arXiv:2603.19128v1 [math.OA] 19 Mar 2026

黎曼度量上的C^1拓扑下几乎交换流形的谱连续性

FRÉDÉRIC LATRÉMOLIÈRE

摘要。几乎交换模型为 Connes 关于粒子物理标准模型的研究提供了一个框架。这些模型由紧致连通自旋流形的典范谱三元组与一个有限维谱三元组的乘积构造而成。受一个基本问题的启发——度量变化时狄拉克算子的谱如何依赖于度量——我们证明了几乎交换模型的狄拉克算子的谱作为底层黎曼度量的函数具有连续性。我们允许黎曼度量（在C^1拓扑下）和有限维因子中的狄拉克算子同时变化。由于系统的物理性质从根本上编码在这一谱中，这一结果体现了关于这些模型的几何或物理内容的稳定性。该结果基于一种新方法，利用谱近邻距离证明狄拉克算子的谱连续性。值得注意的是，这种方法也为经典结果提供了一种不同的新证明。为展示这一新方法的通用性，我们还将结果应用于一类完全非交换的例子，包括量子环面和量子溶胶体。

目录

1. 背景：谱近邻距离 42. 谱近邻距离的一个连续性结果 83. 紧李群作用所产生的度量谱三元组 134. 关于谱近邻距离的黎曼度量 C^1 拓扑连续性 17参考文献 32

非交换几何提供了一个框架，以几何学术语描述粒子物理标准模型的某些基本方面，即通过在谱三元组中编码粒子的物理学 [15, 10, 12, 16, 11, 46]。该谱三元组定义在四维自旋流形的规范谱三元组与一个有限维非交换谱三元组的乘积之上；这类乘积谱三元组被称为几乎交换的。显然，理解这一构造对流形底层度量的依赖性具有重要意义。本文证明了一个稳定性结果：相对于流形上的底层度量，几乎交换谱三元组的谱以一种强意义下的方式呈连续性，直至

日期：2026年3月20日。2000 数学主题分类。 主要分类：46L89、46L30、58B34。关键词和短语。 非交换度量几何、等距群、量子格罗莫夫–豪斯多夫距离、C*代数的归纳极限、蒙日–康托罗维奇距离、量子度量空间、谱三元组、紧致C*度量空间、AF代数、扭曲群C*代数。

黎曼流形，其中度量空间赋予所谓的C^1拓扑。

研究狄拉克算子及其谱对底层黎曼度量的依赖关系，在几何学和物理学领域备受关注，例如 [8, 45, 48], 尤其是当某个固定自旋流形上的黎曼度量空间赋予C^1 拓扑时。与此同时，我们在 [43] 引入了度量谱三元组空间上的一种距离（模去酉等价），称为谱近邻距离。谱近邻距离是格罗莫夫–豪斯多夫距离的一种影响深远的非交换类比。随后，我们在 [28]证明了谱三元组的谱关于谱近邻距离具有某种连续性。度量谱三元组的基本例子包括这样的三元组：狄拉克算子作用于自旋丛的体积形式平方可积截面所构成的希尔伯特空间，而C*-代数$\mathbb{C}$值连续函数则在该空间上通过逐纤维乘法作用。因此，一个恰当的问题是：从赋予C^1-拓扑的黎曼度量空间到赋予谱近邻距离的谱三元组空间，是否存在连续映射？并进一步考察这种连续性是否延伸至几乎交换模型。

本文对这一问题给出了肯定的回答。作为这项工作的推论，我们重新得到关于狄拉克算子谱相对于度量的连续性的结果，不过所采用的是不同于黎曼几何学中先前作者的方法。另一方面，本文提出的新方法同样适用于几乎交换谱三元组，甚至适用于紧李群在可能仅由简单 C*-代数构成的空间上的遍历作用所诱导的谱三元组。因此，我们希望展示谱近邻距离的多功能性：它使我们能够通过一条共同且自然的路径，既在经典几何学中确立一些已知的重要结果，也从非交换几何学中得到新的例子。我们强调，即使在经典情形下，本文的研究方法也不同于 [8] 及相关论文所采用的方法，为这一重要问题提供了新的视角。尽管近邻度是在算子代数理论这一狭窄领域内发展起来的，但它因此成为黎曼几何和数理物理学中应用的自然框架。

此处所述结果的物理重要性在于，在这些几乎交换模型中，关键物理量直接取决于底层谱三元组的谱。因此，度量波动下谱的不连续性将意味着模型不稳定。我们的结果让我们确信，在这一强调度量性质的新型非交换几何框架内，情况并非如此。由于 Connes 在 [15] 中对度量非交换几何的最初论述在很大程度上是出于物理应用的动机，我们的方法似乎遵循了类似的理念。

这项工作的一个自然背景，是研究 [8]中所开展的狄拉克算子对度量的依赖性。我们借鉴了他们的工作，采用了在旋量截面希尔伯特空间之间构造酉算子的方法，各种狄拉克算子作用于这些空间。随后，我们重新得到了他们的观察：经这些酉算子共轭后，狄拉克算子构成一个关于索伯列夫范数连续的族；这一事实很容易从狄拉克算子的局部表述中验证。我们在引理（2.3）中将这些性质抽象推广到可能定义在非交换代数上的谱三元组，以说明在这类条件下，谱三元组确实关于谱近邻距离构成一个连续族。我们还证明了定理（2.2），它是我们关于

度量谱三元组有界泛函演算连续性（经过恰当定义）的工作 [28], 的一个非常一般的推论，并对在我们的语境中谱收敛的含义作出了十分具体的解释。这一解释再次受到经典几何学中结果的启发，但应用于范围宽广得多的非交换几何语境。

随后，我们可以将引理（2.3）应用于若干情形。我们首先将其应用于 Rieffel 所引入的、由紧李群在含幺 C*-代数上的遍历作用所得到的谱三元组族 [51], ，其中允许李群上的度量发生变化。这类例子包括量子环面和量子溶胶体，因此它们可以与交换情形相去甚远（事实上，底层的 C*-代数可以是单的）。随后，我们恢复文献中所述的黎曼度量空间上狄拉克算子谱在 C^1-拓扑下的连续性 [8, 45], ，尽管无需借助 [8] 中关于狄拉克算子族可微性的更复杂计算：为使这一点显而易见，我们展示了直接应用主引理所需的全部计算。接着，我们将看到如何利用类似的计算来处理几乎交换模型的谱的连续性。

为了更正式地将我们在此采用的方法与 [8, p. 595] 及其后续关于这一主题的研究作些对比， [8] 中关于狄拉克算子族谱性质的研究，是借助 Rellich [26, Theorem 3.9, .], 的一个定理，并使用自伴算子的全纯族这一概念来开展的。然而，全纯族的定义要求参数在某个复域中变化；在 [8], 中，这是通过在度量之间使用仿射路径来实现的；随后又将其推广到所谓的黎曼度量解析路径。在这些附加条件下， [26,Theorem 2.6, p. 359] 提供了构造全纯族的某些方法，因而可以应用 Rellich 定理 [26, Theorem 3.9, .] 来推导特征值的连续性。相较之下，对于我们的方法，我们只需考虑在 C^1 拓扑中收敛的任意黎曼度量序列，并直接依据相关狄拉克算子的定义，利用其族的连续性（在适当且简单的意义下），从而得到关于谱连续性的相同结论。我们完全不涉及全纯族，也不需要在我们的度量之间指定任何特殊路径。

因此，即使在这一经典图景中，我们的方法仍然是新颖的，而其相对宽松的要求表明，它或许能够推广到其他更奇异的情形；事实上，我们目前的工作已经将这些方法应用于非交换的例子。我们期待在未来的研究中，将这一理论应用于更复杂的情形，其中底流形可以发生变化，极限也可能不再是流形。近邻度无需改变其构造便能处理这种情形，从而为研究许多不同的奇异情形乃至非交换情形提供了一种统一的方法。

由于我们的研究处于两个不同研究领域——非交换度量几何与黎曼几何——的交汇处，因此我们确实会提供一些简要背景，帮助读者理解我们论证的逻辑；不过，对于我们将使用或重新建立的诸多重要工具和已知结果，我们还是充分依赖相关文献。为此，我们首先简要且略为压缩地概述谱近邻距离的构造，但更详细、清晰并配有说明的度量介绍，敬请读者参阅 [28] 。随后，我们证明一个引理，以完整刻画我们在黎曼几何中所遇到的情形。接着，我们提醒读者注意C^1-拓扑的定义，并证明我们的主定理：从该拓扑到谱近邻距离的映射将度量映射到狄拉克算子，并且该映射具有连续性；最后，我们解释这一结果的一些基本推论。

1. 背景：谱近邻距离

非交换度量几何研究某些可能是非交换代数的收敛概念，这些代数是度量空间上利普希茨函数代数的类似物 [54]，其主要受到格罗莫夫–豪斯多夫距离的启发 [23, 21]。后来，人们引入了度量谱三元组之间的一种格罗莫夫–豪斯多夫型距离，度量谱三元组将在下文定义 [43, 28]。本节将相当简要地概述这一距离的构造；其动机和实例可见 [28]。

若（X，d）是一个紧度量空间，则在函数层面对度量 d 的自然编码由利普希茨半范数给出。反过来，利普希茨半范数通过对偶性在 C*-代数 $C(X)$ 的态空间上诱导出一个度量；该代数由定义在 X 上、取值于 $\mathbb{C}$ 的连续函数构成，这一度量最初由 Kantorovich [24, 25] 引入。Connes [14] 和 Rieffel [51, 52] 引入的量子紧度量空间概念正是基于这一模型：将定义在可能非交换的含幺 C*-代数上的某些稠密定义半范数，视为利普希茨半范数的类比。本文所采用的论述建立在我们于 [33, 32, 34] 中引入的量子紧度量空间定义之上，该定义与谱三元组尤其契合。

记号 1.1. 若 E 是任意向量空间，则 E 上的范数记为 $\|\cdot\|_E$，除非另有说明。E 的线性自同态 T 的范数（允许 ∞）记为 $|||T|||_E$。当 $\mathfrak{A}$ 是一个含幺 C*-代数，单位元为 $1_{\mathfrak{A}}$ 时，$\mathfrak{A}$ 的态空间记为 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$。若 $a \in \mathfrak{A}$，则 $R_a = a + a_2^*$，且 $I_a = a - a^* i$。$\mathfrak{A}$ 中自伴元素的集合 $\{R_a : a \in \mathfrak{A}\}$ 记为 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$；对于 Jordan积 $a,b \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}) \mapsto R(ab)$ 和 Lie积 $a,b \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}) \mapsto I(ab)$，它是一个 Jordan-Lie 代数。

定义 1.2 ([33, 32])。一个量子紧度量空间 $(\mathfrak{A}, L)$ 是由一个含单位可分 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 和定义在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$ 的稠密 Jordan-Lie 子代数 $\mathrm{dom}(L)$ 上的半范数 L 组成的有序对，满足 $L(1_{\mathfrak{A}}) = 0$，并且：

(1) Monge-Kantorovich度量 mk_L，定义于所有 $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$ b y

$$\mathrm{mk}_L(\varphi,\psi) := \sup\{|\varphi(a) - \psi(a)| : a \in \mathrm{dom}(L), L(a) \leq 1\}$$

在 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 上诱导弱 * 拓扑，(2) $\max\{L(Ra), L(Ia)\} \leq \|a\|_{\mathfrak{A}} L(b) + L(a)\|b\|_{\mathfrak{A}}$ 对于所有 $a,b \in \mathrm{dom}(L)$，(3) $\{a \in \mathrm{dom}(L) : L(a) \leq 1\}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中是闭集。

注1.3。我们使用定义（1.2）中的记号。如果 $L(a) = 0$ 对于 $a \notin \mathbb{R}1_{\mathfrak{A}}$ 且 $a \in \mathrm{dom}(L)$，那么存在两个态 $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$，使得 $\varphi(a) \neq \psi(a)$，并且由于 $L(ta) = 0$ 对所有 $t > 0$，

$$t|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \mathrm{mk}_L(\varphi,\psi)$$

因此 $\mathrm{mk}_L(\varphi,\psi) = \infty$；这与 $(\mathscr{S}(\mathfrak{A}), \mathrm{mk}_L)$ 为紧空间不相容。因此，$\mathrm{So}L(a) = 0 \implies a \in \mathbb{R}1_{\mathfrak{A}}$。

注 1.4。有时，将定义（1.2）中的莱布尼茨不等式（2）推广是很有帮助的，参见 [34, 5]。由于我们研究的是谱三元组，这并无必要。此外，我们指出，局部紧量子度量空间的概念（以及相关的戈罗莫夫–豪斯多夫收敛）已在 [29]中提出。本文将完全关注含幺情形。

本文中我们尤其关注以 Connes [14] 所建议的方式由谱三元组诱导的 L-半范数。正如引言中所述，谱三元组是对狄拉克算子所给数据的一种（广泛的）抽象。谱三元组由 Connes[14]，引入，是非交换微分几何的基础 [15]。

定义 1.5 ([14])。 一个 谱三元组 $(\mathfrak{A},\mathscr{H},/\!\!D)$ 由一个作用在希尔伯特空间 $\mathfrak{A}$ 上的含幺 C*-代数 $\mathscr{H}$，以及一个定义在 D的稠密定义域 $\mathrm{dom}(/\!\!D)$ 上的自伴算子 $/\!\!\mathscr{H}$给出，并且该算子具有紧预解式，且满足

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{D}} := \left\{ a \in \mathfrak{A} : a\mathrm{dom}\,(\mathscr{H}) \subseteq \mathrm{dom}\,(\mathscr{H}) \text{ and } [\mathbb{D}, a] \text{ is bounded on } \mathrm{dom}\,(\mathbb{D}) \right\}$$

在 $\mathfrak{A}$中稠密。

如果（$\mathfrak{A}$、$\mathscr{H}$、$/\!\!D$）是一个谱三元组，并且$a \in \mathfrak{A}/\!\!_D$，那么 [$/\!\!D$、$a$] 仍将表示将 [$/\!\!D$、$a$] 通过一致连续性唯一延拓至 $\mathscr{H}$所得的结果。

本文中对我们而言的一个重要例子，同时也是 [14]中的第一个例子，是这样的：若 M是一个自旋流形，g是M上的黎曼度量， $\Sigma^g M$是关于g的M上的旋量丛，并且$/\!\!D_g$是g在希尔伯特空间 $\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)$上定义的狄拉克算子，其中该空间由关于g所诱导的体积形式平方可积的 $\Sigma^g M$的截面构成，那么（C（M），Γ_{L^2}（$\Sigma^g M$），$/\!\!D_g$）是一个谱三元组。此外，如果M是连通的，那么 Monge–Kantorovich 度量$\mathsf{mk}_{\mathsf{L}^{\mathbb{D}_g}}$会限制为$g$在$M$上所诱导的路径度量——这里将$M$识别为赋予弱*拓扑的$C$（$M$）的特征空间。特别地，这个谱三元组在以下自然意义下是度量 的。

定义 1.6 ([43])。 若谱三元组 $(\mathfrak{A},\mathscr{H},/\!\!D)$ 满足 $(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{/\!\!D})$ 是一个量子紧度量空间，则称其为度量 的；对于所有$a \in \mathfrak{A}/\!\!_D$，我们定义：

$$\mathsf{L}_{\mathbb{D}}(a) = \|\!|[\mathbb{D}, a]|\!\|_{\mathscr{H}}.$$

记号 1.7。 沿用定义（1.6）中的记号，相应的 Monge-Kantoro- vich 度量$\mathsf{mk}_{\mathsf{L}_{\mathbb{D}}}$可简记为$\mathsf{mk}_{/\!\!D}$，在此语境下称为与谱三元组 $(\mathfrak{A},\mathscr{H},/\!\!D)$ 相关联的*Connes*距离 。

关于量子紧致度量空间之间适当的 [44] 概念，请参阅利普希茨态射 。就我们的目的而言，只需定义量子等距。以下定义基于 Rieffel 的洞见 [53],，其灵感来自 McShane 的一项结果[47]。

定义 1.8。 设 $(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 和 $(\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 是两个量子紧度量空间。若一个量子等距 $\pi : (\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}) \to (\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 是满射 *-态射 $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$，满足$\pi(\mathrm{dom}(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})) = \mathrm{dom}(\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$，且

$$\forall b \in \mathrm{dom}\,(\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}) \quad \mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(b) = \inf\{\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(a) : a \in \mathrm{dom}\,(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}), \pi(a) = b\}.$$

容易验证，若 π 是一个量子等距，则

$$\pi^* : \varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{B}) \mapsto \varphi \circ \pi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$$

是从 $(\mathscr{S}(\mathfrak{B}),\mathsf{mk}_{\mathfrak{B}})$ 到 $(\mathscr{S}(\mathfrak{A}),\mathsf{mk}_{\mathfrak{A}})$ 的一个实际等距映射。

为了定义量子紧致度量空间之间格罗莫夫–豪斯多夫距离的类似物，我们将两个量子紧致度量空间“等距嵌入”到第三个空间中，并计算由 Monge-Kantorovich度量度量的适当态集合之间的豪斯多夫距离。形式上，这一思想由隧道这一概念加以编码。

记号 1.9. 度量空间 (X,d) 的闭子集集合上的豪斯多夫距离 [23] 记为 $\mathrm{Haus}[d]$,；若不会引起混淆，也可记为 $\mathrm{Haus}[X]$ 。

定义 1.10([35])**.** 设 $(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 和 $(\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 为两个量子紧度量空间。从 $(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 到 $(\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 的一个隧道 $\tau = (\mathfrak{D},\mathsf{L},\pi,\rho)$ 由一个量子紧致度量

空间 $(\mathfrak{D},\mathsf{L})$，以及两个量子等距 $\pi:(\mathfrak{D},\mathsf{L})\to(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 和 $\rho:(\mathfrak{D},\mathsf{L})\to(\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 给出。$\tau=(\mathfrak{D},\mathsf{L},\pi,\rho)$ 的广度 χ 为：

$$\max\left\{\mathrm{Haus}\left[\mathsf{mk}_{\mathsf{L}}\right]\left(\mathscr{S}(\mathfrak{D}),\pi^*(\mathscr{S}(\mathfrak{A}))\right),\mathrm{Haus}\left[\mathsf{mk}_{\mathsf{L}}\right]\left(\mathscr{S}(\mathfrak{D}),\rho^*(\mathscr{S}(\mathfrak{B}))\right)\right\}.$$

如果对于任意两个量子紧致度量空间（$\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}$）和（$\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}$），我们定义

$$\Lambda^*((\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}),(\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})):=\inf\left\{\chi(\tau):\tau\text{ is a tunnel from }(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})\text{ to }(\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})\right\}.$$

