arXiv:2603.19161v1 [math-ph] 19 Mar 2026

广义麦克斯韦理论的对偶性作为导出几何中的等价

Chris Elliott、Owen Gwilliam、Ingmar Saberi 和 Brian R. Williams

摘要。我们提出了一种使用导出微分几何、对任意维数中编码 p 形式广义麦克斯韦理论的模空间的非微扰描述。我们的方法将巴塔林–维尔科维斯基形式体系与微分上同调结合起来。在此框架内，我们 formulates 狄拉克电荷量子化，并展示这类经电荷量子化的模空间如何在不同类型的广义麦克斯韦理论之间呈现阿贝尔对偶。我们还通过计算作为微分上同调模型的底层上链复形层的推前，描述了沿闭黎曼流形对广义麦克斯韦理论的紧化。

目录

1. 引言 1
2. 高阶形式规范理论的数学设定 8
3. 阿贝尔 p 形式规范理论 17
4. 麦克斯韦理论的另一种表示 32
5. 阿贝尔对偶 36
6. 阿贝尔规范理论的紧化 48
附录 A. 更详细的模空间叠与导出几何 63
附录 B. 同调扰动引理 73
参考文献 75

1. 引言

阿贝尔对偶性在当代场论中发挥着核心作用，尤其是作为更为微妙的超对称场论与弦论之间对偶性的灵感来源。粗略地说，它提供了一种将成对的阿贝尔规范理论联系起来的方法。示例包括：

- 四维时空中 Maxwell 理论的电磁对偶性，其中电场与磁场互换，耦合常数也随之互换；

- T-对偶性指的是二维时空上的紧致玻色子对偶，其中目标圆的半径取倒数（即 $R \leftrightarrow 1/R$）；以及

- 紧致玻色子与三维时空上的电磁学之间的对偶性（半径与耦合常数相关）。

最后一个例子尤其引人注目，因为它联系了两种看似迥然不同的理论：一个 σ-模型和一个规范理论。在这些对偶性中，两种理论中的算符之间应存在一种变换，使人们能够通过路径积分匹配期望值。从这个意义上说，这种对偶性类似于傅里叶变换。[1]

物理论证如此简单扼要，而这一现象又如此重要，然而竟没有一种数学处理似乎能够充分捕捉或解释这些物理思想，这令人沮丧。本文并不能消除这种沮丧！不过，对于喜爱同调代数和层的人而言，本文确实提供了一种视角，或许能阐明对偶性这一主张的根本含义及其机制；我们希望这能成为迈向更完整、更令人满意的数学表述的一步。

作为对我们主要结果的概述，

- 我们给出了一个严谨的、非微扰的描述，用于刻画阿贝尔p-形式规范理论的模空间；[2] 将BV形式体系与微分上同调综合起来，

- 我们将狄拉克电荷量子化表述为从该模空间中选取一个子空间；

- 我们将阿贝尔对偶性展现为这些电荷量子化模空间之间一个非常简单的映射；[3]并且

- 我们证明，阿贝尔p-形式规范理论等价于阿贝尔$n - p - 2$-形式规范理论与一个拓扑规范理论耦合。[4]

这些结果的完整而精确的表述见第5节。我们的主要工具本质上是上链复形层，因此核心操作归结为运用短正合列和长正合列的熟悉技巧，以及计算整系数德拉姆上同调

[1]关于阿贝尔对偶性已有浩瀚的文献。作为有益的入门读物，我们推荐Witten的文章 [Wit95], 、Verlinde同期发表的论文 [Ver95], 、Witten在IAS的讲座 [Wit99，讲座 8], 以及，尤其是对于T 对偶而言，《大红书》 [Hor+03]。引用这些文献以及其中对它们的引用，将与该主题的大部分研究相衔接；不过，我们还会在行文中提及其他一些经典参考文献，例如 [DT76], 。[2]这里所说的是纯U(1)杨–米尔斯理论的推广，其中运动方程为$\mathrm{d} \star \mathrm{F}_A = 0$。我们将这些理论称为麦克斯韦理论，因为它们推广了电磁学（带有规范势）。[3]请注意，我们断言的是经典理论之间的等价性。这种等价性自动保证量子化之间的等价性，尽管要匹配量子化的（传统）参数化形式可能较为微妙。[4]最后这句话为Moore提出的p-形式难题 [Moo25]提供了一种视角。

。最后，作为进一步的收获，我们说明了为何对这些理论进行紧化会导致有限同伦拓扑场论（即 Dijkgraaf-Witten 型理论）的出现。换言之，我们给出一个简单的拓扑学解释，说明上同调中的挠元如何对物理系统产生影响。

我们在引言的其余部分通过一个详尽的例子勾勒我们的观点，随后将其与先前的工作进行比较，并提及未来发展的一些可能方向。

1.1. **阿贝尔对偶作为导出栈之间的等价：三维概述**。本文的核心目标是用导出栈来表述经典场论，不过只需借助显式的上链复形即可看出其中的关键思想。为了引出这些思想并帮助读者把握方向，我们在此以三维情形为例进行完整说明；在这种情形下，阿贝尔对偶应当给出三维电磁学与三维紧致玻色子之间的等价。[5]（我们将在第2节说明如何将这些上链复形提升为导出栈。）

我们先介绍规范理论，再介绍西格玛模型。

1.1.1. 三维电磁学与上链复形。 为简单起见，我们在带有黎曼度量的 $\mathbb{R}^3$ 上工作。 $\mathbb{R}^3$上的 $U(1)$丛在同构意义下只有一个，我们将其视为平凡丛。给定这一平凡化，规范联络空间同构于 $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$ ；该同构将1-形式A 映为联络 $\mathrm{d} + iA$。丛自同构群 $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^3, U(1))$ 作用于联络空间，而在上述同构下，我们将这一作用表示为

$$g \cdot iA = iA + g^{-1}\mathrm{d}g.$$

If 我们将规范变换写作 $g = e^{if}$，其中 f 是 $\mathbb{R}^3$ 上的实值函数，于是

$$iA \mapsto iA + i\,\mathrm{d}f.$$

正如人们可能从 BRST 形式体系（或微分上同调）中所熟悉的那样，所有这些信息都可以简洁地编码在一个上链复形中

$$\begin{array}{ccc} \underline{-1} & & \underline{0} \\ \mathrm{Map}(\mathbb{R}^3, U(1)) & \xrightarrow{\mathrm{d}\log} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

其中，我们将 1-形式置于零次度，并将规范变换（或鬼场）置于 -1 次度。请注意，微分的像描述了所有与平凡联络规范等价的 1-形式（或联络）。更一般地，该像的每个陪集都描述了联络在规范变换作用下的轨道。最后，微分的核由丛的整体对称性构成。[6]

[5]这种对偶性示例似乎可追溯至 [Pol77]。[6]数学家可能会指出，我们将一个由阿贝尔李群构成的轨形描述为一个上链复形，因为阿贝尔群中的群胚对象等价于两项上链复形。

也可以按照巴塔林–维尔科维斯基（BV）形式主义，用上链复形来施加运动方程。这里我们使用

$$\begin{array}{ccccccc} & \underline{-1} & & \underline{0} & & \underline{1} & & \underline{2} \\ \mathrm{Map}(\mathbb{R}^3, U(1)) & \xrightarrow{-i\mathrm{d}\log} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}\star\mathrm{d}} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

其中，1 次分量由反场组成，而 2 次分量包含鬼场的反场。[7] 注意，映射 d 的核 $\star\mathrm{d}$ 编码了麦克斯韦方程的解

$$\mathrm{d}\star F_A = 0 = \mathrm{d}\star\mathrm{d}A$$

因此，零次上同调由模去规范等价后的解组成。正次数上同调群均消失，正如我们将在正文后面证明的那样。

最后需要指出的是，

$$\mathrm{Map}(\mathbb{R}^3, U(1)) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3)/\mathbb{Z}$$

因为每个规范变换 g 都可以表示为 e^{if}，其中 f 是某个光滑函数，而 f 的取值存在歧义，可相差 $f + 2\pi n$，其中 n 是一个整数。因此，BV 场复形与该复形具有相同的上同调

$$\mathbb{Z} \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{d}\star\mathrm{d}} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^3(\mathbb{R}^3) \tag{1}$$

其中 $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$ 位于零次，因此整个复形位于 -2 与 2 之间。事实上，从该复形到前面提到的 BV 场复形存在一个自然的上链映射，并且它在上同调上诱导出一个同构。（这样的映射称为拟同构。）

在本文后文中，我们将按照 Deligne 复形的风格，将这个复形提升为一个取值于上链复形的层。

1.1.2. 三维紧致玻色子。 紧致玻色子的场由映射 σ 给出，映射的目标是 $U(1)$，其运动方程为 $\mathrm{d}\star\mathrm{d}\sigma = 0$。在 BV 形式体系中，它由上链复形编码：

$$\begin{array}{ccccc} & \underline{0} & & \underline{1} & \\ \mathrm{Map}(\mathbb{R}^3, U(1)) & \xrightarrow{\mathrm{d}\star\mathrm{d}} & \Omega^3(\mathbb{R}^3) & & \end{array}$$

没有鬼场，也没有鬼场的反场。这个复形

$$\mathbb{Z} \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{d}\star\mathrm{d}} \Omega^3(\mathbb{R}^3) \tag{2}$$

是拟同构的，因为任意光滑映射 $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to U(1)$ 都可以表示为 e^{if}，但存在一个整数大小的歧义。

[7] 熟悉 BV 形式体系的读者可能会注意到，我们与标准示例略有不同：我们将规范变换群而非李代数作为鬼场。这种偏离非常有用，正如我们希望在本文中展示的那样。

1.1.3. 作为上链复形同构的对偶性。 显而易见，作为 BV 理论，三维紧致玻色子与三维电磁学并不等价。上链复形 (2) 和 (1) 的上同调不同，因此并非拟同构（更不用说同构）。在这种 BV 理论等价的意义上，对偶性并不意味着这些经典理论相同。

然而，有一些密切相关的经典理论彼此等价。首先，我们将上述描述替换为拟同构的上链复形。例如，在三维电磁学中，考虑如下上链复形

(3)
$$\begin{array}{ccccccc} \underline{-2} & & \underline{-1} & & \underline{0} & & \underline{1} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \xrightarrow{\star \mathrm{d}} & \Omega^1 \\ & & \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{-\kappa \mathrm{d}} & \end{array} .$$

本文很大一部分内容都用于解释这种复形与我们先前写下的复形之间的关系，因此我们暂且不说明为何作此选择。相反，我们将快速分析这个复形，看看它编码了什么信息。

我们指出，这里引入了一个常数 κ ，它应被视为杨–米尔斯理论中典型耦合常数 $1/g^2$, 。这将使对偶性的辨认更加容易。

注意，在零阶，我们要求一个 1-形式 A 和一个函数 f 满足

$$\star F_A = \star \mathrm{d} A = \kappa \, \mathrm{d} f.$$

在这种情况下，由于 $\mathrm{d}^2 f = 0$，我们得到 $\mathrm{d} \star F_A = 0$，这就是麦克斯韦方程。反过来，如果一个 1-形式满足麦克斯韦方程 $\mathrm{d} \star F_A = 0$，那么 $\star F_A$ 必由庞加莱引理知是恰当的，因此存在一个函数 f (一个 势 ，对应于 $\star F_A$)，且除相差一个常数外唯一。在上同调层面，如果两个这样的对 (A, f) 分别相差一个规范变换和一个实数平移，我们就将它们视为相同，因此零阶上同调与满足麦克斯韦方程的 1-形式同构。事实上，正如我们稍后将展示的，复形（3）与 BV 场的复形（1）拟同构。

为得到与对偶性相关的理论，我们以一种简单的方式修改此复形：将 $\mathbb{R}$ 的副本替换为 $\mathbb{Z}$。具体而言，我们研究这个复形

(4)
$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \xrightarrow{\star \mathrm{d}} & \Omega^1 \\ & & \mathbb{Z} & \xrightarrow{e} & \Omega^0 & \xrightarrow{-\kappa \mathrm{d}} & \end{array} .$$

注意，这个复形（4）是复形（3）的一个子复形：它通过将 f 对应的“鬼场”变成 $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{R}$中的副本来施加约束。正如我们稍后将解释的，这种做法

等价于施加狄拉克电荷量子化；我们更愿意称之为电荷离散化。（简言之，我们将实值函数f替换为一个映射 σ，其值落在圆 $\mathbb{R}/e\mathbb{Z}$ 中。）[8]

紧致玻色子允许对该复形进行平行修改

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \Omega^0 & \xrightarrow{\star \mathrm{d}} & \Omega^2 \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{1/e} & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 \end{array} \quad -(1/\kappa)\mathrm{d} \tag{5}$$

注意，零余循环是一对$(f、A)$，满足 $\star \mathrm{d}f = (1/\kappa)\mathrm{d}A$，这意味着 $\mathrm{d} \star \mathrm{d}f = 0$，并且$A$ 由f确定，A 是 $\star \mathrm{d}f$的势，模去一个恰当1-形式。（也就是说，A 是 $\star \mathrm{d}f$的势。）该复形也是紧致玻色子的另一个版本的子复形，与（3）平行。

乍看之下，这两个复形（5）和（4）非常相似，如果交换顶行和底行，使长度相匹配。事实上，它们是同构的：该同构由以下映射组成

- 对于最右侧的项，应用霍奇星算子并按 $1/\kappa$ 进行缩放，
- 将（4）的顶行映射到（5）的底行，但将其按 Ω^0 缩放为 $1/e$，并且
- 将（4）的底行映射到（5）的顶行，但将 Ω^0 和 Ω^1 按 $1/e$进行缩放。

换言之，这些复形描述的是同构的理论，它们通过霍奇对偶以及场与势何者为基本量的互换而相联系。

简言之，我们发现，这些带有电荷离散化约束的广义麦克斯韦理论作为上链复形是同构的。我们从巴塔林–维尔科维斯基的视角来诠释这些上链复形，但重要的是要注意，这需要推广 BV 形式体系：由于电荷离散化约束，由此类复形呈现的模叠只具有移位的预辛结构。（用物理学的术语来说，相应的理论不是拉格朗日理论。）考虑到这一点，采用恰当的框架来表述时，阿贝尔对偶便成为经典场论之间的同构。[9]

1.1.4. 主要结果概述。本文的基本目标是从以下几个方面推广这一观察：

[8]眼光敏锐的读者或许会认出，复形（4）是从复形（3）到$\mathbb{R}/\mathbb{Z}[1]$的一个映射的纤维积，其中后者是$BU(1)$这个模叠的模型。换言之，通常的规范理论有一个自然的线丛，而电荷离散化理论可以看作是该线丛的一个平凡化。[9]事实上，基于脚注8，可以将电荷离散化理论视为广义麦克斯韦理论之间的一种对应。这一观点与将对偶性理解为添加额外的场并积分掉某些场的方式十分契合；我们将在第5.7节讨论这一点。

- 我们允许任意的n维黎曼（或洛伦兹）流形，而不仅限于$\mathbb{R}^3$，并且我们观察到，任何广义 Maxwell 理论在等距嵌入（余维为零）下都会受到限制。

- 我们允许高阶形式规范理论：联络可以是任意p形式，其中$p \leq n-2$。

- 我们证明，电荷离散化的p形式理论与电荷离散化的$n-p-2$形式理论之间存在同构。[10]

- 我们证明，该同构与沿等距嵌入的限制相互交织。

这里的关键在于识别这些理论在时空中的自然函子性，而所使用的数学工具是层理论。

本文的第二个目标是解释这些上链复形如何体现一种更丰富的结构：它们可以增强为导出栈。[11] 这样，我们给出的同构便是时空上的、取值于导出栈的层等价。[12]

最后，作为我们所发展表述的具体成果，我们仔细计算了紧化，从而对物理学文献中的相关论断进行了有趣的精化。

1.2. **关于既有工作及本文的新颖之处。** 关于微分上同调等复杂数学工具如何阐明规范理论，已有大量先前研究。随着我们逐渐理解高阶阿贝尔规范理论，我们反复研读 Freed、Moore 和 Segal 的论文 [FMS07a； FMS07b], Brylinski 的开创性工作 [Bry08], 以及nLab，在那里我们汲取了许多洞见——这些洞见大概主要归功于 Fiorenza、Sati 和 Schreiber——了解微分上同调如何关联高阶几何与导出几何，以及 [FH00； Bec+17]。Moore 和 Saxena 最近的 TASI 讲座[MSF25] 从更为物理的视角出发，对这些内容进行了精湛且极为全面的论述。我们强烈推荐这些资料，作为开始探索相关文献的起点。本文的第一部分，以及贯穿全文的许多评论，包含了我们对这些思想和洞见的理解。

我们的一个重要目标是展示，将这些见解与场论的巴塔林–维尔科维斯基形式体系结合起来是多么容易；该形式体系通常主要用于处理微扰问题。更确切地说，我们展示了导出栈框架如何进一步阐明通过引入叠而开启的规范理论研究。[13]

[10]曲率是 $p+1$- 形式和 $n-(p+1)$- 形式，并且二者应当互为霍奇对偶。[11]微扰 BV 理论已经拥有一种以形式导出栈的语言为基础的系统性描述。[12]用物理学的语言来说，我们得到的是经典理论的一种全局（非微扰）等价。[13]例如，Hopkins 和 Singer 提到，通过群胚来理解微分上同调很有裨益；Sati、Schreiber 及其合作者进一步推进并运用了这种栈化观点。我们期待最近的工作 [Bun+26]能够以类似的方式处理非阿贝尔规范理论，尽管其技术层面的难度要大得多。关于 BV 理论应如何与导出几何衔接的概述，参见 [AY23]。

本文第二部分提出了一种阿贝尔规范理论的替代描述。据我们所知，这种描述最早见于 [SW 23], ，并展示了在这种描述中，狄拉克电荷量子化的处理十分简洁。[14] 对偶性由此成为显而易见的复形同构。最后，我们进行了一些直接的层计算，以简洁的方式证实了物理学家关于高阶规范理论紧化的论断。

对我们而言，本文是研究和量子化诸如六维流形上的自对偶 2-形式规范理论及其相关理论的一项初步工作，例如已知为阿贝尔张量多重态的六维 $\mathcal{N} = (1,0)$ 超共形理论的全纯扭曲。我们的研究风格借鉴了 Beilinson 和 Drinfeld 关于手征共形场论的工作。我们希望先在物理学和数学都更为人熟知、文献记载也更充分的例子上校准我们的方法。[15]

1.3. **致谢**。多年来，我们从与许多人的交流中获益良多，他们都曾探讨这一主题，包括 David Ayala、Ilka Brunner、Kevin Costello、Daniel Grady、Andres Klene-Sanchez、Isaac Pliskin、Surya Raghavendran、Alex Schenkel、Mayuko Yamashita 和 Philsang Yoo。在撰写本文期间，Severin Bunk、Vivek Saxena 和 Grisha Taroyan 对稿件提出了极有帮助的意见，也就这一主题相关的数学和物理学进行了有益的交流。

美国国家科学基金会通过 DMS 项目资助 2042052 资助了 O.G.。此外，他于 2024年秋季 在马克斯·普朗克数学研究所休假期间，得以在一个绝佳的地方探索并撰写这些思想；他对此支持深表感谢。

本研究由德国研究联合会（DFG）根据项目编号 517493862（超对称性的同调代数：局域性、幺正性、对偶性）资助。I.A.S. 也感谢马克斯·普朗克数学研究所在 O.G. 休假期间接待他来访，并感谢巴伐利亚自由州在本研究开展期间提供的支持。

2. 高形式规范理论的数学框架

本文使用了大量数学工具，我们将在此加以介绍。想尽快了解本文核心内容的读者，可以略过第一小节；该小节回顾了如何通过上链复形层来表述 BRST 和 BV 形式体系中的阿贝尔规范理论。第二小节则将这些思想置于派生几何和高阶几何的当代框架中。最后，第三小节讨论我们关于层、范畴等的约定和记号。

