边相连。

▶ **推论 14.** G_r 的树宽至少为 $r\in\Omega(\log n)$，其中 n 是 G_r 的顶点数。

最后，我们根据引理 13 的上界，得到团数的一个上界。为此，我们利用这样一个事实：第 i 层的一个顶点在第 j 层的邻居数量仅以 $\sqrt{2}$ 为底数增长，而每层的顶点数则以 2 为底数增长。这使我们能够得出三角形顶点之间的以下关系。由于团中任意三个顶点都构成一个三角形，下面的引理是给团数设定上界的关键。

▶ 引理 *15.* </style>对于 G_r 中顶点分别位于层 $2\leq i\leq j\leq k$ 上的 v_i、v_j 和 v_k 所构成的任意三角形，我们有 $k-j\leq j-i+6$。

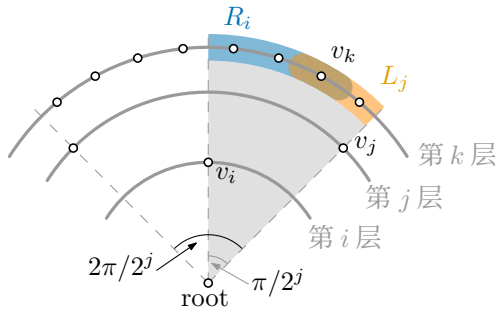

图 7 G_r的一个三角形，其中 v_k 同时位于 v_i 的邻域（蓝色）和 v_j 的邻域（橙色）中。由此可得，v_i 邻域的右半部分加上 v_j 邻域的左半部分，其顶点数大于层 k 中位于 v_i 和 v_j 之间的顶点数（灰色楔形区域）。

证明。我们利用引理 13 得到 v_i 和 v_j 在层 k 上的邻居数，并将其总和与层 k 上位于 v_i 和 v_j 之间的顶点数进行比较。参见图 7。不失一般性，我们可以假设 v_i 位于 v_j 的左侧。由于 v_i 和 v_j 在层 k 上有一个公共邻点，因此 v_i 的右邻居集合 R_i 与 v_j 的左邻居集合 L_j 在层 k 上相交。因此，我们有 $|R_i| + |L_j| > n_k$，其中 n_k 表示层 k 上位于 v_i 和 v_j 之间的顶点数。

根据引理 13，我们有 $|R_i| \leq 2\sqrt{2^{k-i}}$ 和 $|L_j| \leq 2\sqrt{2^{k-j}}$。由于 $i \leq j \leq k$，我们有 $|R_i| \geq |L_j|$，因此可以对和 $|R_i| + |L_j| \leq 2|R_i| \leq 4\sqrt{2^{k-i}}$ 进行界定。

为了界定 n_k，假设 $j < k$，否则无需证明。回顾一下，层 j 中两个顶点之间的角距离为 $2\pi/2^j$，因此根据构造，v_i 和 v_j 之间的角距离至少为 $\pi/2^j$。在这个角度范围内，层 k中至少有 $(\pi/2^j)/(2\pi/2^k) = 2^{k-j}/2$ 个顶点，其中分母是层 k中两个顶点之间的角距离。

总而言之，我们有 $2^{k-j}/2 \leq n_k < |R_i| + |L_j| \leq 4 \cdot 2^{(k-i)/2}$，这意味着 $k - j < (k - i)/2 + 3$，等价于所需的不等式 $k - j < j - i + 6$。◀

由引理 15 可知，若 G_r 中的一个团在层 i 和 $j \geq i$ 中都有顶点，且$\Delta = j - i$，则该团在更大层中的所有后续顶点都位于层 j，……，$j + \Delta + 6$。将此结论应用于团中的所有顶点对，可得层间距离呈指数级缩小，其中两层之间的距离 i和 j指的是 $|i - j|$。我们将其形式化为以下引理。

▶ **引理 16.** 设 $r \geq 1$、$c \geq 0$ 为整数，且 $S \subseteq [r]$ 为一个集合，使得对于 S 中任意三个元素 $i < j < k$，都有 $k - j \leq j - i + c$。那么 $|S| <$ 对数$_2(r) + c + 2$。

证明。我们先描述最优集合 S^* 的形式，再论证它确实是最优的。我们贪心地为 S^* 选择元素：每次总是加入满足条件 $k - j \leq j - i + c$的最大元素，使其对 S^*中的任意三个元素 $i < j < k$ 都成立。我们声称，S^* 包含大约 c 个最大的元素，并从这些元素开始，在加入更小元素时留下指数增长的间隔。更正式地说，我们定义 S^* 包含元素 r、……、$r - c$，以及当 $a = 0$为 $\lfloor \log_2(r - c - 1) \rfloor$、……时的元素 $s_a^* = r - c - 2^a$，然后证明 S^* 确实是通过贪心地选择元素得到的。要证明 S^* 是 S的有效选择，只需将每一对相邻元素与最大元素 r进行比较；这里的“相邻”指两个元素 s、$s' \in S^*$ 之间不存在第三个元素 $x \in S^*$ 使得 $s < x < s'$。事实上，最大的 $c+2$ 个元素可以包含在 S^* 中，因为三个元素 r、$r - c$、$r - c - 2^0$ 满足 $r - (r - c) = c \leq c + 1 = (r - c) - (r - c - 2^0) + c$。

类似地，对于 $a>0$，我们有 $r-s^*_{a-1}=r-(r-c-2^{a-1})\le 2^{a-1}+c\le 2^a-2^{a-1}+c\le(r-c-2^{a-1})-(r-c-2^a)+c=s^*_{a-1}-s^*_a+c$。由于最大的 $c+2$ 个元素构成一个区间，并且对于 s^*_a，所有不等式都取等号，因此不能选择任何更大的元素，否则就会违反要求。因此，S^* 确实是通过贪心方法得到的结果。此外，所得集合的大小为 $|S^*|=c+1+\lfloor\log_2(r-c-1)\rfloor+1<\log_2(r)+c+2$。

剩下要证明的是，不存在更大的集合 S 满足要求。为此，考虑所有满足 $k-j\le j-i+c$ 且基数最大的 $[r]$ 的子集，并令 S 为其中元素之和最大的那个。我们证明 $S=S^*$，这意味着 S^* 确实具有最大基数。反设 $S\neq S^*$，并令 $t\in[r]$ 为满足 S 且 S^* 在 t 上不一致的最大整数。由于 S^* 是按元素从大到小贪心构造的，且这两个集合在所有更大的元素上都相同，因此若 $t\in S$，则也有 $t\in S^*$。于是，$t\in S^*$，但 $t\notin S$。

我们通过移动 S 中的一些元素，使元素之和增大，从而与 S 的选取相矛盾，以此完成证明。首先，若 $t=r$，则将 S 中的所有元素都加 1。这不会改变差值，因此得到一个基数相同且元素之和更大的有效集合。于是设 $t<r$，并令 $t'\in S$ 为满足 $t'<t$ 的最大整数。注意，t' 存在，因为 S 的基数最大，因此至少与 S^* 一样大。现在我们声称，将 S 中的 t' 替换为 t 所得到的集合 S'，对每个 $i<j<k$ 都满足 $k-j\le j-i+c$。我们只需检查包含 t 的三元组。还要注意，我们可以假设 $k=r$，因为这会使 $k-j$ 最大。首先，对于 $j=t$，i 与 j 之间的差现在更大了，而 j 与 k 之间的差则缩小了，因此对于 S 中的每个 $i<t'<t$，都有 $k-j=k-t<k-t'\le t'-i<t-i=j-i$，在 S' 中也同样成立。其次，若 $i=t$，则根据 t 的选取，i、j、k 都包含在 S^* 中，因此满足关于 S' 的要求。由此得出 $S=S^*$，因此 $|S|=|S^*|<\log_2(r)+c+2$。◀

综上所述，我们得出 G_r 的团数确实为 $O(\log\log n)$。

▶ **引理 17.** G_r 的团数至多为 $O(\log r)=O(\log\log n)$，其中 n 是 G_r 的顶点数。

证明。 考虑团 C，它位于 G_r 中，我们的目标是给出其大小的上界。首先回顾一下，每一层都诱导出一个环，因此团数为 2。因此，忽略一个因子 2，我们可以假设 C 的顶点分别位于互不相同的层中。现在，C 中位于层 $i<j<k$ 的任意三个顶点构成一个三角形，因此由引理 15 可得 $k-j\le j-i+6$。接着，引理 16 表明 C 仅包含 $2(\log_2(r)+8)\in O(\log r)=O(\log\log n)$ 个顶点。◀

最后，推论 14 和引理 17 共同证明了定理 8。

3.2 定理 9 的证明

本节的目标是证明定理 9，即构造圆盘半径为 $r\in\Theta(\log n)$、团数为 $O(1)$，且树宽为 $\Omega(\log\log n)$ 的 SHUDG，因为这意味着定理 1。为此，我们取第 3.1 节中为 $r\ge 8$ 构造的图 G_r 的一个子图，该子图的团数为常数，但树宽无界。具体而言，令 G'_r 为 G_r 的诱导子图，其顶点由根以及第 2^k 层至 $k=3,\dots,\log_2(r)$ 层中的顶点构成。回顾一下，G_r 有 r 层，其中第 k 层包含 2^k 个顶点（$k\ge 2$），因此第 r 层包含 G_r 中超过一半的顶点。因此，G'_r 有 $\Theta(\log r)$ 个 $=\Theta(\log\log n)$ 层，以及 $\Theta(n)$ 个顶点，其中 n 是 G_r 的顶点数。再回顾一下，在 G_r 中，因此在 G'_r 中也是如此，引理 13 表明任意两层之间都有边相连。因此，通过收缩每一层，我们再次得到一个团小图。

▶ **引理 18**。 G'_r 的树宽至少为 $\Omega(\log r) = \Omega(\log \log n)$，其中 n 是 G'_r的顶点数。

回想一下，根与所有顶点都相邻，这已经表明 G'_r 不具有乘积结构，因为根据引理 7，具有乘积结构的图不会有邻域树宽很大的顶点。也就是说，难点仍然在于界定团数，而为此我们在很大程度上依赖关于 G_r 的研究结果。为此，请回想一下，层 i 和 j 之间的距离指的是 $|i-j|$，而不是例如双曲距离。