这一度量，即 近邻度，确实是在量子紧致度量空间 [33, 32, 35], 上、关于完全量子等距而言的完备度量，这也是我们研究项目的基础（例如 [30, 34, 5, 44, 2, 1, 49, 6, 3, 4]）。不过，本文将专注于为谱三元组定义我们的度量；谱三元组需要更多要素，即一种能够纳入谱三元组中除 Connes距离之外所包含的附加信息的近邻度形式。

谱三元组（$\mathfrak{A},\mathscr{H},/D$）带来的结构不只是底层度量。事实上，$\mathscr{H}$是一个 $\mathfrak{A}$-模，而 $/D$在一个稠密子空间上诱导出其图范数（在这一广义情形下类似于 Sobolev空间），其闭单位球在 $\mathscr{H}$中是紧的。我们将这一结构抽象出来，作为朝着定义度量谱三元组之间距离迈出的下一步。为了构造谱近邻距离，注意到 $\mathscr{H}$实际上是一个$\mathbb{C}$-希尔伯特模（即一个希尔伯特空间！），其上带有 $\mathfrak{A}$的作用，因此（$\mathscr{H},\mathfrak{A},\mathbb{C}$）是一个$C^*$-对应，含义如下。

一个C^*-对应$(\mathscr{M},\mathfrak{A},\mathfrak{B})$是一个 Hilbert $\mathfrak{B}$-模，并带有一个从 $\mathfrak{A}$ 到由可伴随的 $\mathfrak{B}$-线性算子作用于 $\mathscr{M}$上的 C*-代数的*-态射。特别地，$\mathscr{M}$是一个 $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-双模。我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{M}}$表示 $\mathscr{M}$ 上的 $\mathfrak{B}$-值内积，并用 $\|\cdot\|_{\mathscr{M}}$表示 $\mathscr{M}$ 上由此诱导的范数：$\omega\mapsto\sqrt{\langle\omega,\omega\rangle_{\mathscr{M}}}$。

设 $(\mathscr{M},\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ 和 $(\mathscr{N},\mathfrak{D},\mathfrak{E})$ 是两个C^*-对应。三元组 (Π,π,ρ) 称为从 $(\mathscr{M},\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ 到 $(\mathscr{N},\mathfrak{D},\mathfrak{E})$ 的 C^*-对应的态射，当 $\pi:\mathfrak{A}\to\mathfrak{D}$ 和 $\rho:\mathfrak{B}\to\mathfrak{E}$ 是两个幺元*-态射，且 $\Pi:\mathscr{M}\to\mathscr{N}$ 是一个线性映射，并满足：

(1) $\Pi(a\omega b)=\pi(a)\Pi(\omega)\rho(b)$ 对所有$a\in\mathfrak{A}$, $b\in\mathfrak{B}$ 和 $\omega\in\mathscr{M}$,
(2) $\langle\Pi(\omega),\Pi(\eta)\rangle_{\mathscr{N}}=\rho(\langle\omega,\eta\rangle_{\mathscr{M}})$ 对所有 $\omega,\eta\in\mathscr{M}$。

对我们的目的而言，谱三元组 $(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$ 可产生一个带有额外度量数据的C^*-对应，这些数据由各种半范数编码。形式上，若DN 是 $\xi\in\mathrm{dom}(/D)\mapsto\|\xi\|_{\mathscr{H}}+\|/D\xi\|_{\mathscr{H}}$上的图范数，则 $\mathrm{metCor}(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D):=(\mathscr{H},\mathrm{DN},\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{D}},\mathbb{C},0)$ 是以下结构的一个特例。

定义 1.11 ([37, 42])**.** 一个度量 C^*-对应 $(\mathscr{M},\mathrm{DN},\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 是一个C^*-对应 $(\mathscr{M},\mathfrak{A},\mathfrak{B})$，此外，$(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 和 $(\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 是量子紧度量空间，并且DN 是 $\mathscr{M}$ 的稠密$\mathbb{C}$-子空间 dom(DN) 上的一个范数，使得

(1) $\{\omega\in\mathscr{M}:\mathrm{DN}(\omega)\leqslant 1\}$ 在 $\mathscr{M}$ 中是紧的，(2) $\mathrm{DN}\geqslant\|\cdot\|_{\mathscr{M}}$，(3) 对所有 $\omega,\omega'\in\in\mathrm{dom}(\mathrm{DN})$，$\max\left\{\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}\left(\mathrm{R}\langle\omega,\omega'\rangle_{\mathscr{M}}\right),\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}\left(\mathrm{I}\langle\omega,\omega'\rangle_{\mathscr{M}}\right)\right\}\leqslant 2\mathrm{DN}(\omega)\mathrm{DN}(\omega')$，(4) 对所有 a$\in\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 和 $\omega\in\in\mathrm{dom}(\mathrm{DN})$，$\mathrm{DN}(\mathrm{a}\omega)\leqslant(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(\mathrm{a})+\|\mathrm{a}\|_{\mathfrak{A}})\mathrm{DN}(\omega)$。

注记 1.12。定义（1.11）中的不等式 (3) 和 (4) 直接受度量联络性质的启发，是利普希茨半范数的莱布尼茨不等式在这一更一般背景下的类似形式。

当处理度量的 C^*-对应时，我们将对应态射的概念特化为等距对应态射。此定义背后的想法见 [37]。

定义 1.13（[37, 42]）。设 $\mathsf{M}_1 := (\mathscr{M}, \mathsf{DN}_{\mathscr{M}}, \mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 和 $\mathscr{M}_2 := (\mathscr{N}, \mathsf{DN}_{\mathscr{N}}, \mathfrak{D}, \mathsf{L}_{\mathfrak{D}}, \mathfrak{E}, \mathsf{L}_{\mathfrak{E}})$ 是两个度量 C*-对应。从 M_1 到 M_2 的度量 C*-对应之间的量子等距，是一个从 $(\mathscr{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ 到 $(\mathscr{N}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E})$ 的 C*- 对应的态射 (Π, π, ρ)，满足

(1) $\pi : (\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}}) \to (\mathfrak{D}, \mathsf{L}_{\mathfrak{D}})$ 和 $\rho : (\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}}) \to (\mathfrak{E}, \mathsf{L}_{\mathfrak{E}})$ 是量子等距，(2) Π 是满射，$\Pi(\mathrm{dom}(\mathsf{DN}_{\mathscr{M}})) = \mathrm{dom}(\mathsf{DN}_{\mathscr{N}})$，并且对于所有 $\omega \in \mathrm{dom}(\mathsf{DN}_{\mathscr{N}})$:

$$\mathsf{DN}_{\mathscr{N}}(\omega) = \inf\{\mathsf{DN}_{\mathscr{M}}(\eta) \eta \in \mathrm{dom}(\mathsf{DN}_{\mathscr{M}}) \cap \Pi^{-1}(\{\omega\})\}.$$

现在我们定义度量谱三元组的收敛概念。受格罗莫夫的工作启发 [22, 21], , 我们首先为上述结构定义一种“等距嵌入”形式。

定义 1.14. 设 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$ 是两个度量 C^*-对应。一个从$\mathbb{A}$ 到$\mathbb{B}$ 的度量隧道 τ由以下元组给出:

$$(\mathbb{P}, \Pi, R)$$

其中$\mathbb{P}$ 是一个度量C^*-对应，而 $\Pi : \mathbb{P} \to \mathbb{A}$ 和$R : \mathbb{P} \to \mathbb{B}$ 是量子等距。

接下来，我们为度量隧道关联一个数。关键在于这样一个观察：度量隧道包含两个量子紧度量空间的嵌入，而我们知道如何为它们关联一个称为广度的数。遗憾的是，出于记号方面的考虑，我们的定义要求展开隧道各个组成部分的定义。

定义 1.15([42])。度量隧道的广度

$$\Big(\underbrace{\mathscr{M}, \mathsf{DN}, \mathfrak{D}, \mathsf{L}_{\mathfrak{D}}, \mathfrak{E}, \mathsf{L}_{\mathfrak{E}}}_{\text{metrical } C^*\text{-correspondence}} , \quad \underbrace{(\Pi, \pi, \varpi)}_{\substack{\text{metrical} \\ \text{quantum isometry}}} \quad , \quad \underbrace{(R, \rho, \varrho)}_{\substack{\text{metrical} \\ \text{quantum isometry}}} \quad \Big)$$

is

$$\max\{\text{extent of } (\mathfrak{D}, \mathsf{L}_{\mathfrak{D}}, \pi, \rho) \text{ and the extent of } (\mathfrak{E}, \mathsf{L}_{\mathfrak{E}}, \varpi, \varrho)\}.$$

若 $(\mathfrak{A}, \mathscr{H}_{\mathfrak{A}}, /\!\!D_{\mathfrak{A}})$ 和 $(\mathfrak{B}, \mathscr{H}_{\mathfrak{B}}, /\!\!D_{\mathfrak{B}})$ 是两个度量谱三元组，则从 $(\mathfrak{A}, \mathscr{H}_{\mathfrak{A}}, /\!\!D_{\mathfrak{A}})$ 到 $(\mathfrak{B}, \mathscr{H}_{\mathfrak{B}}, /\!\!D_{\mathfrak{B}})$ 的隧道，就是从 $\mathrm{metCor}(\mathfrak{A}, \mathscr{H}_{\mathfrak{A}}, /\!\!D_{\mathfrak{A}})$ 到 $\mathrm{metCor}(\mathfrak{B}, \mathscr{H}_{\mathfrak{B}}, /\!\!D_{\mathfrak{B}})$ 的隧道。

我们确实可以通过取两个给定度量 C*-对应之间所有度量隧道的广度下确界，来定义度量 C*-对应之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离；该度量在完全量子等距意义下是完备的，并有一些应用，例如应用于量子环面 [37, 42,40, 38] 上的海森堡模。然而，由度量谱三元组构造的度量 C*-对应之间距离为零，仍不足以保证度量谱三元组之间酉等价。因此，我们最后再进一步强化这一度量。

谱三元组会在其度量 C*-对应上诱导出另一个对象：由$\mathbb{R}$ 上的酉算子构成的作用。我们也希望在度量中对此加以考虑。为此，我们发展了近邻度和上文介绍的模近邻度的协变版本 [39, 36, 7] , [43], 该版本是谱近邻距离的基础。粗略地说，其思想是使用度量隧道的概念，来衡量这些作用的轨道在限制于 $[0, \infty)$ 时彼此保持接近的程度。在我们的论述 [28] 中，通过使用以下概念可以最容易地刻画这一点；该概念是度量 C^*-对应的 Monge-Kantorovich 度量的一个显然类比。此外，在讨论狄拉克算子的函数演算的收敛时，我们也可以使用以下定义

在我们的度量下。以下记号将有助于引入 Sobolev空间的闭单位球的类比：

定义 1.16 ([28])。 若 $(\mathscr{M},\mathsf{DN},\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 是一个度量 C*-对应，则：

$$\mathsf{mk}_{\mathsf{DN}}(\omega,\omega') := \sup\left\{\left|\left\langle \omega-\omega',\eta\right\rangle_{\mathscr{M}}\right| : \eta\in\mathscr{B}_{\mathsf{DN}}\right\}$$

其中

$$\mathscr{B}_{\mathsf{DN}} := \{\omega\in \mathrm{dom}\,(\mathsf{DN}) : \mathsf{DN}(\omega)\leqslant 1\}.$$

对于任意非空集合 J，我们只需如下定义，便可将 mkDN 扩展到由 J 索引的族：

$$\mathsf{mk}_{\mathsf{DN}}((\omega_j)_{j\in J},(\omega')_{j\in J}) := \sup_{j\in J}\mathsf{mk}_{\mathsf{DN}}(\omega_j,\omega'_j).$$

定义 1.17 ([28])。 若 $(\mathscr{M},\mathsf{DN},\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}},\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 是一个度量 C*-对应，并且 $(A_j)_{\ j\in J}$、$(Bj)_{j\in J}$ 是 $\mathscr{M}$ 上的两个可伴算子族，则

$$:= \mathsf{Haus}\left[\mathsf{mk}_{\mathsf{DN}}\right]\left\{\left\{(A_j\omega)_{j\in J} : \omega\in\mathscr{B}_{\mathsf{DN}}\right\},\left\{(B_j\omega)_{j\in J} : \omega\in\mathscr{B}_{\mathsf{DN}}\right\}\right\}.$$

定义 1.18([43, 28])。 谱近邻距离 $\Lambda_{\mathsf{spec}}((\mathfrak{A},\mathscr{H}_{\mathfrak{A}},/D_{\mathfrak{A}}),(\mathfrak{B},\mathscr{H}_{\mathfrak{B}},/D_{\mathfrak{B}}))$ i s

$$\inf\Big\{\varepsilon>0 : \exists\tau := (\mathbb{P},(\Pi_{\mathfrak{A}},\pi,\pi'),(\Pi_{\mathfrak{B}},\rho,\rho')) \text{ tunnel from } (\mathfrak{A},\mathscr{H}_{\mathfrak{A}},\mathbb{D}_{\mathfrak{A}}) \text{ to } (\mathfrak{B},\mathscr{H}_{\mathfrak{B}},\mathbb{D}_{\mathfrak{B}})$$
$$\max\left\{\chi(\tau),\mathrm{sep}(\exp(it\mathbb{D}_{\mathfrak{A}})\circ\Pi_{\mathfrak{A}})_{t\in[0,\varepsilon^{-1}]},\exp(it\mathbb{D}_{\mathfrak{B}})\circ\Pi_{\mathfrak{B}})_{t\in[0,\varepsilon^{-1}]})\right\}<\varepsilon\Big\}.$$

我们将看到，在谱近邻距离意义下的收敛具有有趣的含义。现在，我们只需注意以下结果。

定理 1.19 ([43])。 谱近邻距离是度量谱三元组空间上的一个度量，其中将酉等价的度量谱三元组视为同一点；也就是说，对于任意两个度量谱三元组 $(\mathfrak{A},\ \mathscr{H},\ \mathfrak{D})$ 和$(\mathfrak{B},\ \mathscr{H}G,\ /DT)$，我们有

$$\Lambda^{\mathsf{spec}}((\mathfrak{A},\mathscr{H}_{\mathfrak{A}},\mathbb{D}_{\mathfrak{A}}),(\mathfrak{B},\mathscr{H}_{\mathfrak{B}},\mathbb{D}_{\mathfrak{B}}))=0$$

当且仅当存在一个酉算子 $U\colon\ \ \mathscr{H}_{\mathfrak{A}}\to\mathscr{H}_{\mathfrak{B}}$ 使得 $a\ \in\mathfrak{A}\mapsto UaU^*$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$的 *-同构，并且

$$U\mathrm{dom}\,(\mathbb{D}_{\mathfrak{A}})=\mathrm{dom}\,(\mathbb{D}_{\mathfrak{B}})\ and\ U\mathbb{D}_{\mathfrak{A}}=\mathbb{D}_{\mathfrak{B}}U.$$

谱近邻距离可用于获得有趣的例子，例如收敛到环面的矩阵模型、 [41], 分形上某些谱三元组的逼近[27], , 或关于归纳极限 [18, 7, 19, 17]的结果。

现在，本文最为关注的是狄拉克算子的谱相对于谱近邻距离的连续性，我们已在 [28] 中确立了这一点。现在，利用我们在 [28], 中的结果，我们希望给出一种这种连续性的形式，它直接受到黎曼几何学文献的启发。

2. 谱近邻距离的一个连续性结果

本节将确立本文其余部分所依赖的两个主要结果
。首先，作为对 [28, 推论 5.3], 的改进，我们将看到，事实上，按重数计算，当度量谱三元组足够接近时，任意区间内的特征值个数保持不变。为此，我们将以适当的意义运用有界连续函数演算的连续性，这一点已在 [28]中确立。

记号 2.1. 自伴算子 $/D$ 的谱记为 Sp($/D$)。此外，若 λ 是 $/D$的一个特征值，则 multiplicity($\lambda|\ /D$) 是对应于λ的特征空间的维数。

定理 2.2. 若 $(\mathfrak{A}_n, \mathscr{H}_n, /D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个度量谱三元组序列，并且该序列在谱近邻距离下收敛到度量谱三元组 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathscr{H}_\infty, /D_\infty)$，那么对于任意 $\Lambda \in (0,\infty)\backslash \mathrm{Sp}(/D_\infty)$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geqslant N$ 时，

$$\sum_{\substack{\lambda\in \mathrm{Sp}(\not{D}_n)\\ -\Lambda\leqslant\lambda\leqslant\Lambda}} \mathrm{multiplicity}(\lambda|\not{D}_n) = \sum_{\substack{\lambda\in \mathrm{Sp}(\not{D}_\infty)\\ -\Lambda\leqslant\lambda\leqslant\Lambda}} \mathrm{multiplicity}(\lambda|\not{D}_\infty) < \infty,$$

此外，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Haus}_{[\mathbb{C}]}(\mathrm{Sp}(\not{D}_n)\cap[-\Lambda,\Lambda], \mathrm{Sp}(\not{D}_\infty)\cap[-\Lambda,\Lambda]) = 0.$$

证明。令 $\Lambda > 0$，其中 $\Lambda \notin \mathrm{Sp}(/D_\infty)$。由于 $\mathrm{Sp}(/D_\infty)$ 是离散的，集合 $\mathrm{Sp}(/D_\infty)\cap[-\Lambda,\Lambda]$ 是有限的；记作 $\{\lambda_0,...,\lambda_N\}$，其中 $\lambda_0 < \lambda_1 < ... \lambda_N$。令 $\varepsilon > 0$ 使得 $\lambda_0 - 2\varepsilon > -\Lambda$ 且 $\lambda_n + 2\varepsilon < \Lambda$。

我们从一个谱隙结果开始。假设对所有 $N \in \mathbb{N}$，存在 $n \geqslant N$，使得集合

$$G_n := \mathrm{Sp}(\not{D}_n)\cap([-\Lambda,-\Lambda+\varepsilon]\cup[\Lambda-\varepsilon,\Lambda])$$

非空。因此，存在一个子序列 $(G_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $G_{f(n)}$ 始终非空。令 $\mu_n \in G_{f(n)}$。由于 $\mu_n \in [-\Lambda,-\Lambda+\varepsilon]\cup[\Lambda-\varepsilon,\Lambda]$，且后一个集合是紧的，因此 $(\mu_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$存在一个收敛子序列。可是其极限必属于闭集 $[-\Lambda,-\Lambda+\varepsilon]\cup[\Lambda-\varepsilon,\Lambda]$，根据 $D)\cap[-\Lambda,\Lambda]$以及 [28,定理 5。2],这与我们对 $\varepsilon > 0$的选择矛盾。