2.1. **我们的工作背景：面向物理学家或偏好计算方法的人，以及一个谜题**。

我们将用阿贝尔群的上链复形层来描述经典场论。听起来或许抽象，但在实践中，这意味着对微分

[14]这种表述与 [FH00],中的评论非常接近，只不过运动方程是上同调地施加的。[15]我们的方法受到 [Ell19], 的启发，但采用了截然不同的路径。

形式和整系数上同调进行熟悉的操作。换言之，只要熟悉基础微分几何和代数拓扑，下面的所有构造也都不陌生。

例如，定向三维流形 M 上的阿贝尔陈-西蒙斯理论由以下层描述：[16]上链复形

$$\mathcal{A}: \quad \mathbb{Z} \to \Omega^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2 \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^3 \tag{6}$$

其中， Ω^1 位于0度，因为场的主要类型是联络1-形式。[17] 位于 -2 度的 $\mathbb{Z}$表示局部常值层。其中包含它是为了编码规范群：注意，对于U 这个开球，

$$\Omega^0(U)/\mathbb{Z} \cong \mathrm{Map}_{C^\infty}(U, S^1)$$

由于$S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，所以 $\mathcal{A}(U)$ 的 -1 度上同调恰好是规范群。在任意开集$V \subset M$上， $\mathbb{Z}$ 在V 上的导出整体截面与奇异上链$C^\bullet(V, \mathbb{Z})$拟同构，因此导出整体截面编码了关于V的微妙拓扑信息。

在微扰理论框架下，阿贝尔平坦联络的模叠（在任意平坦联络处）的切复形是（移位后的）德拉姆复形

$$\Omega^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2 \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^3,$$

集中在 -1 至2度，其中 Ω^1 再次位于0度。这个上链复形在典型的BV/BRST方法中用于微扰性陈-西蒙斯理论，是很熟悉的。注意，去掉 $\mathbb{Z}$后，我们现在只有规范李代数 Ω^0，因此可以看到，$\mathbb{Z}$ 副本的出现编码了阿贝尔陈–西蒙斯理论的（至少部分）非微扰信息。让我们更明确地了解这些信息。

有两种明确的方法可以计算 3 维流形M上这个场层的上同调：

(1) 选取 M 的一个好覆盖，并使用 Čech 复形（这里是一个双复形）； or

(2) 使用由短正合列导出的上同调长正合列

$$\cdots \to H^{k+1}(M, \mathbb{R}) \to H^k(M, \mathcal{A}) \to H^{k+2}(M, \mathbb{Z}) \to H^{k+2}(M, \mathbb{R}) \to \cdots$$

由短正合列导出

$$0 \to \Omega^\bullet[1] \to \mathcal{A} \to \mathbb{Z}[2] \to 0$$

层的。

[16]这里有一些微妙之处，我们在第 2.[17]这个层 $\mathcal{A}$ 是光滑 Deligne 上链的一种形式，并出现在有关微分上同调的研究中。

例如，考虑我们从方法（2）中看到的关于$H^0(M,\mathcal{A})$ 的内容：它处于一个正合列中

$$0 \to H^1(M,\mathbb{R})/H^1_{\text{free}}(M,\mathbb{Z}) \to H^0(M,\mathcal{A}) \to H^2_{\text{tors}}(M,\mathbb{Z}) \to 0$$

其中下标表示整系数上同调的自由部分或挠元部分。

作为一个具体例子，设$M = \Sigma_g \times \mathbb{R}$，其中 Σ_g 是一个闭定向二维流形。那么我们已经证明

$$H^0(M,\mathcal{A}) = H^0(\Sigma_g,\mathcal{A}) \cong \mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g} \tag{7}$$

是描述 Σ_g 上平坦$U(1)$丛的环面。

对于任意定向三维流形 M，这个上同调群 $H^0(M,\mathcal{A})$ 应当编码壳上场，也就是运动方程的解；在这里，这些解应当是带有平坦联络 ∇ 的主 U(1) 丛 L。这样的解有一个底层主丛 L，其第一陈类 $c_1(L) \in H^2(M,\mathbb{Z})$ 必须是挠元，因为它的曲率 F_∇ 是平坦的，因此它的实上同调类是 $[F_\nabla] = 0$，属于 $H^2(M,\mathbb{R})$。另一方面，我们可以通过添加一个闭 1-形式 A，将 ∇ 修改为另一个平坦联络，从而在 L 上得到新的平坦联络 $\nabla + A$。如果我们将 U(1) 视为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$,[18]，那么当 A 与 A' 的差 $A - A'$ 是一个具有整周期的 1-形式时（也就是说，它们在 L 上产生相同的整体或平行移动），A 和 A' 确定同一个新的平坦联络。

一般而言，我们将以类似的风格描述我们的场论：给出一个上链复形层，并说明上同调如何编码通常的物理内容。

此时，这种方法可能会让人觉得有些令人困惑：物理内容与数学背景之间似乎存在某种不匹配。从场论的角度来看，人们会预期运动方程的解构成一个空间，类似于流形。例如，我们希望将（7）的环面视为一个流形。[19] 但从数学上来说，我们只将 $\mathcal{A}$ 指定为一个上链复形层，因此上同调群（7）只是一个没有拓扑或光滑结构的阿贝尔群。

我们如何调整对 $\mathcal{A}$ 的看法，以纳入那些似乎对物理学至关重要的更丰富信息？仅仅像上文那样使用 $\mathcal{A}$ 是不够的。[20]

我们在这里采用的方法是将 $\mathcal{A}$ 视为一个取值于高阶几何与导出几何、而非上链复形的层。我们将在下一节（并在第A节中更详细地）说明如何做到这一点。不过，在许多情况下，读者可以将这一设定视为黑箱，直接

[18]更常见的做法是使用 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，但这意味着我们必须通过乘以 2π来调整层 $\mathbb{Z} \to \Omega^0$ 。本文中，我们将始终使用同构 $\theta \mapsto \exp(2\pi i\theta)$，将 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 映到 U(1)。[19]群 $H^{-1}(M,\mathcal{A})$编码了“解空间”上轨形结构的对称性数据。[20]一种做法是将这些上链复形视为取值于拓扑阿贝尔群（或类似的对象，例如有界阿贝尔群）。本文不采用这种方法，不过这种方法可能很有成效。关于这类处理方式以及一种量子化方法，参见 [Bec+17]及其相关论文。

使用上链复形层，直到更微妙的问题使得必须深入黑箱内部。

2.2. **关于这一背景的高阶评论**。 对于希望进一步了解精确数学背景的读者，我们在此作一些导引性的说明。第 A 节将提供更为详细的讨论。

受 BRST 和 BV 形式体系的启发，我们将流形 M上的经典场论视为一个取值于导出栈的层 $\mathbb{S}$，其中通常还配备某种移位辛结构、预辛结构或泊松结构。特别地，我们有一个函子

$$\mathbb{S} : \mathsf{Open}(M)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{S}\mathrm{tacks}\,.$$

给定一个开集U，导出栈 $\mathbb{S}(U)$ 应被视为区域U上运动方程的解空间；换言之，即U上的“壳上场”。

我们强调，这一观点以非常精确的方式体现了物理学家的理念：理论仅由 $\mathbb{R}^n$ 上的局部数据（或其中的一个开球）以及某些几何数据所规定，例如度量或自旋结构。层论负责将这一描述扩展到更一般的时空流形类。

本文将聚焦于一类特殊的理论：其中 $\mathbb{S}$ 取值于阿贝尔群导出栈。这意味着两个解可以“相乘”或“相加”。例如：

- 自由无质量标量场。由于运动方程是线性的，解空间是一个向量空间，因此也是一个阿贝尔群。
- 取值于$S1$ 的非线性 σ-模型，并配备平坦度量（因为S^1 本身就是一个阿贝尔群）。
- 阿贝尔规范理论，其中一个解是由$(L \to M, \nabla_L)$ 组成的一对：一个$U(1)$-丛$L \to M$ 以及其上的联络 ∇_L，满足 $\mathrm{d} \star F_\nabla = 0$；我们将其称为***Maxwell*** 理论。这里的群运算是线丛的张量积与联络的相加。

表面上看，这些例子或许相当不同，但它们有一个共同点：$\mathbb{S}$ 都可以视为某种 σ-模型： $\mathbb{S}$ 相当于映射到导出栈中的一个阿贝尔群对象，因此阿贝尔群结构继承自靶空间。

这类理论通常可以用简洁的方式呈现： $\mathbb{S}$ 由取值于阿贝尔群的上链复形的预层 S 在 M上呈现，因此只需采用具体且熟悉的构造，而不必使用导出几何中更复杂的方法。例如，下面我们将使用 Deligne 型复形来描述阿贝尔p-形式规范理论。

现在，我们概述采用此类上链复形层的理由。

核心思想是，导出栈 $\mathbb{X}$ 是某种特定类型的函子

$$\mathbb{X} : \mathsf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathsf{paces}$$

从测试对象范畴 T（例如导出仿射概形或微分分次流形）到 $\mathcal{S}$paces，这样我们就可以用 $\mathsf{Fun}(\mathsf{T}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathsf{paces})$ 来理解 $\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{S}\mathrm{tacks}$。由于我们研究的是阿贝尔理论，因此希望函子经过 $\mathsf{Ab}(\mathcal{S}\mathsf{paces})$，即 $\mathcal{S}$paces 中的阿贝尔群对象。现在，$\mathcal{S}$paces 是 sSet 在弱同伦等价处的 ∞-范畴局部化（依照 Kan），而 sSet 中的阿贝尔群对象 $\mathsf{Ab}(\mathsf{sSet})$ 与单纯阿贝尔群 sAb 相同。因此，我们可以通过给出一个函子来呈示 $\mathbb{X}$

$$X : \mathsf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{sAb}$$

然后将 $\mathbb{X}$ 识别为复合函子

$$\mathsf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{sAb} \to \mathsf{Ab}(\mathcal{S}\mathsf{paces})$$

其中最后一步由局部化函子 $\mathsf{sAb} \to \mathsf{Ab}(\mathcal{S}\mathsf{paces})$ 给出。不过，还有一种更熟悉的方式可以构造这样的导出栈。

回想一下，任意阿贝尔群的上链复形 $A^\bullet$ 都可以分两步确定一个单纯阿贝尔群：首先，对非正次数中的复形进行智能截断

$$\tau_{\leq 0} A^\bullet = (\cdots A^{-2} \to A^{-1} \to Z(A^0) \to 0 \cdots)$$

然后应用 Dold–Kan 对应。[21] 我们将所得结果记为 $[A^\bullet]$ 于是得到一个复合函子

$$[-] : \mathsf{Ch}(\mathsf{Ab}) \to \mathsf{sAb}$$

将上链复形转化为单纯阿贝尔群。

给定一个层，

$$A : \mathsf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ch}(\mathsf{Ab}),$$

用这个函子进行后复合，便确定了一个导出栈

$$\mathbb{A} : \mathsf{T}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{A} \mathsf{Ch}(\mathsf{Ab}) \xrightarrow{[-]} \mathsf{sAb} \to \mathsf{Ab}(\mathcal{S}\mathsf{paces}).$$

由于这种函子性，追踪对层 A 的操作如何对应于对栈 $\mathbb{A}$的操作，通常很直接。

综上，我们将场论视为给出一个函子

$$\mathbb{S} : \mathsf{Open}(M)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Fun}(\mathsf{T}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathsf{paces})$$

或者等价地，一个函子

$$\mathbb{S} : \mathsf{Open}(M)^{\mathrm{op}} \times \mathsf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathsf{paces}\,.$$

[21]本文始终采用上链复形，而非同调意义上的链复形。这一选择会使许多常用约定中的分次反转。因此，对我们而言，Dold–Kan对应是单纯阿贝尔群与非正分次上链复形之间的对应。

在我们的设定中，我们假设解总是构成一个导出阿贝尔群栈，因此目标是 Ab（$\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{S}\mathrm{tacks}$）。因此我们可以表示 S 为一个函子

$$S : \mathsf{Open}(M)^{\mathrm{op}} \times \mathsf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ch}(\mathsf{Ab}),$$

也称为阿贝尔群的上链复形预层。

我们简要讨论两个例子。首先，描述M 上的微分形式（固定次数），因为它们在全文中都发挥着关键作用。这一构造的变体可用于构建我们使用的大多数例子。其次，简要讨论前一节中的阿贝尔陈-西蒙斯理论。

例 2.1. 给定一个光滑流形M，考虑函子

$$\Omega^k_M : \mathsf{Open}(M)^{\mathrm{op}} \times \mathsf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathsf{paces}$$

其中

$$\Omega^k_M(U, \mathcal{M}) = \{\text{sections of the bundle } \pi^*(\Lambda^k T^* U) \to U \times \mathcal{M}\}$$

其中 $\mathcal{M}$ 表示 T 中的一个对象， $\pi : U \times \mathcal{M} \to U$ 是投影映射。此函子编码了参数空间 $\mathcal{M}$上的族中的k形式。此函子给出了一个取值于导出栈的 $\mathsf{Open}(M)^{\mathrm{op}}$ 上的函子 Ω^k_M。$\Diamond$

例 2.2. 阿贝尔陈-西蒙斯理论研究定向三维流形 $U(1)$-丛的模空间 M。考虑我们先前引入的（6） $\mathcal{A}$（称为光滑 Deligne 复形）。对于每个开集$U \subset M$ 以及每个测试空间$T \in \mathrm{T}$，上链复形 $\mathcal{A}(U,T)$ 确定一个单纯集合，因而确定一个 ∞-群胚，它编码T族的$U(1)$-丛在U上的平坦结构。$\Diamond$

因子 $\mathsf{Open}(M)^{\mathrm{op}}$ 编码了导出栈如何随时空M变化，而因子 T^{op} 编码了导出栈 $\mathbb{S}(U)$ 在固定开集U上的结构。例如，对于固定的U，取 T 中的一个点 $*$，只会返回U上的解的原始集合 $\mathbb{S}(U, *)$，作为一个 ∞-群胚；它没有“几何”结构，只有一个同伦型。取实数直线 $\mathbb{R} \in \mathrm{T}$，可以识别$U$上解的一维族。如果加厚点 $\mathsf{Spec}(\mathbb{R}[\epsilon]/(\epsilon^2))$ 属于 T，它就会返回每个解处的切方向。

可以通过将范畴 $\mathsf{Open}(M)$ 替换为时空流形的一个位点，从固定流形M 推广出去。例如，可以在 Riem_n上工作；它是黎曼n维流形的位点，与欧几里得号差下的规范理论相关。在 Chern-Simons 示例中，自然的位点是定向3维流形及保持定向的嵌入。

请注意： 下文通常会 着重讨论时空的依赖关系 并 在记号和讨论中省略对测试对象 T的依赖关系。我们将在 A 节中通过点函子，详细介绍作为模空间的关键示例。A。

注记2.3。测试位点 T 的性质会影响能够恢复哪类信息。例如，在 T 中纳入“厚点”（其函数环是阿廷代数），便能

获取“微扰”信息；用数学术语来说，这意味着可以进行变形理论。对于我们的阿贝尔理论，这使我们能够恢复微扰 BRST复形，从而考察规范变换的李代数。类似地，在 T 中纳入“导出”方向，例如其函数环是非正次数微分分次交换代数的导出概形，便能恢复呈现导出阿贝尔群栈 $A^\bullet$ $\mathbb{A}$ 的上链复形正次数部分中的信息。这一特性很有用，例如可用于识别反场。$\Diamond$

2.3. **记号与约定**。

2.3.1. 关于范畴。 我们将使用若干彼此密切相关的范畴和 ∞-范畴（或者更确切地说，$(1,1)$-范畴和 $(\infty,1)$-范畴）。请注意，经典意义上的范畴是一种特殊的 ∞-范畴，因此除非为了澄清而需要加以区分，我们通常用“范畴”一词指 ∞-范畴。

下面介绍其中最重要的几种:

- Ab 表示阿贝尔群及其群映射构成的 1-范畴。
- $\mathsf{Ch}_{\mathbb{Z}}$ （或者等价地，采用前文的记法，$\mathsf{Ch}(\mathrm{Ab})$ ）表示阿贝尔群的上链复形及其上链映射构成的 1-范畴（即逐级作用且与微分相容的群映射）。
- $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}} = \mathcal{D}(\mathsf{Ch}_{\mathbb{Z}})$ 表示通过对拟同构局部化 $\infty\mathsf{Ch}_{\mathbb{Z}}$ （将其视为一个 ∞-范畴）所得到的稳定 [22] -范畴。其同伦范畴传统上称为导出范畴，不过我们也直接用这个术语指代 ∞-范畴。
- 单纯集合表示单纯集及单纯映射构成的 1-范畴。
- $\mathcal{S}$paces 表示将单纯集合（作为 ∞-范畴）在弱等价处局部化后得到的 ∞-范畴。
- Top 表示拓扑空间及连续映射构成的 1-范畴。它在弱同伦等价处的 ∞-范畴局部化同样是 $\mathcal{S}$paces。

因此，存在如下函子（ ∞-范畴之间的函子）：

$$\mathsf{Ch} \to \mathcal{D}(\mathsf{Ch}_{\mathbb{Z}}) = \mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$$

and

$$\mathsf{Top} \to \mathcal{S}\mathsf{paces}$$

and

$$\mathsf{sSet} \to \mathcal{S}\mathsf{paces}$$

我们将反复运用这一点，因为只要给出一个取值于链复形范畴$_{\mathbb{Z}}$ 、Top 或 sSet 的函子，就能立即得到一个取值于它们的局部化中的函子。尤其是，如果我们给出一个预层（即

[22]这个范畴是 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{Z}}$，作为一个 1-范畴，在拟同构处局部化所得。

函子），其取值于这些范畴之一，并借助同调代数或代数拓扑中的经典方法，那么就能免费得到一个高阶范畴版本。

对于诸如sSet这样的范畴，我们将 $\mathsf{Ab}(\mathsf{sSet})$ 记作 sSet 中阿贝尔群对象及其映射所构成的范畴。[23] 该范畴与单纯阿贝尔群范畴 sAb 同构。我们还将 $\mathbf{Ab}(\mathcal{S}\mathbf{paces})$ 记作 ∞-范畴 $\mathcal{S}\mathbf{paces}$ 中阿贝尔群对象所构成的范畴。从某种意义上说，这是一个更复杂的构造，因为阿贝尔群对象这一结构所包含的数据涉及同伦相干性。

注 2.4。 注意，$\mathbf{Ab}(\mathcal{S}\mathbf{paces})$ 等价于 ∞-范畴 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}^{\leq 0}$，后者是对 $\mathbf{Ch}_{\mathbb{Z}}^{\leq 0}$ 在拟同构处局部化所得的范畴；$\mathbf{Ch}_{\mathbb{Z}}^{\leq 0}$ 是由集中在非正次数的上链复形构成的子范畴（即“连通”上链复形）。截断函子 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{D}_{\mathbb{Z}}^{\leq 0}$ 是右伴随，因此保极限。$\Diamond$

类似地，对于任意环 R，都有一个左 R-模构成的阿贝尔范畴，而 $\mathbf{Ch}_R$ 表示 R-模的上链复形范畴。我们用 $\mathcal{D}_R = \mathcal{D}(\mathbf{Ch}_R)$ 表示在拟同构处局部化后得到的稳定 ∞-范畴。

2.3.2. 关于层。 预层和层有许多种形式，具体取决于位点（它们的定义域）及其取值（它们的陪域）。在实践中，我们通常会将位点 $\mathcal{C}$上的预层描述为一个 1-范畴函子

$$F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ch}_{\mathbb{Z}}$$

然后将其视为一个 ∞-范畴函子的呈现

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$$

通过复合

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{F} \mathsf{Ch}_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{D}_{\mathbb{Z}}\,.$$

为了区分这些函子，我们将 F 称为一个取值于 $\mathbf{Ch}_{\mathbb{Z}}$的预层，而将其伴随对象 $\mathcal{F}$ 称为一个取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$的预层。