关于主要思路，回想引理 15 和 16：在 G_r 中，团所涉及各层之间的距离从根到最外层呈指数级缩小，也就是说，任意团中的大多数顶点都位于外层。相比之下，我们为 G'_r 选择层间距离呈指数级增长的层，也就是说，主要选择内层。因此，对于 G_r 中的每个团，为 G'_r 选择的层只会覆盖该团中极少数顶点，这一点将在下一个引理中证明。

▶**引理 19**。 G'_r 的团数至多为 5。

证明。 根（记作 v_1）与所有其他顶点相邻，因此我们只需证明 $G'_r - v_1$ 的团数至多为 4。由于每一层都诱导出一个环，而环的团数为 2，因此只需证明每个团至多使用两层。为导出矛盾，假设 $G'_r - v_1$ 中存在一个三角形，其顶点分别位于互不相同的层。令2^i、2^j、2^k 表示 G_r 中该三角形的三个顶点所对应的层，其中 $G'_r - v_1$，且 $3 \leq i < j < k$。一方面，较大的两个层之间的距离为$2^k - 2^j \geq 2^j$。另一方面，有 $2^j - 2^i \leq 2^j - 2^3 < 2^j - 6$。综合可得$2^k - 2^j \geq 2^j > 2^j - 2^i + 6$，这与引理 15 矛盾；引理 15 表明，对于位于层 $2^k - 2^j \leq 2^j - 2^i + 6$、$2^i$、$2^j$上的三角形，有 2^k。◀

T由此完成了双曲均匀圆盘图不具有乘积结构的证明
a引理 18 和引理 19 合起来证明了定理 9，进而证明了定理 1。

3.3 对圆盘半径的依赖

我们以讨论圆盘半径结束本节。我们为定理 8 和定理 9 构造的图族，其圆盘半径为 $\Theta(\log n)$。就乘积结构而言，这已经表明，即使将 (S)HUDGs 限制为团数为常数的图，该图类仍不具有乘积结构。然而，这引出了一个自然的问题：进一步将该图类限制为圆盘半径较大或较小的图时，这一结论是否仍然成立？接下来，我们首先讨论 $r \in o(\log n)$ 的情形。之后，我们考察圆盘半径 r 渐近地大于 $\log n$ 的情形。在这两种情况下，我们都扩展了之前的构造，给出树宽和行树宽的下界，从而证明定理 2 的第二部分，并强化定理 4。特别地，我们证明，除非圆盘半径为 $O(1)$，否则不存在乘积结构。对于缺失的 $r \in O(1)$ 情形（包括随 n 缩小的半径），我们将在第 4 节证明相反的结论：对于如此小的半径，所得图类确实具有乘积结构。

更小的圆盘半径。 对于更小的圆盘半径 r，我们只需添加孤立顶点，即可调整定理 8 和定理 9。这样会增加顶点数，同时保持圆盘半径不变，因此圆盘半径相对于顶点数增长得更慢。注意，如果 r 是超常数，则根的邻域中的树宽，以及行树宽，仍然是无界的，因为它们分别随圆盘半径线性增长和对数增长，

20 双曲均匀圆盘图的乘积结构与树宽

根据推论 14 和引理 18，圆盘半径 r 。类似地，根据引理17和引理19，添加孤立顶点不会改变团数，因此团数仍然分别被 $O(\log r)$ 和 $O(1)$ 所界定。

▶ **推论20.** 对于每个 $r \in O(\log n)$，都存在一些具有 n 个顶点、圆盘半径为 $\Theta(r)$ 的双曲均匀圆盘图族，

- 其团数为 $O(\log r)$，且（行）树宽为 $\Omega(r)$；以及团数为 $O(1)$、
- （行）树宽为 $\Omega(\log r)$ 的图族。

请注意，这将定理 8 和定理 9 推广到了 $r \in o(\log n)$，代价是行树宽的下界关于 n 更差，而且只能使用双曲均匀圆盘图，而非 SHUDG。下面简要讨论这两项限制为何不可避免。首先，在第 4 节中，我们给出了一个关于圆盘半径的行树宽上界。因此，如果圆盘半径趋于常数，行树宽也会趋于常数。其次，我们在此需要考虑双曲均匀圆盘图而非 SHUDG，原因如下。每个半径为 r 的 SHUDG 都可以用至多$\{8, 2\pi e^r\}$ 个团覆盖 引理 。因此，对于圆盘半径为*(log)* 的 *SHUDG* 族*G* ，其中的图可以用 $o(n)$ 个团覆盖，这意味着团数是超常数。因此，为了得到常数团数，我们必须考虑双曲均匀圆盘图，而非 SHUDG。

更大的圆盘半径。 我们继续讨论圆盘半径 r 以超对数速度随 n增长的情况。在此情况下，通过从当前最外层逐一移除 G_r 的顶点，直到顶点数 n 与圆盘半径 r 之间达到所需的依赖关系，即可轻松调整 G_r 的构造。需要注意的是，随着r增加，剩余顶点数仍会增长，但其增长速度低于初始构造中的 $\Theta(2^r)$ 。然而，顶点数仍会随层数呈指数增长。修改后的 G_r 及其由为 G'_r选取的层所诱导的子图，都继承了作为 SHUDG 的性质。团大小的上界同样成立：它关于层数呈对数增长，即分别为 $O(\log\log n)$，或为常数。类似地，树宽再次等于层数，因为这些层可以收缩形成一个团小图。这就得到了以下推论。

▶ **推论21**。 对于每个 $r \in \Omega(\log n)$，都存在由 n 个顶点组成的 *SHUDG* 族，其圆盘半径为 $\Theta(r)$，

- 团数为 $O(\log\log n)$，而（行）树宽为 $\Omega(\log n)$；相应地，团数为 $O(1)$，
- 而（行）树宽为 $\Omega(\log\log n)$。

这给出的行树宽下界与 $\Theta(\log n)$ 情形中的下界相同。我们注意到，随着图变得不那么欧几里得，人们或许会预期行树宽会随半径增大。然而，我们认为， $r \in \Theta(\log n)$ 是一个自然的临界点，超过这一点后，进一步增大 r 不会产生显著影响。具体到我们的结果，我们指出，如果 r 至少为常数，那么对于团数 ω [4,21]，树宽（因此行树宽也）为 $O(\omega \log n)$。因此，我们在 $\omega \in O(\log\log n)$ 条件下得到的 $\Omega(\log n)$ 下界，在相差一个 $\log\log n$ 因子的范围内是紧的，改进空间很小。

更一般地，我们甚至不确定将圆盘半径增大到 $\Theta(\log n)$ 以上是否会改变图类；事实上，我们猜想并不会。理由如下。增大半径的主要好处是，单个顶点的邻域中有更多空间容纳非相邻顶点。不过， $r \in \Theta(\log n)$ 已足以容纳一个具有 n 个顶点 [4], 的星图，也就是说，额外的空间并不能帮助我们在邻域中放置更多非相邻顶点。与此相反，

增大圆盘半径的主要缺点似乎是，能够放置在环内且不与环相邻的顶点会变少。然而，当 $r \in \Theta(\log n)$ 时，长度为 n 的环内已经无法容纳单个非相邻顶点。因此，将 r 增大到 $\Theta(\log n)$ 以上，似乎既不会带来额外的图，也不会排除适用于较小圆盘半径的图。

4 小圆盘半径下的乘积结构

本节将证明，圆盘半径和团数为（次）常数的双曲均匀圆盘图具有乘积结构，从而完成定理 2 的证明。事实上，我们证明每个圆盘半径为 r、团数为 ω 的双曲均匀圆盘图 G 都是 $H \boxtimes K_k$ 的子图，其中 H 是双曲镶嵌，且 $k \in O(\omega \cdot 3^{8r})$，这凸显了它们的网格结构。由于 H 是平面图，而平面图是 $H' \boxtimes P \boxtimes K_3$ [16] 的子图，因此可得 $G \subseteq H' \boxtimes P \boxtimes K_{3k}$，其中 H' 的树宽为 3，P 是一条路径。我们指出，经过更细致的分析，可以将 H' 的树宽改进为 2。回顾一下，这意味着对于每个这样的 G，都存在一个树宽为 $O(\omega \cdot 3^{8r})$ 的图 H''，使得 $G \subseteq H'' \boxtimes P$，即 $H'' = H' \boxtimes K_{3k}$。因此，$G$ 的行树宽至多为 $O(\omega \cdot 3^{8r})$。也就是说，在下述定理中，乘积 $H \boxtimes K_{O(\omega \cdot 3^{8r})}$ 是最强的结论，其他结论均由此推出。

▶**定理 22**。对于每个具有圆盘半径 r 和团大小 ω 的双曲均匀圆盘图 G，都有 $G \subseteq H \boxtimes K_{O(\omega \cdot 3^{8r})} \subseteq H' \boxtimes P \boxtimes K_{O(\omega \cdot 3^{8r})}$，其中 H 是一个（可能不规则的）双曲镶嵌，H' 是一个树宽至多为 3的图。此外，G 的行树宽为 $O(\omega \cdot 3^{8r})$。

注意，定理 22 确实蕴含定理 2 的第一部分，因为行树宽仅取决于 ω 和 r，因此我们得到团数和圆盘半径为（次）常数的每个图类的乘积结构。还需注意，对于某些双曲均匀圆盘图族，如果团数或圆盘半径为超常数，我们也能得到行树宽的上界。然而，在这些情况下，行树宽的上界也会增大，因此我们无法得到乘积结构；鉴于第 3 节的内容，这并不意外。

为了求出乘积 $H \boxtimes K_k$，用商图的语言来解释与完全图相乘会很有帮助。为此，回想一下，$H \boxtimes K_k$ 由若干个 K_k 的副本组成，每个顶点对应一个副本；这些副本按照 H 的边，由完全二部图连接起来。这就定义了一个划分 $\mathcal{P}$，其各部分对应于 K_k 的副本。于是，商图 $(H \boxtimes K_k)/\mathcal{P}$，即将 $\mathcal{P}$ 的每个部分收缩后得到的图，就是 H。此外，任何也能划分为若干部分且每部分大小至多为 k、并使商图为 H（的子图）的图，都是 $H \boxtimes K_k$ 的子图。也就是说，要证明图 G 是 $H \boxtimes K_k$ 的子图，我们要找到 G 的一个划分 $\mathcal{P}$，使其各部分大小至多为 k，且商图为 $H = G/\mathcal{P}$。