因此，存在$N_1 \in \mathbb{N}$，使得对于所有$n \geqslant N_1$,，我们都有

$$\mathrm{Sp}(\not{D}_n)\cap([-\Lambda,-\Lambda+\varepsilon]\cup[\Lambda-\varepsilon,\Lambda]) = \emptyset.$$

现在设$p\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ 是$\mathbb{R}$ 上的连续函数，满足$p([\lambda_0+\varepsilon,\lambda_n-\varepsilon]) = \{1\}$，而$p(\mathbb{R}\setminus[-\Lambda,\Lambda]) = \{0\}$。根据构造，对于所有$n \geqslant N_1$，$p(/D_n)$都是作用于 $\mathrm{Sp}(/D_n)\cap[-\Lambda,\Lambda]$ 的谱投影。

设$n \geqslant N_1$。我们记从 $(\mathfrak{A}_n, \mathscr{H}_n, /D_n)$ 到 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathscr{H}_\infty, /D_\infty)$ 的隧道为 τ_n，其广度至多为 $\frac{\varepsilon}{(1+\Lambda)^2}$。

18

令$\eta_{n,1},...,\eta_{n,d}$ 为谱投影$p(/D_n)$的有限维值域的一组标准正交基——也就是说，它是由与 $\mathrm{Sp}(/D_n)\cap[-\Lambda,\Lambda]$中的特征值相对应的$D_n$的特征子空间之和的一组基。注意，这确实是一个有限维空间，因为D_n 具有紧预解式。

根据p的定义，我们有$p(/D_n)\eta_{n,k} = \lambda\eta_{n,k}$，其中某个 $\lambda \in \mathrm{Sp}(/D_n)\cap[-\Lambda,\Lambda]$。因此$\mathrm{DN}_n(f(/D_n)\eta_{n,k}) \leqslant 1+\Lambda$。所以，根据 [28,定理 4.7、推论 3.13],，对每个$\eta_{n,j}$（其中$j \in \{1,...,d\}$），存在 $\xi_j \in \mathscr{H}_\infty$ 使得

$$\begin{aligned}\left|\left\langle f(\not{D}_\infty)\xi_j, f(\not{D}_\infty)\xi_k\right\rangle\right| &\leqslant \varepsilon + \left|\left\langle f(\not{D}_n)\eta_{n,j}, f(\not{D}_n)\eta_{n,k}\right\rangle\right| \\ &= \begin{cases}\varepsilon+1 \text{ if } k=j,\\ \varepsilon \text{ otherwise.}\end{cases}\end{aligned}$$

因此，根据 [28, 引理 5.5]，$f(/D_\infty)\xi_1,...,f(/D_\infty)\xi_d$ 线性无关。由此$\xi_1,...,\xi_d$线性无关。因此，$\dim\mathrm{ran}\left(p(/D_\infty)\right) \geqslant \dim\mathrm{ran}\left(p(/D_n)\right)$。

我们可以像上面那样继续论证：从$p(/D_\infty)$值域的一组标准正交基出发，证明我们能够在$p(/D_n)$的值域中找到一个基数相同的线性无关族。

由于$p(/D_n)$的值域维数等于$\mathrm{Sp}(/D_n)\cap[-\Lambda,\Lambda]$中相关特征值的重数之和，我们得出：

$$\sum_{j=0}^{N} \mathrm{multiplicity}\left(\lambda_j\middle|\not{D}_\infty\right) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\not{D}_n)} \mathrm{multiplicity}(\lambda|\not{D}_n).$$

现在，对于另一个集合，我们采用与上面类似的推理来完成证明。固定 $\varepsilon > 0$。令

$$H_n := (\mathrm{Sp}(\not{D}_n) \cap [-\Lambda, \Lambda]) \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{n} (\lambda_j - \varepsilon, \lambda_j + \varepsilon) \right).$$

假设对所有 N ∈ N，都存在 n ⩾ N，使得 $H_n \neq \emptyset$；再次取一个子$_f$列 $(H_{n\in\mathbb{N}}(n))_f$，使得对于 n ∈N，集合 H $\mu_n \in$ (n) 均非空。令 $_f$H ∈(n)，对所有 n μ_n N 均成立。再次利用紧致性，∞有一个收敛子序列，它必定是 /D $[-\Lambda, \Lambda]$ 的特征值，位于 λ_j 内，但不等于任何 [28, 。根据2]定理 5. ∈ ，这就造成了矛盾。因此，存在 N ⩾ N，使得若 n $_n = \emptyset$N，则 Hn，即 Sp(/D ∩ $[-\Lambda, \Lambda]$) ⊆ $\bigcup^{n}$ =0j$\lambda_j - \varepsilon(\lambda_j + \varepsilon,)$。

另一方面，对于每个 j ∈{0,...,d}，再次由 [28, 定理 5.2], ，特征值λ_j是某个序列（$\mu_{n,j}$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限，其中 $\mu_{n,j} \in$ Sp(/Dn) 对所有 n ∈ N 均成立。取 N$_j$ ∈ N，使得若 n ⩾ Nj，则 $|\lambda_j - \mu_{n,j}| < \varepsilon$。由于按构造有 $\lambda_j \in$ （$-\Lambda, \Lambda$），因此存在 M$_j$ ∈N，使得若 n ⩾M j ，则 $\mu_{n,j} \in$（$-\Lambda, \Lambda$），即 $\mu_{n,j} \in$Sp(/Dn) ∩（$-\Lambda$, Λ）。因此，若 n ⩾max{Nj, Mj}，则 λ_j到 Sp(/Dn) ∩（$-\Lambda, \Lambda$）|的距离至多为 ε。

因此，若 $n \geqslant \max\{N, N_j, M_j : j \in \{0,...,d\}\} \in \mathbb{N}$，则

$$\mathrm{Haus}_{[\mathbb{C}]}(\mathrm{Sp}(\not{D}_n) \cap [-\Lambda, \Lambda], \mathrm{Sp}(\not{D}_\infty) \cap [-\Lambda, \Lambda]) \leqslant \varepsilon.$$

至此，我们的定理得证。 □

我们也可以将定理（2.2）的结论改述如下：若 $(\mathfrak{A}_n, \mathscr{H}_n, /D_n)_{n\in\mathbb{N}}$在谱近邻距离下收敛到 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathscr{H}_\infty, /D_\infty)$，则存在 N ∈N 和 K ∈ N，使得当 n ⩾ N 时，存在一族标量 $(\lambda_{n,j})^K$j =1，满足$\lambda_{n,1} \leqslant \lambda_{n,2} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n,K}$，且 Sp(/D$n$) ∩ $[-\Lambda, \Lambda] = \{\lambda_n, 1, \cdots, \lambda_{n,K}\}$，其中特征值$\lambda_n$, 0,...,$\lambda_{n,K}$按照其重数重复。此外，若

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{|\lambda_{\infty,j} - \lambda_{\infty,k}| : j, k \in \{1, \ldots, K\}, \lambda_{\infty,j} \neq \lambda_{\infty,k}\}$$

那么，只要将N取得更大一些，我们就有

$$\mathrm{Haus}_{[\mathbb{C}]}(\mathrm{Sp}(\not{D}_n) \cap [-\Lambda, \Lambda], \mathrm{Sp}(\not{D}_\infty) \cap [-\Lambda, \Lambda]) \leqslant \varepsilon,$$

因此，如果 $\lambda_{n,j} \neq \lambda_{n,k}$，那么 $|\lambda_{n,j} - \lambda_{\infty,k}| > \varepsilon$。

因此，再次利用 [28, 定理 5。2], 我们得出，对于每个 $j \in \{1,...,K\}$，都有

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,j} = \lambda_{\infty,j}.$$

简而言之：当n足够大时，我们可以将 $[-\Lambda, \Lambda]$ 中 /D_n 的特征值（按重数计）标记为 $\lambda_{n,1} \leqslant ... \leqslant \lambda_{n,K}$，其中$K$与$N$无关，包括$n = \infty$的情形；此外，对于所有$j \in \{1,...,K\}$，$(\lambda_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $\lambda_{\infty,j}$。

我们现在证明，度量谱三元组族满足某些自然条件即可推出其在近邻度下收敛。该定理的假设受到 [48,定理 2.1] 的启发。

引理 2.3。 设 $\mathfrak{A}$ 是作用在可分希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的含单位可分 C^*-代数，且 Ω 是一个拓扑空间。设 E 是 $\mathscr{H}$ 的稠密子空间。我们假设，对于每个 $\sigma \in \Omega$，给定一个度量谱三元组 ($\mathfrak{A}$， $\mathscr{H}$， /Dσ) ，使得 dom(/Dσ) $= E$。对于每个 $\sigma \in \Omega$ 和 $\xi \in E$，我们令

$$\mathrm{DN}_\sigma(\xi) := \|\xi\|_{\mathscr{H}} + \|\not{D}_\sigma \xi\|_{\mathscr{H}}.$$

对于每个 $\sigma\in\Omega$ 和一个 $\in\mathfrak{A}$，如果 $aE\subseteq E$，且 $[\not{D}\sigma,\ a]$ 在 E 上有界，那么我们令

$$\mathsf{L}_\sigma(a)=\|\|[\not{D}_h,a]\|\|_{\mathscr{H}};$$

否则，我们设 $\mathsf{L}\sigma(a)=\infty$。

固定 $\omega\in\Omega$。如果以下两个断言均成立：

(1) 对所有 $\varepsilon>0$，存在 ω 的一个邻域 Ω_ω，使得若 $\sigma\in\Omega$ 且 $a\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}\omega)$，则

$$|\mathsf{L}_\omega(a)-\mathsf{L}_\sigma(a)|\leqslant\varepsilon\mathsf{L}_\omega(a),$$

(2) 对所有 $\varepsilon>0$，存在 ω 的一个邻域 Ω_ω，使得若 $\sigma\in\Omega$，则

$$\sup_{\substack{\xi\in E\\ \mathsf{DN}_\omega(\xi)\leqslant1}}\left\|\left(\not{D}_h-\not{D}_g\right)\xi\right\|_{\mathscr{H}}<\varepsilon,$$

then

$$\lim_{\substack{\sigma\to\omega\\ \sigma\in\Omega}}\Lambda^{\mathsf{spec}}((\mathfrak{A},\mathscr{H},\not{D}_\sigma),(\mathfrak{A},\mathscr{H},\not{D}_\omega))=0.$$

证明。我们定义常数 $K:=2\mathrm{qdiam}\left(\mathfrak{A},\mathsf{mk}_{\mathsf{L}_\omega}\right)+1$。在 K的定义中加上 1，只是为了确保 K不为零。

设 $\varepsilon>0$。不失一般性，假设 $\varepsilon\leqslant\min\{1,1_{K+1}\}$。令 Ω_0 为~~Ω~~ 中 ω 的一个邻域，使得对所有 $\sigma\in\Omega_0$，都有：

$$\sup_{\substack{a\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\omega)\\ \mathsf{L}_\omega(a)\leqslant1}}|\mathsf{L}_\sigma(a)-\mathsf{L}_\omega(a)|<\varepsilon,$$

由条件（1）给出。换言之，对于所有 $a\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}\omega)=\mathrm{dom}(\mathsf{L}\sigma)$，我们有半范数等价：

$$(1-\varepsilon)\mathsf{L}_\omega(a)\leqslant\mathsf{L}_\sigma(a)\leqslant(1+\varepsilon)\mathsf{L}_\omega(a).$$

设 $\varphi,\psi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A})$。根据定义，

$$(1-\varepsilon)\mathsf{mk}_{\mathsf{L}_\sigma}(\varphi,\psi)\leqslant\mathsf{mk}_{\mathsf{L}_\omega}(\varphi,\psi)\leqslant(1+\varepsilon)\mathsf{mk}_{\mathsf{L}_\sigma}(\varphi,\psi).$$

因此，

$$(1-\varepsilon)\mathrm{qdiam}\left(\mathfrak{A},\mathsf{mk}_{\mathsf{L}_\sigma}\right)\leqslant\mathrm{qdiam}\left(\mathfrak{A},\mathsf{mk}_{\mathsf{L}_\omega}\right)\leqslant(1+\varepsilon)\mathrm{qdiam}\left(\mathfrak{A},\mathsf{mk}_{\mathsf{L}_\sigma}\right).$$

于是，对于所有 $\sigma\in\Omega_0$，我们得出

$$\mathrm{qdiam}\left(\mathfrak{A},\mathsf{mk}_{\mathsf{L}_\sigma}\right)\leqslant2\mathrm{qdiam}\left(\mathfrak{A},\mathsf{mk}_{\mathsf{L}_\omega}\right)<K. \tag{2.1}$$

今后，我们在 E上赋予 $\not{D}\omega$ 图范数 $\mathsf{DN}\omega$。令 Ω_1 为 Ω 中 ω 的一个邻域，使得对于所有 $\sigma\in\Omega_1$ 以及所有 $\xi\in E$:

$$\|(\not{D}_\sigma-\not{D}_\omega)\xi\|_{\mathscr{H}}\leqslant K\varepsilon\cdot\mathsf{DN}_\omega(\xi),$$

由条件（2）以及 E 上范数 $\mathsf{DN}\omega$ 的齐次性给出。

令 $\Omega_2:=\Omega_0\cap\Omega_1$，w hich 是一个邻hborhood of ω 属于 Ω。我们选 k 一个任意的 $\sigma\in\Omega_2$。对于所有 a、$b\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}\omega)$，我们定义：

$$\mathsf{T}_\sigma(a,b):=\max\left\{\mathsf{L}_\omega(a),\mathsf{L}_\sigma(b),\frac{\|a-b\|_{\mathfrak{A}}}{K\varepsilon}\right\}.$$

这是显而易见的，也是常见的证明：$(\mathfrak{D},\mathsf{T})$ 是一个量子紧度量空间。

我们将从 $\mathfrak{D}:=\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{A}$ 到各个直和项的典范满射记为$\pi_\omega:(a,b)\in\mathfrak{D}\mapsto a\in\mathfrak{A}$ 和 $\pi_\sigma:(a,b)\in\mathfrak{D}\mapsto b\in\mathfrak{A}$。关于记号，值得一提的是，在构造$\pi_\sigma$ 和 π_ω 时，并不特别依赖点 ω 和 σ，不过这种

记号与这样一个事实相符： π_σ 将是到 $(\mathfrak{A},\mathsf{L}_\sigma)$ 的量子等距，而 π_ω将是到 $(\mathfrak{A},\mathsf{L}_\omega)$ 的量子等距。

若$a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\sigma)$ 且$\mathsf{L}_\sigma(a) = 1$，则$\mathsf{L}_\omega\left(\frac{1}{1-\varepsilon}a\right) \leq 1$。任取 $\mu \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$。注意，

$$\left\|a - \mu(a)\right\|_{\mathfrak{A}} \leq \mathrm{qdiam}\left(\mathfrak{A}, \mathsf{mk}_{\mathsf{L}_\sigma}\right) \leq K$$

根据 [51, 命题 1。6] 以及表达式 (2.1)。因此，若$b := \frac{1}{1-\varepsilon}a - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\mu(a)$，则$\mathsf{L}_\sigma(b) = \mathsf{L}_\sigma\left(\frac{1}{1-\varepsilon}a\right) \leq 1$，而

$$\|a-b\|_{\mathfrak{A}} \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left\|a-\mu(a)\right\|_{\mathfrak{A}} \leq \varepsilon K.$$

因此，$\mathsf{T}(b,a) = 1$。由构造可知，$\mathsf{L}_\sigma \circ \pi_\sigma \leq \mathsf{T}$，故我们得出 $\pi_\sigma : (\mathfrak{D},\mathsf{T}) \to (\mathfrak{A},\mathsf{L}_\sigma)$ 是量子等距。同样，事实上，$\pi_\omega : (\mathfrak{D},\mathsf{T}) \to (\mathfrak{A},\mathsf{L}_\omega)$ 也是量子等距。

因此，$(\mathfrak{D},\mathsf{T},\pi_\omega,\pi_\sigma)$ 是一个隧道，其广度实际上至多为 $\mathrm{K}\varepsilon$ （简言之，若 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B})$，则 $\varphi = \mathrm{t}\varphi_1 \circ \pi_\omega + (1-\mathrm{t})\varphi_2 \circ \pi_\sigma$，其中 $\mathrm{t} \in [0,1], \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$；若令 $\psi := \mathrm{t}\varphi_1 + (1-\mathrm{t})\varphi_2$，则由构造可知，$\mathrm{mkT}_\sigma(\varphi,\psi \circ \pi_\omega) \leq \mathrm{K}\ \varepsilon$）。

现在，对于所有 $\xi,\eta \in E$，我们定义：

$$\mathsf{TN}(\xi,\eta) := \max\left\{\mathsf{DN}_\omega(\xi), \mathsf{DN}_\sigma(\xi), \frac{\left\|\xi-\eta\right\|_{\mathscr{H}}}{K\varepsilon}\right\}.$$

再次容易验证，TN 是 $\mathscr{H}\oplus\mathscr{H}$ 上的一个 D-范数。

若 $\xi \in E$且 $\sigma \in \Omega_2$，则：

$$\begin{aligned}
|\mathsf{DN}_\sigma(\xi) - \mathsf{DN}_\omega(\xi)| &= \left|\|\xi\|_{\mathscr{H}} + \|\not{D}_\sigma(\xi)\|_{\mathscr{H}} - \|\xi\|_{\mathscr{H}} - \|\not{D}_\omega\xi\|_{\mathscr{H}}\right| \\
&\leq \left|\|\xi\|_{\mathscr{H}} - \|\xi\|_{\mathscr{H}}\right| + \left|\|\not{D}_\sigma\xi\|_{\mathscr{H}} - \|\not{D}_\omega\xi\|_{\mathscr{H}}\right| \\
&\leq \|(\not{D}_\sigma - \not{D}_\omega)\xi\|_{\mathscr{H}} \\
&\leq K\varepsilon\mathsf{DN}_\omega(\xi).
\end{aligned}$$

现在假设 $\mathsf{DN}_\omega(\xi) = 1$。因此 $|1-\mathsf{DN}_\sigma(\xi)| \leq K\varepsilon$，故 $\mathsf{DN}_\sigma(\xi) \leq 1+K\varepsilon$。我们得出：

$$\mathsf{TN}\left(\xi, \frac{1}{1+K\varepsilon}\xi\right) = 1.$$

现在令 $\eta \in E$满足 $\mathsf{DN}_\sigma(\eta) = 1$。如上所述，

$$\mathsf{DN}_\omega(\eta) \leq \frac{1}{1-K\varepsilon}\mathsf{DN}_\sigma(\eta) = \frac{1}{1-K\varepsilon}.$$