层的情况要微妙得多，因为层满足由位点上的 Grothendieck 拓扑所决定的局部到整体条件。这些条件涉及目标范畴中的极限，因此，取值于 $\mathbf{Ch}_{\mathbb{Z}}$ 的层不会自动成为取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$的层。

另一方面，预层总是可以通过层化确定一个层（这是从层到预层的遗忘函子的伴随函子）。因此，我们通常会通过给出一个取值于 $\mathbf{Ch}_{\mathbb{Z}}$ 的预层 F，再将其视为一个取值于$\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$的预层，最后对其进行层化，来表示一个取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ 的层 $\mathcal{F}$。

[23]因此，Ab 是$\mathsf{Ab}(\mathsf{Set})$的简写，表示集合范畴中的阿贝尔群对象。15

准确地说，我们用 $\mathcal{S}\mathsf{hv}(S,\mathcal{D}_{\mathbb{Z}})$ 表示位点 S 上取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$的层所构成的 ∞-范畴。具体而言，这指的是函子（即预层）的 ∞-范畴化局部化

$$\mathcal{PS}\mathsf{hv}(S,\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}) = \mathrm{Fun}(S^{\mathrm{op}},\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}) \to \mathcal{S}\mathsf{hv}(S,\mathcal{D}_{\mathbb{Z}})$$

在茎态拟同构下。我们使用的所有位点都有足够多的点，因此这一概念性质良好。（换言之，我们要求相对于超覆盖满足下降。）

注记 2.5. 由于截断 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{D}_{\mathbb{Z}}^{\leq 0} \simeq \mathsf{Ab}(\mathcal{S}\mathrm{paces})$ 保持极限，因此我们看到，取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ 的层经截断后，成为取值于阿贝尔 ∞-群胚的层。$\Diamond$

当我们谈到取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ 的层 $\mathcal{F}$ 在 M 上的“整体截面” $\mathcal{F}(M)$ 时，指的是它在该 ∞-范畴中的取值。实际中，$\mathcal{F}(M)$ 的上同调，就是任意一个取值于链复形范畴 $\mathsf{Ch}_{\mathbb{Z}}$ 、定义在 M 上并呈现 $\mathcal{F}$ 的层 F 的超上同调。注意，若 F 只是一个取值于阿贝尔群范畴 Ab 的层，那么 $\mathcal{F}$ 的整体截面就是整体截面的导出函子应用于 F 的结果，也称为 F 的（传统）层上同调。因此，我们可以用“$\mathcal{F}$ 的上同调”来指取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ 的层 $\mathcal{F}$ 的这些（导出的）整体截面。

注意，我们因此可以通过描述一个取值于链复形范畴的层 F 局部来呈现这样的层 $\mathcal{F}$，也就是说，给出它在坐标球上的取值。我们也会自由地使用例如在局部可见的短正合列。

2.3.3. 关于高阶丛。我们选择讨论高阶丛，而不是高阶 gerbe。流形M 上的$U(1)$ p-丛在同构意义下由分类空间$B^pU(1)$中映射空间$(M,B^pU(1))$ 的连通分支分类。注意，1-丛恰好是主$U(1)$丛，而 2-丛恰好是$U(1)$-丛格。

我们通常用黑板粗体表示导出栈。例如——并预先引入稍后出现的模空间——我们用 $\mathbb{B}\mathrm{un}_1$(M) 表示 n 维流形 M 上主 U(1) 丛的模空间，用 $\mathbb{B}\mathrm{un}^p$(M) 表示 n 维流形 M 上主 U(1) p-丛的模空间；其中，p-丛指的是“高阶”群 $\mathbb{B}^p$U(1)的主丛，该群是导出光滑几何中的群对象，其底层同伦型为 B^pU(1)。类似地，$\mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,n}$(M, g) 表示 M 上配备度量 g 的 p-形式麦克斯韦规范理论的解的模空间（联络的曲率 F_A 必须满足 $\mathrm{d}\star\mathrm{F}_A = 0$）。

需要牢记的是，许多不同的上链复形都呈现同一个导出栈。

我们通常用罗马字母表示（上链复形的）层，因此 $\mathrm{Mxw}_{p,\ n}$ （如下文定义 3.5所述）表示一个特定的层，其导出整体截面Mxw,（M）给出了导出栈 $\mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,n}$（$M$）。不过，$\mathrm{Mxw}_{p,n}$ （定义4.3）是另一个这样的层，也给出了 $\mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,n}$（$M$）。

2.3.4. 时空的位点。任意流形 M 确定一个范畴 Open（M），它由开集偏序集给出。M 的通常拓扑在 Open（M）上确定一个 Grothendieck 拓扑，从而使其成为一个位点。

我们还需要用到其他位点，它们涵盖了具有某种共同特征的大类时空。以下四个位点在研究麦克斯韦理论时自然会出现，不过也有许多变体可纳入其他拓扑和几何结构（例如自旋结构或辅助丛）。

令 Riem_n 表示这样一个位点：其对象是配备黎曼度量的n维流形，态射为等距嵌入，并且覆盖 $\{f_i : U_i \to M\}_{i\in I}$ 表示M 中所有像的并集为M。

令 $\mathrm{Riem}_n^{\mathrm{or}}$ 表示这样一个位点：此外，流形还带有定向，且态射保持定向。等价地，每个对象 (M,g) 都有一个指定的处处不为零的顶阶形式 vol_g，它编码了体积。这些数据确定了M上的 de Rham 形式上的 Hodge 星算子 $\star$。[24]

令 Lrtz_n 表示这样一个位点：其对象是配备 Lorentz 度量的n维流形（即符号为$(-,+,\dots,+)$的伪度量），态射为等距嵌入，并且覆盖 $\{f_i : U_i \to M\}_{i\in I}$ 表示M 中所有像的并集为M。

令 $\mathrm{Lrtz}_n^{\mathrm{or}}$表示这样的位点：此外，流形带有定向，且态射保持定向。等价地，每个对象(M,g) 都有一个指定的处处非零顶阶形式 vol_g，用于编码体积。这些数据确定了M上的 de Rham 形式所具有的 Hodge 星算子 $\star$。

3. 阿贝尔p形式规范理论

本节将回顾以 Deligne 复形形式呈现的微分上同调，然后在这一框架中构建高阶规范理论。

3.1. 光滑 Deligne 上同调。

存在一个上链复形层，用以呈现阿贝尔p形式规范理论（即 Maxwell 版本或 Yang–Mills 版本）。我们将分阶段构造它。

首先，作为 de Rham 复形的近亲，我们引入光滑 Deligne 复形。它将局部常值映射到圆群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的层作了解消，正如 de Rham 复形解消局部常值实值函数（或映射到 $\mathbb{R}$的函数）的层一样。

定义 3.1. 在一个光滑的n维流形M上，光滑的***Deligne*** 复形 $\mathcal{D}\mathrm{el}_M$ 是取值于链复形范畴 $\mathrm{Ch}_{\mathbb{Z}}$ 的层，由以下上链映射的映射锥给出

$$\mathbb{Z}_M[1] \to \Omega^{\bullet}_M$$

[24]可以通过用定向丛扭曲德拉姆复形，在不可定向流形上定义霍奇星算子；欢迎读者将下文的讨论推广到这种情形。

该映射将一个整数映到M上的一个常值 0-形式。（这里， $\Omega^{\bullet}{}_M$ 表示作为层的德拉姆复形，而 $\mathbb{Z}_M$ 是茎为 $\mathbb{Z}$的常值层。）更明确地说， $\mathcal{D}\mathrm{el}_M$ 是复形

$$\begin{array}{ccccc} \underline{-1} & & \underline{0} & \cdots & \underline{n} \\ \mathbb{Z}_M & \longrightarrow & \Omega^0_M & \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^n_M. \end{array}$$

$\mathcal{D}\mathrm{el}_M$ 存在自然截断，其本身就具有丰富的含义。

定义 3.2. 令 $\mathcal{D}\mathrm{el}^{\leq}{}_{p\,M}$ 表示截断层复形

$$\begin{array}{ccccc} \underline{-1} & & \underline{0} & \cdots & \underline{p} \\ \mathbb{Z}_M & \longrightarrow & \Omega^0_M & \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p_M. \end{array}$$

例如，

$$\mathcal{D}\mathrm{el}^{\leq 0}_M = (\mathbb{Z}[1] \to C^\infty_M)$$

它解析了层 $\mathrm{Map}(-, S^1)$ ，即映入圆的光滑映射层

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U(1)$$

因为在M上局部地，任何映入S^1 的映射都能提升为映入 $\mathbb{R}$ 的映射，但这样的提升有整数多个。

上同调群[25] $H^0(M, \mathcal{D}\mathrm{el}^{\leq}{}_{p\,M}\ [p])$ 也称为微分上同调群 $\check{H}^{p+1}(M)$，因此受到物理学家和数学家的广泛关注，但其他上同调群也包含重要信息。我们将整个复形$\mathcal{D}\mathrm{el}^{\leq}{}_{p\ M}\ [p]$ 视为对带联络的p-丛高阶栈 $\mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}{}_p(M)$ 建模（或者，如果更习惯这种说法，也可以视为对带联络的$U(1)\ p\ -1$-丛格高阶栈建模）。因此，它模拟了p-形式规范理论的 BRST 场内容，正如下文将要看到的。局部地，这个移位复形是

$$\mathbb{Z}_M[p+1] \to \Omega^0_M[p] \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^p_M$$

其中 $\Omega^p{}_M$ 位于次数 0，因此，在 M上局部地，次数 0 的元素 A 是一个 p-形式，它编码了一个“联络 p-形式”；而次数 -1 的元素则编码一个规范变换，依此类推。（参见 [Bry08; Gaj97; FMS07a; FMS07b; Bun21]以了解相关论述。）关于具有非平凡拓扑的流形上的上同调计算（其中展现了更微妙的特征），请参见第 3.7 节。

定义 3.3。 令 $\mathrm{Bun}^{\nabla}{}_p$ 表示取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ 光滑流形位点上的层，其局部取值为

$$\mathbb{Z} \to \Omega^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^p$$

集中在 $-p\ -1$ 到 0 次，因此 Ω^p 位于零次。

[25]这里的意思是，如第 2 节所述，导出整体截面，或超上同调。

换句话说，限制在固定流形 M 上时，这个层 $\mathbf{Bun}^{\nabla}_p \;\big|_M$ 由刚才描述的截断（并移位的）Deligne 复形 $\mathcal{D}\mathbf{el}^{\leq}_{p\,M}\;[p]$ 表示。

由 $\mathbf{Bun}^{\nabla}_p(M)$ 呈现的导出栈是 $\mathbb{B}\mathbf{un}^{\nabla}_p(M)$。请注意，还有其他上链模型可以呈现 $\mathbb{B}\mathbf{un}^{\nabla}_p(M)$，例如 Cheeger 和 Simons 的微分特征类。

还有另一种重要的截断类型。

定义 3.4. 对于$p \;< n$，令 $\Omega^{p+1}\;\mathbf{cl}$ 表示光滑流形位点上的 $\mathbf{Ch}_{\mathbb{Z}}$ 值层

$$\Omega^{p+1} \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{n} \cdots$$

其所在次数为 0 到$n \;- p \;- 1$。我们称其为闭 $p \;+ 1$-形式层。

在维数为n的流形M 上，限制 $\Omega^{p+1}\;\mathbf{cl}\big|_M$ 集中在次数 0 到$n \;- p \;- 1$。

请注意，$\Omega^{p+1}\;\mathbf{cl}$ 是闭p+1-形式预层的层化的一个分解。因此，我们将其视为呈现适当的闭 $p \;+ 1$-形式导出栈。

在任意流形 M 上，都存在一个层的短正合列

$$0 \to \Omega^{p+1}_{\mathrm{cl}}[-(p+1)] \to \mathcal{D}\mathbf{el}_M \to \mathcal{D}\mathbf{el}^{\leq p}_M \to 0$$

其取值于链复形范畴$_{\mathbb{Z}}$。它表明，研究$U(1)$的局部常值系数上同调，相当于研究闭p-形式，以及在同伦意义下由p-形式给出的平凡化选择。

如果我们将这个序列平移

$$0 \to \Omega^{p+1}_{\mathrm{cl}}[-1] \to \mathcal{D}\mathbf{el}_M[p] \to \mathbf{Bun}^{\nabla}_p \;\big|_M \to 0,$$

它就给出了一个有趣的映射

$$\mathbb{B}\mathbf{un}^{\flat}_p(M) \to \mathbb{B}\mathbf{un}^{\nabla}_p(M)$$

在模空间之间：

- 序列中的中间项给出了M上带有平坦联络的p-丛的模空间 $\mathbb{B}\mathbf{un}^{\flat}_p(M)$ 的$U(1)$；
- 右侧的映射是到带联络的$U(1)$ p-丛的模空间的遗忘映射；并且
- 该映射的纤维是对联络曲率进行平凡化的数据。

上同调长正合列中的连接映射由p-丛上一个（不一定是平坦的）联络的曲率给出。也就是说，它给出了一个映射

$$\mathbb{B}\mathbf{un}^{\nabla}_p(M) \xrightarrow{\mathrm{curv}} \mathbb{C}\mathbf{lsdFrm}^{p+1}(M)$$

导出栈。（仅在此处，我们使用记号 $\mathbb{C}\mathbf{lsdFrm}^{p+1}(M)$ 表示$p \;+ 1$-形式在M上的闭形式栈。）

3.2. **与物理学的联系**。除了霍奇星算子 $\star$ 之外，我们几乎已经具备定义高形式规范理论所需的所有要素。现在要求流形M 是定向的，并配备一个伪度量，也就是说，它要么是定向黎曼流形，要么是定向洛伦兹流形。

正如我们将在下文看到的，p形式 Maxwell 规范理论[26] 的运动方程为

$$\mathrm{d} \star F_A = 0$$

其中 A 是一个联络 p形式，而$F_A = \mathrm{d}A$ 是其曲率。注意，对于任意 p形式 A，$\mathrm{d} \star F_A$ 都是一个 $(n - p)$形式，因此我们可以将 $\mathrm{d} \star \mathrm{d}$ 视为从 Bun^{∇}_p 到 Ω^{n-p} cl 的上链映射。导出零点轨迹随后刻画了运动方程的导出解空间。通常还会引入一个耦合常数 $\kappa \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$。

定义 3.5。对于每个非零耦合常数 $\kappa \in \mathbb{R}^\times$，令 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 表示 $\mathrm{Riem}^{\mathrm{or}}_n$（或 $\mathrm{Lrtz}^{\mathrm{or}}_n$）上的、取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ 的层，其局部表示为

$$\mathbb{Z} \to \Omega^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^p \xrightarrow{\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d}} \Omega^{n-p} \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n$$

其中 Ω^p 位于零次度。[2] [7]

换言之，它是映射 $\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d}$ 的映射锥：

$$\mathrm{Bun}^{\nabla}_p \xrightarrow{\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d}} \Omega^{n-p}_{\mathrm{cl}}$$

因此在上同调层面施加了运动方程。[28]

注意，对于 $M = \mathbb{R}^n$，只有零阶和 $-p$ 阶上同调。零阶上同调由满足 $\mathrm{d} \star F_A = 0$ 的 p-形式 A 组成，再模去（无穷小）规范等价。$-p$ 阶上同调为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U(1)$，它编码了一个 p-丛的（高阶）整体对称性。一级上同调在局部也消失。[29]

---

[26]关于早期讨论，参见 [HT86]；关于近期论述，参见 [MSF25]。[27]我们使用 $\langle\kappa\rangle$ 来记录耦合常数，而不是使用（κ）或 $[\kappa]$，以避免与其他地方的记号发生冲突。[28]注意，我们将闭 $\mathrm{n} - \mathrm{p}$-形式作为映射的陪域，而不是简单地使用 Ω^{n-p}，后者没有闭性条件。在某种层面上，这一条件考虑了比安基恒等式，因此很方便。更深层的原因是，运动方程源自作用泛函的微分 $\delta \mathrm{S}$，而这个 1-形式 $\delta \mathrm{S}$ 应当是场空间余切丛的一个截面；这里的场空间为 Bun^{∇}_p。在这种情况下，Bun^{∇}_p 中一个场的切空间由 $\Omega^{\leq p}$组成，而根据定向 n维流形上的庞加莱对偶，其对偶为 $\Omega^{\geq n-p}$。这些恰好就是 BV形式体系中的反场。（这只是 BV形式体系背后推理的粗略概述；我们在此省略进一步的动机和细节。）[29]这里的论证稍长，因此将其放在这个脚注中。设 $\alpha \in \Omega^{n-p}(\mathrm{U})$ 被 d 湮灭，因而是闭的。由于我们处在 $\mathbb{R}^n$上，它也必为恰当的：$\alpha = \mathrm{d}\beta$ 对于某个 $\beta \in \Omega^{n-p-1}(\mathbb{R}^n)$。根据伪微分算子理论，$\mathrm{n} - \mathrm{p} - 1$-形式上的霍奇拉普拉斯算子 Δ 是满射的（椭圆性意味着局部可解性）。因此，对于某个γ，

$$\beta = \Delta\gamma = \mathrm{d}\mathrm{d}^*\gamma + \mathrm{d}^*\mathrm{d}\gamma$$

因此 $\alpha = \mathrm{d} \star \mathrm{d}(\pm \star \mathrm{d}\gamma)$，从而得到所需的 $\alpha \in \mathrm{im}(\mathrm{d} \star \mathrm{d})$。

这个层描述了一个阿贝尔p-形式规范理论的解，采用 BV形式体系；下面我们将对此作出解释。

注记3.6。 我们选择按照微分形式的次数来标记理论 $\mathrm{Mxw}_{p,n}$，该微分形式中取值的是联络（或规范势）；但一种自然的替代方法是按照曲率（或场强）所在微分形式的次数来标记。第二种选择的优点是更容易记住对偶性的作用：对偶性将次数为k 的场强F 映射为次数为 $\star F - n - k$ 的场强。对我们而言，对偶性将 $\mathrm{Mxw}_{p,n}$ 与 $\mathrm{Mxw}_{n-p-2,n}$ 联系起来，这种标记方式不太直观。$\Diamond$

回顾一下，p形式规范理论 [HT86]的传统方法始于一个p形式A，将其作为场，并给出作用泛函

$$S(A) = \frac{1}{g^2}\int_M \mathrm{d}A \wedge \star \mathrm{d}A \tag{8}$$

其中$g > 0$ 表示物理学文献中通常采用的参数化方式下的耦合常数。（上文中，我们用 $\kappa = 1/g^2$ 表示耦合常数；为求简便，全文将一直沿用这种写法。）运动方程为

$$\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d}A = 0,$$

因此，耦合常数不会影响解空间。与通常的 1-形式规范理论类似，我们通过 $p-1$-形式引入规范对称性、这些对称性的规范对称性，依此类推。

在旨在处理此类规范对称性的微扰 BRST 形式体系中，人们使用如下复形

$$\Omega_M^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_M^{p-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_M^p$$

其中 Ω^p 处于零次。此复形包含微扰理论中的场、鬼场、鬼场的鬼场等。注意，p-形式处于 0 次，作为显然具有物理意义的场；处于 -1 次的鬼场是$p-1$-形式，处于 -2 次的鬼场的鬼场是$p-2$-形式，依此类推。它描述了模叠p-形式在模空间 $\mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}{}_p$ 中任意一点 A 处模去（阿贝尔）规范等价后的切复形 $\mathbb{T}_A \mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}{}_p$。

在BV形式体系中，人们引入共轭场或对偶场，称为反场和反鬼，因此BV经典理论的复形为

$$\Omega_M^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_M^p \xrightarrow{\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d}} \Omega_M^{n-p} \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_M^n \tag{9}$$

其中 $\kappa = 1/g^2$ 是耦合常数，Ω^p 位于零次。该 BV 理论的作用泛函为

$$S_{BV}(\mathcal{A}) = \int_M \mathcal{A} \wedge Q(\mathcal{A}) = \sum_{k=-p}^{p+1} \int_M A_k \wedge Q(A_{-k}) \tag{10}$$