Dvořák、Huynh、Joret、Liu 和 Wood [20] 也利用这一观察证明，团数为常数的欧几里得单位圆盘图具有乘积结构。尽管他们使用的是欧几里得 {4,4}-镶嵌，但对我们的目的而言，简要概述他们使用欧几里得 {6,3}-镶嵌的论证会更有帮助，即每个顶点处有三个六边形相交。给定 EUDG G 的顶点嵌入，其中团数为 ω，用正则铺砌将欧几里得平面铺砌成六边形，并考虑由此得到的图的划分 $\mathcal{P}$。现在令 $Q = G/\mathcal{P}$ 为商图，即通过收缩每个六边形中的顶点所得到的图。通过仔细选择六边形的大小，可以在两种性质之间取得平衡：首先，每个六边形都可以由常数多个单位圆盘覆盖，因此包含 $O(\omega)$ 个顶点。其次，G 中的相邻顶点位于同一个铺块或相邻铺块中，因此商图 G 是六边形镶嵌的对偶图 H 的子图，而后者具有乘积结构 [16]。因此，$G \subseteq Q \boxtimes K_{O(\omega)} \subseteq H \boxtimes K_{O(\omega)}$ 也具有乘积结构。

我们将这一方法推广到双曲情形，但有两项重大变化。不出所料，我们用双曲镶嵌替代欧几里得镶嵌，以适应其几何结构。然而，我们还需要面对不同的圆盘半径，因为与 [20], 不同，我们无法自由选择铺块的大小。对于较大的圆盘半径，我们通过合并铺块来解决这一问题，从而得到具有更大铺块的不规则镶嵌；而对于较小的圆盘半径，则根据需要对铺块进行细分。为此，我们对目标提供一种几何解释，并更详细地讨论这为何能推出定理 22。如果两个铺块在对偶图中相邻，即它们共享一条边，则称它们相邻 。

▶ **定理 3.** 对于每个 $r > 0$ 双曲平面上都存在一种（不规则）铺砌，使得每块铺砖都可以由 $O(3^{8r})$ 个半径为 r 的圆盘覆盖，并且距离至多为 $2r$ 的任意两点都位于同一块铺砖或两块相邻的铺砖中。

注意，这确实意味着，每个半径为 r 、团数为 ω的双曲均匀圆盘图都是 $H \boxtimes K_k$的子图，其中 H 是双曲平面的一种（可能不规则的）铺砌，即定理 3 中铺砌的对偶图，并且 $k \in O(\omega \cdot 3^{8r})$。为说明这一点，考虑划分 $\mathcal{P}$ ，其中每个部分对应一块铺砖的顶点；不失一般性，我们可以假设没有顶点位于任何铺砖的边界上。根据第一个性质，每个部分至多包含 $O(\omega \cdot 3^{8r})$ 个顶点，因为半径为 r 的每个圆盘都覆盖一个团，因而至多包含 ω 个顶点。因此，对于商图 $Q = G/\mathcal{P}$，有 $G \subseteq Q \boxtimes K_k$，且某个$k \in O(\omega \cdot 3^{8r})$。于是，根据第二个性质，每条边的端点都位于同一块或相邻的铺砖中，因此商图 Q 是定理 3 中铺砌的对偶图 H 的子图。综上，我们得到 $G \subseteq Q \boxtimes K_k \subseteq H \boxtimes K_k$，正如定理 22 所要求的那样。

本节的主要挑战是证明定理 3，我们将其分为两部分。第一部分处理较大的半径，首先从一个正则{7,3}-铺砌开始，不断合并其中的铺块，直到满足第二个性质。这里，铺块的最大度快速增长，以满足双曲平面的要求。对于较小半径的情况，则从一个正则{4,5}-铺砌开始，不断细分铺块，直到它们足够小以满足第一个性质。由此得到的铺砌会随着 r 变小而变得更接近欧几里得平面，我们将在第 4.2 节中进一步讨论这一点。两种情况的分界阈值是 $d \approx 0.53$，其中 $2d$ 是{4,5}-铺砌中一个铺块两条对边之间的距离；见引理 6。

4.1 当 $r \geq d$时的铺砌

我们首先证明当 $r \geq c$时的定理 3，其中 c 是正则{7,3}-铺砌中一个铺块的外接半径。$d \approx 0.53$ 与 $c \approx 0.62$ 之间的差距（见引理 6）将在本小节末尾弥合。在介绍细节之前，我们先概述整体思路。我们从一个{7,3}-铺砌开始（回顾图 4），并计划将其中的铺块合并成满足引理条件的更大铺块。为区分二者，我们将{7,3}-铺砌中的铺块称为小瓦片，将所构造铺砌中的铺块称为大瓦片。注意，条件 $r \geq c$确保每个小瓦片都能被半径为 r的圆盘覆盖。因此，对于定理 3 的第一个条件，我们只需确保合并到一个大瓦片中的小瓦片数量不过多。为了满足第二个条件，我们必须构造铺砌，使得穿过一个大瓦片所需的距离大于 $2r$。结果示意见图8。

为了说明如何将小瓦片合并为大瓦片，我们考虑 {7,3}铺砌的对偶图 D中的 BFS层。注意， D 中的每个顶点都对应一个小瓦片，并回想第 2 节中提到的，{7,3}铺砌的对偶图 D 是一个 $\{3, 7\}$铺砌；另见图9。现在，在 D 中任意选取一个根顶点 r ，并考虑从 r出发的 BFS层。第 ℓ层包含与 r的距离为 ℓ 的顶点。注意，每一层都诱导出一个环（第 0 层除外，该层仅包含根顶点）。

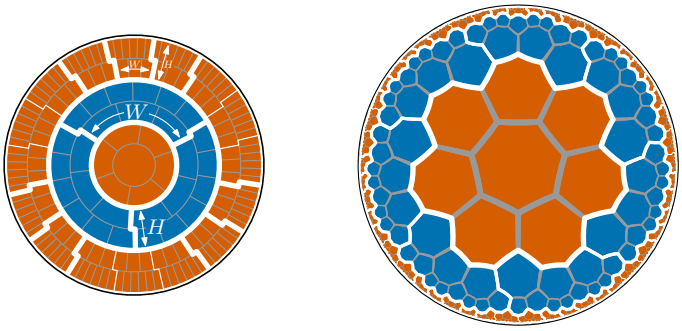

图8 为确保非相邻铺砖之间有足够的距离，我们按照白线所示将七边形合并。整体而言，我们定义高度为 $H \approx 2r$ 的环，并将其分割成宽度为 $W \in O(3^{4r})$ 的部分（左图）。然而，在局部，我们仍采用 {{7, 3}-铺砌中的七边形（右图）。

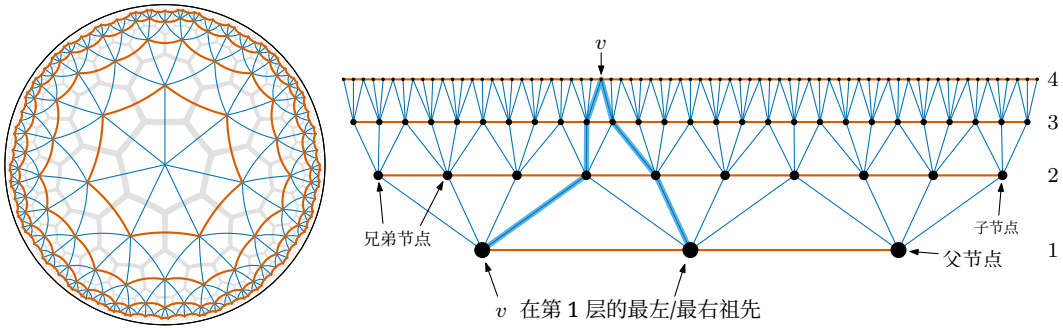

图9 左：$\{3, 7\}$-铺砌的示意图（$\{7, 3\}$-铺砌的对偶图），颜色表示广度优先搜索层。右：{3,7}-铺砌的部分区域，广度优先搜索层呈水平直线。两条突出显示的路径是垂直路径。仅由红色边组成的路径是水平路径。

因此，层 $\ell \geq 1$ 中的每个顶点 v 都有一个位于同一层的顺时针邻点和一个逆时针邻点，我们分别称它们为**右兄弟节点**和**左兄弟节点**。此外，v 在第 $\ell - 1$层有一个或两个连续邻点，我们称之为（**左/右**）**父节点**；在第 $\ell + 1$层有三个或四个连续邻点，我们称之为**子节点**。注意，v 的最左子节点与其左兄弟节点的最右子节点重合。若 D 中的一条路径仅包含同一层的顶点，则称其为**水平路径**。若一条路径在每一层中至多包含一个顶点，则称其为**垂直路径**。若 u 和 v 是垂直路径的端点，且 u 所在层较低，则 u 是 v 的**祖先**，而 v 是 u的**后代**。固定某一层后，最左/最右的后代和祖先按通常方式定义。

这样，我们现在可以指定大瓦片；见图10。我们首先定义高度为 H 的环，其中第 k 个环由 BFS层 $H \cdot k, \ldots, H \cdot (k+1) - 1$ （$k \geq 0$）组成。第0个环单独构成一个大瓦片。对于更大的 k，我们将第 k 个环分割成若干部分，每一部分也构成一个大瓦片。为此，对每个 $k \geq 1$，考虑第 k 个环中最小的 BFS层，即第 $(H \cdot k)$ 层。现在将该层诱导出的环切分成若干路径，每条路径包含 W 个顶点。如果环的长度不能被 W 整除，我们会得到一条更长的路径，其中最多有 $2 \cdot W$ 个顶点。然后，我们将第 k 个环中其余的每个顶点分配给包含其祖先的路径。目前，每条这样的路径连同分配给它的顶点构成一个大瓦片（稍后我们需要合并同一环中的少数几个大瓦片）。