因此，对于所有满足 $\mathsf{DN}_\sigma(\eta) = 1$ 的 $\eta \in \mathrm{dom}(\not{D}_\sigma)$，我们有：

$$\mathsf{TN}\left(\frac{1}{1-K\varepsilon}\eta, \eta\right) = 1.$$

令 $\Pi_\sigma : (\xi,\eta) \in \mathscr{H}\oplus\mathscr{H} \mapsto \xi$ 且 $\Pi_\omega : (\xi,\eta) \in \mathscr{H}\oplus\mathscr{H} \mapsto \eta$。根据构造，$(\pi_\sigma,\Pi_\sigma)$ 和 (π_ω,Π_ω) 是模映射。此外，由于齐次性，且因为

$$\mathsf{TN}(\xi,\eta) \geqslant \max\{\mathsf{DN}_\omega(\xi), \mathsf{DN}_\sigma(\eta)\},$$

我们得出，(π_σ,Π_ω) 和 (π_ω,Π_ω) 是量子等距。

对于所有 $(z,w) \in \mathbb{C}^2$，，我们定义：

$$\mathsf{Q}(z,w) := \frac{1}{K\varepsilon}|z-w|.$$

当然，$(\mathbb{C}^2,\mathsf{Q},j_\omega,j_\sigma)$，其中 $j_\omega : (z,w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto z$ 且 $j_\sigma : (z,w) \mapsto w$均为量子等距映射，是一条从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的广度为 $K\varepsilon$ 的隧道。

一个常见的论证表明，我们已经构造出了一条度量隧道：

$$(\mathscr{H}\oplus\mathscr{H},\mathsf{TN},\mathfrak{D},\mathsf{T},\mathbb{C}^2,\mathsf{Q},(\Pi_\omega,\pi_\omega,j_\omega),(\Pi_\sigma,\pi_\sigma,j_\sigma))$$

根据定义，其广度不超过 $(\mathfrak{D},\mathsf{T},\pi_\omega,\pi_\sigma)$ 的广度与 $(\mathbb{C}^2,\mathsf{Q},j_\omega,j_\sigma)$ 的广度，也就是说，不超过 $K\varepsilon$。

接下来要计算这个度量隧道在通过对狄拉克算子取指数而给出的作用下的可达距离。根据 [26, IX, 定理 2.12, 第 502], , 其中 $M=1, a=b=K\varepsilon, \beta=0$ 并且 $\chi=1$，由此可得：

$$\left|\left|\left|\left(\exp(it\not{D}_\sigma)-\exp(it\not{D}_\omega)\right)(1+i\not{D}_\omega)^{-1}\right|\right|\right|\leqslant t[2K\varepsilon+K\varepsilon]=3K\varepsilon t.$$

设 $\xi\in\mathrm{dom}(\not{D}_\omega)$，其中 $\mathsf{DN}_\omega(\xi)\leqslant 1+K\varepsilon$。则

$$\|(\not{D}_\omega+i)\xi\|_{\mathscr{H}}\leqslant\|\not{D}_\omega\xi\|_{\mathscr{H}}+\|\xi\|_{\mathscr{H}}=\mathsf{DN}_\omega(\xi)\leqslant 1+K\varepsilon.$$

因此：

$$\begin{aligned}\left\|\left(\exp(it\not{D}_\sigma)-\exp(it\not{D}_\omega)\right)\xi\right\|_{\mathscr{H}}&=\left\|\left(\exp(it\not{D}^\sigma)-\exp(it\not{D}_\omega)\right)(i\not{D}_\omega+1)^{-1}(1+\not{D}_\omega)\xi\right\|_{\mathscr{H}}\\&\leqslant\left|\left|\left|\left(\exp(it\not{D}_\sigma)-\exp(it\not{D}_\omega)\right)(1+i\not{D}_\omega)^{-1}\right|\right|\right|\mathsf{DN}_\omega(\xi)\\&\leqslant 3Kt\varepsilon(1+\varepsilon)\leqslant 3K(1+2K)\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，若 $\mathsf{TN}(\xi,\eta)\leqslant 1$ 且 $\mathsf{TN}(\zeta,\zeta')\leqslant 1$，则

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\exp(it\not{D}_\sigma)\eta,\zeta'\right\rangle_{\mathscr{H}}-\left\langle\exp(it\not{D}_\omega)\xi,\zeta\right\rangle_{\mathscr{H}}\right|&\leqslant\left|\left\langle\exp(it\not{D}_\sigma)(\eta-\xi),\zeta'\right\rangle_{\mathscr{H}}\right|\\&\quad+\left|\left\langle\exp(it\not{D}_\sigma)\xi-\exp(it\not{D}_\omega)\xi,\zeta\right\rangle_{\mathscr{H}}\right|\\&\quad+\left|\left\langle\exp(it\not{D}_\sigma)\xi,\zeta'-\zeta\right\rangle_{\mathscr{H}}\right|\\&\leqslant\left\|\eta-\xi\right\|_{\mathscr{H}}\left\|\zeta'\right\|_{\mathscr{H}}\\&\quad+\left\|\left(\exp(it\not{D}_\sigma)-\exp(it\not{D}_\omega)\right)\xi\right\|_{\mathscr{H}}\|\zeta\|_{\mathscr{H}}\\&\quad+\|\xi\|_{\mathscr{H}}\left\|\zeta-\zeta'\right\|_{\mathscr{H}}\\&\leqslant K\varepsilon+3K(1+2K)t\varepsilon+K\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，若 $t\leqslant 5^{-1}K\varepsilon$，回想一下，在本证明开头的定义中 $K\geqslant 1$，我们得到：

$$\left|\left\langle\exp(it\not{D}_\sigma)\eta,\zeta'\right\rangle_{\mathscr{H}}-\left\langle\exp(it\not{D}_\omega)\xi,\zeta\right\rangle_{\mathscr{H}}\right|\leqslant 5K\varepsilon.$$

因此，我们已证明对于所有的 $\sigma\in\Omega_2$：

$$\Lambda^{\mathsf{spec}}((\mathfrak{A},\mathscr{H},\not{D}_\sigma),(\mathfrak{A},\mathscr{H},\not{D}_\omega))\leqslant\chi(\tau)\leqslant 5K\varepsilon.$$

因此，我们的引理得证。 □

现在我们转而讨论本节结果的应用。

3. 由紧李群作用导出的度量谱三元组

现在，我们给出引理（2.3）的一个非交换应用实例。量子环面是非交换几何的基础实例 [13, 50], , Rieffel [51, 53], 随后作者 [30, 31,40, 38, 41]详细探讨了它们的度量性质。[51], Rieffel 在任意一个具有紧李群遍历作用的含幺 C*- 代数上构造了一个度量谱三元组。该构造依赖于作用李群的李代数上的一个内积，我们在此证明，Rieffel 的狄拉克算子的谱确实关于该内积连续。

本节中，我们固定一个含幺 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 以及紧李群G在 $\mathfrak{A}$上的一个强连续作用，使得

$$\{a \in \mathfrak{A} : \forall g \in \mathfrak{A} \quad \alpha^g(a) = a\} = \mathbb{C}1_{\mathfrak{A}}.$$

我们还固定一个忠实的态 η of $\mathfrak{A}$。

设 $\mathfrak{G}$ 为G的李代数。根据 [9], , 存在一个稠密 *-子代数 $\mathfrak{A}_\infty$ 属于 $\mathfrak{A}$, 使得对于所有 $a \in \mathfrak{A}_\infty$ 以及所有$X \in \mathfrak{G}$, 下列极限均存在:

$$da(X) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\alpha^{\exp(tX)}a - a\right).$$

映射 $X \in \mathfrak{G} \mapsto da(X)$ 是线性的，因此 $da \in \mathfrak{A}_\infty \otimes \mathfrak{G}'$，其中 $\mathfrak{G}'$是 $\mathfrak{G}$的对偶。

现在令 h为 $\mathfrak{G}'$上的任意内积，并令C_h为由h在 $\mathfrak{G}'$上定义的克利福德代数。为此，我们希望有一种系统的方法来选择C_h的表示，而不受h的选择影响；这是可行的，因为C_h的同构类仅取决于 $\dim \mathfrak{G}$。

若 $\dim \mathfrak{G}$ 为偶数，则C_h同构于由 $2^{\dim \mathfrak{G}/2} \times 2^{\dim \mathfrak{G}/2}$矩阵组成的全矩阵代数；令 π 为其在酉共轭意义下唯一的不可约表示，并固定一个非零自然数p。

若 $\dim \mathfrak{G}$ 为奇数，则 C_h是$M \oplus M'$的直和，由两个大小为 $2^{(\dim \mathfrak{G}-1)/2} \times 2^{(\dim \mathfrak{G}-1)/2}$ 的方阵代数组成；令 π_1 和 π_2 分别为M和M'在酉共轭意义下唯一的不可约表示，并固定一些非零自然数p和q。

现在令c_h为C_h在某个厄米空间S_h上的有限维 *-表示（在酉等价意义下），它由表示 π 的 p 个副本（若 $\dim \mathfrak{G}$ 为偶数），或表示 π_1 的 p 个副本与表示 π_2的 q 个副本直和而成。注意，按构造c_h是忠实的。

接着，我们在 $\mathfrak{A}_\infty \otimes S_h$ 上构造算子D_h，其定义如下列复合映射:

$$A_\infty \otimes S_h \xrightarrow{d \otimes \mathrm{id}_S} A_\infty \otimes \mathfrak{G}' \otimes S_h \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathfrak{A}_\infty} \otimes j \otimes \mathrm{id}_{S_h}} A_\infty \otimes C_h \otimes S_h \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathfrak{A}_\infty} \otimes m_h} A_\infty \otimes S_h,$$

其中，$\mathrm{id}_{\mathfrak{A}_\infty}$和 id_{S_h}是恒等映射，$j\colon \mathfrak{G}' \to C_h$是典范嵌入，而$m_h\colon e \otimes s \in C_h \otimes S_h \mapsto c_h(e)s \in S_h$。

现在令W_h为$A \otimes S_h$的希尔伯特空间完备化，其内积是满足以下条件的唯一内积：对任意 a、$b \in \mathfrak{A}_\infty$ 以及s、$t \in S_h$:

$$\langle a \otimes s, b \otimes t \rangle = \langle s, t \rangle_{S_h} \eta(b^* a).$$

注意，由于 η 是忠实的，$A \otimes S_h$ 嵌入W_h。因此，D_h现在是从$A_\infty \otimes S_h$到W_h的算子，并且实际上是本质自伴的。其闭包是自伴的，以下记作 $/D_h$。

如 [51], 所示，对于S_h的任意标准正交基e_1,.....、e_d ，其对偶基e^1,.....、e^d 使用希尔伯特内积$h</style}$，我们可以得到 $/D_h$的一个简单表达式:

$$\not{D}_h = \sum_{j=1}^{d} d_{e_j} \otimes c_h(e^j).$$

由于我们已系统地选取了克利福德代数的表示，实际上可以在W_h与$W\not{g}$之间构造一个酉算子，从而本质上能够在A_∞上的同一（非交换）旋量丛上进行研究。我们希望再次以系统的方式构造这些酉等价。

为此，我们固定一个内积g 于 $\mathfrak{G}'$，并为g固定 $\mathfrak{G}'$的一组标准正交基$e_1(g),...e_d(g)$。

现在令h 为 $\mathfrak{G}'$上的任意内积。我们记由$e_1(g)$、...、$e_d(g)$通过标准格拉姆-施密特算法得到的h的标准正交基为$e_1(h)$、...、$e_d(h)$。由函子性，存在唯一的 *-同构 β_g^h：$C_h \to Cg$，使得$\beta_g^h(e_j(h)) = e_j(g)$，对所有$j \in \{1,...,d\}$均成立。

按照我们的构造，$c_g \circ \beta_g^h$对C_h的表示与c_h酉等价（它们在不可约表示中的分解相同），因此存在一个酉算子V_{hg}：$S_h \to Sg$，使得：

$$(V_g^h)^*(c_g \circ \beta_g^h)V_g^h = c_h.$$

现在令U_{hg}为算子 $\mathrm{id}_{\mathfrak{A}} \otimes V_{hg}$从 $\mathfrak{A} \otimes S_h$到 $\mathfrak{A} \otimes Sg$按连续性唯一延拓得到的算子。当然，U_g^h是酉算子。我们定义

$$\not{D}_g^h := (U_g^h)^* \not{D}_h (U_g^h).$$

注意，根据构造，$/D^g{}_g = /Dg$。最后，我们注意到局部表达式：

$$\not{D}_g^h = \sum_{j=1}^{d} d_{e_j(h)} \otimes c_g(e_j(g)).$$

在下文中，我们将 c 记作c_g。

需要指出的是，$/D_g^h$ 的局部表达式不像 $/D_h$ 的表达式那样在基变换下保持不变；后者可以针对任意标准正交基得到，而 $/D_g^h$ 的表达式确实取决于我们所选的基。

当然，$(\mathfrak{A}, Wg, /D_g^h)$ 是一个与 $(\mathfrak{A}, W_h, /D_h)$ 酉等价的度量谱三元组，特别地，

$$\Lambda^{\mathsf{spec}}((\mathfrak{A}, W_g, \not{D}_g^h), (\mathfrak{A}, W_h, \not{D}_h)) = 0.$$

现在我们的目标是证明，就谱近邻距离而言，$h \mapsto (\mathfrak{A}, Wg, /D_g^h)$ 的连续性。

我们注意到几个简单但有用的不等式，稍后将在本节中用到。首先，注意

$$\partial_{e_j(h)} \otimes c(e_j(g)) = \frac{1}{2}\left((1 \otimes c(e_j(g)))\not{D}_g^h + \not{D}_g^h(1 \otimes c(e_j(g)))\right),$$

由于 $c(e_j(g))c(e_k(g)) + c(e_k(g))c(e_j(g))$ 对于j、k而言是克罗内克符号的两倍。因此，对于 ξ，我们注意到

$$\left\|\partial_{e_j(g)}\xi\right\| \leqslant \left\|\not{D}_g^h\xi\right\|$$

因为 $\left|\left|\left|c(e_j(g))\right|\right|\right| = 1$。此外，由于线性性，且 $c_h(e_j(g))$ 与 a 在 Wg 上的作用可交换：

$$\left|\left|\left|[\partial_{e_j(h)}, a]\right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|[\not{D}_g^h, a]\right|\right|\right|.$$

Let

$$G_{h,j} := \begin{pmatrix} h(e_1(g), e_1(g)) & \cdots\cdots & h(e_j(g), e_1(g)) \\ \vdots & & \vdots \\ h(e_1(g), e_j(g)) & \cdots\cdots & h(e_j(g), e_j(g)) \end{pmatrix}$$

and

$$D_{h,j} := \begin{pmatrix} h(e_1(g), e_1(g)) & \cdots\cdots & h(e_j(g), e_1(g)) \\ \vdots & & \vdots \\ h(e_1(g), e_{j-1}(g)) & \cdots\cdots & h(e_j(g), e_{j-1}(g)) \\ 1 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

也就是说，$G_{h,j}$ 是内积 h 关于族 $e_1(g),...,e_j(g)$ 的格拉姆矩阵。现在，将 $D^{m,n}_{h,j}$ 记作 m,n 子式矩阵，它取自 $D_{h,j}$，即从$D_{h,j}$中删去第 m 行和第 n 列后得到的矩阵。

由于$e_1(h)$，...，$e_d(h)$是由$e_1(g)$，...，$e_d(g)$通过施密特正交化过程得到的，因此对所有$j \in \{1,...,d\}$，我们得到：

$$e_j(h) := \frac{1}{\sqrt{\det G_{h,j} G_{h,j-1}}} \sum_{k=1}^{j} \det(D^{j,k}_{h,j})(-1)^{j+k} e_k(g).$$

因此，由于函数$h \mapsto D_{h,j}$和$h \mapsto G_{h,j}$对所有$j \in \{1,...,d\}$都是连续的，它们的各种行列式和余子式也连续，因此$h \mapsto (e_1(h)$，...，$e_d(h))$也是连续的。我们记作

$$f_{j,k} := h \mapsto \frac{1}{\sqrt{\det(G_{h,j} G_{h,j-1})}} \det(D^{j,k}_{h,j})(-1)^{j+k}$$

对所有$j \in \{1,...,d\}$和$k \in \{1,..., j\}$，从而

$$e_j(h) = \sum_{k=1}^{j} f_{j,k}(h) e_k(g),$$

并且$f_{j,k}$连续；此外，$f_{j,k}(g) = 0$若$k < j$，且$f_{j,j}(g) = 1$。

由线性性可得

$$\partial_{e_j(h)} = \sum_{k=1}^{j-1} f_{j,k}(h) \partial_{e_k(g)}.$$

因此，

$$\begin{aligned} \left\| (\partial_{e_j(h)} - \partial_{e_j(g)})\xi \right\| &\leqslant \sum_{k=1}^{j-1} |f_{j,k}(h)| \left\| \partial_{e_j(g)}\xi \right\|_+ |f_{j,j}(h) - 1| \left\| \partial_{e_j(g)}\xi \right\| \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{j-1} j|f_{j,k}(h)| + |f_{j,j}(h) - 1| \right) \left\| \not{D}_g \xi \right\|. \end{aligned}$$

令 $f(h) := \sum^{j-1}{}_{k=1} j\,|f_{j,k}(h)| + |f_{j,j}(h) - 1$ 对所有 h 都成立，从而

$$\left\| (\partial_{e_j(h)} - \partial_{e_j(g)})\xi \right\| \leqslant f(h) \left\| \not{D}_g \xi \right\|$$

且 $\lim_{h \to g} f(h) = 0$.