其中复形的一个元素具有如下形式

$$\mathcal{A} = (A_{-p}, \dots, A_0, \dots, A_{p+1})$$

其中 A_k 位于度数 k，而 Q 为微分。注意，对于集中在 0 度且形式为

$$\mathcal{A} = (0, \dots, 0, A_0 = A, 0, \dots, 0)$$

我们便得到作用量（8）。

我们将这个复形（9）记作

$$\mathrm{Mxw}_{p,n}^{\mathrm{pert}}\langle\kappa\rangle.$$

注意，这个复形与定义3.5中的复形相似，只是缺少了度数 $-p-1$中的常值层 $\mathbb{Z}_M$。从更几何的角度来说，通常的 BRST/BV 描述 $\mathrm{Mxw}_p^{\mathrm{pert}},_n\langle\kappa\rangle$ 只能看到（高阶）规范对称性的李代数，而 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 则能看到群。通常的 BRST/BV 描述无法区分李群 $\mathbb{R}$ 与 $U(1)$。值得注意的是，按照 Deligne 的做法加入常值层后，我们便能恢复有关$U(1)$ p-丛（或高阶 gerbe）的所有整体信息。

这个构造显然适用于任何光滑定向黎曼n-流形，因此定义在位点 $\mathrm{Riem}_n^{\mathrm{or}}$上。我们将其视为在$M$上定义经典阿贝尔$p$-形式规范理论，正如下述定义所概括的那样。

定义 3.7。对于任意黎曼流形 $M \in \mathrm{Riem}_n^{\mathrm{or}}$,[30] 耦合常数为 $\kappa \in \mathbb{R}^\times$ 的 p-形式麦克斯韦规范理论在 M 上的解的模空间 $\mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,n}\langle\kappa\rangle(M)$ 是由导出整体截面 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle(M)$ 通过 Dold–Kan 对应呈现的导出阿贝尔群堆。

现在我们给出几个明确的例子，说明这个上链复形在局部恢复了通常的运动方程和规范对称性。

例 3.8（四维电磁学）。对于 $M = \mathbb{R}^4$，上链复形是

$$\mathbb{Z} \to \Omega^0(\mathbb{R}^4) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(\mathbb{R}^4) \xrightarrow{\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d}} \Omega^3(\mathbb{R}^4) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^4(\mathbb{R}^4)$$

因此，零阶上同调是

$$\{A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4) \mid \mathrm{d} \star \mathrm{d}A = 0\} / \{\mathrm{d}f \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)\},$$

即满足 Maxwell 方程且 $F = \mathrm{d}A$ 的解，模去规范变换。在 -1 阶存在上同调，即 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U(1)$，它通过常数规范变换刻画整体对称性。（关于一阶上同调消失，参见脚注 29 。）◊

[30]也可以使用同类复形研究洛伦兹流形，其中 Hodge 星算子由洛伦兹度量确定。

例 3.9 （二维紧致玻色子）。对于 $M = \mathbb{R}^2$，上链复形 is

$$\mathbb{Z} \to \Omega^0(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\kappa \mathrm{d}\star\mathrm{d}} \Omega^2(\mathbb{R}^2)$$

因此，零阶上同调是

$$\{\sigma : \mathbb{R}^2 \to S^1 \mid \mathrm{d}\star\mathrm{d}\sigma = \star\Delta\sigma = 0\},$$

到S^1中的调和映射。一阶上同调是平凡的，因为拉普拉斯算子是满射。注意，这个复形同构于

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi r} \Omega^0(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\mathrm{d}\star\mathrm{d}} \Omega^2(\mathbb{R}^2)$$

若 $\kappa = 2\pi r$。这个新复形编码了到 $\mathbb{R}/2\pi r\mathbb{Z}$ 的映射，它是半径为r的平坦圆。 ◊

例 3.10 （三维电磁学）。 对于$M = \mathbb{R}^3$，上链复形为

$$\mathbb{Z} \to \Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\kappa \mathrm{d}\star\mathrm{d}} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

因此，零阶上同调是

$$\{A \in \Omega^1(\mathbb{R}^3) \mid \mathrm{d}\star\mathrm{d}A = 0\}/\{\mathrm{d}f \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)\},$$

即满足$F = \mathrm{d}A$ 的麦克斯韦方程的解，再对规范变换取商。一阶上同调为 -1，即 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U(1)$，通过常值规范变换刻画整体对称性。◊

例 3.11 （三维中的紧致玻色子）。 对于 $M = \mathbb{R}^3$，上链复形为

$$\mathbb{Z} \to \Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\kappa \mathrm{d}\star\mathrm{d}} \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

因此，零阶上同调为

$$\{\sigma : \mathbb{R}^3 \to S^1 \mid \mathrm{d}\star\mathrm{d}\sigma = \Delta\sigma = 0\},$$

到S^1的调和映射。由于拉普拉斯算子是满射，一阶上同调平凡。

◊

3.3. **移位辛结构**。 在此栈中的任意一点 $\mathcal{A}$，对应于一个满足规范方程的、带联络的p-丛，其切复形 $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 由以下层给出

$$\Omega^0_M \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^p_M \xrightarrow{\mathrm{d}\star\mathrm{d}} \Omega^{n-p}_M \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n_M$$

其中 $\Omega^p{}_M$ 位于 0 阶。请注意，这里的主要变化是我们只看到无穷小规范变换，它们由从 0 阶到$p-1$阶的 de Rham 形式编码；离散层$\mathbb{Z}$ 并不存在。这个切复形正是阿贝尔p-形式规范理论通常的 BV 表述。

注记 3.12。使用点函子可以快速完成这一计算。将该理论视为由一个函子表示的理论，其定义在时空位上，而测试空间位由导出流形给出。现在固定时空，遍历与移位对偶数 $\mathbb{R}[t]/(t^2)$相关联的导出流形，其中次数 $|t|$ 遍历整数。

◊

关于切复形的这一观察，以及它对通常 BV 表述的复原，表明每个点 A处都存在一个（局部的）（-1）-移位辛形式。它在阿贝尔群层对自身的平移作用下显然保持不变。结合上链复形层的数据，这个局部移位辛结构完全确定了这些自由理论所依据的作用泛函。

3.4. **关于耦合常数**。 我们在从零阶到一阶的微分中加入耦合常数 κ，以符合物理学；不过，缩放微分还有另一个自然的位置：我们可以将第一个（非平凡）微分乘以实数 r，从而得到嵌入

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{r} \Omega^0 \to \cdots .$$

对于紧致玻色子，$p = 0$，这种做法显得特别自然，因为$\mathbb{R}/2\pi R\mathbb{Z}$ 是半径为 R 的圆（这里 $r = 2\pi R$）。

注意，层之间存在一个同构

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p & \xrightarrow{\kappa \mathrm{d}\star\mathrm{d}} & \Omega^{n-p} & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^n \\
\downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle r} & & & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle r\frac{\widetilde{\kappa}}{\kappa}} & & & & \downarrow{\scriptstyle r\frac{\widetilde{\kappa}}{\kappa}} \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{r} & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p & \xrightarrow{\widetilde{\kappa} \mathrm{d}\star\mathrm{d}} & \Omega^{n-p} & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^n
\end{array}$$

对于任意非零值 r、κ 和 $\widetilde{\kappa}$，结论都成立。换句话说，任何对场进行缩放的方式（即“耦合常数”）都会以一种非常简单的方式给出同构的模问题。

注 3.13. 还可以用另一种方式来描述这一情形。我们描述了一个由$(\mathbb{R}^\times)^2$, 参数化的理论族，其中点$(r, \widetilde{\kappa})$ 表示我们刚刚看到的底部复形；同时，我们也给出了从$(1, \kappa)$ 处的理论到$(r, \widetilde{\kappa})$处理论的一个同构。事实上，任意两点之间都可以给出一个同构。因此，我们得到一个群胚，其对象构成空间$(\mathbb{R}^\times)^2$，且每个对象到任意其他点恰有一个同构。这个群胚包含一个由点$(1, 1)$参数化的骨架子范畴，因此在同构意义下，理论实际上只有一个。物理学家对此不会感到意外：毕竟，这个理论是自由的，因此不可能有任何可测量的耦合常数。$\Diamond$

3.5. **关于磁荷与电荷**。 现在我们对其物理解释作一些说明。通常关注的对象是形式 $F \in \Omega^{p+1}$, 它扮演电磁场强的角色。场 A 提供一个势，使得我们有 $F = \mathrm{d}A$。最熟悉的情形是 $p = 1$ 且 $n = 4$，此时 F 是一个 2-形式 $E \wedge \mathrm{d}t + \star B$，其中 E 和 B 分别是以微分形式表示的电场和磁场。下面我们将逐一讨论贯穿全文的例子，但首先作一些概括性的引导说明。[31]

[31]一篇面向物理学家、探讨上同调（尤其是 Čech 上同调和 de Rham 上同调）如何与规范理论和西格玛模型相互衔接的经典论述是 [Alv85]。

3.5.1. 结构特征。 需要注意的是，在我们的框架中，情况更为丰富：该层编码了一个带联络的 p-丛的数据，并满足麦克斯韦方程 $\mathrm{d} \star \mathrm{d}A = 0$。特别是，零次上同调编码了这类（高阶）带联络丛的同构类。为清楚地说明这一点，回顾一下存在一个取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ 的层的商映射

$$\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle \to \mathrm{Bun}_p^{\nabla}$$

其中

$$\mathrm{Bun}_p^{\nabla} = (\mathbb{Z} \to \Omega^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^p)$$

在 Ω^p 零次上；这个复形只是 Deligne 复形 $\mathcal{D}\mathrm{el}^{\leq}_p$ 的一个平移。这个映射简单来说就是“投影到零次及以下的复形分次”。

一个 p-丛，即使没有联络，在拓扑上也是一个有趣的对象：流形 M 上这类高阶丛的每个同构类都对应于一个上同调类$H^{p+1}(M,\mathbb{Z})$。对于 $p = 1$，我们考虑主 $U(1)$-丛，因此这个上同调类就是该丛的第一陈类。对于高阶丛，其上同调类可以看作其标识陈类。

3.5.2. 二维中的紧致玻色子。 紧致玻色子具有一个场

$$\sigma : M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$$

其中 M 是一个曲面。如果令 θ 表示覆盖空间 $\mathbb{R}$ 上相对于 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的坐标，那么 1-形式 $\mathrm{d}\theta$ 在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上定义良好，并生成其上同调。任意场 σ 都将这个 1- 形式拉回为 M 上的 1- 形式 $\sigma^*\mathrm{d}\theta$。对于任意环路 $\gamma : S^1 \to M$， σ 的绕数γ 是该积分

$$w_\gamma(\sigma) = \int_\gamma \sigma^*\mathrm{d}\theta.$$

它计算复合映射的次数

$$S^1 \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{\sigma} S^1$$

因此是一个整数。

由于绕数在M中环路的（自由）同伦类上保持不变，因此它是拓扑荷的一个例子。换言之，我们可以将 $\sigma^*\mathrm{d}\theta$ 视为一种拓扑流 ，其在余维一子流形 γ 上的荷为$w\gamma(\sigma)$。这种荷因拓扑而守恒，而非由动力学决定。

3.5.3. 四维电磁学。 在$p = 1$ 情形下，我们将这个陈类$c_1(P) \in H^2(M,\mathbb{Z})$ 解释为一种能够刻画磁荷的拓扑流。这一解释背后的典型例子是狄拉克磁单极子：我们考虑一个去除了无限直线（例如坐标轴）的时空$M = \mathbb{R}^4 - L$，因此必须在M上指定一个$U(1)$-丛。任何选择$P \to M$，只要它不 来自 $\mathbb{R}^4$上的平凡$U(1)$-丛，就值得称为磁单极子：麦克斯韦方程的一个解就是一个联络

A 在P 上的联络，其曲率F_A 表示$c_1(P) \in H^2(M,\mathbb{R})$，根据假设该类非零。对于任意嵌入的二维球面 Σ，若其<linking>链接L，我们由此得到一个磁荷

$$\int_\Sigma F_A \neq 0.$$

由于M 形变收缩到S^2,，$U(1)$-丛的可能选择构成一个副本 f

$$\mathbb{Z} \cong H^2(S^2,\mathbb{Z}) \cong H^2(M,\mathbb{Z}),$$

以及 Σ 上的磁单极子的磁荷是这个上同调群上的一个线性泛函。

在我们的框架中，从常值层 $\mathbb{Z}$ 到 Ω^0 的映射给出了从整上同调到实上同调的映射。特别地，我们得到一个映射

$$H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^2(M,\mathbb{R})$$

它确定了一个整格

$$H^2_{\text{free}}(M,\mathbb{Z}) \subset H^2(M,\mathbb{R}).$$

这个整格可以看作分配给M中二维循环的磁荷。

或者，考虑含有 流的麦克斯韦方程，即不在真空中，并允许电流和磁流同时存在。磁 流密度j_{mag} 出现在方程中

$$j_{\text{mag}} = \mathrm{d}F_A$$

因此，紧致定向三维带边界子流形$N \subset M$内部的磁荷为

$$\int_N j_{\text{mag}} = \int_{\partial N} F_A.$$

我们注意到，场层中的 2-形式F_A 具有整周期，因为它们源自带联络的丛。

到目前为止，我们只讨论了磁荷及其与商链复形 Bun_1^∇ 的关系。回想一下，电 流密度j_{el} 出现在麦克斯韦方程中

$$j_{\text{el}} = \mathrm{d} \star F_A$$

因此，紧致定向三维带边界子流形$N \subset M$内部的电荷为

$$\int_N j_{\text{el}} = \int_{\partial N} \star F_A,$$

与上述磁荷相对应，但不受整数性约束。相关的荷是电荷，可以取任意实数值；也就是说，它们不是离散的——或称“量子化”的——这与磁荷不同。

3.6. **两个短正合列的概念含义**。通过上链复形层来描述这些理论的一个有用特点，是可以运用层的相关技巧，例如短正合列。这些短正合列不仅给出上同调中的长正合列（见下一节），还常常能凸显问题的概念特征。

我们的第一个例子涉及将 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 分解为 BRST 场内容和反场：考虑这个短正合列

$$0 \to \Omega^{n-p}_{\mathrm{cl}}[-1] \to \mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle \to \mathrm{Bun}_p^{\nabla} \to 0.$$

从 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 出发的映射，将一个运动方程的解送到其底层带联络的 p-丛，因此对应于遗忘映射

$$\mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,n}\langle\kappa\rangle \to \mathbb{B}\mathrm{un}_p^{\nabla}$$

在导出栈的层面上。（我们刚刚已经看到它如何编码“磁荷”。）从闭 $n-p$-形式到 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 的映射描述了纤维。上同调长正合列中的连接态射，本质上就是运动方程中的微分算子 $\mathrm{d}\star\mathrm{d}$。

在层的导出范畴中，这个短正合列对应一个三角。若我们将这个三角“旋转”，就会得到通过施加 $\mathrm{d}\star\mathrm{d}$ 得到的映射 $\mathrm{Bun}^{\nabla}{}_p \to \Omega^{n-p}\,\mathrm{cl}$，它对应于导出栈之间的一个映射

$$\mathbb{B}\mathrm{un}_p^{\nabla} \to \Omega^{n-p}_{\mathrm{cl}}$$

从带联络的p-丛的模空间映射到闭$n-p$-形式。解的模空间就是该映射在零点上的纤维。

我们的第二个例子涉及将 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 分解为常值层 $\mathbb{Z}$ 和微扰 BV 复形：考虑短正合列

$$0 \to \mathrm{Mxw}^{\mathrm{pert}}_{p,n}\langle\kappa\rangle \to \mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle \to \mathbb{Z}[-p-1] \to 0.$$

从 $\mathrm{Mxw}_{pn}\langle\kappa\rangle$ 出发的映射会将一个解遗忘至其底层的 p-丛。[32] 从这个意义上说，它忘却了场论，只保留拓扑。用更富诗意的说法，可以说它是这一规范理论所依托的拓扑场论。事实上，任何定义在p-丛模空间上的函数都会产生“拓扑可观测量”或“算符”。

$\mathrm{Mxw}^{\mathrm{pert}}_{p},_{n}\langle\kappa\rangle$ 在 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 中的子复形编码了微分几何信息和运动方程，因此描述了“动力学”。

现在我们展开相关的长正合列。

[32]注意，常值层 $\mathbb{Z}[-p-1]$ 编码了到 $B^pU(1)$ 的映射空间，因此描述了 $U(1)$ p-丛的模空间。换言之，在一点上取层的值所得到的上链复形 $\mathbb{Z}[-p-1]$，将 $B^pU(1)$ 呈现为一个导出栈，而流形 M 上的导出整体截面 $\mathbb{Z}[-p-1](M)$ 则将栈 $\mathrm{Map}(M,B^pU(1))$呈现出来。

3.7. **非平凡拓扑流形上的解的模空间**。我们将使用 Deligne 复形和麦克斯韦复形进行一些上同调计算，以展示其中编码的整体信息类型。特别是，我们希望展示“拓扑荷”的出现，例如紧致玻色子的绕数，或 1-形式规范理论的第一陈类，它们作为一种磁荷出现。[33]

3.7.1. 二维紧致玻色子。 我们的主要目标是了解绕数如何出现。

设 M 为一个连通曲面。

我们从 BRST 场内容 Bun_0, 截断德利涅复形开始

$$\mathbb{Z}_M \to \Omega^0_M$$

集中在 -1 至 0 次，并且与 $\mathrm{Map}_{C^\infty}(-, S^1)$ 拟同构。也就是说，

$$H^0(\mathrm{Bun}_0(M)) = \mathrm{Map}(M, S^1)$$

编码映射到 S^1 中的光滑映射（或称“0-丛”）。

考虑层的短正合列

$$0 \to \Omega^0_M \hookrightarrow \mathrm{Bun}_0 \to \mathbb{Z}_M[1] \to 0$$

并注意层上同调中的以下恒等式：

$$H^k(M, \mathbb{Z}_M[1]) = H^{k+1}(M, \mathbb{Z}).$$

这个短正合列导出一个上同调长正合列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^0(M,\mathbb{Z}) & \to & \\ \to C^\infty(M) & \longrightarrow & H^0(\mathrm{Bun}_0) & \longrightarrow & H^1(M,\mathbb{Z}) & \to & \\ \to 0 & \longrightarrow & H^1(\mathrm{Bun}_0) & \longrightarrow & H^2(M,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots \end{array} .$$

因此

$$H^k(\mathrm{Bun}_0) = H^{k+1}(M, \mathbb{Z})$$

对于$k \geq 1$。在零次情形下，我们研究到S^1的光滑映射。该映射

$$H^0(\mathrm{Bun}_0) \to H^1(M, \mathbb{Z})$$

编码此类映射（或零次德利涅上循环）的绕数。给定任意两个具有相同绕数的映射f和g，令

$$c_p = f(p) - g(p) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$$

[33]这些称为拓扑荷，因为它们是守恒量；但它们之所以守恒，是因为它们是拓扑不变量，而不是由于诺特定理（即对称性）。

表示该　它们在固定点p处的差异，在M上处处满足同一关系。 s

$$g(x) - f(x) = c(p) + \phi(x)$$

对于某个光滑函数 $\phi\colon M \to \mathbb{R}$，满足 $\phi(p) = 0$。因此，绕数映射的核恰好是$C^\infty(M)/\mathbb{Z}$。简言之，

$$H^0(\mathrm{Bun}_0) \cong H^1(M,\mathbb{Z}) \times C^\infty(M)/\mathbb{Z},$$

记录绕数以及一个泛函代表元（相差一个整数）。根据定义，这些信息与动力学（或运动方程）无关。

现在让我们考察编码解的模空间的完整复形：

$$\mathbb{Z}_M \to \Omega^0_M \xrightarrow{\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d}} \Omega^2_M$$

集中在次数 -1 至 1。注意，存在一个短正合列

$$0 \to \Omega^2[-1] \to \mathrm{Mxw}_{0,2}\langle\kappa\rangle \to \mathrm{Bun}_0 \to 0$$