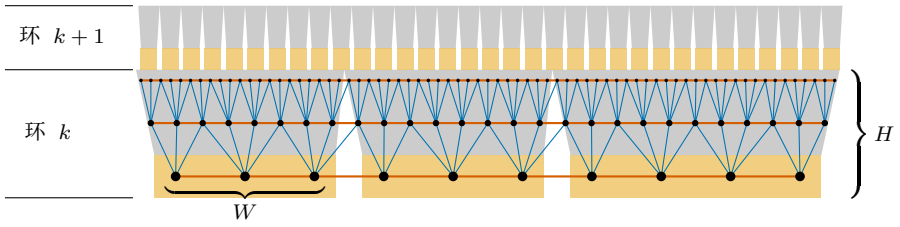

图10 每个环都由相同数量 H 的层组成。第 k 个环的最小层中由 W 个顶点组成的路径以橙色突出显示（最后一条路径稍长，因为 10 不能被 3 整除）。环中其他顶点的分配以灰色表示。这些路径与分配的顶点共同构成大瓦片。由于第 $(k+1)$ 个环的底层包含的顶点多得多，因此路径也更多，从而大瓦片也更多。



图11 不相邻大瓦片不同类型的示意图。若 W 足够大，两个蓝色瓦片（t_1、t_2）之间的距离就足够远。若 H 足够大，一个蓝色瓦片与一个黄色瓦片（t_3）之间的距离就足够远。红色瓦片（t_4、t_5）彼此不相邻，但可能距离过近。我们通过合并三个连续的大瓦片来解决这个问题，如右侧所示（这会使距离过近的瓦片变为相邻）。

关于分配到路径，注意，来自大于 $H\cdot k$ 层的顶点 v 在第 $H\cdot k$ 层中可能有多个祖先。在这种情况下，为了进行平局判定，我们优先选择第 $H\cdot k$ 层中 v 的最右祖先。稍后我们会看到，v 在每一层中至多有两个祖先，因此这不会造成太大差异；另见图10。

我们现在的计划如下。首先，基于 H 和 W，我们可以计算合并成一个大瓦片的小瓦片数量，从而给出覆盖一个大瓦片所需圆盘数量的上界。其次，我们需要证明不相邻的大瓦片之间距离足够远；见图11。为此，我们证明，如果 H 足够大，则被一个环隔开的两个大瓦片之间的距离足够远。对于同一环上的不相邻大瓦片，如果 W 足够大，我们同样可以证明这一点。

此后，只剩下相邻环中的不相邻大瓦片。对此，我们必须稍微调整铺砌方式，因为目前两个不相邻的瓦片（不共享一条边）可能共享一个顶点，从而允许出现任意接近的点。为解决这一问题，考虑（$k-1$）环第 $H\cdot k-1$ 层最外层中的两个顶点 u 和 v，它们彼此相邻但属于不同的大瓦片。于是，u 和 v 是兄弟节点，因此在第 $H\cdot k$ 层有一个共同子节点，该子节点属于第 k 环。令 w 为这个子节点。我们将包含 w 的大瓦片与同一环中其左侧和右侧的大瓦片合并，即实际的大瓦片由原来的三个大瓦片组成。

至此，构造完成。现在可以按照上文概述的计划，首先统计大瓦片中小瓦片的数量。为此，下面的观察会很有帮助。

▶ **引理 23.** 设 P 是由 k 个顶点组成的水平路径，位于 $\ell\geq 1$ 层的 $\{3,7\}$-铺 g. P 的顶点各有 $2k+1$ 到 $3k+1$ 个互不相交的子节点。

证明。 每个 P 顶点有三个或四个子节点。由于路径中每两个相邻顶点共享一个子节点，因此互不相交的子节点至少有 $2k+1$ 个，至多有 $3k+1$ 个。◀

现在我们可以计算一个大瓦片中小瓦片的数量。

▶ **引理 24.** 当 $H \geq 3$ 时，每个大瓦片至多包含 $O(3^H \cdot W)$ 个小瓦片。

证明。 我们首先计算一个不属于合并三元组的大瓦片中小瓦片的数量。该铺块在最小层中的路径包含 W 个顶点。根据引理 23，这条路径在下一层至多有 $3W+1$ 个子节点。根据平局判定，这些子节点中最右侧的一个不属于同一个大瓦片，因此该大瓦片在下一层中至多有 $3W$ 个邻点。重复这一论证可得，该大瓦片至多包含 $\sum_{i=0}^{H-1} 3^i \cdot W = (3^H-1)/2 \cdot W \in O(3^H \cdot W)$ 个小瓦片。

若三元组的合并只合并不相交三元组，则该引理可直接得出。注意，如果第 $(k-1)$ 个环中的每个大瓦片都与第 k 个环中的至少四个瓦片相邻，情况便是如此。考虑第 $(k-1)$ 个环中的一个大瓦片。与上面的论证相同，它在底层路径中有 W 个顶点。根据引理 23，这些顶点在下一层至少有 $2W+1$ 个子节点，其中至少 $2W$ 个属于同一个瓦片（同样，我们失去了 $+1$，因为最右子节点属于相邻的大瓦片）。因此，在其顶层中，该大瓦片至少有 $2^{H-1} \cdot W$ 个顶点，从而在第 k 个环的底层至少有 $2^H \cdot W$ 个邻点。将它们分成每条至多含 $2W$ 个顶点的路径，可将它们划分为至少 2^{H-1} 个大瓦片。由于 $H \geq 3$，这至少产生四个相邻的大瓦片，证毕。◀

接下来需要给出不相邻的大瓦片之间距离的下界。由于讨论 {7,3} 铺砌中铺块内各点之间的几何距离相当繁琐，因此，将这些几何距离与对偶 {3,5} 铺砌的图论距离相互转换会更加方便。下面的引理对此进行了说明。

▶ **引理 25。** 考虑 $\mathbb{H}^2$ 中的一个正则 *{7,3}*-铺砌，并令 D 为其对偶图。则对于对偶图中任意两个顶点，若它们在 D 中的（图论）距离至少为 $d \geq 1$，则 $\mathbb{H}^2$ 中位于相应铺块内的任意两点之间的（几何）距离至少为 $(d-1)/2$。

证明。设 x 和 y 为双曲平面中的两个点。设 v_x 为包含 x 的 {7, 3} 铺砌中的铺块（不妨设 x 位于某个铺块的内部）。类似地，设 v_y 为包含 y的铺块。我们需要证明：如果 v_x 和 v_y 在对偶图 D 中的图论距离至少为 d，那么x 和 y 之间的几何距离至少为 $(d-1)/2$。我们证明其逆否命题，即如果 x 和 y 之间的几何距离至多为 $(d-1)/2$，那么 x 和 y 之间的图论距离至多为 d。

我们通过对 d 进行归纳法来证明这一点。对于 $d=1$，结论显然成立。对于更大的 d，令 x' 为 x 与 y 之间线段上的一点，且它到 x 的距离为 $1/2$，并令 v'_x 为相应的铺块。首先注意，从 x 移动到 x' 会使到 y 的几何距离缩短 $1/2$，也就是说，x' 与 y 之间的几何距离至多为 $(d-2)/2$。因此，根据归纳法，v'_x 与 v_y 在 D 中的图论距离至多为 $d-1$。接下来只需证明 v'_x 是 D 中 v_x 的邻点，也就是说，几何距离为 $1/2$ 的两点 x 和 x' 位于同一个铺块或相邻的铺块中。为此，我们注意到，{7,3}-铺砌中正七边形的边长约为 0.56。[5] 因此，即使 x 位于其铺块的角上，距离为 $1/2$ 的点 x' 也必定位于同一个铺块或相邻的铺块中。◀

根据引理 25 中的联系，我们现在可以通过给出其对偶图 {3,7}-铺砌中图论距离的下界，来给出 {7,3}-铺砌中铺块之间几何距离的下界 D。下文提到距离时，我们始终指

[5] 对于边长 ℓ，有 $\cosh(\ell/2) = \cos(\pi/7)/\sin(\pi/3)$。

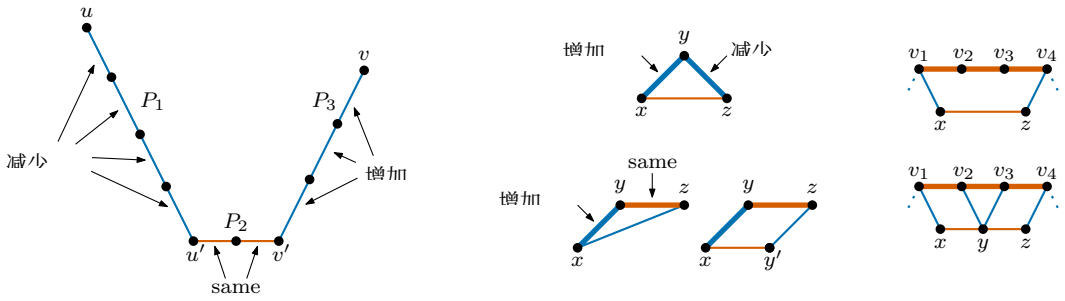

图12 引理 26 的图示。左：将 P 划分为垂直路径 P_1、P_3 和水平路径 P_2。中：无法出现在路径 P 上的边的组合，该路径以粗体突出显示。右：P_2 的长度至多为 2。

图论距离。下面的引理给出了 D 中最短路径形式的一种规范描述，有助于讨论 D 中的距离。

▶ **引理 26。 </style}设 和 是 {3,7}** 铺砌中的两个顶点。如果存在一条垂直的 u-v-路径，那么它就是一条最短路径。否则，存在一条最短的 u-v-路径，其形式为 $u, \ldots, u', \ldots, v', \ldots, v$，其中子路径 $u, \ldots, u'$ 和 $v', \ldots, v$ 是垂直的，而 $u', \ldots, v'$ 是长度至多为 2 的水平路径。此外，u' 是 u 的最右祖先，而 v' 是 v 的最左祖先，或反之。