因此，

$$\left\| (\not{D}_h - \not{D}_g)\xi \right\| \leqslant d f(h) \left\| \not{D}_g \xi \right\|.$$

因此，我们证明了引理（2.3）的条件（2）成立。

同理，对于所有$a \in \mathfrak{A}_\infty$:

$$\begin{aligned}\left|\!\left|\!\left|[\not{D}_g^h - \not{D}_g, a]\right|\!\right|\!\right| &\leqslant \sum_{j=1}^{d} \left|\!\left|\!\left|[\partial_{e_j(h)} - \partial_{e_j(g)}, a]\right|\!\right|\!\right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{j-1} |f_{j,k}(h)| \left|\!\left|\!\left|[\partial_{e_k(g)}, a]\right|\!\right|\!\right| + |f_{j,j}(h) - 1| \left|\!\left|\!\left|[\partial_{e_j(g)}, a]\right|\!\right|\!\right| \right) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{d} f(h) \left|\!\left|\!\left|[\not{D}_g, a]\right|\!\right|\!\right|.\end{aligned}$$

因此，我们可以应用引理（2.3）来得到本节的主要结果。

定理 3.1。 赋予度量谱三元组空间以谱近邻距离。若$\mathfrak{A}$ 是一个含幺 C^*-代数，且 G 是一个紧李群，并且 $\mathscr{I}$ 是李代数 $\mathfrak{G}$ *of*G上的所有内积所构成的空间，则

$$g \in \mathscr{I} \mapsto \left(\mathfrak{A}, \mathscr{H}_g, \not{D}_g\right)$$

是连续的。特别地，若 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 g，则

$$\mathrm{Sp}\left(\not{D}_g\right) = \left\{ \lim_{n\to\infty} \lambda_n : (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_1(\mathbb{N}) \ and \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_n \in \mathrm{Sp}\left(\not{D}_{g_n}\right) \right\}$$

此外，对于所有 $\Lambda \in (0,\infty) \setminus$ 谱$\left(\not{D}_g\right)$，以及所有 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得当 $n \geqslant N$ 时，

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\left(\not{D}_{g_n}\right) \cap [-\Lambda,\Lambda]} \mathrm{multiplicity}\left(\lambda \middle| \not{D}_{g_n}\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\left(\not{D}_g\right) \cap [-\Lambda,\Lambda]} \mathrm{multiplicity}\left(\lambda \middle| \not{D}_g\right) < \infty$$

and

$$\mathrm{Haus}_{[\mathbb{C}]}\left(\mathrm{Sp}\left(\not{D}_{h_n}\right) \cap [-\Lambda,\Lambda], \mathrm{Sp}\left(\not{D}_g \cap [-\Lambda,\Lambda]\right)\right) < \varepsilon.$$

注记 3.2。 在 $\mathscr{I}$ 上的拓扑只是通过将 $\mathscr{I}$ 与 $\mathbb{R}^{\dim \mathfrak{G}}$ 上的正定矩阵空间相对应而诱导出的拓扑，并赋予其通常的算子范数拓扑（由于 $\mathfrak{G}$ 是有限维的，也可以使用任意范数）。

4. 黎曼度量上的C^1 拓扑下谱近邻距离的连续性

现在，我们研究在固定黎曼流形上，几乎交换模型的狄拉克算子谱对黎曼度量以及有限维因子上的狄拉克算子的依赖性。Connes 开发的谱标准模型相关研究中使用了这些模型。因此，我们的工作得出了关于此类模型的稳定性结果：具有物理意义的量取决于相关狄拉克算子的谱性质。

我们从交换因子开始这项研究。因此，我们证明我们的引理(2.3)以另一种方法得出了度量在C^1-拓扑中变化时狄拉克算子谱的连续性：我们没有采用例如 [8], 中所用的全纯族和 Rellich 定理，而是使用引理(2.3)，该引理反过来运用了算子半群。

在适当的时候，我们将借鉴 [8] 中的计算。不过，考虑到处理新的近交换情形需要进行一些明确计算，同时也希望清楚展示我们的方法在何处有所不同，我们将花些功夫写出证明结果所需的明确公式。读者可以将上一节视为交换情形下的一个玩具模型（注意

上一节允许使用非交换 C*-代数，甚至包括简单的非交换 C*-代数）：在这个受限情形下，我们处理的是 $\mathfrak{A} = C(G)$，其中 G是任意紧李群；而在此处，我们将处理更一般的对象 $C(M)$，其中 M是一个紧致连通自旋流形。在前一种情形中，切丛是“平凡的”（所用的模是 C*-代数上的自由模），而在这里，我们的丛将是非平凡的；前一种情形中的度量沿纤维为常数（由李代数上的内积给定），而这里则允许度量在不同纤维之间（光滑地）变化，因此需要在度量空间上采用一种拓扑，它不仅考虑度量本身（如前一种情形），还考虑其导数；也就是说，我们将采用 C^1 拓扑。此外，上一节中体积形式的对应物是任意选取的某个忠实态，而本节中，我们将使用黎曼度量诱导的实际体积形式，它也会随度量而变化。我们还将构造旋量希尔伯特空间之间的一个酉算子，这次采用 [8], 中的方法。对于非平凡丛的情形，这种方法似乎比上一节的 Gram-Schmidt方法更容易使用，不过归根结底，在所有这些情形下，我们的主要要求都是：旋量之间的酉算子的选取应当随度量光滑变化。

今后固定一个维数为$d > 0$ 的连通、紧、自旋闭流形M（这里维数为 0 的情形是平凡的）。设g 是M上的黎曼度量。我们将与g 相关联的M 上的旋量丛记为 $\Sigma^g M$。现在，记$\Gamma_\infty(\Sigma^g M)$为光滑（即$C^\infty$）截面的$C^\infty(M)$-模。我们对这些构造所采用的基础参考是 [20]。

令$\mathbb{C}\ell\left(g\right)$ 为M 上的向量丛，其在$m \in M$ 处的纤维是克利福德代数$\mathbb{C}\ell\left(T_m M\right.$，即带有内积$g_m$的纤维$T_m M$的克利福德代数。对于任意 $\gamma \in \mathbb{C}\ell\left(g\right)$和旋量场$s \in \Sigma^g M$，我们将 γ 对s的逐点作用定义为

$$c(\gamma)s : m \in M \mapsto \gamma_m s(m) \in \Sigma^g_m M;$$

当然，$c(\gamma)$ 将 $\Gamma_\infty(\Sigma^g M)$ 映射到自身。我们还定义映射 $m : \mathbb{C}\ell\left(g\right) \otimes \Gamma_\infty(\Sigma^g M) \to \Gamma_\infty(\Sigma^g M)$，其定义为：对所有 $\gamma \in \mathbb{C}\ell\left(g\right)$ 和 $s \in \Gamma_\infty(\Sigma^g M)$

$$m(\gamma, s) := c(\gamma)s.$$

我们将 Atiyah-Singer狄拉克算子 D_g 定义为以下复合：

$$D_g : \Gamma_\infty(\Sigma^g M) \xrightarrow{\nabla^g} \Gamma_\infty(T^* M) \otimes \Gamma_\infty(\Sigma^g M) \xrightarrow{j \otimes \mathrm{id}} \mathbb{C}\ell\left(g\right) \otimes \Gamma_\infty(\Sigma_g M) \xrightarrow{m} \Gamma_\infty(\Sigma_g M), \tag{4.1}$$

其中 ∇^g 是自旋联络（即 Levi-Civita 联络在度量 g 下向Σ^gM 的提升），而 j 是音乐同构与切丛 T M 到 $\mathbb{C}\ell\left(g\right)$的典范嵌入的复合；该音乐同构将 $\omega \in$ T *M 映射为 X $\in$ T M，使得 g (X ,·) $= \omega$。我们将使用 Dg 的闭包，记作 D_g；它是希尔伯特空间 $\Gamma_{L^2}(\Sigma^g$M) 上定义在稠密定义域 $\Gamma_{H_1}(\Sigma^g$M) 上的自伴算子。该希尔伯特空间由 $\Gamma_\infty(\Sigma^g$M) 关于其自然内积（如下所述）完备化得到。当然，由于 D_g 是自伴的，$\Gamma_{H_1}(\Sigma^g$M) 关于 D_g 的图范数构成巴拿赫空间。

狄拉克算子对其底层黎曼度量的依赖性是许多论文的研究主题，其中包括 [8, 48, 45]。我们特别关注以下结果[48, 定理 2.1], ，该结果本身直接借鉴自 [8, 45]。在这项工作中，M 上的黎曼度量空间$\mathscr{R}(M)$赋予了所谓的 C^1 拓扑。通俗地说，在该拓扑下，对于M的每个坐标图，度量的分量按照C^1 范数变化。我们将在本节稍后详细介绍这种拓扑。

定理 4.1 ([48])。 固定一个黎曼度量 $g \in \mathscr{R}(M)$。对于每个 $h \in \mathscr{R}(M)$，存在一个酉算子 $\beta_g^h \colon \Gamma_{L^2}(\Sigma^h M) \to \Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)$ 使得，若我们定义：

$$\not{D}_g^h := \beta_g^h \not{D}_h (\beta_g^h)^*$$

那么 $\mathrm{dom}\left(\not{D}_g^h\right) = \mathrm{dom}\left(\not{D}_g\right)$，且映射

$$h \in \mathscr{R}(M) \longmapsto \not{D}_g^h$$

是连续的（事实上是 C^1 连续的），从 $\mathscr{R}(M)$ 到 $\mathfrak{B}(\Gamma_{H^1}(\Sigma^g M), \Gamma_{L^2}(\Sigma^g M))$。

任意狄拉克算子的图范数都等价于索伯列夫范数 [45],，因此我们今后将使用狄拉克算子 $\not{D}g$ 的图范数$\mathsf{DN}g$ 来度量 $\Gamma_{H_1}(\Sigma^g M)$，如上所述。换言之， [48, 定理 2.1] 证明了函数

$$h \in \mathscr{R}(M) \mapsto \sup_{\substack{\xi \in \mathrm{dom}(\not{D}_g) \\ \mathsf{DN}_g(\xi) \leqslant 1}} \left\| (\not{D}_g^h - \not{D}_g)\xi \right\|_{\mathscr{H}_g}$$

是连续的。

显然，这一结果为应用引理（2.3）奠定了坚实的基础。为了说明这一结果并不依赖于 [8] 中关于狄拉克算子谱的一些结果，我们现在将详细解释该定理的证明。此外，这些明确的计算也使我们能够在之后将结果推广到几乎交换谱三元组。

考察狄拉克算子的局部表达式将会很有帮助，因为这样可以清楚地显示它对度量的依赖性。为此，我们固定 M 的一个明确的有限图册 $\mathscr{A}$，它满足如下性质：对于 $\mathscr{A}$ 中的任意坐标图 (U, φ)，M 中都存在一个坐标图 (V, ψ)，使得 $\mathrm{cl}(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$ 且 $\varphi = \psi_{|U}$——这样的图册存在，因为 M 是紧的。在 U 上为 M 的某个丛选取局部标架时，我们总是指某个 V 上标架在 U 上的限制。作为记号，我们将 $\mathscr{A}$ 中的坐标图写作 $(\mathrm{U}, \mathrm{x}^1, \ldots, \mathrm{x}^d)$，其中 $\mathrm{x}^1, \ldots, \mathrm{x}^d \colon \mathrm{U} \to \mathrm{R}$；并将 T M 的相应规范坐标标架 $|_U$ 记作 $\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^d}\right)$。T M 的余切子丛 T * U 的对偶基（或余标架）记作 $\mathrm{d}\mathrm{x}^1, \ldots, \mathrm{d}\mathrm{x}^d$。

我们做一个简单的观察：显然，局部坐标图自然给出TM的一个典范平凡化；根据旋量丛的构造，我们可以确定，对于任意黎曼度量g，旋量丛 $\Sigma^g M$在U上也有一个典范平凡化（因为旋量丛是由g-正交标架构成的TM标架丛的一个提升构造而成，而该标架丛本身是TM标架丛的子丛）。因此，今后我们总是假定已经固定了TM和 $\Sigma^g M$的相容平凡化，使其与 $\mathscr{A}$中的坐标图相容，而不再另行说明。

我们回顾一下 [20] 中M上自旋联络的构造。我们在局部进行讨论。设（U，$x^1, \ldots, x^d$）是图册 $\mathscr{A}$中M的一个坐标图。记

$$g_{|U} = \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant d} g_{jk}\, \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k,$$

也就是说，我们将度量g_U 视为TM_U每个纤维上的正定矩阵截面。

设$e_1(g), \ldots, e_d(g)$为度量g下TM_U的一个标准正交标架（按照惯例，该标架延拓到M的某个开子集V上，且 $\mathrm{cl}(U) \subseteq V$）。可以对局部标架 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^d}$ 应用施密特正交化过程来构造这样的标架，

不过，任何局部正交标架都可以。我们记 $e_j(g) = \sum_k e^k{}_j(g)\frac{\partial}{\partial x^k}$，其中 $e^k{}_j$ 是 U 上的光滑函数，对所有 $j,k \in \{1,\dots,d\}$ 均成立。对于 $\mathscr{A}$ 中的每个坐标图，本节全程固定采用这样一个标准正交标架。

令 ∇^g 为 M 上关于 g 的 Levi-Civita 联络。局部地，我们有

$$\nabla^g_X(Y) = \sum_{k=1}^d \left(\sum_{j,r=1}^d X^j \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} + \Gamma(g)^k_{jr} X^j Y^r \right) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

对于所有 $X = \sum_{j=1}^d X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in TM|_U$（即 $X_j = \mathrm{d}x_j(X)$）以及 $Y = \sum_{j=1}^d Y_j \frac{\partial}{\partial x^j} \in TM|_U$，其中标量系数 Γ's 为 Christoffel 符号，定义如下：

$$\Gamma(g)^p_{jq} := \frac{1}{2} \sum_{l=1}^d (g^{-1})_{pl} \left(\frac{\partial g_{lq}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_q} - \frac{\partial g_{jp}}{\partial x_l} \right), \tag{4.2}$$

其中 g^{-1} 在此表示 $m \in U \mapsto (g_{jk})^{-1}_{1 \leqslant j,k \leqslant d}$。

对于所有 $j,k,l \in \{1,\dots,d\}$，我们定义：

$$\omega_{jkl}(g) := g(\nabla^g_{e_k}(e_j), e_l).$$

在局部坐标中直接计算可得：

$$\nabla^g_{e_k} e_j = \sum_{m=1}^d \sum_{p=1}^d e^m_k \left(\frac{\partial e^p_j}{\partial x_m} + e^p_j \Gamma(g)^p_{mp} \right) \frac{\partial}{\partial x_q}.$$

因此，根据 ω_{jkl} 的定义，直接计算可得：

$$\omega_{jkl}(g) = \sum_{q,r,m,p=1}^d g_{qr} e^r_l \left(e^m_k \frac{\partial e^q_j}{\partial x_m} + e^m_k e^p_j \Gamma(g)^q_{mp} \right). \tag{4.3}$$

旋量丛 $\Sigma^g M$ 上的自旋联络局部定义如下：对于所有支撑在 U 中的 $\psi \in \Gamma_\infty(\Sigma^g M)$，以及所有 $j \in \{1,\dots,d\}$，

$$\not{\nabla}_{e_j}(\psi) := \sum_{j=1}^d e^p_j \frac{\partial \psi}{\partial x^p} + \frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^d \omega_{jkl}(g) c(e_k) c(e_j) \psi,$$

并且，当然，当支撑在 U 上的 $X \in TM$ 写作 $X = \sum_{j=1}^d X_j e_j$ 时，有 $\not{\nabla}_X(\psi) = \sum_{j=1}^d X_j \not{\nabla}_{e_j}(\psi)$（注意，此处我们是在标架 $(e_1,\dots,e_d)$ 上表示 X，而非坐标标架 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^d}\right)$）。

关于以下断言，请参阅 [20]：如此定义的 $\not{\nabla}^g$ 确实是 $\Gamma_\infty(\Sigma^g M)$ 上的联络。

现在，我们可以将 Atiyah-Singer 狄拉克算子 D_g 在支撑于 U 的 $M\Sigma^g$ 的光滑截面上局部表示为：

$$\begin{aligned} D_g &:= \sum_{j=1}^d c(e_j(g)) \not{\nabla}^g_{e_j(g)} \\ &= \sum_{j=1}^d c(e_j(g)) \left[\sum_{p=1}^d e^p_j(g) \frac{\partial}{\partial x^p} + \frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^d \omega_{jkl}(g) c(e_k(g) e_l(g)) \right] \end{aligned} \tag{4.4}$$

这可由表达式（4.1）中给出的复合得到。就我们的目的而言，我们希望将 D_g 视为作用于希尔伯特空间上的无界算子；该空间显然是 $\Gamma_\infty(\Sigma^g M$ 关于下文所述内积的完备化。

通过构造，在旋量丛 $\Sigma^g M$的每个纤维 $\Sigma^g{}_m M$上都有一个内积 $\cdot_m$。现在，令

$$\mathrm{vol}_g = \sqrt{\det(g_{kl})_{1\leqslant k,l\leqslant d}}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^d$$

为由g 在M上诱导的体积d-形式。于是，我们在$\Gamma_\infty(\Sigma^g M)$上定义内积

$$\left\langle s, s'\right\rangle_{L^2(g)} := \int_M s_m\cdot_m s'_m\,\mathrm{dvol}_g(m).$$

$\Gamma_\infty(\Sigma^g M)$在$\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(g)}$下的完备化是一个希尔伯特空间，记为 $\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)$（注意，此内积在 $\Gamma_\infty(\Sigma^g M)$上确实是正定的）。算子$D_g$ 在此空间上本质自伴，其自伴闭包记为$/\!\!D_g$。其定义域记为 $\Gamma_{H^1}(\Sigma^g M)$；赋予其$/\!\!D_g$的图范数后，它成为一个巴拿赫空间。图范数定义为 $\mathsf{DN}_g(\xi) := \|\xi\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)} + \|/\!\!D_g\xi\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)}$，对所有 $\xi\in\Gamma_{H_1}(\Sigma^g M)$均成立。

对于接下来的计算，我们注意到，通过以下观察，可以在局部对$\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)$上的希尔伯特范数进行界定：

$$\|\psi\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)} \leqslant \sum_{(U,x^1,\dots,x^d)\in\mathscr{A}} \|\psi_{|U}\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)_{|U}}$$

其中我们利用了 $\mathscr{A}$ 是有限的这一事实。因此，在本节剩余部分，我们只需找到该范数在每个坐标图上的局部界限，即可得出这些局部界限之和是希尔伯特范数（或索伯列夫范数）的全局界限。

现在，令 $\psi\in\Gamma_\infty((\Sigma^g M)_{|U})$。我们注意到：

$$\|/\!\!D_g\psi\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)} + \|\psi\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)} \leqslant \tag{4.5}$$
$$\sum_{j=1}^d\left(\left\|e_j^p(g)\right\|\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x^p}\right\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)} + \frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^d\|\omega_{jkl}(g)\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)}\|\psi\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)}\right).$$

现在，如果$\psi\in\Gamma_{H_1}$，根据定义，存在$(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于$\mathrm{dom}\left(D_g\right)$，使得：

$$\lim_{n\to\infty}\|/\!\!D_g\psi - D_g\psi_n\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)} + \|\psi-\psi_n\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)} = 0.$$