因此得到一个上同调长正合列

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow H^0(\mathrm{Mxw}_{0,2}\langle\kappa\rangle(M)) \longrightarrow H^0(\mathrm{Bun}_0) \\ \hookrightarrow \Omega^2(M) \longrightarrow H^1(\mathrm{Mxw}_{0,2}\langle\kappa\rangle(M)) \longrightarrow H^1(\mathrm{Bun}_0) \\ \hookrightarrow 0 \longrightarrow H^2(\mathrm{Mxw}_{0,2}\langle\kappa\rangle(M)) \longrightarrow H^2(\mathrm{Bun}_0) \longrightarrow \cdots \end{array} .$$

这里唯一有意义的连接映射是作用于 $\mathrm{Map}(M, S^1)$ 的运动方程 $\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d}$，因此

$$H^0(\mathrm{Mxw}_{0,2}\langle\kappa\rangle(M)) = H^1(M,\mathbb{Z}) \times \ker(\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d}),$$

正如我们所预期的。[34] 对于 $k > 1$，我们有

$$H^k(\mathrm{Mxw}_{0,2}\langle\kappa\rangle(M)) = H^k(\mathrm{Bun}_0) = H^{k+1}(M,\mathbb{Z}).$$

唯一剩下的情形是

$$H^1(\mathrm{Mxw}_{0,2}\langle\kappa\rangle(M)) \cong H^2(M,\mathbb{Z}) \times \Omega^2(M)/\mathrm{im}(\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d})$$

其中第二个因子是动力学的（它是编码运动方程的线性算子的余核），第一个因子则是拓扑的。[35]

---

[34]当M是闭的、定向且连通时，第二个动力学因子是 $\mathbb{R}$，因为根据霍奇理论，它是德拉姆上同调群$H^0(M,\mathbb{R})$。[35]当M是闭的、定向且连通时，拓扑因子就是 $\mathbb{Z}$。若它不是闭的，则该因子为零。类似地，当M是闭的、定向且连通时，拓扑因子就是 $\mathbb{R}$，因为根据霍奇理论，它是德拉姆上同调群$H^2(M,\mathbb{R})$。在此情形下，它是零阶上同调（朴素场）的线性对偶（“反场”）。一般而言，$\ker(\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d})$ 与 $\Omega^2(M)/\mathrm{im}(\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d})$之间存在庞加莱配对。

3.7.2. 四维中的电磁学。 为简单起见，取 $p = 1$ 和 $n = 4$，这样我们便聚焦于通常的电磁学情形。设$(N、h)$ 为一个闭、定向、连通的黎曼3维流形，并考虑四维流形

$$M = N \times \mathbb{R}$$

配备乘积度量 $g = h \pm \mathrm{d}t^2,$，其中符号取决于读者的偏好。

电磁学的 BRST 场内容是 Bun_1^∇ 的层上同调，即截断德利涅复形

$$\mathbb{Z}_M \to \Omega_M^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_M^1$$

其集中在 -2 到 0 度。利用层的短正合列

$$0 \to \Omega_M^{\leq 1}[1] \hookrightarrow \mathrm{Bun}_1^\nabla \to \mathbb{Z}_M[2] \to 0$$

我们得到上同调长正合列

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^0(N,\mathbb{Z}) \\
\hookrightarrow H^0(N,\mathbb{R}) \longrightarrow H^{-1}(M,\mathrm{Bun}_1^\nabla) \longrightarrow H^1(N,\mathbb{Z}) \\
\hookrightarrow \Omega^1(M)/\mathrm{d}\Omega^0(M) \longrightarrow H^0(M,\mathrm{Bun}_1^\nabla) \longrightarrow H^2(N,\mathbb{Z}) \\
\hookrightarrow 0 \longrightarrow H^1(M,\mathrm{Bun}_1^\nabla) \longrightarrow H^3(N,\mathbb{Z}) \\
\hookrightarrow 0 \longrightarrow H^2(M,\mathrm{Bun}_1^\nabla) \longrightarrow H^4(N,\mathbb{Z}) \cdots
\end{array}.$$

这意味着

$$H^k(M,\mathrm{Bun}_1^\nabla) \cong H^{k+1}(N,\mathbb{Z})$$

对于 $k \geq 1$，因为复形 $\Omega^{\leq 1}{}_M{}^{[1]}$ 仅在两个度上有上同调。由于整系数上同调的自由部分映射到 de Rham 上同调，我们得到

$$H^{-1}(M,\mathrm{Bun}_1^\nabla) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \oplus \mathrm{Tors}(H^1(N,\mathbb{Z})) = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

由于 $H^1(N,\mathbb{Z})$ 没有挠元（根据普适系数定理）。最后

$$H^0(M,\mathrm{Bun}_1^\nabla) \cong H^2(N,\mathbb{Z}) \oplus (\Omega^1(M)/\mathrm{d}\Omega^0(M))/H^1(N,\mathbb{Z}).$$

Th最后一个直和项（迭代商）可以有一个更简单的描述：首先注意到 t

$$\Omega^1(M)/\mathrm{d}\Omega^0(M) = H^1(N,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{d}\Omega^1(M)$$

因此

$$(\Omega^1(M)/\mathrm{d}\Omega^0(M))/H^1(N,\mathbb{Z}) \cong H^1(N,\mathbb{R})/H^1(N,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{d}\Omega^1(M).$$

总之，

$$H^0(M, \mathrm{Bun}_1^\nabla) \cong H^2(N, \mathbb{Z}) \oplus H^1(N, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{d}\Omega^1(M).$$

我们注意到，$H^2(N, \mathbb{Z})$ 编码了该 $U(1)$-丛的第一陈类，也就是磁荷；而环面$H^1(N, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 则通过单值化参数化平坦的$U(1)$-联络。较大的因子 $\mathrm{d}\Omega^1(M)$ 参数化了可能作为场强出现的 2-形式（在施加运动方程之前）。

现在让我们考察编码解的模空间的完整复形：

$$\mathbb{Z}_M \to \Omega^0_M \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1_M \xrightarrow{\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d}} \Omega^3_M \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^4_M.$$

注意，这里有一个短正合列

$$0 \to \Omega^3_{\mathrm{cl}}[-1] \to \mathrm{Mxw}_{2,4}\langle\kappa\rangle \to \mathrm{Bun}_1^\nabla \to 0$$

因此有一个长正合列

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow H^{-1}(\mathrm{Mxw}_{1,4}\langle\kappa\rangle(M)) \longrightarrow H^{-1}(M, \mathrm{Bun}_1^\nabla) \\
\hookrightarrow 0 \longrightarrow H^0(\mathrm{Mxw}_{1,4}\langle\kappa\rangle(M)) \longrightarrow H^0(M, \mathrm{Bun}_1^\nabla) \\
\hookrightarrow \ker\left(\mathrm{d}|_{\Omega^3(M)}\right) \longrightarrow H^1(\mathrm{Mxw}_{1,4}\langle\kappa\rangle(M)) \longrightarrow H^1(M, \mathrm{Bun}_1^\nabla) \\
\hookrightarrow 0 \longrightarrow H^2(\mathrm{Mxw}_{1,4}\langle\kappa\rangle(M)) \longrightarrow H^2(M, \mathrm{Bun}_1^\nabla) \\
\hookrightarrow 0 \longrightarrow H^3(\mathrm{Mxw}_{1,4}\langle\kappa\rangle(M)) \longrightarrow H^3(M, \mathrm{Bun}_1^\nabla) \cdots
\end{array}.$$

这意味着

$$H^k(\mathrm{Mxw}_{1,4}\langle\kappa\rangle(M)) \cong H^k(M, \mathrm{Bun}_1^\nabla)$$

当$k < 0$ 时，以及$k > 1$ 时，这是因为复形 $\Omega^3_{\mathrm{cl}}[-1]$ 仅在两个次数上有上同调。特别地，请注意

$$H^{-1}(\mathrm{Mxw}_{1,4}\langle\kappa\rangle(M)) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \oplus \mathrm{Tors}(H^1(N, \mathbb{Z}))$$

因此，整体对称性 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 通过一个有限群得到增强。长正合列中的连接映射为 $\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d}$，因此

$$H^0(\mathrm{Mxw}_{1,4}\langle\kappa\rangle(M)) \cong \ker\left(\kappa \mathrm{d} \star \mathrm{d}|_{H^0(M, \mathrm{Bun}_1^\nabla)}\right)$$

因此，它由曲率满足运动方程 $\mathrm{d} \star \mathrm{d}A = 0$ 的带联络丛组成。在高于零的次数上，Deligne 复形变为整系数上同调

因此，连接映射的作用平凡。最后一个有意义的上同调群是

$$H^1(\mathrm{Mxw}_{1,4}\langle\kappa\rangle(M)) \cong H^3(N,\mathbb{Z}) \oplus \ker\left(\mathrm{d}|_{\Omega^3(M)}\right)/\mathrm{d}\star\mathrm{d}\Omega^1(M),$$

它在 BV形式体系中有一种解释。

3.8. **对阿贝尔对偶的首次尝试，但未能成功**。对于真空中的 $\mathbb{R}^4$ 上的麦克斯韦理论，可以用 $\star F$ 替换 F，从而得到麦克斯韦方程的另一个解。粗略地说，我们或许可以用一个“对偶”1-形式 C 替换联络1-形式 A，使得 $F_C = \star F_A$。沿着这一思路，我们或许可以将一个 p-形式广义麦克斯韦理论与一个 $n-p-2$-形式广义麦克斯韦理论联系起来，其中，p-形式 A 的曲率 F_A 与 $(n-p-2)$-形式 C 的曲率 F_C 互为霍奇对偶。

这种对偶性在 BV 场复形（或它们所呈现的导出栈）层面并不成立。

对于 n 维流形 $\mathbb{R}^n$，零阶上同调群彼此同构，但对于大多数 p 值，负阶上同调群并不相同：S^1 在 p- 形式理论中位于 $-p$ 次度，而在假定的对偶理论中位于 $-(n-p-2)$ 次度。

对于其他n维流形，甚至零阶上同调群也不同。

4. 麦克斯韦理论的另一种表示

本节给出一个表示p形式麦克斯韦理论的另一种层。它阐明了我们为何可以期待存在对偶性，但也说明了为何我们需要对电荷进行“量子化”才能得到对偶性。

4.1. **重写反场**。回顾一下，在任意n维流形M上，都存在一个层的上链复形

$$\mathbb{R} \to \Omega^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n \tag{11}$$

其集中在 -1 至n度，并且根据庞加莱引理，该复形是无环的（即，导出整体截面$\widehat{\ }$始终为零）。我们将这个上链复形记为 $\Omega^\bullet$，以强调它是德拉姆复形的一个扩张。（它有时也称为增广德拉姆复形。）

注记4.1。在（11）中，层 $\mathbb{R}$表示局部常值层，其在流形M 上的取值是从M 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射，且赋予离散拓扑。这并非到 $\mathbb{R}$ （带欧几里得拓扑）的光滑映射；相应的层记作C^∞ 或 Ω^0。$\Diamond$

于是得到一个层的短正合列

$$0 \to \Omega^{\geq k} \to \widehat{\Omega}^\bullet \to \widehat{\Omega}^{<k} \to 0$$

因此存在层的拟同构

$$\widehat{\Omega}^{<k} \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{\geq k}[1].$$

（注意， $\Omega^{\geq k}$ 表示闭k-形式，只是经过了移位。）下面详细展开说明，使这一主张更加清晰：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{k-2} & \longrightarrow & \Omega^{k-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & & \downarrow & & & & \\
 & & & & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Omega^k & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{k+1} & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^n
\end{array}$$

这正是由上述短正合列导出的“边界”映射。

注 4.2. 复形 $\widehat{\Omega}^{<k}$，若将其右端项 Ω^{k-1} 移至零次，则类似于定义 $^{\nabla}_{k-1}$ 中的层 $\mathrm{Bun}^{\nabla}_{k-1}$，但最左侧因子从 改为 。在模空间层面，复形 $\mathrm{k}[k-1]$ presents the moduli of $k-1$-丛（其规范群为 $\mathbb{R}$），并带有联络；不过整体对称性已被平凡化（也就是说，我们只考虑“小”规范变换[36]）。
$\Diamond$

现在我们可以利用这个拟同构，通过替换来修改 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$

$$\Omega^{n-p}_{\mathrm{cl}}[-1] = \Omega^{\geq n-p}[n-p-1]$$

为 $\widehat{\Omega}^{<n-p}[n-p-2]$。换言之，考虑复形

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p & \xrightarrow{\star\mathrm{d}} & \\
 & & & & & & & & \Omega^{n-p-1} \\
\mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-2} & \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} &
\end{array}$$

其中 Ω^p 和 Ω^{n-p-2} 位于零次[37] 注意，在 $\mathbb{R}^n$上，上同调很容易计算：

- 显然，在二次及以上次数上为零，
- 在 $-$ 次时，它是 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}p$，并且
- 根据庞加莱引理，或显然地，对于任何其他负次数，它都为零。

在零次时，一对 $(A,C) \in \Omega^p \oplus \Omega^{n-p-2}$ 闭，当且仅当

$$\star F_A = \star \mathrm{d}A = \kappa \mathrm{d}C = \kappa F_C.$$

这样的闭元素 (A,C) 满足真空麦克斯韦方程

$$\mathrm{d} \star F_A = \kappa \mathrm{d}^2 C = 0.$$

[36]在文献中，“小”规范变换有时指规范变换群的整体截面中包含单位元的连通分支。这里我们以不同的方式使用这个术语；读者不妨设想例如具有紧支撑的规范变换，这并无妨害。[37]请注意， $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$ 的副本通常不位于同一次，即使图示可能会让人产生这种印象。另一方面， Ω^p 和 Ω^{n-p-2} 确实都位于零次。这个说明适用于我们写出的许多上链复形。

另一方面，根据庞加莱引理，场 C 由 $\star F_A$ 唯一确定，差一个恰当项。因此，零阶上同调由满足 $\mathrm{d}\star F_A = 0$ 的 A 构成，差一个恰当项（即无穷小规范等价）。

霍奇理论告诉我们，第一上同调群消失：每个形式都能唯一地表示为一个恰当$n-p-1$-形式与一个余恰当形式的线性组合。

这个复形与 $\mathrm{Mxw}_{p,n}$ 拟同构，我们将其作为阿贝尔p-形式规范理论的另一种方法。下面的定义 4.3 固定了我们对此的记号。

定义 4.3。令 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 表示 $\mathrm{Riem}_n^{\mathrm{or}}$（或 $\mathrm{Lrtz}_n^{\mathrm{or}}$）上的、取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ 的层，其局部形式为

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p & \xrightarrow{\star\mathrm{d}} & \\ & & & & & & & & \Omega^{n-p-1}\ , \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-2} & \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} & \end{array} \tag{12}$$

其中，Ω^p 和 Ω^{n-p-2} 集中在零次。

这个上链复形层呈现了一个导出栈：该栈中的一个点是一个带有联络p-丛，其联络为A，以及一个$(n-p-2)$-形式C，满足 $\star\mathrm{d}A - \kappa\mathrm{d}C = 0$，即

$$\star F_A = \kappa F_C$$

因此，曲率（或场强）在差一个标量因子的意义下互为霍奇对偶。由于层的拟同构

$$\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle \xrightarrow{\simeq} \widetilde{\mathrm{Mxw}}_{p,n}\langle\kappa\rangle$$

我们看到，$\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 也呈现了导出栈 $\mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$。

Ex例 4.4（四维电磁学）。对于 $M = \mathbb{R}^4$，上链复形 is

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \xrightarrow{\star\mathrm{d}} & \\ & & & & & & \Omega^2\ , \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} & \end{array}$$

其中 Ω^1 项位于零次。 ◊

例 4.5（二维紧致玻色子）。对于$M = \mathbb{R}^2$，上链复形为

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\star\mathrm{d}} & \\ & & & & \Omega^2\ , \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} & \end{array}$$

其中 Ω^0 项位于零次。更明确地说，注意到零次余循环在局部的欧几里得 $\mathbb{R}^2$上是一个光滑映射

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

使得存在另一个函数

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

其中

$$\star \mathrm{d}u = \mathrm{d}v$$

或者更明确地说

$$\partial_x v = -\partial_y u \quad \text{and} \quad \partial_y v = \partial_x u,$$

这就是柯西-黎曼方程。换句话说，零次余循环确定了一个全纯函数$u + iv$，定义在 $\mathbb{C}$ 上。在上同调层面，我们只关心u 模整数平移以及v 模实数平移的情况。$\Diamond$

例4.6 （三维电磁学）。 对于$M = \mathbb{R}^3$，上链复形为

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \xrightarrow{\star \mathrm{d}} & \\ & & & & & & \Omega^1 \ , \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0 & & & \xrightarrow{-\kappa \mathrm{d}} & \end{array}$$

其中 Ω^1 项位于零次。 $\Diamond$

Ex例 4.7 （三维中的紧致玻色子）。 对于 $M = \mathbb{R}^3$，上链复形为

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\star \mathrm{d}} & \\ & & & & & & \Omega^1 \ , \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \xrightarrow{-\kappa \mathrm{d}} & \end{array}$$

其中 Ω^1 项位于零次。 $\Diamond$

4.2. **关于电荷**。 这种替代表述提供了一种巧妙的方式，可以使用层和模空间来描述电荷。我们所关注的主要对象——场强 $F \in \Omega^{p+1}$——现在具有一个势 A 和一个对偶势 C，其中 $F = \mathrm{d}A$ 且 $F = \star \mathrm{d}C$。我们可以利用我们的描述对此进行简洁地重述。

首先，回顾一下如何获得“磁”信息。正如我们在第 3.5节中所看到的，存在一个层的商映射（取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$）

$$\widetilde{\mathrm{Mxw}}_{p,n}\langle\kappa\rangle \to \mathrm{Bun}_p^{\nabla}$$

通过投影到复形的顶行（12）。它给出了模空间之间的映射

$$\mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,n}\langle\kappa\rangle \to \mathbb{B}\mathrm{un}_p^{\nabla}$$

此处只保留带联络 A 的底层 p-丛。磁荷指的是 p-丛的整系数上同调类。[38]

现在，将复形（12）投影到最底行，我们得到一个类似的层商映射（取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$）

$$\widetilde{\mathrm{Mxw}}_{p,n}\langle\kappa\rangle \to \widehat{\Omega}^{\leq n-p-2}$$

其中

$$\widehat{\Omega}^{\leq n-p-2} = \mathbb{R} \to \Omega^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{n-p-2}$$

表示最底行。这个层 $\widehat{\Omega}^{\leq_{n-p}-2}\,\mathrm{p}$ 描述了带有规范群 $\mathbb{R}$ 和联络的 $(n\ -p\ -2)$-丛的模空间（但大规范变换——或全局对称性——已被消去）。具体而言，它记录了场强 F 的对偶联络 C，因此其实上同调类编码了电荷。这些电荷可以取任意实数值，也就是说，它们不是离散的——也不是“量子化”的——这与磁荷相反。

5. Abelian duality

这里我们将用导出栈的语言给出阿贝尔对偶（或电磁对偶）的一个版本。

5.1. 编码电荷量子化（或离散化）。在某种程度上，对偶性实际上关乎一种与传统上由拉格朗日量定义的阿贝尔规范理论有所不同、但又十分接近的理论。对偶性的直观想法是，我们应该能够将 A 或 C 视为场强 F 的“势”。但我们在前一节看到，对于 Maxwell p-形式理论，存在一种不对称性：联络 A 定义在一个$U(1)$-丛上，而联络C 定义在一个 $\mathbb{R}$-丛上。不过，沿着我们概述的思路，很容易让它们处于平等地位。

定义 5.1。对于非零值 $\kappa,e \in \mathbb{R}$，令 $\mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,n}\langle\kappa, e\rangle$ 表示取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ 的层，其局部定义如下