证明。注意，如果存在垂直的 u-v-路径，那么它显然是最短路径。现在考虑一条最短的 u-v-路径 P，使得其中顶点的层数之和 P 在所有最短的 u-v-路径中最小。假设我们沿着 P 从 u 移动到 v，并观察层数如何变化。由此得到三种边：层数增加、减少或保持不变；见图12（左）。因此，对于两条连续的边，共有9种边类型组合。我们要证明，P 是三个子路径 P_1、P_2、P_3 的连接，其中P_1 和 P_3 是垂直的，而 P_2 是水平的。注意，当且仅当 P 中每一对连续的边类型相同（3种组合）、从减少变为不变（1种组合）、从不变变为增加（1种组合），或者当P_2 仅有一个顶点时，从减少变为增加（1种组合），上述结论才成立。为证明其余三种组合不可能出现，设 xy 和 yz 是这两条边。对于（增加，减少），显然存在一条边 xz，因为 x 和 z 都是 y的父节点，也就是说它们是兄弟节点；见图12（中）。因此，这种情况不可能发生，因为 P 是最短路径。对于（增加，不变），不失一般性地设 z 是 y的右兄弟节点。那么x 要么直接连接到 z（这同样与 P的最小性矛盾），要么 x 的右兄弟节点 y' 与 z相邻；再见图12（中）。因此，用 xy' 和 $y'z$ 替换这两条边，得到一条长度相同但层和更小的路径；这与该层和在 P中最小的假设矛盾。

接下来我们证明 P_2 的长度至多为 2；见图12（右）。反设 P_2 是 $k > 3$ 的$, \ldots,$ $v_k = v'$，并且不失一般性地假设 P_2 从左向右延伸。设 x 是 v_1 唯一的父节点或右父节点，设 z 是 v_4唯一的父节点或左父节点。如果 x和 z是兄弟节点，那么我们可以用 v_1, x, z, v_4 替换 $v_1, \ldots, v_4$，从而得到一条长度相同、层和更小的路径。因此，x 和 z 之间必须有一个位于同一层的顶点 y。然而，y 只能有子节点 v_2 和 v_3，否则它就会是 v_1 的右父节点或 v_4的左父节点；这与每个顶点都有 3 个或 4 个子节点这一事实矛盾。

剩下需要证明的是，u'（v'）是 u（v）的最左祖先（最右祖先），反之亦然。

不失一般性，假设 P_2 从左向右延伸（或者若为 $u' = v'$，则 u' 在 P_1 中的子节点位于其在 P_3中的子节点左侧）。在这种情况下，如果 u' 不是 u的最右祖先，我们可以通过反复从 u 前往其右侧子节点（或唯一的子节点），直至到达 u' 所在的层或路径 P_3，来替换路径 P_1，从而得到一条更短的路径。类似地，可以推出 v' 是 v的最左祖先。◀

注意，除非引理 26 中的最短路径经过根，否则它会提供明确的方向，使我们可以用左和右来描述任意顶点的相对位置。

还要注意，最短路径的行为类似于有根树中的路径：我们基本上会向上走到类似最近公共祖先的位置。不过，这里的父节点并不总是唯一的，而且最近公共祖先形成的是一条路径，而非单个顶点。下一个引理进一步揭示了这种与树的相似性，证明有时存在两个父节点并不会导致祖先数量大幅增加。

▶ **引理 27**。 *{3, 7}*铺砌中的每个顶点在每一层最多有两个祖先。

证明。设 v 是 {3, 7}铺砌中的一个顶点。注意，当有两个父节点可选时，我们总是选择左父节点，从而到达另一层上的最左祖先。令 P_ℓ 为所得路径。类似地，令 P_r 为到达同一层上最右祖先的路径。我们证明，P_ℓ 和 P_r 不会分岔太远；也就是说，在固定的一层上，它们要么经过同一个顶点，要么经过兄弟节点。由于两条路径都从 v 出发，这个不变量初始时成立。现在考虑从某一层到下一层的后续步骤之一。如果 P_ℓ 和 P_r 在前一层共享同一个顶点 u，那么 u 要么只有一个父节点，要么有两个互为兄弟节点的父节点。这两种情况都能保持该不变量。否则，P_ℓ 和 P_r 会经过两个不同的顶点 u_ℓ 和 u_r，而它们互为兄弟节点。由于每个面都是三角形，u_ℓ 和 u_r 在下一层必定有一个共同的父节点 w。如果它们各自还有一个额外的父节点，分别位于 w 的左侧和右侧，那么 w 就只有两个子节点。由于每个顶点（包括 w）至少有三个子节点，因此两条路径 P_ℓ 和 P_r 中，一条会经过 w，另一条则要么也经过 w，要么经过它的左兄弟节点或右兄弟节点。◀

现在，我们准备证明不相邻的大瓦片之间相距很远。我们先讨论由一个环分隔的大瓦片，接着讨论来自同一环的大瓦片，最后考察相邻环中的瓦片。回顾一下，我们考虑的是图论距离，即大瓦片之间的距离是其所包含的小瓦片在对偶图中的最小图论距离 D。

▶ **引理 28**。 来自不相邻环的两个大瓦片之间的距离至少为 $H + 1$。

证明。 显然，连接不相邻环中的瓦片的任意路径，至少包含分隔它们的环中的 H 个顶点，此外还要为第一个和最后一个顶点额外包含两个顶点。因此，最短路径至少包含 $H + 2$ 个顶点，从而距离至少为 $H + 1$。◀

接下来讨论同一环中非相邻瓦片的情形。

▶**引理 29**。 同一环中的两个非相邻大瓦片之间的距离至少为$2\log_3(W) - 2$。

证明。 考虑来自 u 和 v 这两个非相邻瓦片的两个顶点。由于它们不相邻，因此它们之间有一个大瓦片 S。不失一般性，假设 u 位于 S 的左侧，而 v 位于 v的右侧。我们首先说明，实质上只需考虑以下情形：u 和 v 位于所考虑环的最小层。为此，令 P_S 为

在这一最小层中定义 S 的路径。回想一下，根据大瓦片 S 的定义， u 和 v 在 P_S 所在层上的最右祖先分别位于 P_S 的左侧和右侧。注意， v 的最左祖先可能位于 P_S 上，但根据引理 27，此时它是 P_S 上的最后一个顶点。

因此，在考虑引理 26 中所述的最短 u-v 路径时，从 u 到其祖先 u' 的垂直路径无法进入分隔铺块 S。此外，从 v 到其最左祖先 v' 的垂直路径可能会进入 S，但只会稍微进入一些。无论如何， u 与 v 之间的距离严格大于 P_S 的第一个顶点与最后一个顶点之间的距离。根据构造， P_S 包含 W 个顶点。因此，接下来只需根据水平路径的长度，给出同一层上两个顶点之间距离的下界。

为此，设 $u_0 = u$ 和 $v_0 = v$ 是我们在同一层 ℓ 上选取的顶点，并设 u_i 和 v_i 是它们在引理 26 所述最短 u-v 路径中第 $\ell - i$ 层上的祖先。设 W_i 为第 $\ell - i$ 层上 u_i 与 v_i 之间水平路径上的顶点数。显然， $W_0 = W$。此外，根据引理 26，我们必须不断降低层数，直到 $W_i \leq 3$ （注意，该引理讨论的是水平路径长度为 2 的情形，而我们这里关注的是顶点数，因此多 1）。现在考虑从第 $\ell - i$ 层到第 $\ell -$ 层时 W_i 如何变化（$i+1$）。根据引理 23，我们得到 $W_i \leq 3 \cdot W_{i+1} + 1$，因此 $W_{i+1} \geq W_i/3 - 1/3$。由此可得 $W_i \geq W_0/3^i - \sum_{j=1}^{i} 1/3^j$。等比级数的上界为 $1/2$ 和 $W_0 = W$，从而得到 $W_i \geq W/3^i - 1/2$。设 $\hat{\imath}$ 为我们在最短路径上看到的最大 i。如上所述，于是有 $W_{\hat{\imath}} \leq 3$。因此，$3 \geq W/3^{\hat{\imath}} - 1/2$，化简后得到 $\hat{\imath} \geq \log_3(W) - \log_3(3 + 1/2)$。由此可知， u 与 v 之间的距离至少为 $2\hat{\imath} \geq 2\log_3(W) - 3$，其中 3 来自 $\log_3(3 + 1/2) \leq 3/2$。由于非相邻铺块之间的距离严格大于 u 与 v 之间的距离，因此得到所述界。◀

最后，我们考虑来自相邻环的铺块。

▶**引理 30.** 来自相邻环的两个不相邻的大瓦片之间的距离至少为$\log_3(W) - 1$。

证明。设 t_1 和 t_2 是来自相邻环 R_1 和 R_2 的两个大瓦片，其中 R_1 表示较小的环；见图 13。不失一般性，假设 t_1 位于 t_2 的左侧。此外，在原始的大瓦片中（即三元组合并之前），设 t_1' 是 R_2 中仍与 t_1 相邻的最右侧铺块。回顾一下， t_1' 已与它的两个邻居合并，我们将它们称为 t_ℓ' 和 t_r'，也就是说， t_ℓ'、 t_1' 和 t_r' 共同构成一个大瓦片。注意，t_1' 和 t_2 来自同一环，且相隔 t_r'。因此，根据引理 29， t_1' 和 t_2 之间的距离至少为 $2\log_3(W) - 2$.[6]

现在考虑距离最小的顶点 $u \in t_1$ 和 $v \in t_2$，其距离为 d。根据构造， u 在 t_1' 的底层有一个后代 u'，显然该后代到 u 的距离至多为 d。由此得到一条从 $u' \in t_1'$ 到 $v \in t_2$、长度为 $2d$ 的路径。正如上文所述，这样的路径长度至少为 $2\log_3(W) - 3$，因此 $d \geq \log_3(W) - 1$，如所述。◀

现在我们可以证明关于 $r \geq c \approx 0.62$ 的定理 3 了。为方便起见，我们在此重述该定理 .