因此，表达式（4.5）对所有 $\psi\in\Gamma_{H_1}$（$\Sigma^g M_{|U}$）均成立。

现在，若令

$$\|\psi\|_{H_1,U} := \max_{j=1,\dots,d}\left\|\frac{\partial\psi}{\partial^j_x}\right\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)} + \|\psi\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)}$$

那么$\|\psi\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M_{|U}} + \|/\!\!D_g\psi\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M_{|U}} \leqslant C(g,U)\|\psi\|_{H_1,U}$，对于

$$C(g,U) := \sum_{j=1}^d\left\|e_j^p\right\|_{C(\mathrm{cl}(U))} + \frac{1}{4}\sum_{jkl=1}^d\|\omega_{jkl}(g)\|_{C(\mathrm{cl}(U))}. \tag{4.6}$$

因此，如果 $\psi\in\Gamma_{H_1}(\Sigma^g M)$, 那么

$$\mathsf{DN}_g(\psi) \leqslant \sum_{(U,x^1,\dots,x^d)\in\mathscr{A}}\mathsf{DN}_g(\psi_{|U}) \leqslant K(g)\|\psi\|_{H_1}$$

其中 $K(g) = \max_{(U,x^1,\dots,x^d)\in\mathscr{A}} C(g,U)$ 并且

$$\|\psi\|_{H_1} := \sum_{(U,x^1,\dots,x^d)\in\mathscr{A}}\|\psi_{|U}\|_{H_1,U}. \tag{4.7}$$

另一方面，回到在局部上（U, x^1,..., x^d）$\in\mathscr{A}$的讨论，根据算子$c_g(e_1)$,...,$c_g(e_d)$的反交换性以及$\omega_{jkl}(g)$的反对称性

对于固定的j，这本身直接源自 Levi-Civita 度量的度量相容性、自旋联络的定义，以及标架$e_1(g),...,e_d(g)$的正交性，由此我们得出：

$$e_j(g) = \sum_{p=1}^{d} e_j^p(g) \frac{\partial \psi}{\partial x^p} = \frac{1}{2}\left(\not{D}_g c_g(e_j(g)) + c_g(e_j(g))\not{D}_g\right)\psi.$$

当然，对于所有 $p \in \{1,...,d\}$，

$$\frac{\partial}{\partial x^p} = \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} g_{pk} e_j^k(g) e_j(g),$$

因为 $(e_1(g),...,e_d(g))$ 是 g 的标准正交标架。现在，函数 g^{pk} 和 e_p^k，对于 $p,k \in \{1,...,d\}$，在紧集 $\mathrm{cl}(U)$ 上均连续。因此存在一个上界 M_U，使得：

$$\max_{j=1,...,d} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x^p} \right\| \leqslant M_U \mathsf{DN}_g(\psi).$$

因此 $\|\psi\|_{H_1} \leqslant (M+1)\mathsf{DN}g(\psi)$，其中 $M := \sum_{(U,x^1,...,x^d)\in\mathscr{A}} M_U$。总之，由于 $Q(g) = (M+1)^{-1}$，我们得到范数等价：

$$Q(g)\|\cdot\|_{H_1} \leqslant \mathsf{DN}_g \leqslant C(g)\|\cdot\|_{H_1}. \tag{4.8}$$

现在，我们的目的是研究狄拉克算子 $\not{D}g$ 对度量g的依赖关系。为此，我们在空间 $\mathscr{R}(M)$ 上进行研究，该空间由流形 M 上的所有黎曼度量组成。我们赋予 $\mathscr{R}(M)$ 所谓的 C^1 拓扑，它通过将 (2,0)型张量空间上的一个范数限制到子空间 $\mathscr{R}(M)$ 上来度量。为便于阐述，这里描述一下该度量。

固定 $g,h \in \mathscr{R}(M)$。令 $(U,(x_1,..., x_d))$ 为 $\mathscr{A}$ 中 M 的一个局部坐标图，并令 $\varepsilon > 0$。在这些坐标下，我们记

$$g_{|U} = \sum_{j,k=1}^{d} g_{jk} dx^j \otimes dx^k \text{ and } h_{|U} = h_{jk} dx^j \otimes dx^k,$$

其中 $g_{jk}: U \to \mathbb{R}$，$h^{jk}: U \to \mathbb{R}$ 是 C^∞ 函数。接着定义：

$$\delta_{U,x_1,...,x_d}(g,h) := \max_{j,k\in\{1,...,d\}} \left\| h_{jk} - g_{jk} \right\|_{C_b^1(U)}$$

and

$$\rho_{U,x_1,...,x_d}(g,h) := \max_{j,k\in\{1,...,d\}} \left\| h_{jk} - g_{jk} \right\|_{C_b(U)}$$

其中

$$\left\| f \right\|_{C_b(U)} := \sup_{x\in U} |f(x)|,$$

and

$$\left\| f \right\|_{C_b^1(U)} := \left\| f \right\|_{C_0(U)} + \sup_{j\in\{1,...,d\}} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{C_b(U)},$$

对于任意 C^1 函数 $f: U \to \mathbb{R}$。注意，我们对 f 和 $\mathscr{A}$ 的假设确保这些范数确实有限。

$^1(M)$ 上的 C^1 拓扑是由以下度量诱导的拓扑：

$$\delta_{\mathscr{A}} : h,g \in \mathscr{R}(M) \mapsto \max_{(U,x_1,...,x_d)\in\mathscr{A}} \delta_{U,x_1,...,x_d}(g,h).$$

$\mathscr{R}M$ 上的 C^0 拓扑是由以下度量诱导的拓扑：

$$\rho_{\mathscr{A}} : h, g \in \mathscr{R}(M) \mapsto \max_{(U,x_1,\ldots,x_d)\in\mathscr{A}} \rho_{U,x_1,\ldots,x_d}(g,h).$$

当然， $\rho_{\mathscr{A}} \leqslant \delta_{\mathscr{A}}$。

现在，虽然度量 $\delta_{\mathscr{A}}$ 和 $\rho_{\mathscr{A}}$ 取决于我们对M的有限图册 $\mathscr{A}$ 的选择，但所诱导的拓扑并不依赖于此——若M的另一个有限图册为 $\mathscr{B}$，那么 (2,0)型张量之间的换基公式立即表明， $\delta_{\mathscr{A}}$ 和 $\delta_{\mathscr{B}}$ 等价，同样， $\rho_{\mathscr{A}}$ 和 $\rho_{\mathscr{B}}$ 也等价。话虽如此，我们对 $\mathscr{A}$ 的假设确保了任意两个黎曼度量之间的 $\delta_{\mathscr{A}}$ 是有限的。

现在，处理对应于不同黎曼度量的狄拉克算子时会遇到一个困难：它们作用于不同的旋量丛。我们遵循 [8] ，以规范的方式描述如何在对应于两个不同黎曼度量的旋量丛的体积平方可积截面希尔伯特空间之间构造一个酉算子，使得这些酉算子随度量平滑变化；其适当含义将在下文解释。

首先，固定 $V = \mathbb{R}^d$。设 g和 h 是 V上的两个内积。当然，存在唯一的正线性自同态 H_g^h，作用于V，使得$g(H_g^h\cdot,\cdot) = h(\cdot,\cdot)$。此外，映射 $(g,h) \in \mathscr{I}(V)^2 \mapsto H_g^h$ 是光滑的，其中 $\mathscr{I}(V)$ 是V上内积的集合。

在上一节中，我们使用施密特正交化过程，得到一个从 (V,h) 到 (V, g) 的酉算子 u，使得 g (u·,u·) = h；不过，这个酉算子并不唯一，但在左乘一个 (V, g) 上的酉算子后是唯一的：若 $u^\dagger$是 u 关于 g 的伴随（与将 u 视为从 (V,h) 到 (V, g) 的映射时的伴随 u^* 相对），则 $u^\dagger u = H_g^h$；如果 o 是 (V, g) 上任意一个酉算子，那么 ou 也满足 g (ou·,ou·) = h。在当前情形下，遵循 [8],，我们采用一个更简单的选择，它不依赖于局部标架的选取（后者需要作局部选择，并检查重叠区域中的情况），而是定义 b_g^h: V → V，使 $b_g^h = \sqrt{H_g^h}$。根据函数演算，(g ,h) $\in \mathscr{I}(V)^2 \mapsto b_g^h$ 也是光滑的。

现在，我们回到流形 M并固定 $g \in \mathscr{R}(M)$。函数：

$$b_{g,m}^h : (h,m) \in \mathscr{R}(M) \times M \mapsto b_{g_m}^{h_m}$$

通过复合可知，该函数是联合连续且光滑的。进而，映射 b_g^h定义如下：对所有 $X \in \Gamma_\infty(TM)$（其中 $\Gamma_\infty(TM)$ 是流形 M 上切丛 TM 的光滑截面的 $C^\infty(M)$-模）：

$$b_g^h(X) : m \in M \mapsto b_{g,m}^h(X_m)$$

其取值于 $\Gamma_\infty(TM)$。此外，按构造可知，对所有 $f \in C^\infty(M)$ 以及所有 $X \in \Gamma_\infty(TM)$，都有 $b_g^h(fX) = f b_g^h(X)$；也就是说，b_g^h是 $\Gamma_\infty(TM)$ 的模态同态。我们稍微滥用一下记号：如果 $X \in TM|_U$，就将 $b_g^h(X)$ 定义为上述形式，即仅将其视为定义在 U 上的向量场。

如 [8, 命题 1], 所述，对于任意两个内积 g、h，映射b_g^h可逆，逆映射为 $b^g{}_h$。由此很容易推广得出，对于任意两个 g、$h \in \mathscr{R}(M)$，b_g^h可逆，逆映射为 $b^g{}_h$。

令（U，x_1,...，x_d），并令 $e_1(g)$，...，$e_d(g)$ 为本节第一部分中固定的 g-标准正交标架切丛$|_U$。我们定义

$$e_j(h) \coloneqq b_h^g(e_j^g)$$

对于$j \in \{1,...,d\}$。根据 $b^g{}_h$ 的定义，族（$e_1(h)$，...，$e_d(h)$）是 <style id='h-标准正交标架 切丛U。对于每个$j \in \{1,...,d\}$以及$x \in U$，我们定义

$$a_{jk}(h,m) := g_m(e_j(h)_m, e_k(g)_m) = [g(b_h^g(e_j(g)), e_k(g))](m)$$

以便

$$e_j^h = \sum_{k=1}^{d} a_{jk}(h) e_k(g).$$

由$b^g{}_h$的连续性可知，a^{jk}在 $\mathscr{R}(M) \times \mathrm{cl}(U)$上也连续。

现在，设 Ω 是g 在 $\mathscr{R}(M)$中关于C^1 拓扑的一个闭邻域。注意到Ω因此在C^0拓扑下是紧的。因此， $\Omega \times \mathrm{cl}(U)$是紧的。因此，$a^{jk}$在 $\Omega \times \mathrm{cl}(U)$上的限制是一致连续的。

因此，特别地，若$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$收敛到g，则$(a_{jk}(h_n,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$一致收敛到$a_{jk}(g,\cdot)$。当然，

$$a_{jk}(g,\cdot) = \begin{cases} 1 \text{ if } j = k, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

现在，由 [8, 命题 5], 可知，对于任意$m \in M$，线性映射$b^{h_m}{}_{g_m}$存在一个自然提升，为线性同构 β_g^h，它将$(\Sigma^h M)_m$映到$(\Sigma^g M)_m$，并交织克利福德代数c_{h_m}和c_{g_m}的作用，即 $\beta^{h_m}{}_{g_m} c_{h_m} = c_{g_m} \beta_{h_m}$。此外，映射$m \in M \mapsto \beta^{h_m}{}_{g_m}$是光滑的，这进而使我们能够定义$C^\infty(M)$-模映射：

$$\forall \psi \in \Gamma_\infty(\Sigma^h M) \quad \beta_g^h(\psi) : m \in M \mapsto \beta_{g_m}^{h_m}(\psi_m) \in \Gamma_\infty(\Sigma^g M).$$

再次，在方便时，我们将对作用于 $\Gamma_\infty(\Sigma^g M)|_U$、取值于 $\Gamma_\infty(\Sigma^h M)|_U$ 的映射 β_g^h 使用相同的记号。由连续性将这些映射扩展为从 $\Gamma_{L^2}(\Sigma^h M)$ 到 $\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)$ 的 $C(M)$-模态同态 β_g^h，显然易见。所得映射是线性同构，其逆为 $\beta^g{}_h$。

然而，对于 $g,h \in \mathscr{R}(M)$，映射 β_g^h 并非酉算子，因为还必须考虑体积形式的变化，如 [45] 中所述。因此我们定义：

$$f_g^h := \sqrt{\frac{\det(g)}{\det(h)}}. \tag{4.9}$$

注意，f_{hg} 是光滑函数，并且根据 $\mathrm{R}(M)$ 上的 C^0-拓扑的定义，$h \in \mathscr{R}(M) \mapsto f_{hg} \in C(M)$ 是连续函数——就我们的目的而言，当然，这个映射从 $\mathrm{R}(M)$ 上的 C^1 拓扑到 $C(M)$ 上由通常的上确界范数（即 C*范数）诱导的拓扑是连续的。

因此，对于所有 $\psi \in \Gamma_{L^2}(\Sigma^h M)$，

$$\widehat{\beta_g^h}(\gamma) : m \in M \mapsto f_g^h(m) \beta_{g_m}^{h_m}(\gamma_m),$$

即将乘以f_{hg}的乘法算子与 β_g^h复合。

现在，根据构造，$\widehat{\beta_g^h}$是一个从 $\Gamma_{L^2}(\Sigma^h M)$ 到 $\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)$ 的酉算子，它交织了在这两个希尔伯特空间上由乘法算子给出的 $C(M)$ 作用（也就是说，它$\widehat{\ }$同时也是一个模态同态：$\beta_g^h(f\gamma) = f\beta_g^h(\gamma)$），因为显然，这些希尔伯特空间上 $C(M)$ 的乘法算子表示与乘以 f_{hg} 相交换，而 β_g^h本来就是一个模映射。

此外，根据构造，对所有 $X \in$ 切丛 以及所有 $\psi \in \Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)$，我们还有以下性质，因为用 $C(M)$ 中的函数相乘与 Clifford 乘法相交换：

$$\widehat{\beta_g^h}(c_h(X)\psi) = c_g(b_g^h(X))\widehat{\beta_g^h(\psi)}.$$

现在我们已经可以比较与不同黎曼度量相关联的狄拉克算子了。现在，让我们再次在图册 $\mathscr{A}$ 中选取某个坐标图（U，x_1,...，x_d），固定之前选取的 g-标准正交标架 $e_1(g)$，...，$e_d(g)$，并像之前一样，对所有$j \in \{1,...,d\}$，定义$e_j(h) := \beta^g{}_h(e_j(g))$。我们注意到，可以将限制在 $\Gamma_\infty(\Sigma^h M|U)$ 上的 β_g^h 识别为定义在 U 上的矩阵光滑截面。于是，我们在局部坐标下，并在 $\mathrm{dom}(D_g)$ 上计算（相对于 $\mathrm{dom}(\ /D_g)$，关于这一点我们稍后还会回到）：

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta_g^h}\not{D}_h\widehat{\beta_h^g} &:= \widehat{\beta_g^h}\left(\sum_{j=1}^d c_h(e_j(h))\left(\sum_{p=1}^d e_j^p(h)\frac{\partial}{\partial x_p} + \frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^d \omega_{jkl}(h)c_h(e_k(h)e_l(h))\right)\right)\widehat{\beta_h^g} \\
&= \sum_{j=1}^d \widehat{\beta_g^h}c_h(e_j(h))\widehat{\beta_h^g} \\
&\quad\times\left(\sum_{p=1}^d e_j^p(h)\widehat{\beta_g^h}\frac{\partial}{\partial x_p}\widehat{\beta_h^g} + \frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^d \omega_{jkl}(h)\widehat{\beta_g^h}c_h(e_k(h))\widehat{\beta_h^g}\widehat{\beta_g^h}c_h(e_l(h))\widehat{\beta_h^g}\right) \\
&= \sum_{j=1}^d c_g(e_j(g))\left(\sum_{p=1}^d e_j^p(h)\frac{\partial}{\partial x_p} + \sum_{p=1}^d e_j^p(h)\widehat{\beta_g^h}\frac{\partial\widehat{\beta_h^g}}{\partial x_p}\right. \\
&\qquad\left. + \frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^d \omega_{jkl}(h)c_g(e_k(g))c_g(e_l(g))\right) \\
&= \sum_{j=1}^d c_g(e_j(g))\left(\sum_{p=1}^d e_j^p(h)\left(\frac{\partial}{\partial x_p} + \widehat{\beta_g^h}\left(\frac{\partial\beta_h^g}{\partial x_p}f_h^g + \frac{\partial f_h^g}{\partial x_p}\beta_h^g\right)\right)\right. \\
&\qquad\left. + \frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^d \omega_{jkl}(h)c_g(e_k(g)e_l(g))\right) \\
&= \sum_{j=1}^d c_g(e_j(g))\left(\sum_{p=1}^d e_j^p(h)\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \beta_g^h\frac{\partial\beta_h^g}{\partial x_p} + f_g^h\frac{\partial f_h^g}{\partial x_p}\right)\right. \\
&\qquad\left. + \frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^d \omega_{jkl}(h)c_g(e_k(g)e_l(g))\right)
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta_g^h}\not{D}_h\widehat{\beta_h^g} - \not{D}_g &= \sum_{j=1}^d c(e_j(g))\left(\sum_{p=1}^d (e_j^p(h) - e_j^p(g))\frac{\partial}{\partial x_p}\right. \\
&\quad + \sum_{p=1}^d e_j^p(h)\beta_g^h\frac{\partial\beta_h^g}{\partial x_p} + \sum_{p=1}^d e_j^p(h)f_g^h\frac{\partial f_h^g}{\partial x_p} \\
&\quad\left. + \frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^d (\omega_{jkl}(h) - \omega_{jkl}(g))c_g(e_k(g))c_g(e_l(g))\right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

so

$$\begin{aligned}\left\|(\widehat{\beta}_g^h \mathbb{D}_h \widehat{\beta}_h^g - \mathbb{D}_g)\xi\right\| \leqslant \sum_{j=1}^d \Bigg(\sum_{p=1}^d \left\| e_j^p(h) - e_j^p(g))\right\|_{C(M)} \left\| \frac{\partial}{\partial x_p}\xi \right\|_{L^2} \\ + \sum_{p=1}^d \left\| e_j^p(h)\right\| \left\| \beta_g^h \frac{\partial \beta_h^g}{\partial x_p} + e_j^p(h) f_g^h \frac{\partial f_h^g}{\partial x_p}\right\|_{C(M)} \|\xi\|_{L^2} \\ + \frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^d \left\|\omega_{jkl}(h) - \omega_{jkl}(g))\right\|_{C(M)} \|\xi\|_{L^2} \Bigg).\end{aligned} \tag{4.11}$$