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p & \xrightarrow{\star\mathrm{d}} & \\ & & & & & & & & \Omega^{n-p-1} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{e} & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-2} & \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} & \end{array}$$

where e 表示电耦合常数，其中 Ω^p 和 Ω^{n-p-2} 位于零次。

我们将这一理论称为 $\mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,\ n}\langle\kappa,\ e\rangle$ 电荷离散化的 p 形式规范理论。这个层 $\mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,\ n}\langle\kappa,\ e\rangle$ 通过层的显然嵌入，明显地映射到 $\widetilde{\mathrm{Mxw}}_{p,n}\langle\kappa\rangle$

$$\mathrm{Mxw}^{\circ}_{p,n}\langle\kappa, e\rangle \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{Mxw}}_{p,n}\langle\kappa\rangle \tag{13}$$

[38]更确切地说，闭定向$p+1$维流形 Σ“内部”的电荷，是通过将同调类 $[\Sigma]$ 与这个次数为$p+1$ 的上同调类配对得到的。

该嵌入遗忘了电荷。使用

$$\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}\langle\kappa, e\rangle(M)$$

表示由导出整体截面 Mxw 所呈现的导出栈${}^{\circ}{}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle(M)$，即该理论在黎曼$n$维流形$M$上的解的模空间。映射（13）呈现了一个映射

$$\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}\langle\kappa, e\rangle \to \mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,n}\langle\kappa\rangle \tag{14}$$

的导出栈之间的映射。

从物理角度看，当我们将范围限制在 $\mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle$ 内时，电荷便从连续变为离散。在某种意义上，我们通过处理由这个“子栈”描述的理论，改变了广义整体对称性。

当M是闭的，栈 $\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}{}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle(M)$ 是(-1)-移位预辛的，其中这个预辛结构正是沿嵌入（13）拉回的规范理论的移位辛结构。（若M 不是闭的，则存在一种“局部”预辛结构，它是一种取值于M上的体积形式的配对。）

简言之，这个层 $\mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle$ 描述了一种（略有退化的）经典场论，其中电荷和磁荷都是离散的。我们需要借助模空间或导出几何的语言来严谨地阐述这一理论，因为传统的拉格朗日量（或作用泛函）不足以描述这一条件。[40]

这个导出栈 $\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}{}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle(M)$ 可以看作如下方式构造的一个纤维积。为简化记号，我们令 $e = 1$。考虑层映射

$$\mathrm{Mxw}^{\circ}_{p,n}\langle\kappa, 1\rangle \to \mathrm{Bun}^{\nabla}_{p} \times \mathrm{Bun}^{\nabla}_{n-p-2}$$

并且，$\mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,n}\langle\kappa,1\rangle$ 是一个（余）锥

$$\mathrm{Cone}\left(\mathrm{Bun}^{\nabla}_{p} \oplus \mathrm{Bun}^{\nabla}_{n-p-2} \xrightarrow{\star\mathrm{d}-\kappa\mathrm{d}} \Omega^{n-p-1}\right).$$

用栈论术语来说，我们有一个纤维积

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}\langle\kappa, 1\rangle & \longrightarrow & \mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}_{p} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \star\mathrm{d}} \\ \mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}_{n-p-2} & \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-1} \end{array},$$

[39]人们常说，电荷因此被量子化了，因为它取离散值（“量子”）；但这里“量子化”一词的用法不同于计算路径积分或应用正则量子化。因此，为了避免混淆，我们不使用这一术语。[40]通过拉格朗日量（即其运动方程的解）给出的理论，在 BV 形式体系中构造时总是 -1-移位辛的。电荷离散化理论是预辛的，因此无法按照传统方式用作用泛函完整地描述。

它将电荷离散化解识别为一对带联络的高阶丛，其曲率互为霍奇对偶。（等价地，存在纤维积

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}\langle\kappa,1\rangle & \longrightarrow & \mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}_{p}\times\mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}_{n-p-2} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \star\mathrm{d}-\kappa\mathrm{d}} \\ * & \xrightarrow{\text{zero}} & \Omega^{n-p-1} \end{array},$$

导出叠。）

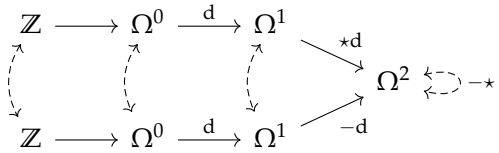
我们强调，这种纤维积描述是对这样一种思想的直白解读：每个场强 F_A 都必须有一个对偶 $F_A = \star F_C$ 对应某个对偶联络 C。（Bunster 和 Henneaux 在 [BH11]中提出了密切相关的观点。）

我们将在下文详细讨论一些例子，不过现在先看一个特殊情形或许会有所启发。取$n = 4$ 和 $p = 1$，这对应于通常的电磁学。为简单起见，我们取 $\kappa = 1 = e$。于是复形为

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \overset{\star\mathrm{d}}{\searrow} & \\ & & & & & & \Omega^2 \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \underset{-\mathrm{d}}{\nearrow} & \end{array}$$

其中 1-形式（两份）位于零次度。

这个例子清楚地展示了阿贝尔对偶性应如何发挥作用：顶行和底行同构，因此可以互换，而 $-\star$ 是 Ω^2的一个同构。这一组同构（交换各行，以及在最右侧项上施加 $-\star$）

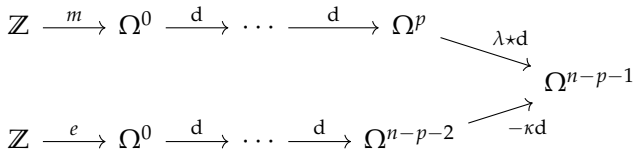


体现了电磁对偶，因为它交换了场（或联络）及其对偶的角色。

如果我们重新引入常数 κ 和e，会发生什么？在阐述适用于所有p形式规范理论的阿贝尔对偶之前，我们先来探讨这个问题。具体而言，我们将确定不同的耦合常数选择何时会产生等价的叠（或理论）；这些并非对偶性，而只是场内容的重标度。

5.2. **关于耦合常数的题外话**。从我们的角度来看，有四处自然适合对微分进行缩放：两个整数嵌入和两个映射

映入 Ω^{n-p-1}。用图表示,



其中这些常数为 m、e、$\lambda, \kappa \in \mathbb{R}^\times$。注意，我们不 对顶行中位于 Ω^0 和 Ω^p 之间以及底行中位于 Ω^0 和 Ω^{n-p-2} 之间的德拉姆微分 d 进行缩放。

我们将这个复形记作

$$T\langle m, e, \lambda, \kappa\rangle$$

我们希望描述这些复形之间的简单同构，以确定其中有多少个有意义的耦合常数。（本节固定 n 和 p，因此此处的记号中不包含它们。）

为简洁起见，令 $\Omega^{[0,p]}$ 表示

$$\Omega^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^p$$

顶行的非整数部分，类似地，令 $\Omega^{[0,n-p-2]}$ 表示底行的非整数部分。

我们允许对顶行的分量 $\Omega^{[0,p]}$ 进行（统一）缩放，对底行的分量 $\Omega^{[0,n-p-2]}$ 进行缩放，并对最右侧因子 Ω^{n-p-1}进行缩放。因此，我们有三个非零参数可用于构造理论之间的映射。

于是我们得到如下同构:

- $T\langle m, e, \lambda, \kappa\rangle \xrightarrow{\cong} T\langle 1, e, m\lambda, \kappa\rangle$: 对底行应用恒等映射，对 $\Omega_{n-p}{}^{-1}$ 则应用 $(1/m)\mathrm{id}$，对 $\Omega^{[0,p]}$ 和 $\mathbb{Z}$ 的顶因子应用恒等映射。这是一个上链同构。

- $T\langle m, e, \lambda, \kappa\rangle \xrightarrow{\cong} T\langle m, 1, \lambda, e\kappa\rangle$: 对顶行应用恒等映射，对 $\Omega_{n-p}{}^{-1}$ 则应用$(1/e)\mathrm{id}$，对 $\Omega^{[0,n-p-2]}$ 和 $\mathbb{Z}$ 的底因子应用恒等映射。这是一个上链同构。$\sim$

- $T\langle m, e, \lambda, \kappa\rangle \xrightarrow{=} T\langle m, e, 1, \kappa\lambda\rangle$: 对顶行和底行应用恒等映射，对 $\Omega_{n-p}{}^{-1}$ 则应用$(1/\lambda)\mathrm{i}$ d。这是一个上链同构。

通过复合这些类型的同构，我们可以得到一个同构

$$T\langle m, e, \lambda, \kappa\rangle \xrightarrow{\cong} T\langle 1, 1, 1, \tfrac{e\kappa}{m\lambda}\rangle$$

因此我们看到，在同构意义下，恰好只有一个 耦合常数。

特别地，我们看到

$$\mathrm{Mxw}^\circ_{p,n}\langle \kappa, e\rangle = T\langle 1, e, 1, \kappa\rangle \cong T\langle 1, 1, 1, e\kappa\rangle = \mathrm{Mxw}^\circ_{p,n}\langle e\kappa, 1\rangle \tag{15}$$

这将在阿贝尔对偶中发挥作用。

注5.2。这里还有一种描述这一情形的方式，或许有些读者会觉得更直观。我们描述了一个由$(\mathbb{R}^\times)^4$, 参数化的理论族，但更好的做法是考虑这样一个群胚：其对象构成空间$(\mathbb{R}^\times)^4$，其态射由缩放同构生成（因此每个对象都有$(\mathbb{R}^\times)^3$ 个出射态射）。我们刚刚证明，这个群胚包含一个由离散群胚 $\mathbb{R}^\times$参数化的骨架子范畴。◊

5.3. **对偶性陈述**。以下是我们一系列技术性铺垫带来的精彩结论，它也说明了为何要考虑这个不那么显然的阿贝尔p-形式规范理论变体 $\mathrm{Mxw}^\circ{}_{p,n}\langle \kappa, e\rangle$ 。

定理 5.3。存在一个同构

$$\mathbb{M}\mathrm{xw}^\circ_{p,n}\langle \kappa, e\rangle \xrightarrow{\cong} \mathbb{M}\mathrm{xw}^\circ_{n-p-2,n}\langle 1/\kappa, 1/e\rangle$$

作为取值于导出栈的$\mathsf{Riem}^{\mathrm{or}}_n$（或$\mathsf{Lrtz}^{\mathrm{or}}_n$）上的层，对所有自然数 n、 $0 \leq p \leq n-2$以及所有耦合常数 $e, \kappa \in \mathbb{R}^\times$均成立。

这个映射以非常直接的方式在经典层次上实现了“电磁对偶”。证明之后，我们将介绍四维电磁对偶、紧致玻色子的 T 对偶，以及电磁学与紧致玻色子之间的三维对偶的具体实例。

注5.4. 按 p 编号带来的不便已在注3.6中讨论过。如果按曲率（或场强）的次数来编号，对偶性就更容易记住：对于p形式规范理论，场强F 的次数为$p+1$，其对偶 $\star F$ 的次数为$n-(p+1)$。也就是说，对偶性会交换（余）维数。◊

证明。 这个映射是我们之前讨论过的两个映射的复合。我们从复形 $\mathrm{Mxw}^\circ{}_{p,n}\langle \kappa, e\rangle$ 开始。第一步是交换顶行和底行，并对 Ω^{p+1} 应用霍奇对偶，得到 Ω^{n-p-1}。新的复形为

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{e} & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-2} & \xrightarrow{-\kappa \mathrm{d}} & \\ & & & & & & & & \Omega^{n-p-1} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{p} & \xrightarrow{\star \mathrm{d}} & \end{array}$$

按照前一节的记号，这将是$T\langle e, \mathbf{1}, -\kappa-1\rangle$。现在我们知道

$$T\langle e, 1, -\kappa, -1\rangle \cong T\langle 1, 1, 1, 1/\kappa e\rangle$$

由（15），此外，

$$T\langle 1, 1, 1, 1/\kappa e\rangle \cong T\langle 1, 1/e, 1, 1/\kappa\rangle$$

正如所声称的，最后那个理论是 $\mathrm{Mxw}^\circ{}_{n-p-2,n}\langle 1/\kappa, 1/e\rangle$ 。 □

注 5.5。 作为启发式说明，请注意，在 $e \to 0$ 且 $\kappa = 1$ 的极限下，电荷晶格 $\mathbb{Z}e$ “填满”整个实数直线 $\mathbb{R}$，因此（粗略地说）收敛到理论 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$。在对偶性下，对偶理论的（作用泛函）耦合常数按 $1/e \to \infty$ 增长。

从直观层面来看，我们可以设想这类“极限过程”的其他版本。例如，取 $e \to 0$ 和 $m \to \infty$，便得到一个耦合常数趋于零的理论族。假设电荷格点“填满”一份 $\mathbb{R}$，而磁荷格点“消失在无穷远处”，那么我们可以粗略地将此极限设想为一个仅与 Mxw 拟同构的复形 $\mathcal{P}^{\mathrm{pert}}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 如式（9）所示。当然，这一极限过程并不严谨，但它确实说明了我们的构造如何与关于弱耦合极限下微扰理论有效性的观点相契合。◊

例 5.6 （四维中的电磁对偶）。1-形式规范理论 $\mathrm{Mxw}^{\circ}_{1,4}\langle\kappa,e\rangle$为

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \xrightarrow{\star\mathrm{d}} & \\ & & & & & & \Omega^2 \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{e} & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} & \end{array}$$

而它的对偶是 1-形式规范理论 $\mathrm{Mxw}^{\circ}_{1,4}\langle 1/\kappa,\, 1/e\rangle$，其中

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \xrightarrow{\star\mathrm{d}} & \\ & & & & & & \Omega^2 \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{1/e} & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \xrightarrow{-(1/\kappa)\mathrm{d}} & \end{array}$$

将我们上文的讨论推广。特别是，当 $\kappa = 1 = e$ 时，该理论是自对偶的。◊

例 5.7 （二维中的 T 对偶[41]）。 若取 $\kappa = 1$ 和 $e = R$，则这种对偶性看起来最接近传统表述。紧致玻色子理论 $\mathrm{Mxw}^{\circ}_{0,2}\langle 1,R\rangle$ 是

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\star\mathrm{d}} & \\ & & & & \Omega^1 \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{R} & \Omega^0 & \xrightarrow{-\mathrm{d}} & \end{array}$$

[41]经典参考文献是 [Bus87]，，但也请参见 [Sat87]。后续的重要文献包括 [RV92；BEM04；BS05]。这里的例子是最简单的情形，避开了后续研究所探讨的丰富现象，但我们应当能够综合这些观点。

而其对偶是紧致玻色子理论 $\mathrm{Mxw}^{\circ}_{0,2}\langle 1, 1/R\rangle$，其中

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\star \mathrm{d}} & \\ & & & & \Omega^1. \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{1/R} & \Omega^0 & \xrightarrow{-\mathrm{d}} & \end{array}$$

当$R = 1$时，该理论是自对偶的。 ◊

例 5.8（三维中的对偶性：规范与 σ-模型）。1-形式规范理论 $\mathrm{Mxw}^{\circ}_{1,3}\langle \kappa, e\rangle$ 是

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \xrightarrow{\star \mathrm{d}} & \\ & & & & & & \Omega^1 \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{e} & \Omega^0 & & & \xrightarrow{-\kappa \mathrm{d}} & \end{array}$$

而其对偶是紧致玻色子理论 $\mathrm{Mxw}^{\circ}_{0,3}\langle 1/\kappa, 1/e\rangle$，即

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \Omega^0 & & & \xrightarrow{\star \mathrm{d}} & \\ & & & & & & \Omega^2 \ . \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{1/e} & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^1 & \xrightarrow{-(1/\kappa)\mathrm{d}} & \end{array}$$

这是我们的第一个不可能实现自对偶的例子。 ◊

5.4. **关于与荷相关的格点**。我们重新审视规范理论分解为拓扑部分和动力学部分，如第3.6节所示。

定义 5.9. 令 $\widetilde{\mathrm{Mxw}}^{\mathrm{pert}}_{p\,n}$，表示层

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p & \xrightarrow{\star \mathrm{d}} & \\ & & & & & & \Omega^{n-p-1}\ , \\ \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-2} & \xrightarrow{-\kappa \mathrm{d}} & \end{array}$$

其中 Ω^p 和 Ω^{n-p-2} 集中在零次。

这一动力学理论看起来像是 $\mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,\ n}\langle \kappa,\ e\rangle$，只是左侧的 $\mathbb{Z}$ 因子被去掉了。在可缩时空上，它与我们见过的 p形式规范理论具有相同的零阶上同调，因此，如果只考察“物理的”零阶上同调，那么在局部看来它似乎是“相同的”。但是在可缩时空上，它在 $-p$ 次和 $-n + p + 2$ 次的上同调根据 $\widetilde{\ }$ 庞加莱引理为 $\mathbb{R}$，因此不同于 $\mathrm{Mxw}_{p,\ n}$ 或 $\mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,\ n}\langle \kappa,\ e\rangle$的上同调。

这种差异可以用层论语言非常清晰地表述。存在一个层的短正合列

$$0 \to \widetilde{\mathrm{Mxw}}^{\mathrm{pert}}_{p,n} \to \mathrm{Mxw}^{\circ}_{p,n}\langle \kappa, e\rangle \to \mathbb{Z}[p+1] \oplus \mathbb{Z}[n-p-1] \to 0 \tag{16}$$

它可以被解释为对纯拓扑场论的扩展

$$\mathbb{Z}[p+1] \oplus \mathbb{Z}[n-p-1],$$

仅由动力学理论 $\widetilde{\mathbb{M}\mathrm{xw}}^{\mathrm{pert}}_{p\,n}$ 编码电荷和磁荷，。

在导出栈层面，这意味着我们有一个映射

$$\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}\langle \kappa, e\rangle(M) \to \mathrm{Map}(M, B^{p+1}\mathbb{Z}) \times \mathrm{Map}(M, B^{n-p-1}\mathbb{Z})$$

或者，取连通分支后，

$$\pi_0(\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}\langle \kappa, e\rangle(M)) \to H^{p+1}(M,\mathbb{Z}) \times H^{n-p-1}(M,\mathbb{Z}).$$

换言之， $\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}{}_{p,n}\langle \kappa, e\rangle(M)$ 中的每个解都有底层上同调类，分别属于 $H^{p+1}(M,\mathbb{Z})$和 $H^{n-p-1}(M,\mathbb{Z})$。对于四维电磁学，这两个类属于 $H^2(M,\mathbb{Z})$ ，恰好是线丛的第一陈类；我们已经将这些类诠释为电荷和磁荷。

在底空间中固定一点（本质上即电荷格中的一个元素）后，该映射的纤维由微扰理论 $\widetilde{\mathbb{M}\mathrm{xw}}^{\mathrm{pert}}_{p\,n}$ 描述，捕捉了动力学。

5.5. **此背景下的高形式对称性**。 这里我们插入一段旁论，说明如何在这一框架中看出典型的磁性和电性高形式对称性，并解释它如何提供更精细的精化。

考虑遗忘映射

$$\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n} \to \mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}_{p} \times \mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}_{n-p-2}$$

它保留底层的带联络丛。每个带联络丛都有一个底层丛，因此我们有一个映射

$$\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}(M) \to H^{p+1}(M,\mathbb{Z}) \tag{17}$$

如前所述，它编码了“磁荷”。这样的映射确定了一个可观测量，通常称为高形式对称性；现在我们来说明如何得到通常的磁性 $n-p-2$-形式对称性的公式。

注意，沿着 (17) 拉回可确定一个映射

$$U^{\mathrm{mag}} : \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(H^{p+1}(M,\mathbb{Z}), U(1)) \to \mathcal{O}(\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}(M))^{\times}$$

它将阿贝尔群 $H^{p+1}(M,\mathbb{Z})$ 上的一个特征映射为导出栈 $\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}{}_{p,n}(M)$上的一个处处非零函数。更具体地说，存在一个特征

$$H^{p+1}(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow U(1)$$

$$c \longmapsto e^{i\alpha \int_N c} = g^{\langle [N], c\rangle}$$

对于每个元素 $g = e^{i\alpha} \in U(1)$ ，以及每个闭的 $n-p-1$ 维子流形 $N \subset M$ （它确定一个同调类 $[N] \in H^{n-p-1}(M,\mathbb{Z})$）。这里 c 表示