▶ **引理 31** (定理 3 对于 r ≥c。。 对于每个 $r \geq c$，都存在一种双曲平面上的（非正则）铺砌，使得每块铺块都可以由 $O(3^{8r})$ 个半径为 r 的圆盘覆盖，并且任意两点之间的距离至多为 $2r$ 时，它们要么位于同一块铺块中，要么位于两块相邻的铺块中。

[6] 严格来说， t_1' 已不再是大瓦片，因为它已与 t_ℓ' 和 t_r' 合并。不过，引理 29 的成立不依赖于三元组的合并，因此我们可以在此将其应用于原始的大瓦片。

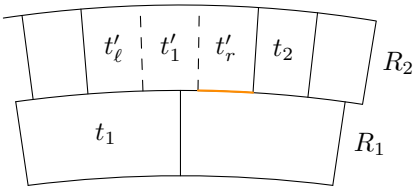

图 13 两个相邻环 R_1，R_2 其中包含大瓦片 t_1，t_2。注意，t_1 与 t_2 之间的距离小于 t'_1 与 t_2 之间的距离（以橙色突出显示）。虚线表示哪些铺块会合并。

定理 3 对于 $r \geq c$ 的证明。 我们使用上述铺砌，并为 W 和 H 选取适当的值。我们需要确保任意两块不相邻的大瓦片中的点之间的几何距离都大于 $2r$。根据引理 25，只需证明图论距离大于 $4r+1$。令 $d = \lfloor 4r+2 \rfloor$ 为我们希望达到的图论距离。

根据引理 28，设置 $H \geq d$ 可确保不相邻的环中的大瓦片之间的图论距离至少为 d。对于同一环中的不相邻大瓦片（引理 29）或相邻环中的大瓦片（引理 30），图论距离分别至少为 $2\log_3(W) - 2$ 和 $\log_3(W) - 1$。显然，后者较小，因此如果 $\log_3(W) - 1 \geq d$，两者都至少为 d；这等价于 $W = 3^{d-1}$。因此，我们设置 $H = d$ 和 $W = 3^{d-1}$。由于 $H \geq 3$，我们可以应用引理 24，得出每个大瓦片包含 $O(3^H \cdot W) = O(3^{2d}) = O(3^{8r})$，这就是所需的界。

最后补充一点：在构造中，我们默认每个环的最小层都包含足够多的顶点，从而可以用多条含有 W 个顶点的路径将其分割。对于我们选择的 W 和 H，最初几个环未必满足这一条件。不过，在该层至少有 $2W$ 个顶点之前，将整个环作为一个大瓦片，这显然不会改变渐近分析。◀

要完成本小节，现在只需弥合 $d \approx 0.53$ 和 $c \approx 0.62$ 之间的差距。

定理3的证明（适用于 $r \geq d$。 对于 $r \geq c \approx 0.62$，引理 31 给出了所需的铺砌。因此，设 $r' \in [d, c]$，并考虑引理 31 给出的铺砌。对于该铺砌，第二个性质已经强于我们的要求，因为 $2r' \leq 2r$。对于第一个性质，我们可以保证每个铺块都能被半径为 $r = c$ 的 $O(3^{8r})$ 个圆盘覆盖，但我们必须使用半径为 $r' \leq r$ 的圆盘。为此，我们证明半径为 c 的圆盘可以被常数个半径为 d 的圆盘覆盖。事实上，我们有 $2d \approx 1.06 > 0.62 \approx c$，因此，一个与半径为 c 的圆盘中心相切、半径为 d 的圆盘会伸出较大的圆盘，从而覆盖一个角度为常数且为正的圆扇形 φ。因此，覆盖一个半径为 c 的圆盘需要 $2\pi/\varphi$ 个圆盘，而每个铺块都能被半径为 $d \leq r'$ 的 $O(3^{8r} \cdot 2\pi/\varphi) = O(3^{8r}) \subseteq O(3^{8(r'+c-d)}) = O(3^{8r'} \cdot 3^{c-d}) = O(3^{8r'})$ 个圆盘覆盖。◀

4.2 当 $r \leq d$ 时的铺砌

在证明了圆盘半径至少为 $d \approx 0.53$ 的双曲均匀圆盘图的定理 3 后，接下来需要处理更小的半径。回忆一下，d 的选择满足 $2d$ 是正则 $\{4,5\}$铺砌中铺块两条对边之间的距离，这一点现在变得很重要。我们注意到，尽管取子图时行树宽具有单调性，但我们不能简单地将半径增大到 d 并使用第 4.1 节中的铺砌，因为这也可能增大团大小，从而使该族的团大小变为超常数。我们首先证明一个稍弱的引理，其中距离至多为 $2r$ 的点可能位于仅共享一个顶点而不共享一条边的铺块中

30 双曲均匀圆盘图的乘积结构与树宽

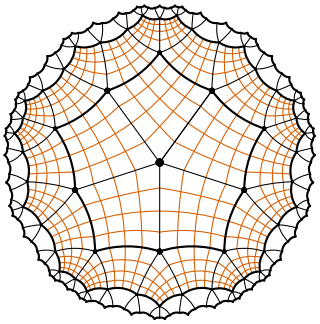

图14 一种{4，5}-铺砌（黑色），经过细分（红色）后，使每个小瓦片都可以被覆盖 d 由 $O(1)$ 个半径为 r 的圆盘。

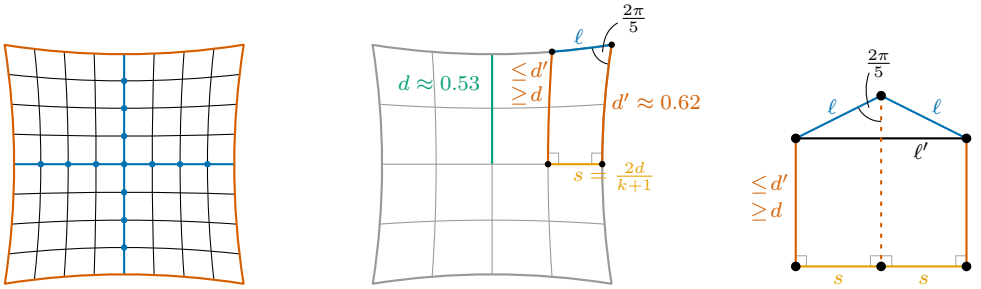

图15 左：正四边形的8-细分。细分点标记为蓝色。中：引理32所使用的四边形。右：引理32中的萨凯里四边形示意图。

但不共享一条边，这使得铺砌的顶点度可以大于 3。作为补偿，我们要求最大度不能太大，并且铺块是能够以有利方式扩张的四边形。为此，如果一个铺砌的顶点可以划分为 C_1（其中包含一个称为中心 的单个顶点）以及环 C_2, C_3、.....，使得每个 C_i 都位于 C_{i+1} 的内部，并且 C_i 中的每个顶点都有一个邻点属于 C_{i+1}，我们就称该铺砌是同心的。我们将这样的划分称为同心划分。注意，这也会在对偶图上诱导出一个同心划分，只是最内层部分不是单个顶点，而是一个面圈。

▶ **引理32。** 对于每个 $r \in (0,\ d)$，存在一种双曲平面的（不规则）同心铺砌，其最大度为 5，由 4- 边形组成，并且满足：每个铺块都可以由 $O(1)$ 个半径为 r 的圆盘覆盖，且任意两个距离至多为 $2r$ 的点要么位于同一个铺块中，要么位于两个共享一个顶点的铺块中。

证明。 首先注意到，$\{4,\ 5\}$-铺砌对所有 $r < d$ 都满足第二个性质，因为位于不同铺块中且不共享顶点的任意两点之间的距离，至少与一个铺块对边上的两点之间的距离一样大，因此它们之间的距离至少为 $2d > 2r$。为了同样满足第一个性质，我们对铺块进行细分，使其足够小，从而可以用半径为 r的固定数量圆盘覆盖，同时又保持足够大的尺寸，使得它们不会被长度为 $2r$的线段穿过；也就是说，没有长度为该值的线段会与一个铺块的两条对边相交。

首先，我们先定义并分析细分，然后再将其应用于特定的 r 值。对于 $k \geq 1$，我们将铺砌中的正四边形 S 的 k-细分定义如下，另见图14和图15（左）。对于一对对边，考虑唯一的公共

垂直线段 p。我们指出，根据超平行定理， p 存在且唯一；又由于 S 是正则的， p 包含 S 的中心，且其长度为 $2d$。我们将 p 细分为 k 条长度均为 $2d/k$ 的线段，并将同时作为两条此类线段端点的 $k-1$ 个点称为 细分点。接着，我们过每个细分点作垂直于 p 的垂线段，并将其在 S 上的部分称为 细分线段。随后，对 S 的两对对边分别沿每条细分线段进行细分，即可得到 k-细分；该细分由 k^2 4 边形构成，我们称之为 小瓦片。特别地，1-细分就是 S 本身。

接下来，我们分别给出小瓦片边长的上界和下界，其中上界用于证明第一个性质，下界则用于证明第二个性质。我们注意到，小瓦片越靠近 S的顶点，其边就越长；而越靠近p时，边就越短。 $2d/k$ 的下界由两个相邻细分点之间的距离给出。事实上，由于连接两个细分点的线段垂直于细分线段，因此它是两点之间最短的线段。

对于上界，设 ℓ 表示小瓦片最长边的长度，设$s=2d/k$ 表示两个相邻细分点之间的距离。我们的目标是用 s来界定ℓ 。注意，如果 $k=1$，那么 $s=2d$ ，而 ℓ 正是{4,5}-铺砌中四边形的边长，因此我们可以利用引理 6得到一个界。不过，下面更一般的论证对任意 $k\geq 1$都成立。为了界定 ℓ，考虑四边形 S' ：它由一条长度为 ℓ的边、两条平行细分线段以及一条垂直于这两条细分线段的 p 围成。图15（中心）给出了示意图。

我们注意到， S' 几乎是一个萨凯里四边形，即一个具有两条与底边垂直且长度相等的边，以及一条与底边相对、称为顶边的第四条边的四边形。在这里，我们的底边是 s ，并且有两条垂直腰，但它们的长度并不完全相同。其中一条腰的长度为 $d'\approx 0.62$，其中 $2d'$ 是{4,5}-铺砌中一个铺块的边长；见引理 6。另一条腰稍短，长度介于 d' 和 d之间。为了界定 ℓ的长度，我们进行如下操作。沿长度为 d' 的腰镜像 S' ，得到一个底边长为 $2s$ 、两条腰的长度至多为 d'的萨凯里四边形。令 ℓ' 表示其与底边相对的顶边长度；见图15。注意，长度为 ℓ' 的这条顶边还与两条长度为 ℓ 的边构成一个等腰三角形，它们之间的角为$2\cdot 2\pi/5=4\pi/5$。现在我们进行两项估计。首先，由于三角形中的这个角相当大，我们看到 ℓ' 大约是 ℓ的两倍。因此，我们不再用 s来界定 ℓ ，而是界定 ℓ'。其次，我们使用萨凯里四边形的标准公式，根据底边长度来界定顶边 ℓ'的长度。