因此，设：

$$\begin{aligned} r_g(h) \coloneqq Q(g) \sum_{j=1}^d \Bigg(\sum_{p=1}^d \left\| e_j^p(h) - e_j^p(g))\right\|_{C(M)} \\ + \sum_{p=1}^d \left\| e_j^p(h)\right\| \left\| \beta_g^h \frac{\partial \beta_h^g}{\partial x_p} + e_j^p(h) f_g^h \frac{\partial f_h^g}{\partial x_p}\right\|_{C(M)} \\ + \frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^d \left\|\omega_{jkl}(h) - \omega_{jkl}(g))\right\|_{C(M)} \Bigg),\end{aligned} \tag{4.12}$$

由表达式（4.11）和（4.8），以及我们将不等式从局部推广到整体的观察，可得：

$$\left|\left|\left|(\widehat{\beta}_g^h \mathbb{D}_h \widehat{\beta}_h^g - \mathbb{D}_g)\xi\right|\right|\right|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)}^{\mathrm{dom}(D_g)} \leqslant r_g(h)\mathsf{DN}_g(\xi).$$

由连续性可知，因为狄拉克算子确实从 $\|\cdot\|_{H_1}$ 到 $\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)$ 上的希尔伯特范数是连续的，并且 $\mathsf{DN}g$ 等价于 $\|\cdot\|_{H_1}$：

$$\left|\left|\left|(\widehat{\beta}_g^h \mathbb{D}_h \widehat{\beta}_g^h - \mathbb{D}_g)\right|\right|\right|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)_{|U}}^{\Gamma_{H1}(\Sigma^g M)_{|U}} \leqslant r_g(h)\mathsf{DN}_g.$$

表达式 (4.2) 和 (4.3) 一起表明，当 $\mathscr{R}(\mathrm{M})$ 赋予 C^1 拓扑时，$\mathrm{h} \in \mathscr{R}(\mathrm{M}) \mapsto \left\|\omega_{jkl}(\mathrm{h}) - \omega_{jkl}(\mathrm{g}))\right\|_{C(M)}$确实连续。此外，按照构造，$\mathrm{h} \in \mathscr{R}(\mathrm{M}) \mapsto \mathrm{f}^g\mathrm{h}$ 和 $\mathrm{h} \in \mathscr{R}(\mathrm{M}) \mapsto \mathrm{f}^g\mathrm{h}$ 也具有光滑性，$\mathrm{h} \in \mathscr{R}(\mathrm{M}) \mapsto \beta^g\mathrm{h}$ 和 $\mathrm{h} \in \mathscr{R}(\mathrm{M}) \mapsto \beta_g^h$的光滑性则由 [8] 得出。因此，$\mathrm{h} \in \mathscr{R}(\mathrm{M}) \mapsto \mathrm{r}g(\mathrm{h})$ 是一个连续函数。此外，显然

$$\lim_{\substack{h\to g \\ h\in\mathscr{R}(M)}} r_g(h) = 0.$$

因此，我们得出结论：

$$h \in \mathscr{R}(M) \mapsto \mathbb{D}_g^h \in \mathscr{B}\left(\Gamma_{H_1}(\Sigma^g M), \Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)\right) \tag{4.13}$$

如所述是连续的。

现在我们可以转向本节的第一个定理。

定理4.2。 设 M 是一个连通紧致闭自旋流形。对于所有 $g \in \mathscr{R}(M)$，以下极限成立：

$$\lim_{\substack{h\to g \\ h\in\mathscr{R}(M)}} \Lambda^{\mathsf{spec}}((C(M), \Gamma_{L^2}(\Sigma^h M), \mathbb{D}_h), (C(M), \Gamma_{L^2}(\Sigma^g M), \mathbb{D}_g)) = 0.$$

特别地，当 h 趋近于 g 时，$/D_h$ 的谱收敛到$/Dg$ 的谱；形式地，若$(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{R}(M)^{\mathbb{N}}$ 在 $\mathscr{R}(M)$ 上的 C^1 拓扑下收敛到 g，则：

$$\mathrm{Sp}\left(\not{D}_g\right)=\left\{\lim_{n\to\infty}\lambda_n : \forall n\in\mathbb{N}\quad \lambda_n\in \mathrm{Sp}\left(\not{D}_{h_n}\right)\ and\ (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c(\mathbb{N})\right\},$$

且对于所有非空紧区间 $I\subseteq\mathbb{R}$，满足 $\partial I\cap$谱$\left(/D_g\right)=\emptyset$；并且对于所有 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得若 $n\geqslant N$，则

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\left(\not{D}_{h_n}\right)\cap I}\mathrm{multiplicity}\left(\lambda\middle|\not{D}_{h_n}\right)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\left(\not{D}_g\right)\cap I}\mathrm{multiplicity}\left(\lambda\middle|\not{D}_g\right)<\infty$$

and

$$\mathsf{Haus}_{[\mathbb{C}]}\left(\mathrm{Sp}\left(\not{D}_{h_n}\right)\cap I,\mathrm{Sp}\left(\not{D}_g\right)\cap I\right)<\varepsilon.$$

证明。 我们将用 $\mathsf{L}g:=\left|\left|\left|[/Dg,\cdot]\right|\right|\right|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)}$ 和 $\mathsf{DN}_g=\|\cdot\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)}+\left\|/Dg\cdot\right\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)}$ 表示它们在各自自然定义域上的算子。

由于酉等价谱三元组之间的谱近邻距离为零，我们立即得到对于所有 $h\in\mathscr{R}(M)$：

$$\Lambda^{\mathsf{spec}}((C(M),\Gamma_{L^2}(\Sigma^h M),\not{D}_h),(C(M),\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M),\not{D}_g^h))=0.$$

根据三角不等式，因此只需证明：若 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathscr{R}(M)$ 中的一个序列，并且在 C^1 拓扑下收敛到 $g\in\mathscr{R}(M)$，则：

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda^{\mathsf{spec}}((C(M),\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M),\not{D}_g^{h_n}),(C(M),\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M),\not{D}_g))=0.$$

由表达式（4.8），我们已经知道，所有算子 $/D^{h_n}g$的定义域都与 $/Dg$ 相同，即 $\Gamma_{H_1}(\Sigma^g M)$，此外：

$$\begin{aligned}\left|\mathsf{DN}_{h_n}(\psi)-\mathsf{DN}_g(\psi)\right|&\leqslant\left\|(\not{D}_g^{h_n}-\not{D}_g)\psi\right\|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)}\\&\leqslant r_g(h_n)\mathsf{DN}_g(\psi)\end{aligned}$$

其中 $\lim_{n\to\infty} r_g(h_n)=0$。

现在，设 $f\in C^\infty(M)$。采用记号

$$h(\nabla_h f,\cdot)=df,$$

正如 $[/Dg,f]=c_g(\nabla_h f)$ 和 $[/D_h,f]=c_h(\nabla_h f)$ 一样，由 [20, 第 69] 页可知

$$\begin{aligned}[\tilde{\beta}_g^h\not{D}_h\tilde{\beta}_h^g,f]&=\widehat{\beta_g^h}[\not{D}_h,f]\widehat{\beta_h^g}\\&=\widehat{\beta_g^h}c_h(\nabla_h f)\widehat{\beta_h^g}\\&=c_g(\nabla_h f).\end{aligned}$$

我们再次进行局部讨论，如前所述固定（U，x^1,...，x^d）$\in\mathscr{A}$、我们选定的g-⌒标准正交标架（$e_1(g)$，...，$e_d(g)$），以及其在 $\beta^g h$下的像（$e_1(h)$，...，$e_d(h)$）。于是我们有：

$$c_g(\nabla_h f)=\sum_{j=1}^d(e_j(h)\cdot f)c_g(e_j(g))\ \text{and}\ c_g(\nabla_g f)=\sum_{j=1}^d(e_j(g)\cdot f)c(e_j(g))$$

其中此处$X\cdot f$表示对于任意$X\in$切丛，$X(f)$。因此，

$$\begin{aligned}\left|\!\left|\!\left|[\not{D}_g,f]-[\not{D}_g^h,f]\right|\!\right|\!\right|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M_{|U})} &= \left|\!\left|\!\left|c_g(\nabla_h f-\nabla_g f)\right|\!\right|\!\right|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M_{|U})}\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{d}\left\|e_j^p(h)-e_p^j(g)\right\|_{C(\mathrm{cl}(U))}\left\|\frac{\partial f}{\partial x^p}\right\|_{C(\mathrm{cl}(U))}\\ &\leqslant K_Y\, y_{g,U}(h)\mathsf{L}_g(f),\end{aligned}$$

其中

$$y_{g,U}(h):=\sum_{j=1}^{d}\left\|e_j^p(h)-e_p^j(g)\right\|_{C(\mathrm{cl}(U))},$$

并且选取 $K_U>0$，使得对于所有 $(U、x^1,...、x^d)\in\mathscr{A}$以及所有 $f\in C^\infty(M)$，

$$\max_{j=1,\dots,d}\left\|\frac{\partial f}{\partial x^j}\right\|_{C(\mathrm{cl}(U))}\leqslant K\left\|\nabla_g f\right\|_{C(\mathrm{cl}(U))}.$$

根据梯度的定义，这样的 K_U 显然存在。

现在，如前所述，如果我们设

$$K:=\sum_{(U,x^1,\dots,x^d)\in\mathscr{A}}K_U \text{ and } Y_g:=\sum_{(U,x^1,\dots,x^d)\in\mathscr{A}}y_{g,U},\tag{4.14}$$

那么对于所有 $f\in C^\infty(M)$，我们得到：

$$\left|\!\left|\!\left|[\not{D}_g-\not{D}_g^h,f]\right|\!\right|\!\right|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)}\leqslant KY_g(h)\mathsf{L}_g(f).$$

注意，我们利用了算子 $\not{D}^g$、$\not{D}_{fg}$ 和 f（作为乘法算子）的局部性质。

由于 $\not{D}^g-\not{D}_g^h$ 是自伴的，我们得出：

$$\left|\!\left|\!\left|[\not{D}_g-\not{D}_g^h,f]\right|\!\right|\!\right|_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)}\leqslant KY_g(h)\mathsf{L}_g(f)$$

对所有满足 $\mathsf{L}^g(f)<\infty$ 的 $f\in C(M)$，因此，若 $f\in\mathrm{dom}\left(\mathsf{L}_g\right)=\mathrm{dom}\left(\mathsf{L}_{h_n}\right)$，我们得出：

$$\left|\mathsf{L}_g(f)-\mathsf{L}_{h_n}(f)\right|\leqslant KY_g(h_n)\mathsf{L}_g(f)$$

且 $\lim_{n\to\infty}Y_g(h_n)=0$。

因此，我们可以应用引理（2.3），再应用定理（2.2），由此得出结论。□

最后，我们将本文的工作应用于所谓的几乎交换模型，也就是说，我们将上述实际的狄拉克算子与一个有限维谱三元组取乘积。这样做有双重原因：这些模型本身就很有意义，因为它们是 Connes 关于标准模型的研究核心；此外，这也证明了本节提出的方法能够从经典几何学平滑地推广到非交换几何。

以下固定一个度量谱三元组 $(\mathfrak{B},\mathscr{F},\not{F})$，其中 $\mathscr{F}$是有限维的——因此 $\mathfrak{B}$ 也是有限维的，因为该谱三元组是度量的。此构造取决于M的维数的奇偶性，不过最终我们的证明在所有情形下都类似。

首先假设M是偶数维的。存在一个自伴酉算子 θ，作用于 $\Gamma_{L^2}(\Sigma^g)$，它与$C(M)$通过乘法给出的表示相交换，并与 $/D_g$反交换，即$\mathbb{Z}/2$分次。我们在 $\mathrm{dom}\left(/D_g\right)\otimes\mathscr{F}$上定义：

$$\mathbb{D}_{g,F} := \mathbb{D}_g \otimes 1 + \theta \otimes \mathbb{F}.$$

现在，若 M为奇数维，但 $\mathscr{F}$为偶数维，并且在 $\mathscr{F}$上存在针对（$\mathfrak{B}$，$\mathscr{F}$，$/F$）的分次算子 θ（即一个与$\mathfrak{B}$的作用可交换且与$/F$反对易的自伴酉算子），那么我们以类似方式进行，并在 $\mathrm{dom}\left(/D_g\right)\otimes\mathscr{F}$上定义：

$$\mathbb{D}_{g,F} := \mathbb{D}_g \otimes \theta + 1 \otimes \mathbb{F}.$$

在这两种情形中，乘积谱三元组定义为：

$$(C(M),\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M),\mathbb{D}_g)\times(\mathfrak{B},\mathscr{F},\mathbb{D}F) := (C(M)\otimes\mathfrak{B},\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)\otimes\mathscr{F},\mathbb{D}_{g,F}),$$

并设 $\mathscr{H}_g := \Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)\otimes\mathscr{F}$。注意，希尔伯特空间 $\mathscr{H}_g$依赖于g（如同旋量丛一样），但不依赖于$/F$。

若M为奇数维，且我们没有（$\mathfrak{B}$，$\mathscr{F}$，$/F$）的分次，则我们的乘积定义在一个略有不同的希尔伯特空间上，即：

$$(C(M),\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M),\mathbb{D}_g)\times(\mathfrak{B},\mathscr{F},\mathbb{D}F) := (C(M)\otimes\mathfrak{B},\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)\otimes\mathscr{F}\otimes\mathbb{C}^2,\mathbb{D}_{g,F}),$$

其中：

$$\mathbb{D}_{g,F} := \mathbb{D}_g \otimes 1\otimes\theta_1 + 1\otimes\mathbb{F}\otimes\theta_2,$$

其中 θ_1、θ_2 矩阵作用于$\mathbb{C}^2$，并满足通常的克利福德关系：

$$\forall j,k\in\{1,2\}\quad \theta_j\theta_k+\theta_k\theta_j = \begin{cases} 2 \text{ if } j=k,\\ 0 \text{ otherwise.}\end{cases}$$

于是我们写作 $\mathscr{H}_g := \Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)\otimes\mathscr{F}\otimes\mathbb{C}^2$。

这三种乘积的证明大同小异，因此我们将证明第一个情形下的主要结果，其余两种情形则留给读者用相同的方法验证。

首先，如引理 4 所证明的（当 [19, d5] 为偶数时，但相同的方法适用于其他所有情形），这些构造确实给出了度量谱三元组。现在，我们来确立关于几乎交换模型的结果。

定理 4.3。 设 M 是一个连通紧致闭自旋流形。设 $\mathscr{F}$ 为一个有限维希尔伯特空间，$\mathfrak{B}$ 为一个在 $\mathscr{F}$上忠实作用的 C^*-代数，并设 $\mathscr{I}(\mathfrak{B},\mathscr{F})$ 为 $\mathscr{F}$上使得$(\mathfrak{B},\mathscr{F},/F)$ 成为度量谱三元组的自伴算子集合。我们赋予 $\mathscr{I}(\mathfrak{B},\mathscr{F})$ 由算子范数所诱导的拓扑。

对于所有 $g\in\mathscr{R}(M)$ 以及 $(\mathfrak{B},\mathscr{F},/F)\in\mathscr{I}(\mathfrak{B},\mathscr{F})$，下列极限成立：

$$\lim_{\substack{(h,\mathcal{G})\to(g,\mathbb{F})\\(h,\mathcal{G})\in\mathscr{R}(M)\times\mathscr{I}(\mathfrak{B},\mathscr{F})}} \Lambda^{\mathsf{spec}}((C(M),\Gamma_{L^2}(\Sigma^h M),\mathbb{D}_h)\times(\mathfrak{B},\mathscr{F},\mathbb{F}),$$
$$(C(M),\Gamma_{L^2}(\Sigma^g M),\mathbb{D}_g)\times(\mathfrak{B},\mathscr{F},\mathcal{G}))=0.$$

特别地，当 h 在 $\mathscr{R}(M)$ 中趋近于 g，且 $/G$ 在 $\mathscr{R}(\mathfrak{B},\mathscr{F})$ 内按范数趋近于 $/F$ 时，$/D_h\times/G_n$ 的谱收敛于 $/D_g\times/F$ 的谱；形式上，若 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{R}(M)^{\mathbb{N}}$ 在 $\mathscr{R}(M)$ 上的 C^1 拓扑中收敛于 g，且 $(/G_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{F}(\mathfrak{B},\mathscr{F})^{\mathbb{N}}$ 按范数收敛于 $/F$，则：

$$\mathrm{Sp}\left(\mathbb{D}_g\times\mathbb{F}\right)=\left\{\lim_{n\to\infty}\lambda_n : \forall n\in\mathbb{N}\quad \lambda_n\in\mathrm{Sp}\left(\mathbb{D}_{h_n}\times\mathcal{G}_n\right)\ \textit{and}\ (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c(\mathbb{N})\right\},$$

并且对于所有 $\Lambda \in (0,\infty) \setminus 谱\left(/D_{g,F}\right)$，以及所有 $\varepsilon > 0$，都存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得，若 $n \geqslant N$，则

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\left(\mathbb{D}_{h_n} \times \mathbb{G}_n\right) \cap [-\Lambda,\Lambda]} \mathrm{multiplicity}\left(\lambda \middle| \mathbb{D}_{h_n} \times \mathbb{G}_n\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\left(\mathbb{D}_g \times \mathbb{F}\right) \cap [-\Lambda,\Lambda]} \mathrm{multiplicity}\left(\lambda \middle| \mathbb{D}_g \times \mathbb{F}\right) < \infty$$

and

$$\mathsf{Haus}[\mathbb{C}]\left(\mathrm{Sp}\left(\mathbb{D}_{h_n} \times \mathbb{F}_n\right) \cap [-\Lambda,\Lambda], \mathrm{Sp}\left(\mathbb{D}_g \times \mathbb{F}\right) \cap [-\Lambda,\Lambda]\right) < \varepsilon.$$

证明。 作为记号，我们写道：

$$\mathsf{L}_{h,G} := \left|\left|\left|[\mathbb{D}_{h,G}, \cdot]\right|\right|\right|_{\mathscr{H}_h} \text{ and } \mathsf{DN}_{h,G} = \|\cdot\|_{\mathscr{H}_h} + \left\|\mathbb{D}_{h,G}\cdot\right\|_{\mathscr{H}_h}.$$