一个整系数上同调类，而 $\langle [N], c \rangle$ 表示上同调/同调配对。这个特征成为可观测量

$$U_g^{\mathrm{mag}}(N^{(n-p-1)}) : (P \to M, A) \mapsto e^{i\alpha \int_N F_A} = g^{\langle N, c(P) \rangle}$$

其中 $P \to M$ 是一个 p-丛，且 A 是其联络。这里 $c(P)$ 是 P 的特征类，因此可通过陈–韦伊理论将其等同于曲率 F_A 。注意，如果取 [Gai+15]，那么这个公式恰好就是其中的公式 (4.2)：$p = 1$。

电 p-形式对称性也有一个平行的构造，可得出 [Gai+15]中的公式 (4.1)。

最后，我们注意到，可以通过将$H^{p+1}(M, \mathbb{Z})$ 替换为相应的微分上同调群，或者更理想地，替换为导出栈 $\mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}{}_p$，对这一构造作出重大改进。遗忘映射

$$f : \mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n} \to \mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}_p$$

通过拉回诱导出一个映射

$$f^* : \mathcal{O}(\mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}_p) \to \mathcal{O}(\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}(M))$$

在函数代数之间。[42] 通过拉回得到的可观测量可视为对通常高形式对称性算子的非平凡精化。特别是，这些可观测量包括依赖于带联络丛的微分上同调类，而不仅仅依赖于其底层丛的函数。

5.6. **电荷离散化的模空间论含义**。用数学术语来说，商层

$$\widetilde{\mathbb{M}\mathrm{xw}}_{p,n}\langle \kappa \rangle \,/\, \mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}\langle \kappa, e \rangle$$

是微分分次阿贝尔群$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)[n-p-1]$，对应于分类空间$B^{n-p-1}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)$，其中 $\mathbb{Z}e \subset \mathbb{R}$。注意，这个商群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}e$ 带有离散拓扑（它并不同构于带有流形结构的$U(1)$），因此这个微分分次阿贝尔群为$B^{n-p-1}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)$建模。换言之，它呈现了高阶阿贝尔群$B^{n-p-2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)$ 的分类栈，因而参数化该高阶群的丛。我们有一个叠映射

$$q : \widetilde{\mathbb{M}\mathrm{xw}}_{p,n}\langle \kappa \rangle \to \widetilde{\mathbb{M}\mathrm{xw}}_{p,n}\langle \kappa \rangle \,/\, \mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}\langle \kappa, e \rangle \simeq \mathbb{B}\mathrm{un}_{B^{n-p-2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)}$$

[42]特征是一种特殊的函数，它处处不为零，因此拉回f^* 将 $\mathrm{Hom}(\mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}_p, U(1))$ 映射到 $\mathcal{O}(\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}(M))^{\times}$。在量子化这些阿贝尔规范理论时，此类特征特别有用。

因此，p形式规范理论的解具有一个底层$B^{n-p-2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)$丛，作为一种“电荷”。此外，我们可以将 $\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}{}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle$ 视为一个拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle & \longrightarrow & \mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,n}\langle\kappa\rangle \\ \downarrow & & \downarrow q \\ * & \longrightarrow & \mathbb{B}\mathrm{un}_{B^{n-p-2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)} \end{array} , \tag{18}$$

使得 $\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}{}_{p,\ n}\langle\kappa,\ e\rangle$ 是理论 $\mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,\ n}\langle\kappa\rangle$ 在 $\mathbb{B}\mathrm{un}_{B^{n-p-2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)}$之上的纤维。这样的拉回相当于给出电荷的平凡化数据，[43] 而且这种选择并不唯一：由导出阿贝尔群栈 $\mathbb{B}\mathrm{un}_{B^{n-p-2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)}$描述的平凡化空间非空。

备注 第 5.10 节。或者，交换此图中的角，我们得到一个拉回方 are

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,n}\langle\kappa\rangle & \xrightarrow{q} & \mathbb{B}\mathrm{un}_{B^{n-p-2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)} \end{array} ,$$

因此，将 $\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}{}_{p,\ n}\langle\kappa,\ e\rangle$ 视为一个丛，其纤维为 $\mathbb{B}\mathrm{un}_{B^{n-p-3}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)}$。 ◊

让我们在时空流形 M 上展开这个故事。$\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}{}_{p,\ n}\langle\kappa,\ e\rangle(M)$[44] 中的一个点相当于一个元素 α，它属于 $\mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,\ n}\langle\kappa\rangle(M)$，并附带其电荷的平凡化

$$q(\alpha) \in \mathrm{Map}(M, B^{n-p-1}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)).$$

该映射空间的连通分支

$$\pi_0 \,\mathrm{Map}(M, B^{n-p-1}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)) = H^{n-p-1}(M, \mathbb{R}/\mathbb{Z}e)$$

构成一个短正合列

$$0 \to H^{n-p-1}(M,\mathbb{R})/eH^{n-p-1}_{\text{free}}(M,\mathbb{Z}) \to H^{n-p-1}(M,\mathbb{R}/\mathbb{Z}e) \to H^{n-p}_{\text{tors}}(M,\mathbb{Z}) \to 0$$

它源自 $0 \to e\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}/e\mathbb{Z} \to 0$ 的 Bockstein 序列。因此，荷 $q(\alpha)$ 确定了一个上同调类，属于 $H^{n-p-1}(M,\mathbb{R}/\mathbb{Z}e)$；该类结合了连续数据（来自实系数上同调）与 $H^{n-p}\,\mathrm{tors}\,(M,\mathbb{Z})$ 中的离散扭转不变量。荷 $q(\alpha)$ 本身属于映射空间，我们将其视为这个上同调群的增强。

这类平凡化构成的空间由 $\mathrm{Map}(M,B^{n-p-2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}e))$ 参数化，其连通分支构成类似的短正合列

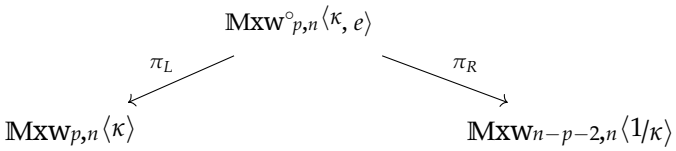
$$0 \to H^{n-p-2}(M,\mathbb{R})/eH^{n-p-2}_{\text{free}}(M,\mathbb{Z}) \to H^{n-p-2}(M,\mathbb{R}/\mathbb{Z}e) \to H^{n-p-1}_{\text{tors}}(M,\mathbb{Z}) \to 0.$$

从这个意义上说，场论 $\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}{}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle(M)$ 可以看作由 $\mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,n}\langle\kappa\rangle(M)$ 中的电荷为零的⁓场，以及由群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}e$的 $(n-p-2)$-丛给出的背景场构成。

[43]作为类比，可以考虑将一个 $SO(3)$ 丛提升为一个 $SU(2)$ 丛，这相当于将其斯蒂费尔-惠特尼类 w_2, 平凡化；类似的构造也出现在非阿贝尔规范理论的中心对称性中。[44]也就是说，这是一个从导出流形 $*$（其函数环为 $\mathbb{R}$）到 $\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle(M)$ 的映射。

这种描述提供了另一种数学上精确的说法：它是配备了“高形式对称性”的规范理论。

5.7. **关于对应。** 利用对偶同构和遗忘荷的映射，我们得到一个对应



导出叠，其中每条腿都是（14）的一种形式。此外，鉴于（18），此对应将 $\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}{}_{p,n}\langle \kappa,e\rangle$ 实现为两个不同“纤维丛”的总空间。在时空上局部地，左腿 π_L 将 $\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}{}_{p,n}\langle \kappa,e\rangle$ 实现为一个以 $B^{n-p-2}(\mathbb{R}/e\mathbb{Z})$ 为底的丛，而右腿 π_R 将其实现为一个以 $B^{p}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 为底的丛。

注意，关于丛的这一表述是通过取值于导出叠的时空上的层来 formulized 的。若在时空流形 M 上取值，纤维本质上是 $\mathrm{Map}(M,B^{n-p-2}(\mathbb{R}/e\mathbb{Z}))$，即 M 上高阶 $\mathbb{R}/e\mathbb{Z}$-丛的一个模空间，其本身是一个导出阿贝尔群栈。

这种对应在这两个理论之间产生了积分变换，将路径积分（在物理层面）与层范畴（在数学层面，例如傅里叶–穆凯变换）联系起来。

例如，这似乎与 [Wit99] 关于这些对偶性的论证相吻合：

- 麦克斯韦 p-形式理论的一个可观测量f 可以拉回为电荷离散化理论的一个可观测量 $\pi^*{}_L f$，并且
- 对纤维进行积分后，可得到 n 形式麦克斯韦理论的一个可观测量 $\pi_R!\,\pi^*{}_L f$。

换句话说，我们只需将纤维方向视为“量子”的（即沿该方向进行路径积分）。

有趣的是，不妨思考范畴类比——沿着这种对应推送和拉回层，并借鉴 [DP08；ABP13；Bun+08；GHM23] 等人的工作（众多相关研究中的一部分）——可能如何阐明对偶性的特征。

注记 5.11。 在 [Ell19], 中讲述了如何在广义麦克斯韦理论之间传递可观测量，但涉及的是可观测量之间的对应，而非场论。它以由上链复形编码的理论作为中介可观测量rather than field theories.It uses, as an intermediary, the theoryencodedbythe cochaincomplex

$$\Omega^p \xrightarrow{\mathrm{d}\star\mathrm{d}} \Omega^{n-p}$$

不了解（高阶）规范对称性及其反场。 ◊

5.8. **将对偶性视为与拓扑 p-形式理论耦合的 *BF* 理论。** 很自然会想知道，是否存在一种不施加电荷离散化的阿贝尔对偶形式。毕竟，对应关系表明，p-形式与$n - p - 2$-形式麦克斯韦理论仅在离散规范场方面有所不同，因此人们或许希望能够开启或关闭这些额外的场。

这种关系理应成立，尽管其中存在一些微妙之处：正如 [MSF25, §472], 对配分函数的仔细计算表明，两者相差一个明确的因子，该因子取决于 Ray–Singer 挠率以及整系数上同调中的挠元。人们或许可以希望，这个因子就是一个 BF 型拓扑场论的配分函数。

在本文的表述中，我们提出这样的问题：能否用 $\mathbb{M}\mathrm{xw}_{n-p-2,n}\langle 1/\kappa\rangle$ 来描述 $\mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,n}\langle\kappa\rangle$，但或许让它与另一种理论耦合?

We o 在此给出一种用模型 $\mathrm{Mxw}_{p,n}$ 表述的方式，如下所示。回想一下，$\mathrm{Mxw}_{p,n}$ 是

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p & & & & \\
 & & & & & & & \searrow^{\star\mathrm{d}} & & & \\
 & & & & & & & & \Omega^{n-p-1} & & \\
 & & & & & & & \nearrow_{-\kappa\mathrm{d}} & & & \\
\mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-2} & & & &
\end{array}$$

而且它与 $\mathrm{Mxw}_{n-p-2,n}$ 非常相似，只是必须对调 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$ 的位置。可以通过向 $\mathrm{Mxw}_{p,n}$ 添加一些额外的项来实现这种对调：考虑以下复形

(19)
$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{R} & & & & & & & & \\
 & \searrow^{-1} & & \searrow & & & & & & & \\
 & & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p & & \\
 & & & & & & & & & \searrow^{\star\mathrm{d}} & \\
 & & & & & & & & & & \Omega^{n-p-1} \\
 & & & & & & & & & \nearrow_{-\kappa\mathrm{d}} & \\
 & & \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-2} & & \\
 & & \mathbb{Z} & \xrightarrow{-1} & \mathbb{R} & & & & & &
\end{array}$$

其中在左下角，我们将 $(x,n) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}$ 映射到 $(x - n, x + n) \in \Omega^0 \oplus \mathbb{R}$。注意，这个复形（19）包含

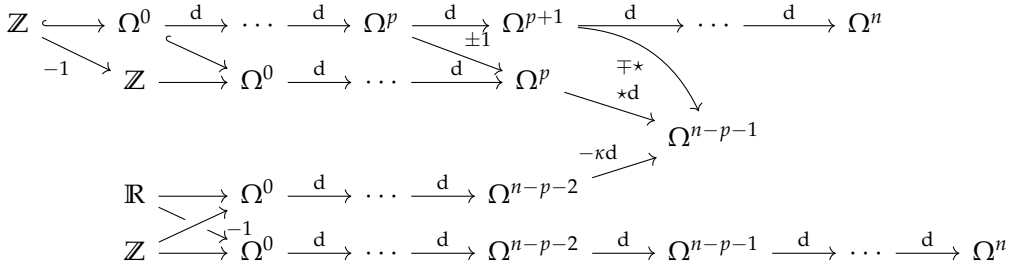
$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p & & & & \\
 & & & & & & & \searrow^{\star\mathrm{d}} & & & \\
 & & & & & & & & \Omega^{n-p-1} & & \\
 & & & & & & & \nearrow_{-\kappa\mathrm{d}} & & & \\
\mathbb{Z} & \longrightarrow & \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-2} & & & &
\end{array}$$

作为一个拟同构子复形。这个复形（19）看起来像 $\mathrm{Mxw}_{p,n}$ 与一个局部常值层耦合在一起，可以视为一种拓扑场论。

还有一种更漂亮、且明显与 BF 理论相关的版本：将（ℝ 式（19）最上行和最下行中的每一份都替换为德拉姆复形（这一做法受庞加莱引理启发）。

定义 5.12。令 $\mathrm{MxwBF}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 表示定义在 $\mathrm{Riem}_n^{\mathrm{or}}$（或 $\mathrm{Lrtz}_n^{\mathrm{or}}$）上、取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ 的层，其局部形式为

(20)



其中，按行来看，Ω^{p+1}、Ω^{p}、Ω^{n-p-2}和 Ω^{n-p-2} 都集中在零次。

这个复形以 Mxw_{p}、$_{n}$ 作为中间两行，而外侧两行则构成拓扑 BF 理论。更准确地说，外侧两行构成一个带有离散电荷的p + 1-形式拓扑 BF 理论离散。因此，整个复形 MxwBF_{p}、$_{n}\langle\kappa\rangle$ 是麦克斯韦理论与电荷离散化 BF 理论之间一种有趣的耦合。

注 5.13。通过构造作用泛函的方法（10）可以直接为该理论写出作用泛函，其做法是将一个高阶拓扑 BF 理论与麦克斯韦理论的二次耦合纳入其中。但作用泛函并未体现荷的离散化；这必须作为约束明确写出，而这一点在层描述中是可见的。◊

根据构造，$\mathrm{MxwBF}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 与 $\mathrm{Mxw}_{n-p-2,n}\langle 1/\kappa\rangle$ 拟同构。因此，我们得到如下形式的对偶性。

命题 5.14。存在一个模空间栈的同构

$$\mathbb{M}\mathrm{xwBF}_{p,n}\langle\kappa\rangle \simeq \mathbb{M}\mathrm{xw}_{n-p-2,n}\langle 1/\kappa\rangle$$

其中，左侧是由 $\mathrm{MxwBF}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 呈现的模空间栈。

计算 $\mathrm{MxwBF}_{p,n}\langle\kappa\rangle$ 的配分函数，将有助于联系 [MSF25] 中的讨论。

6. 阿贝尔规范理论的紧化

现在我们来研究将n维p形式规范理论紧化（或推前），从而在低维流形上得到理论。

基本情形是研究乘积流形 $X \times Y$ 上的一个理论，其中 Y 是闭且定向的。于是，我们可以认为该理论存在于 X 上。借助本文的层论语言，我们有一个投影映射

$$\pi : X \times Y \to X$$

我们希望理解将编码该理论的层 $\mathcal{F}$ 从 $X \times Y$ 推前所得的 $\pi_*\mathcal{F}$。（请注意，我们所说的推前是指导出推前。）

更准确地说，我们预期推前等价于自然出现在X上的理论。在这里，我们预期广义麦克斯韦理论紧化后会得到一组广义麦克斯韦理论，尽管其中的阿贝尔群并非$U(1)$。在陈述主要结果之前，我们先简要介绍适用于高维环面的广义麦克斯韦理论。

6.1. **高秩阿贝尔规范理论**。上文讨论了$U(1)$规范理论，但推广到任意环面也很直接：我们只需将$U(1)$ 情形中每个分量取r重直和，并将 κ 从实数推广为一个$r \times r$ 矩阵K。

定义 6.1. 给定矩阵$K \in \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$，令 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle \mathbb{Z}^r, K\rangle$ 为定义在 $\mathrm{Riem}_n^{\mathrm{or}}$上且取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$的层，其在

$$\mathbb{Z}^r \to (\Omega^0)^{\oplus r} \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots (\Omega^p)^{\oplus r} \xrightarrow{K\mathrm{d}\star\mathrm{d}} (\Omega^{n-p})^{\oplus r} \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} (\Omega^n)^{\oplus r}$$

任意这样的可缩流形上的值。其导出整体截面 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle \mathbb{Z}^r, K\rangle(M)$ 给出一个导出栈

$$\mathbb{M}\mathrm{xw}_{p,n}\langle \mathbb{Z}^r, K\rangle(M)$$

对每个黎曼流形 M。该层带有自然的局部(-1)-辛结构。

我们将 $\mathrm{Mxw}_{p,n}\langle \mathbb{Z}^r, K\rangle$ 称为群为 $U(1)^r$ 、耦合常数为$K \in \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$的 p-形式规范理论。我们也有电荷离散化版本。

定义 6.2。给定一个矩阵$E \in \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$，群为 U的电荷离散化 p-形式规范理论$(1)^r$，记作 $\mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,n}\langle \mathbb{Z}^r, K, E\rangle$，由定义在 $\mathrm{Riem}_n^{\mathrm{or}}$ 上、取值于$\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$的层编码，其取值为

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{Z}^r & \longrightarrow & (\Omega^0)^{\oplus r} & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & (\Omega^p)^{\oplus r} & & \\
 & & & & & & & \searrow^{\star\mathrm{d}} & \\
 & & & & & & & & (\Omega^{n-p-1})^{\oplus r} \\
 & & & & & & & \nearrow_{-K\mathrm{d}} & \\
\mathbb{Z}^r & \xrightarrow{E} & (\Omega^0)^{\oplus r} & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & (\Omega^{n-p-2})^{\oplus r} & &
\end{array}$$

在任何这样的可缩流形上。其在M 上的导出整体截面呈现一个导出栈$\mathbb{M}\mathrm{xw}^{\circ}{}_{p,n}\langle \mathbb{Z}^r, K, E\rangle(M)$，它在闭黎曼流形$M$上是 -1-预辛的。

与前面一样，存在同构

$$\mathrm{Mxw}^{\circ}_{p,n}\langle \mathbb{Z}^r, K, E\rangle \cong \mathrm{Mxw}^{\circ}_{p,n}\langle \mathbb{Z}^r, KE, 1\rangle$$

以及对偶性

$$\mathrm{Mxw}^{\circ}_{p,n}\langle \mathbb{Z}^r, K, E\rangle \cong \mathrm{Mxw}^{\circ}_{n-p-2,n}\langle \mathbb{Z}^r, K^{-1}, E^{-1}\rangle$$

通过类似的论证。（事实上，情况会变得更加有趣，因为我们可以探讨由 $\mathrm{GL}(r,\mathbb{Z})$ 作用于“离散荷”所产生的对称性。）

我们注意到，类似地，可以引入定义 3.1 中 Deligne 复形的一个高秩变体。

定义 6.3。给定一个矩阵 $L \in \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$，环面 $\mathbb{R}^r/L(\mathbb{Z}^r)$ 的 ***Deligne*** 复形，记作 $\mathcal{D}\mathrm{el}_n\langle \mathbb{Z}^r, L\rangle$，由定义在 $\mathrm{Riem}_n^{\mathrm{or}}$ 上、取值于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ 的层编码，其在任何可缩的此类流形上的取值为

$$\mathbb{Z}^{\oplus r}[1] \xrightarrow{L} (\Omega^0)^{\oplus r} \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} (\Omega^n)^{\oplus r}$$