对于该三角形，注意它可以分成两个直角三角形，它们的斜边为 ℓ，边$\ell'/2$ ，对角为 $2\pi/5$。利用直角三角形的三角学，我们得到

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sinh\frac{\ell'}{2}}{\sinh\ell}\quad\iff\quad\sinh\ell=\frac{\sinh\frac{\ell'}{2}}{\sin\frac{2\pi}{5}}$$

根据双曲正弦的定义， $\ell\leq$ 双曲正弦 ℓ，因此我们要为双曲正弦$(\ell'/2)$求一个上界。为此，我们利用对所有 $x\leq a$ 都成立的关系：双曲正弦(x) $\leq x\cdot$ 双曲正弦$(a)/a$ ，并将其应用于 $a=0.63$。接着，由于 $\ell'/2\leq\ell\leq d'<0.63$ ，我们得到双曲正弦$(\ell'/2)$ $\leq\ell'/2\cdot$双曲正弦$(0.63)/0.63$。因此，我们有

$$\ell\leq\sinh(\ell)=\frac{\sinh\frac{\ell'}{2}}{\sin\frac{2\pi}{5}}\leq\frac{\sinh(0.63)}{2\cdot 0.63\cdot\sin\frac{2\pi}{5}}\cdot\ell'<0.57\ell'.$$

为了对取决于 s 的 ℓ' 进行界定，回想一下，我们有一个萨凯里四边形，其底边为 $2s$，腰长为 $\leq d'$ ，顶边为 ℓ'。因此，我们得到

$$\sinh\frac{\ell'}{2}\leq\cosh d'\cdot\sinh s.$$

32 双曲均匀圆盘图的乘积结构与树宽

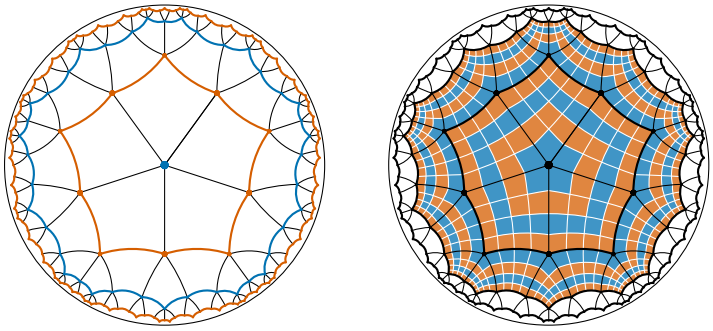

图16 引理32中铺砌为同心结构的可视化。左：未进行细分的情形。环 C_1、C_2、.....以蓝色和红色交替着色。右：层经过细分的情形。环位于红色区域与蓝色区域的交界处。

现在，我们可以像处理三角形那样使用同类型的近似： $\ell'/2 \leq$双曲正弦$(\ell'/2)$ 和 $s \leq d < 0.54$ 意味着双曲正弦 $s \leq s \cdot$ 双曲正弦$(0.54)/0.54$。因此，我们有

$$\frac{\ell'}{2} \leq \sinh\frac{\ell'}{2} \leq \cosh(0.63) \cdot \frac{\sinh(0.54)}{0.54} \cdot s \quad \Longrightarrow \quad \ell' < 2.53s.$$

将 $\ell < 0.57\ell'$ 和 $\ell' < 2.53s$ 结合，得到 $\ell < 1.5s$。

要完成证明，现在只需根据 r 选择合适的 k。回想一下，我们的目标是构造一种铺砌，使其铺块足够小，能够用常数个半径为 r 的圆盘覆盖；同时又足够大，能够将不共享顶点的铺块分隔开。为满足第二个要求，我们选取小瓦片两条对边之间的最短距离 s，使其大于 $2r$。也就是说，我们选择满足 $s = 2d/k > 2r$ 的最大 k。请注意，只要 s 大于 $4r$，我们就继续细分，使 s 减半。因此，选择满足 $s > 2r$ 的最大 k，即可推出 $2r < s \leq 4r$。

要用 256 个半径为 r 的圆盘覆盖所得的铺块，请考虑初始正四边形的 k' 细分，其中 $k' = 16k$。注意，这比 k 细分更精细，因为我们有 $(16k)^2$ 个小瓦片，而 k 细分中有 k^2 个；也就是说，k 细分中的每个小瓦片都进一步细分成 256 个更小的瓦片。在 k' 细分中，铺块两条对边之间的最短距离为 $s' = s/16 \leq r/4$，因此最长边的长度至多为 $1.5s' < r/2$。根据三角不等式，我们得出， k' 细分中任意一个铺块内任意两点之间的距离至多为 r。因此，在铺块中的任意一点放置一个半径为 r 的圆盘，即可覆盖整个铺块。由此，256 个子铺块中的每一个都可以用一个圆盘覆盖，因此， k 细分中的每个铺块都可以用 256 个半径为 r 的圆盘覆盖。

为证明该铺砌是同心的，我们首先定义环 C_1、C_2.....。对于 C_1，我们选取一个度为5的顶点，即原始铺砌中的一个顶点。对于 C_i，考虑删除前面环 C_1.....，C_{i-1}中的顶点后剩余的图。于是， C_i由与包含前面各环的面关联的顶点组成。为说明这确实给出了同心环，首先考虑不进行细分的情况，即我们只有{4、5}-铺砌；另见图16（左）。由于所有面都是四边形， C_2 中的每个顶点都恰有一条或没有边连接到中心。此外，每个顶点在环 C_2中都有两条边，因此还剩下两条或三条边通向外部。由于所有面都是四边形，这一不变量对于后续各层仍然成立。由于每个顶点的度为5，在其所在环中有两个邻点、在前一环中至多有一个邻点，因此它在下一环中至少有两个邻点。

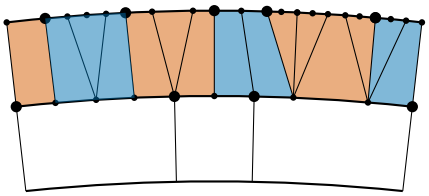

图17 合并铺砖，使每个顶点处相接的大瓦片不超过三个。不变量适用于加粗的顶点。

对于进行细分的情况，观察图16（右）可知，原始{4、5}-铺砌中的每个四边形都被细分为一个普通的 $k \times k$-网格。环 C_1、C_2.....现在的行为与原始{4、5}-铺砌完全相同，只是在前后两个环之间，我们需要经过 k 步，逐渐去除每个原始铺块的 $k \times k$ 网格。◀

请注意，为引理32构造的铺砌随着细分次数增加，在某种意义上会变得更接近欧几里得情形。若不进行细分，我们得到正则的{4,5}铺砌，其中每个顶点的度均为5。细分会将每块铺块分成小瓦片，形成常规的欧几里得网格（只是这些铺块并非完全是正方形）。因此，细分得越多，铺砌就越接近欧几里得情形。这也体现在度为5的顶点相对于度为4的顶点所占比例不断缩小这一事实中。

我们通过推广引理32来证明定理22，从而证明对 $r \leq d$的定理3；也就是说，我们希望得到一种铺砌，使得首先，每块铺块都能被 O个半径为 r的圆盘覆盖；其次，任意两个距离至多为 $2r$ 的点，要么位于同一块铺块中，要么位于两块共享一条边的铺块中。请注意，这两个引理的区别在于，对于第二个性质，仅共享一个顶点并不足够，铺块必须共享一条边。

定理3的证明 $r \leq d$。考虑引理32中的一个铺砌，并注意到，铺块共享顶点但不共享边这一棘手情况发生在度为4或5的顶点处。为解决这一问题，我们合并铺块，使所得铺砌的最大度为3，并满足定理3的两个性质。第一个性质已经满足，因此我们只需通过避免合并过多铺块来确保这一性质得以保持。对于第二个性质，注意如果任意一点至多有三个铺块相交，那么共享一个顶点的两个铺块也共享一条边。也就是说，我们确保引理32的铺砌中每两个共享顶点的铺块要么被合并，要么变为相邻，从而保证第二个性质。

令 C_1、C_2、.....分别表示我们铺砌中顶点的同心划分的中心和环。回忆一下，根据定义， C_i 中的每个顶点在 C_{i+1}中都有一个邻点，因此每个顶点在外部至少关联两个铺块。基本情形由与中心关联的至多五个铺块组成，我们将它们合并为一个大瓦片，其中大瓦片是指我们所构造的铺砌中的一个铺块。从这里开始，我们逐环处理铺块，并保持以下不变量：在处理完 C_i内部的所有铺块后， C_i中已经与两个大瓦片关联的顶点构成一个独立集。也就是说，该不变量控制了我们需要最谨慎处理的那些顶点，因为它们已经与两个大瓦片关联，因此之后最多只能再与一个大瓦片关联。对于 C_2，由于目前只有一个大瓦片，不变量显然成立。现在假设不变量对某个 C_i成立，我们的目标是处理 C_i外部与其关联的铺块，这些铺块同样诱导出一个环。示意图见图17。对于 C_i内部已经与两个大瓦片关联的每个顶点，将其在外部关联的两个或三个铺块合并为一个公共大瓦片，从而得到度为3的顶点。由于根据我们的不变量，这些顶点中任意两个在环上都不相邻，并且 C_i 中的每个顶点在 C_{i+1}中都有一个邻点，因此所得的大瓦片两两不同。

剩余铺块尽可能在各处划分为由三个相邻铺块组成的块，每个块生成一个新的大瓦片。由于 C_i 中的每个顶点在 C_i的外部至多与四个铺块关联，这保证了每个顶点在外部至多与两个大瓦片关联，总共至多与三个大瓦片关联。对于所有剩下的铺块，它们至少有一个邻接铺块已经属于某个大瓦片。我们让这些铺块并入它们的任一邻接铺块。此时，大瓦片由两个至五个铺块组成，因此 C_{i+1}中与两个大瓦片关联的顶点彼此不相邻，从而满足我们的不变量。◀