我们先令 M 为偶数。注意到

$$\mathbb{D}_{h,G}(\theta \otimes 1_{\mathscr{F}}) - (\theta\otimes)1_{\mathscr{F}}\mathbb{D}_{h,G} = \mathbb{D}_h \otimes 2 \cdot 1_{\mathscr{F}}$$

and

$$\mathbb{D}_{h,G}(\theta \otimes 1_{\mathscr{F}}) + (\theta \otimes 1_{\mathscr{F}})\mathbb{D}_{h,G} = 2 \cdot 1_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^h M)} \otimes \mathbb{G}.$$

因此对于所有 $\psi \in \Gamma_{H_1}(\Sigma^h M) \otimes \mathscr{F}$，我们得出：

$$\max\left\{\left\|(\mathbb{D}_h \otimes 1_{\mathscr{F}})\psi\right\|, \left\|(1_{\Gamma_{L^2}(\Sigma^h M)} \otimes G)\psi\right\|\right\} \leqslant \mathsf{DN}_{h,G}(\psi). \tag{4.15}$$

现在令 $\psi \in \mathscr{H}_{g,F}$。我们立即得到：

$$\left|\left\|\mathbb{D}_{g,F}\psi\right\| - \left\|\mathbb{D}_{h,G}\psi\right\|\right| \leqslant \left\|((\mathbb{D}_{g,F} - \mathbb{D}_{h,G}) \otimes 1_{\mathscr{H}_F})\psi\right\| + \left\|\theta \otimes (F-H)\psi\right\|.$$

显然

$$\left\|\theta \otimes (F-G)\psi\right\|_{\mathscr{H}_{g,F}} \leqslant |||F-G|||_{\mathfrak{B}} \left\|\psi\right\|_{\mathscr{H}_{g,F}}.$$

另一方面，我们可以如下定义 $\|\cdot\|_{H_1}$ 在 $\Gamma_{H_1}(\Sigma^g M) \otimes \mathscr{F}$ 上的半范数。向量空间 $\mathscr{F}$ 是有限维的；我们固定其一组标准正交基 $\xi_1,...,\xi_N$。当然，我们可以将 $\mathscr{H}_{g,F} = \Gamma_{L^2}(\Sigma^g M) \otimes \mathscr{F}$ 看作是一个以 M 为底空间、以 $m \in M$ 为纤维的丛，其纤维由 $\Sigma^g{}_m M \otimes \mathscr{H}_F$ 给出；但这里我们将采用更直接的表述。若 $\psi \in \mathscr{H}_{g,F}$，则 $\psi = \sum^N{}_{j=1} \psi_j \otimes \xi_j$，其中 $\psi_1,...,\psi_N \in \Gamma_{L^2}(\Sigma^g M)$ 的取值唯一确定；于是对于任意坐标图 $(U, x^1,..., x^d)$，我们定义 $\in \mathscr{A}$：

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^p} := \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi_j}{\partial x^p} \xi_j.$$

接下来，我们 $\left\|\psi\right\|_{H_1}$ 按照表达式（4.7）中的方式形式化定义。我们还注意到，凭借其 r 定义，

$$(\frac{\partial}{\partial x^p} \otimes 1_{\mathscr{F}})\psi = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi_j}{\partial x^p} \otimes \xi_j$$

so

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial x^p} \otimes 1_{\mathscr{F}}\right\| &\leqslant \sum_{j=1}^N \left\|\psi_j\right\|_{H_1} \\ &\leqslant \sum_{j=1}^N C(g)(\left\|\psi_j\right\| + \left\|\mathbb{D}_g\psi_j\right\|) \\ &\leqslant NC(g)(\left\|\psi\right\| + \left\|(\mathbb{D}_g \otimes 1)\psi\right\|) \leqslant \mathsf{DN}_{g,F}(\psi).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\left\|(\not{D}_g\otimes 1)\psi\right\| &\leqslant \sum_{j=1}^{N}\left\|\not{D}_g\psi_j\right\| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{Q(g)}\left\|\psi_j\right\|_{H_1} \\ &\leqslant \frac{1}{Q(g)}\left\|\psi\right\|_{H_1}\ \text{by definition.}\end{aligned}$$

因此，我们已经证明：

$$\frac{1}{N}Q(g)\mathsf{DN}_{g,F}(\psi)\leqslant\left\|\psi\right\|_{H_1}\leqslant NC(g)\mathsf{DN}_g(\psi).$$

有了这一点，我们再次得到：

$$\begin{aligned}\left\|((\not{D}_{g,F}-\not{D}_{h,G})\otimes 1_{\mathscr{H}_F})\psi\right\| &\leqslant r'_g(h)\left\|\psi\right\|_{H_1}+|||F-G|||_{\mathscr{F}}\left\|\psi\right\|_{L^2} \\ &\leqslant (r'_g(h)+|||F-G|||_{\mathscr{F}})\mathsf{DN}_{g,F}(\psi),\end{aligned}$$

其中 $r_g(h)$ 由表达式 (4.12) 给出，其中 $C(g)$ 替换为 $C'(g)$。

因此，令 $R'_{g,F}(h,G):=r_g(h)+|||F-G|||_{\mathscr{F}}$，我们得出：

$$|\mathsf{DN}_{g,F}(\psi)-\mathsf{DN}_{h,G}(\psi)|\leqslant R'_{g,F}(h,G)\mathsf{DN}_g(\psi),$$

其中 $\lim_{n\to\infty}R'_{g,F}(h_n,G_n)=0$。

同样，若 $f\in C(M,\mathfrak{B})$ 且 $f\in\mathrm{dom}\left(\mathsf{L}_{g,F}\right)$，则：

$$[\not{D}_{g,F}-\not{D}_{h,G},f]=[(\not{D}_g-\not{D}_h\otimes 1),f]+[[\theta\otimes(F-G),f].$$

再一次，

$$\begin{aligned}&(\theta\otimes 1)[\not{D}_{g,F}-\not{D}_{h,G},f]+[\not{D}_{g,F}-\not{D}_{h,G},f](\theta\otimes 1)\\ &\quad=[(\theta\not{D}_g+\not{D}_g\theta)\otimes 1,f]+[\theta^2\otimes\not{F},f]\\ &\quad=[0,f]+[1\otimes\not{F},f]=[1\otimes(F-G),f],\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(\theta\otimes 1)[\not{D}_{g,F}-\not{D}_{h,G},f]-[\not{D}_{g,F}-\not{D}_{g,H},f](\theta\otimes 1)&=[(\theta\not{D}_g-\not{D}_g\theta)\otimes 1,f]+0\\ &=[(\not{D}_g-\not{D}_h)\otimes 1,f].\end{aligned}$$

任取一个态 μ 属于$C(X,\mathfrak{B})$。显然有：

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|[1\otimes(F-G),f]\right|\right|\right|_{\mathscr{H}_{g,F}}&=\left|\left|\left|[1\otimes(F-G),f-\mu(f)]\right|\right|\right|_{\mathscr{H}_{g,F}}\\ &\leqslant|||F-G|||_{\mathscr{F}}\left\|f-\mu(f)\right\|_{C(M,\mathfrak{B})}\\ &\leqslant\mathrm{qdiam}\left(C(M,\mathfrak{B}),\mathsf{L}_{g,F}\right)\mathsf{L}_{g,F}(f)\end{aligned}$$

由 [51, 命题 1。6]。

另一方面，由于 $\mathfrak{B}$ 是有限维的，因此存在一组线性基$\eta_1,\ldots,\eta_{\dim\mathfrak{B}}$ 属于 $\mathfrak{B}$，我们假设它们已归一化为单位向量。若$f\in C(M,\mathfrak{B})$，则$f=\sum^{\dim\mathfrak{B}}{}_{j=1}f_j\,\eta_j$，其中存在唯一的$f_1,\ldots,f_{\dim\mathfrak{B}}\in\mathbb{C}(M)$。

现在，若对所有 $\mathrm{f}\in\mathsf{C}(\mathrm{M},\mathfrak{B})$，定义 $\left\|\mathrm{f}\right\|_{H_1}=\sum^{\dim\mathfrak{B}}_{=1}\mathrm{j}\,\mathrm{DN}_g(\mathrm{f\,j})$，其中 $\mathrm{f}=\sum^{\dim\mathfrak{B}}\mathrm{j}_{=1}\mathrm{f\,j}\,\eta_j$，则可见，$\|\cdot\|_{H_1}$ 与 $\mathrm{DN}_{g,F}$ 具有相同的定义域，且相对于 $\mathsf{C}(\mathrm{M},\mathfrak{B})$ 的范数均为下半连续，因此都在该定义域上定义了巴拿赫空间结构。此外，按构造有 $\mathrm{DN}_{g,F}\leqslant\|\cdot\|_{H_1}$。因此，根据开映射定理，这两个范数等价。令 $\mathrm{W}>0$ 满足 $\|\cdot\|_{H_1}\leqslant\mathrm{W}\,\mathrm{DN}_{g,F}$。

接下来注意到：

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left|[(\not{D}_g - \not{D}_h)\otimes 1, f]\right|\right|\right| &= \left|\left|\left| \sum_{j=1}^{\dim \mathfrak{B}} [\not{D}_g - \not{D}_h, f_j]\eta_j \right|\right|\right| \\
&= \left|\left|\left| \sum_{j=1}^{\dim \mathfrak{B}} (\nabla_g f_j - \nabla_h f_j)\eta_j \right|\right|\right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\dim \mathfrak{B}} KY_g(h)\mathsf{DN}_g(f_j) \\
&\leqslant \dim \mathfrak{B}\cdot KY_g(h)\cdot W\cdot \mathsf{DN}_{g,F}(f),
\end{aligned}$$

其中 K 和 Y_g 定义见表达式（4.14）。

与前一个定理的证明一样，我们由此得到

$$\left|\mathsf{L}_{g,F}(f) - \mathsf{L}_{h,F}(f)\right| \leqslant J(h,G)\mathsf{L}_{g,F}(f).$$

其中 $\lim_{(h,G)\to(g,F)} J(h,G) = 0$。

因此，我们可以利用引理（2.3）和定理（2.2）得出结论。

也可以通过一系列类似的计算，证明另外两种可能乘积的情形也有相同的结果。□

由于 [15] 几乎交换模型的谱三元组的谱作用编码了其物理学，我们看到，定理（4.3）表明，此类模型的物理学关于其基础度量数据具有稳定性。

参考文献

1. K. Aguilar，《量子 Gromov–Hausdorff 近似距离空间中的 AF代数》，投稿（2016），32页，arXiv:1612.02404。2.，《通过理想的收敛研究 AF代数商在量子近邻度中的收敛》，投稿（2016），42页，arXiv: 1608.07016。3.，C^*-代数的归纳极限与紧量子度量空间，投稿（2018），24页，arXiv:1807.10424。4. K. Aguilar、S. Brooker、F. Latrémolière 和 A. López，《一种理想收敛》，《美国数学学会通报》**68**（2021），第3期，1269–1281。5. K. Aguilar 和 F. Latrémolière，《AF代数上的量子超度量与 Gromov–Hausdorff 近似距离》，《数学研究》**231**（2015），第2期，149–194，ArXiv: 1511.07114。6.，《条件期望在 Gromov–Hausdorff 近邻度收敛中的一些应用》，《巴拿赫中心出版物》**120**（2021），35–46，arXiv:1708.00595。7. J. Bassi；R. Conti；C. Farsi 和 F. Latrémolière，《度量谱三元组归纳极限的等距群与 Gromov–Hausdorff 收敛》，《伦敦数学学会杂志》**108**（2023），第4期，1488–1530，arXiv:2302.09117。8. J.-P. Bourguignon 和 P. Gauduchon，《自旋子、狄拉克算子与度量的变分》，《Commun. Math. Phys.》**144**（1992），581–599。9. O. Bratteli 和 D. Robinson，《算子代数与量子统计力学 I》，施普林格出版社，1979。10. A. Chamseddine 和 A. Connes，《谱作用原理》，《Commun. Math. Phys.》**186**（1997），731–750。11.，《为什么是标准模型？》，《几何与物理杂志》**58**（2008），38–47。12. A. Chamseddine、A. Connes 和 M. Marcolli，《具有中微子混合的引力与标准模型》，《理论与数学物理进展》**11**（2007），第6期，991–1089。13. A. Connes，《C*代数与微分几何》，《巴黎科学院报告》（1980），A-B系列，第290卷。14. A. Connes，《紧度量空间、Fredholm模与超有限性》，《遍历理论与动力系统》**9**（1989），第2期，207–220。15.，《非交换几何》，学术出版社，圣迭戈，1994。16. A. Connes 和 M. Marcolli，《非交换几何、量子场与动机》，《Colloquium Publications》，第55卷，美国数学会，2008。

17. C. Farsi 和 F. Latrémolière，《非交换几何中的坍缩》，投稿（2024），41页，arXiv:2404.00240。18. C. Farsi；F. Latrémolière；J. Packer，《谱近邻距离中谱三元组归纳序列的收敛》，《Adv. Math.》437（2024），论文109442，59页，arXiv:2301.00274。19.，《由量子环面上的标准谱三元组得到非交换索列诺伊德上的谱三元组》，《Proc. Amer. Math. Soc.》已接受（2024），14页，arXiv:2403.16323。20. T. Friedrich，《黎曼几何中的狄拉克算子》，《Graduate Studies in Mathematics》，第25卷，美国数学会。21. M. Gromov，《多项式增长群与扩张映射》，《Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.》53（1981），53–78。22.，《黎曼与非黎曼空间的度量结构》，《Progress in Mathematics》，Birkhäuser，1999。23. F. Hausdorff，《集合论基础》，Verlag Von Veit und Comp.，1914。24. L. V. Kantorovich，《求解某些极值问题类别的一种有效方法》，《苏联科学院通报》28（1940），212–215。25. L. V. Kantorovich 和 G. Sh. Rubinstein，《关于完全可加函数的空间》，《列宁格勒大学学报》，数学、力学与天文学系列13（1958），第7期，52–59，俄语。26. T. Kato，《线性算子扰动理论》，Springer，1995。27. T. Landry、M. Lapidus 和 F. Latrémolière，《谢尔宾斯基垫片及其他分形上的谱三元组的度量逼近》，《Adv. Math.》385（2021），论文第107771号，43页。28. F. Latrémolière，《谱近邻距离中谱三元组的狄拉克算子谱的连续性》，《Math. Ann.》389（2024），第1期，765–817，ArXiv: 2112.11000。29. F. Latrémolière，《带基点的完备量子度量空间类上的量子 Gromov–Hausdorff 超拓扑》，投稿（2025），85页，ArXiv: 2512.03573。30. F. Latrémolière，《量子 Gromov–Hausdorff 近似距离中模糊环面与量子环面的收敛：一种显式方法》，《Münster J. Math.》8（2015），第1期，57–98，arXiv: math/1312.0069。31.，《作为 Leibniz 紧量子度量空间的曲非交换环面》，《J. Math. Phys.》56（2015），第12期，123503，16页，arXiv: 1507.08771。32.，《对偶 Gromov–Hausdorff 近似距离》，《J. Math. Pures Appl.》103（2015），第2期，303–351，arXiv: 1311.0104。33.，《量子 Gromov–Hausdorff 近似距离》，《Trans. Amer. Math. Soc.》368（2016），第1期，365–411。34.，《对偶 Gromov–Hausdorff 近似距离的紧性定理》，《Indiana Univ. Math. J.》66（2017），第5期，1707–1753，arXiv: 1501.06121。35.，《三角不等式与对偶 Gromov–Hausdorff 近似距离》，《Indiana Univ. Math. J.》66（2017），第1期，297–313，arXiv: 1404.6633。36.，《协变 Gromov–Hausdorff 近似距离中柯西序列的收敛》，《J. Math. Anal. Appl.》469（2019），第1期，378–404，arXiv: 1806.04721。37.，《模 Gromov–Hausdorff 近似距离》，《Dissertationes Math.》544（2019），1–70，arXiv: 1608.04881。38.，《模 Gromov–Hausdorff 近似距离中海森堡模的收敛》，《J. Operator Theory》84（2020），第1期，211–237。39.，《协变 Gromov–Hausdorff 近似距离》，《数学研究》251（2020），第2期，135–169，arXiv: 1805.11229。40.，《量子二维环面上的海森堡模是度量化量子向量丛》，《Canad. J. Math》72（2020），第4期，1044–1081，arXiv: 1703.07073。41.，《模糊环面上的谱三元组向量子环面上谱三元组的收敛》，《Comm. Math. Phys.》388（2021），第2期，1049–1128，arXiv: 2102.03729。42.，《对偶模 Gromov–Hausdorff 近似距离与完备性》，《J. Noncomm. Geometry》115（2021），第1期，347–398。43.，《度量谱三元组的 Gromov–Hausdorff 近似距离》，《Adv. Math.》404（2022），论文第108393号，56页。44. F. Latrémolière 和 J. Packer，《非交换索列诺伊德与 Gromov–Hausdorff 近似距离》，《Proc. Amer. Math. Soc.》145（2017），第5期，1179–1195，arXiv: 1601.02707。45. Stephan Maier，《自旋流形与自旋复流形上的一般度量和联络》，《Commun. Math. Phys.》188（1997），407–437。46. C. P. Martin、J. Gracia Bondia 和 J. Varilly，《作为非交换几何的标准模型：低能区》，《Phys. Rep.》294（1998），第6期，363–404。47. E. J. McShane，《函数值域的扩张》，《Bull. Amer. Math. Soc.》40（1934），第12期，825–920。

48. Nikolai Nowaczyk, 狄拉克谱的连续性, 《Ann. Glob. Anal. Geom.》**44** (2013), 541–563. 49. M. Rieffel, “矩阵代数收敛到球面”的向量丛, 已提交（2017）, 46页, arXiv:1711.04054. 50. M. A. Rieffel, 非交换环面——非交换可微流形的一个案例研究, 《Contemp. Math》**105** (1990), 191–211. 51. , 由紧群作用产生的态上的度量, 《 Doc. Math. 》 **3** (1998), 215–229, math.OA/9807084. 52. , 状态空间上的度量 , 《 Doc. Math. 》 **4**(1999), 559–600, math.OA/9906151. 53. , 量子度量空间的格罗莫夫–豪斯多夫距离, 《Mem. Amer. Math. Soc.》 **168**(2004), no. 796, 1–65, math.OA/0011063. 54. N. Weaver,利普希茨代数, 世界科学出版社, 1999.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OFDENVER, DENVER CO 80208电子邮箱: frederic@math.du.edu网址: https://fredericlatremoliere.com