5 开放问题

本文刻画了哪些函数 r 对应的双曲均匀圆盘图族具有有界团数和圆盘半径 r，并能满足乘积结构：若 $r \in O(1)$，则每个族的行树宽都有界，因此满足乘积结构；否则，存在行树宽无界的族。然而，我们的上界关于圆盘半径呈指数增长，而下界仅呈对数增长。一个有趣的开放问题是，对于定理 3 中的铺砌以及双曲均匀圆盘图的行树宽而言，这种指数依赖是否不可避免。我们猜想铺砌确实需要这种指数依赖，但认为底边可以改进，这也会改进行树宽的界。请注意，即使铺砌存在指数下界，也不一定能将其转化为双曲均匀圆盘图行树宽的下界。

▶**问题 33.** 团数为 ω 且圆盘半径为 r的双曲均匀圆盘图，其行树宽是多少？

借助我们的下界构造，我们证明存在半径为 $\Theta(\log n)$ 的 SHUDG，其树宽为 $\Omega(\omega^{\log n}_{\log\log n})$。这几乎达到上界 $O(\omega \cdot \log\ n)$ [4, 21]。我们想知道能否弥合剩余差距。此外，由于我们的构造给出了一个团数为 $\omega \in O(\log\log\ n)$ 的 SHUDG 族，我们想知道对于任意函数 $\omega(n)$，是否都能达到这样的界；具体来说，当 ω 为常数时是否也能达到。

▶**问题 34**。 是否存在一个由 n 个顶点的双曲均匀圆盘图构成的族，其团数为 ω，树宽为 $\Theta(\omega \cdot \log\ n)$？是否存在一个团数为常数、树宽为 $\Theta(\log n)$ 的族？

最后，我们注意到，当圆盘半径达到顶点数的对数级别时，我们关于行树宽的下界便不再增长。我们猜想，原因在于，对于更大的圆盘半径，不会出现新的族。

▶**问题 35**。 是否存在这样的双曲均匀圆盘图族：它们无法在双曲平面中作圆盘表示，且圆盘半径为 $O(\log n)$？

参考文献

1 Shinwoo An、Seonghyuk Im、Seokbeom Kim 和 Myounghwan Lee。针对具有乘积结构的图，提出了一种高效的$\mathcal{F}$-自由子图边删除算法，2025年。 arXiv:2510.14674, doi:10.48550/arXiv.2510.14674。2 Thomas Bläsius、Tobias Friedrich、Maximilian Katzmann 和 Daniel Stephan。强双曲单位圆盘图。发表于计算机科学理论方面研讨会（*STACS*），第13:1–13:17页，2023年。 doi:10.4230/LIPIcs.STACS.2023.13。3 Thomas Bläsius、Tobias Friedrich 和 Anton Krohmer。双曲随机图：分隔集与树宽。发表于欧洲算法研讨会（*ESA*），第15:1–15:16页，2016年。 doi:10.4230/LIPIcs.ESA.2016.15。

4 Thomas Bläsius、Jean-Pierre von der Heydt、Sándor Kisfaludi-Bak、Marcus Wilhelm 和 Geert van Wordragen。双曲均匀圆盘图中的结构与独立性。发表于计算几何研讨会（SoCG），第21:1–21:16页，2025年。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2025.21。 5 Prosenjit Bose、Vida Dujmović、Mehrnoosh Javarsineh、Pat Morin 和 David R. Wood。分层树宽与行树宽的分离。离散数学与理论计算机科学，24，2022年。 doi:10.46298/dmtcs.7458。 6 Prosenjit Bose、Pat Morin 和 Saeed Odak。平面图乘积结构的最优算法。发表于斯堪的纳维亚算法理论研讨会及工作坊（SWAT），第19:1–19:14页，2022年。 doi:10.4230/LIPIcs.SWAT.2022.19。 7 Rutger Campbell、Katie Clinch、Marc Distel、J. Pascal Gollin、Kevin Hendrey、Robert Hickingbotham、Tony Huynh、Freddie Illingworth、Youri Tamitegama、Jane Tan 等。树宽有界图类的乘积结构。组合学、概率与计算，33(3):351–376，2024年。 doi:10.1017/S0963548323000457。 8 Brent N. Clark、Charles J. Colbourn 和 David S. Johnson。单位圆盘图。离散数学，86(1):165–177，1990年。 doi:10.1016/0012-365X(90)90358-O。 9 H. S. M. Coxeter。双曲镶嵌的三角学。加拿大数学通报，40(2):158–168，1997年。 doi:10.4153/CMB-1997-019-0。 10 Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Łukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michał Pilipczuk 和 Saket Saurabh。参数化算法。施普林格国际出版公司，2015年。 doi:10.1007/978-3-319-21275-3。 11 Clément Dallard、Martin Milanič、Andrea Munaro 和 Shizhou Yang。分层树独立数与基于团的分隔集，2025 年。 arXiv:2506.12424, doi:10.48550/arXiv.2506.12424。 12 Clément Dallard、Martin Milanič 和 Kenny Štorgel。树宽与团数之比较。II. 树独立数。组合理论杂志B辑，164:404–442，2024年。doi:10.1016/j.jctb.2023.10.006。 13 Basudeb Datta 和 Subhojoy Gupta。双曲平面上的半正则镶嵌。离散计算几何，531–553页，2019年。 doi:10.1007/s00454-019-00156-0。 14 Mark de Berg、Hans L. Bodlaender、Sándor Kisfaludi-Bak、Dániel Marx 和 Tom C. van der Zanden。几何交图中满足指数时间假设紧确性的算法与下界框架。SIAM计算杂志，49(6):1291–1331，2020年。 doi:10.1137/20M1320870。 15 Marc Distel 、 Robert Hickingbotham 、 Tony Huynh 和 David R. Wood。曲面上图的改进乘积结构。离散数学与理论计算机科学，24，2022年。 doi:10.46298/dmtcs.8877。 16 Vida Dujmović、Gwenaël Joret、Piotr Micek、Pat Morin、Torsten Ueckerdt 和 David R. Wood。平面图的队列数有界。ACM学报，67(4)，2020年。 doi:10.1145/3385731。 17 Vida Dujmović、Gwenaël Joret、Piotr Micek、Pat Morin、Torsten Ueckerdt 和 David Wood。平面图的队列数有界。发表于计算机科学基础研讨会（FOCS），第862–875页，2019年。 doi:10.1109/FOCS.2019.00056。 18 Vida Dujmović、Pat Morin 和 David R. Wood。小闭图类中的分层分隔集及其应用。组合理论杂志B辑，127:111–147，2017年。 doi:10.1016/j.jctb.2017.05.006。 19 Vida Dujmović、Pat Morin 和 David R. Wood。非小闭类的图乘积结构。组合理论杂志B辑，162:34–67，2023年。 doi:10.1016/j.jctb.2023.03.004。 20 Zdeněk Dvořák、Tony Huynh、Gwenael Joret、Chun-Hung Liu 和 David R. Wood。图乘积结构理论札记，第513–533页。施普林格国际出版公司，2021年。 doi:10.1007/978-3-030-62497-2_32。 21 Zdeněk Dvořák 和 Sergey Norin。具有平衡分离的图的树宽。组合理论杂志B辑，137:137–144，2019年。 doi:10.1016/j.jctb.2018.12.007。

36 双曲均匀圆盘图的乘积结构与树宽

22 Tobias Friedrich 和 Anton Krohmer。关于双曲随机图的直径。载于《自动机、语言与编程国际研讨会》（ICALP），第 614–625 页。Springer-Verlag，2015 年。doi:10.1007/978-3-662-47666-6_49。23 Tobias Friedrich 和 Anton Krohmer。关于双曲随机图的直径。《SIAM离散数学杂志》，32(2):1314–1334，2018 年。 doi:10.1137/17M1123961。24 Esther Galby、Andrea Munaro 和 Shizhou Yang。分数树独立数脆弱图上独立打包问题的多项式时间近似方案。载于计算几何研讨会（SoCG），第 258 卷，第 34:1–34:15 页，2023 年。doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2023.34。25 Marvin Jay Greenberg。《欧几里得与非欧几里得几何》。W. H. Freeman and Company，第 3 版，1993 年。26 Luca Gugelmann、Konstantinos Panagiotou 和 Ueli Peter。随机双曲图：度序列与聚类。载于自动机、语言与编程（ICALP），第 573–585 页，2012 年。 doi:10.1007/978-3-642-31585-5_51。27 Robert Hickingbotham、Paul Jungeblut、Laura Merker 和 David R. Wood。方格图的乘积结构。《图论杂志》，105(2):179–191，2024 年。 doi:10.1002/jgt.23008。28 Robert Hickingbotham 和 David R. Wood。浅层子式、图乘积及超平面图。《SIAM离散数学杂志》，38(1):1057–1089，2024 年。doi:10.1137/22M1540296。29 Nikolai Karol。弦图：乘积结构与局部表示，2025 年。 arXiv:2511.15156， doi:10.48550/arXiv.2511.15156。30 Sándor Kisfaludi-Bak。双曲相交图与（准）多项式时间。载于离散算法研讨会（SODA），第 1621–1638 页，2020 年。doi:10.1137/1.9781611975994.100。31 Dmitri Krioukov、Fragkiskos Papadopoulos、Maksim Kitsak、Amin Vahdat 和 Marián Boguñá。复杂网络的双曲几何。《物理评论E》，82(3):036106，2010 年。doi:10.1103/PhysRevE.82.036106。32 Laura Merker、Lena Scherzer、Samuel Schneider 和 Torsten Ueckerdt。有乘积结构与无乘积结构的交图。载于图绘制与网络可视化国际研讨会（GD），第 320 卷，第 23:1–23:19 页，2024 年。doi:10.4230/LIPIcs.GD.2024.23。33 Yanick Thurn、Manuel Schrauth 和 Johanna Erdmenger。O(1) 时间内的双曲镶嵌邻域，2025 年。 doi:10.48550/arXiv.2508.04765。