在任何这样的可缩流形上。

6.2。**主要结果与一些特殊情形**。回顾一下，根据第 5.4 节，我们可以将电荷离散化麦克斯韦理论 $\mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,n}\langle \kappa, e\rangle$ 视为由一个拓扑场论和一个微扰理论组装而成。具体来说，我们有

$$0 \to \widetilde{\mathrm{Mxw}}^{\mathrm{pert}}_{p,n} \to \mathrm{Mxw}^{\circ}_{p,n}\langle \kappa, e\rangle \to \mathbb{Z}[p+1] \oplus \mathbb{Z}[n-p-1] \to 0$$

已见其为短正合列（16）。为了描述推前 $\pi_* \mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,n}\langle \kappa, e\rangle$，我们可以求出拓扑层和微扰层的推前，然后将它们组装起来。（我们将在第 6.3 节讨论这一过程的运作方式。）描述类似 $\pi_*\mathbb{Z}$ 这样的推前是拓扑学中的经典问题，它与取值于 $H^\bullet(Y,\mathbb{Z})$ 的常值层拟同构。用方便的术语描述微扰理论的推前涉及霍奇理论和同调微扰引理；我们将在第 6.4 节处理这一问题。

将这些要素组合起来，即可得到下面陈述的结果。该结果涉及流形 X 和 Y 的维数与 p 的取值之间的一些相互作用，因此陈述略显复杂。下面我们将这一一般性陈述针对四维麦克斯韦理论展开，逐一讨论所有可能的情形。

定理 6.4。设 X 是一个维数为 x 的定向黎曼流形，Y 是一个维数为 y 的闭定向黎曼流形。设 $\pi\colon X \times Y \to X$ 为投影。设 $E_k\colon H^k_{\mathrm{free}}(Y,\mathbb{Z}) \to H^k(Y,\mathbb{R})$ 表示从整系数上同调到实系数上同调的嵌入。

X 上的推前层 $\pi_* \mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,n}\langle \kappa, e\rangle$ 拟同构于以下四个层的直和

- $\bigoplus_{\ell=\max(p-x+1,0)}^{\min(y,p)} \mathrm{Mxw}^{\circ}_{p-\ell,x}\langle H^\ell(Y,\mathbb{Z}), \kappa\,\mathrm{Id}, eE_\ell\rangle$
- $\bigoplus_{\ell=0}^{p-x} \mathcal{D}\mathrm{el}_x\langle H^\ell(Y,\mathbb{Z}), E_\ell\rangle[p-\ell]$
- $\bigoplus_{k=0}^{y-p-1} \mathcal{D}\mathrm{el}_x\langle H^k(Y,\mathbb{Z}), E_k\rangle[n-p-2-k]$
- $H^\bullet_{\mathrm{tors}}(Y,\mathbb{Z})[p+1] \oplus H^\bullet_{\mathrm{tors}}(Y,\mathbb{Z})[n-p-1]$

其中，$H^\bullet{}_{\text{挠元}}(Y,\mathbb{Z})$ 表示 Y 的整系数上同调的挠子子群。

第一项贡献是高秩广义麦克斯韦理论的乘积，定义在 X 上。

注记 6.5。 我们的结果可提升为关于这些复形所呈现的导出栈的陈述，因为我们的方法适用于测试对象族：我们不改变Y 上的度量，因此无需处理 Hodge 分解在族中变化所带来的细微问题。◊

注记 6.6。 这里我们考虑了黎曼流形的乘积，但这些技术也可以处理纤维丛 $M \to X$，其纤维为紧纤维[45] 且度量发生变化（例如扭曲积，这是一个简单类型的例子）。相关论证需要对微扰因子进行更复杂的记账，因为必须处理沿底空间变化的纤维的 Hodge 分解。定义在 X 上的理论，其耦合“常数”随后会以一种有趣的方式依赖于总空间的度量。◊

现在我们考虑 $\dim(X \times Y) = 4$ 的情形。需要考察六种情况：令Y 的维数为 1、2 或 3，并令 $p = 0$ 或 1，因为 2-形式理论与 0-形式理论对偶。注意，只有当 $y = 3$ 时，上同调中的挠元才可能出现，因为S^1 和定向曲面都没有挠元。

例 6.7 ($x + y = 4, p = 0, y = 1$)。 3维流形 X 上的层局部地由计算以下内容给出

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & H^0(Y,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_X^0 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \\
 & & & \searrow^{\star \mathrm{d}} & \\
 & & & & \Omega_X^2 \otimes H^1(Y,\mathbb{R}) \\
 & & & \nearrow_{-\kappa \mathrm{d}} & \\
H^1(Y,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{e} & \Omega_X^0 \otimes H^1(Y,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega_X^1 \otimes H^1(Y,\mathbb{R})
\end{array}
$$

$$
H^0(Y,\mathbb{Z}) \Omega_X^0 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \Omega_X^1 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \Omega_X^2 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \Omega_X^3 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \xrightarrow{e \,\mathrm{d}\, \mathrm{d} - \kappa \mathrm{d}}
$$

其中，在零次度数下，我们有

$$\Omega_X^0 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \oplus \Omega_X^1 \otimes H^1(Y,\mathbb{R}) \oplus \Omega_X^2 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}).$$

注意，$\star$ 表示 $\star_X \otimes \star_Y$（相差一个符号），而 d 表示X上的外微分。 ◊

例 6.8 ($x + y = 4, p = 0, y = 2$). 2维流形X 上的层在局部由对以下内容求值给出

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & H^0(Y,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_X^0 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \\
 & & & \searrow^{\star \mathrm{d}} & \\
 & & & & \Omega_X^1 \otimes H^2(Y,\mathbb{R}) \\
 & & & \nearrow_{-\kappa \mathrm{d}} & \\
H^2(Y,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{e} & \Omega_X^0 \otimes H^2(Y,\mathbb{R}) & &
\end{array}
$$

$$
H^0(Y,\mathbb{Z}) \Omega_X^0 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \Omega_X^1 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \Omega_X^2 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \xrightarrow{e \,\mathrm{d}\, \mathrm{d}}
$$

$$
H^1(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{e} \Omega_X^0 \otimes H^1(Y,\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_X^1 \otimes H^1(Y,\mathbb{R}) \xrightarrow{-\kappa \mathrm{d}} \Omega_X^2 \otimes H^1(Y,\mathbb{R})
$$

[45]也就是说，一个适当满射下沉。

其中在零次上有

$$\Omega_X^0 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \oplus \Omega_X^0 \otimes H^2(Y,\mathbb{R}) \oplus \Omega_X^2 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \oplus \Omega_X^1 \otimes H^1(Y,\mathbb{R}).$$

请注意， $\star$ 表示 $\star_X \otimes \star_Y$ （至多差一个符号），而 d 表示X上的外微分。 $\Diamond$

例6.9 ($x\ +y\ =4, p\ =0, y\ =3$)。 1维流形X 上的层局部上由对以下表达式求值给出

$$\begin{array}{ccccc} & & H^0(Y,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_X^0 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \\ & & & \searrow^{\star\mathrm{d}} & \\ & & & & \Omega_X^0 \otimes H^3(Y,\mathbb{R}) \\ H^0(Y,\ \mathbb{Z}) & \Omega_X^0 \otimes & H^0(Y,\ \mathbb{R}) & \Omega_X^1 \otimes & H^0(Y,\ \mathbb{R}) \end{array} e\,\mathrm{d}$$

$$H^1(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{e} \Omega_X^0 \otimes H^1(Y,\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_X^1 \otimes H^1(Y,\mathbb{R})$$

$$H^2(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{e} \Omega_X^0 \otimes H^2(Y,\mathbb{R}) \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} \Omega_X^1 \otimes H^2(Y,\mathbb{R})$$

其中在零次上有

$$\Omega_X^0 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \oplus \Omega_X^1 \otimes H^1(Y,\mathbb{R}) \oplus \Omega_X^0 \otimes H^2(Y,\mathbb{R}).$$

注意，因子$H^2(Y,\mathbb{Z})$ 可能含有挠元！注意， $\star$ 表示 $\star_X \otimes \star_Y$ （相差一个符号），而d表示X上的外微分。$\Diamond$

例6.10 ($x\ +y\ =4, p\ =1, y\ =1$)。 3维流形X 上的层局部上由对以下表达式求值给出

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(Y,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_X^0 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega_X^1 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) & \searrow^{\star\mathrm{d}} & \\ & & & & & & \Omega_X^1 \otimes H^1(Y,\mathbb{R}) \\ & & H^1(Y,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{e} & \Omega_X^0 \otimes H^1(Y,\mathbb{R}) & \nearrow_{-\kappa\mathrm{d}} & \\ & & H^1(Y,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_X^0 \otimes H^1(Y,\mathbb{R}) & \searrow^{\star\mathrm{d}} & \\ & & & & & & \Omega_X^2 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \\ H^0(Y,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{e} & \Omega_X^0 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega_X^1 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) & \nearrow_{-\kappa\mathrm{d}} & \end{array}$$

其中，在零次上我们有

$$\Omega_X^1 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}) \oplus \Omega_X^0 \otimes H^1(Y,\mathbb{R}) \oplus \Omega_X^0 \otimes H^1(Y,\mathbb{R}) \oplus \Omega_X^1 \otimes H^0(Y,\mathbb{R}).$$

N请注意， $\star$ 表示 $\star_X \otimes \star_Y$ （相差一个符号），而 d 表示X上的外微分。 $\Diamond$

例 6.11 ($x\ +y\ =4, p\ =1, y\ =2$)**.** 2维流形X 上的层由局部计算以下内容给出

$$
\begin{array}{ccccccc}
H^0(Y,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_X^0\otimes H^0(Y,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega_X^1\otimes H^0(Y,\mathbb{R}) & & \\
 & & & & & \searrow^{\star\mathrm{d}} & \\
 & & & & H^2(Y,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_X^0\otimes H^2(Y,\mathbb{R}) \\
 & & H^1(Y,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_X^0\otimes H^1(Y,\mathbb{R}) & & \\
 & & & & & \searrow^{\star\mathrm{d}} & \\
 & & & & & & \Omega_X^1\otimes H^1(Y,\mathbb{R}) \\
 & & H^1(Y,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{e} & \Omega_X^0\otimes H^1(Y,\mathbb{R}) & \nearrow_{-\kappa\mathrm{d}} & \\
H^0(Y,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{e} & \Omega_X^0\otimes H^0(Y,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega_X^1\otimes H^0(Y,\mathbb{R}) & \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} & \Omega_X^2\otimes H^0(Y,\mathbb{R})
\end{array}
$$

其中，在零次情形下，我们有

$$\Omega_X^1\otimes H^0(Y,\mathbb{R})\oplus\Omega_X^0\otimes H^1(Y,\mathbb{R})\oplus\Omega_X^0\otimes H^1(Y,\mathbb{R})\oplus\Omega_X^1\otimes H^0(Y,\mathbb{R}).$$

注意，$\star$ 表示 $\star_X\otimes\star_Y$ （相差一个符号），而 d 表示X上的外微分。 ◊

例 6.12 ($x\ +y\ =4, p\ =1, y\ =3$)。 1维流形X 上的层局部上由对以下内容求值给出

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & H^1(Y,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_X^0\otimes H^1(Y,\mathbb{R}) & & \\
 & & & & & \searrow^{\star\mathrm{d}} & \\
 & & & & H^2(Y,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_X^0\otimes H^2(Y,\mathbb{R}) \\
H^0(Y,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_X^0\otimes H^0(Y,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega_X^1\otimes H^0(Y,\mathbb{R}) & & \\
H^0(Y,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{e} & \Omega_X^0\otimes H^0(Y,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega_X^1\otimes H^0(Y,\mathbb{R}) & & \\
 & & H^1(Y,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{e} & \Omega_X^0\otimes H^1(Y,\mathbb{R}) & \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} & \Omega_X^0\otimes H^1(Y,\mathbb{R})
\end{array}
$$

其中，在零次情形下，我们有

$$\Omega_X^1\otimes H^0(Y,\mathbb{R})\oplus\Omega_X^0\otimes H^1(Y,\mathbb{R})\oplus\Omega_X^0\otimes H^1(Y,\mathbb{R})\oplus\Omega_X^1\otimes H^0(Y,\mathbb{R}).$$

注意，$\star$ 表示 $\star_X\otimes\star_Y$ （相差一个符号），而 d 表示X上的外微分。 ◊

6.3. **通过三角剖分进行紧化**。 粗略地说，一个p形式理论的紧化是若干阿贝尔k形式规范理论的乘积，其中k 从 0 变化到p。也就是说，若$\pi\colon X\ \times Y\ \to X$是投影，则推前 $\pi_*\,\mathrm{Mxw}^\circ{}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle$ 近似为

$$\mathrm{Mxw}^\circ_{0,k}\langle H^p_{\mathrm{free}}(Y),\kappa,eE_p\rangle\times\mathrm{Mxw}^\circ_{1,k}\langle H^{p-1}_{\mathrm{free}}(Y),\kappa,eE_{p-1}\rangle\times\cdots\times\mathrm{Mxw}^\circ_{p,k}\langle H^0_{\mathrm{free}}(Y),\kappa,eE_0\rangle \tag{21}$$

其中，我们用 $H^k_{\mathrm{free}}(Y)$ 表示由阿贝尔群 $H^k(Y,\mathbb{Z})$的自由部分给出的整格，而E_k 则编码了该格嵌入实系数上同调群的方式。

在（21）中，我们遗漏了Y的上同调中的挠元所作的贡献。这些挠元贡献了 Dijkgraaf-Witten 类拓扑规范理论，它们与（21）右侧出现的规范理论耦合。

在深入细节之前，我们先指出可以从一般原理中看出什么。这里我们将描述 $\mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle$ 的情形，但同样的技巧适用于广义麦克斯韦理论的任何变体。

注意，$M = X \times Y$ 上的任意层的短正合列都会确定一个层的导出范畴中的三角；沿 π 对这个三角进行（导出）推前后，会得到 X 上层的导出范畴中的一个三角。

现在我们将这一观察应用于

$$0 \to \widetilde{\mathrm{Mxw}}^{\mathrm{pert}}_{p,n} \to \mathrm{Mxw}^{\circ}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle \to \mathbb{Z}[p+1] \oplus \mathbb{Z}[n-p-1] \to 0$$

第16式，即第5.4节中的短正合列。我们得到一个三角

$$\pi_*\widetilde{\mathrm{Mxw}}^{\mathrm{pert}}_{p,n} \to \pi_*\,\mathrm{Mxw}^{\circ}_{p,n}\langle\kappa,e\rangle \to \pi_*\left(\mathbb{Z}[p+1] \oplus \mathbb{Z}[n-p-1]\right) \to \pi_*\widetilde{\mathrm{Mxw}}^{\mathrm{pert}}_{p,n}[1]$$

X 的层的导出范畴中的。（回想一下，我们用 π_* 表示导出推前。）

现在，层 $\pi_*\mathbb{Z}[p+1]$ 在代数拓扑中得到了深入研究，通常借助 Leray–Serre 谱序列来研究。回想一下，$\pi_*\mathbb{Z}$ 是一个局部常值层，其在可缩开集 $U \subset X$ 上的取值拟同构于奇异上链复形 $C^\bullet(Y,\mathbb{Z})$。但一个经典事实是[46]，$C^\bullet(Y,\mathbb{Z})$ 拟同构于其上同调 $H^\bullet(Y,\mathbb{Z})$，因此我们得到

$$\pi_*\mathbb{Z}[p+1] \simeq H^\bullet(Y,\mathbb{Z})[p+1]$$

其中右侧被视为X上的局部常值层。简而言之，我们对三角中的这一项有很好的把握。

层 $\pi_*\mathrm{Mxw}^{\mathrm{pert}}_{p\,n}$ 也已得到充分理解：

- 它由向量丛的光滑截面构成，因此导出推前与朴素推前一致，并且

- 只要Y 是闭且定向的，霍奇理论原则上就允许我们用Y上的调和形式取代Y 上的微分形式。[47]

因此，我们可以将 $\pi_*\mathrm{Mxw}^{\mathrm{pert}}_{p\,n}$ 视为 X 上的一个场论。我们将看到，从本质上说，它是 X 自身上的微扰麦克斯韦理论的乘积。

[46]证明见 [KS06，推论 13.1。20]。[47]利用 L^2 上同调，我们可以处理Y 非闭的情形，下面的论证也能顺利推广。

综合我们的观察，我们看到

$$\pi_* \operatorname{Mxw}^{\circ}_{p,n}\langle \kappa, e\rangle$$

可以描述为一个层映射的（余）锥

$$H^\bullet(Y,\mathbb{Z})[p+1] \oplus H^\bullet(Y,\mathbb{Z})[n-p-1] \to \pi_* \widetilde{\operatorname{Mxw}}^{\mathrm{pert}}_{p,n}$$

在 X上。[48] 由于该映射的陪域由 $\mathbb{R}$ 上的向量空间构成，它无法接收来自扭群的非零映射，因此该映射经过整系数上同调的自由部分 $H^\bullet\mathbf{free}(Y,\mathbb{Z})[p+1]$分解。

因此，粗略地说，紧化是两类理论的乘积：

- 一个拓扑 场论，源自整系数上同调$H^\bullet(Y,\mathbb{Z})$ 中的挠元，以及
- 一个非微扰广义麦克斯韦理论，由整系数上同调$H^\bullet(Y,\mathbb{Z})$的自由部分决定。

现在我们来精确确定第二个因子。

备注 6.13。我们尚未在此利用的一种通用机制是 Leray 谱序列；不过，只要知道Y的霍奇理论和整系数上同调，上述论证就能使其相当容易计算。只是，与通过同调微扰引理所能得到的结果相比，它给出的结论不够精确。◊

6.4. **通过同调微扰进行紧化**。现在，我们利用同调微扰引理，为 $\pi_* \widetilde{\operatorname{Mxw}}^{\mathrm{pert}}$ 构造一个方便的模型。该引理将在第 B 节回顾。本节将证明以下结果。

命题 6.14。设 X 是一个维数为 x 的定向黎曼流形，Y 是一个维数为 y 的闭定向黎曼流形。

推前 $\pi_* \widetilde{\operatorname{Mxw}}^{\mathrm{pert}}$ 与定义在 X 上的层拟同构

$$\bigoplus_{\ell=\max(p-x+1,0)}^{\min(y,p)} \widetilde{\operatorname{Mxw}}^{\mathrm{pert}}_{p-\ell,x} \otimes H^\ell(Y) \oplus \bigoplus_{\ell=0}^{\min(p-x,y)} \Omega^\bullet_X \otimes H^\ell(Y)[p-\ell] \oplus \bigoplus_{k=0}^{y-p-1} \Omega^\bullet_X \otimes H^k(Y)[n-p-2-k]$$

它描述了 X 上扰动性的广义麦克斯韦理论的乘积，以及取值于 Y 的上同调的 X 上某些德拉姆复形。

在本节中，我们用$H^\ell(Y)$ 表示德拉姆上同调$H^\ell(Y,\mathbb{R})$。注意，我们得到X 上的$p-\ell$-形式规范理论的多个副本，其重数为 $\dim(H^\ell(Y))$。

[48]这种情况类似于霍奇结构变分的情形，因为我们处理的是 Deligne 复形的近亲。该领域中出现的许多结果理应在此处有相应的类似结论。在全纯扭曲超对称理论的情形下，我们的方法与霍奇结构变分密切交织在一起。

6.4.1. 证明策略。 微扰复形是 $\mathrm{Mxw}^{\circ}{}_{p,n}$ 的截断，其中我们从最左侧切去 $\mathbb{Z}$ 的副本。也就是说，考虑复形

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p & \xrightarrow{\star\mathrm{d}} & \\ & & & & & & \Omega^{n-p-1} \\ \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-2} & \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} & \end{array} .$$

它可以看作复形的一种变形

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p & & \\ \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-2} & \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-1} \end{array} ,$$

它是两个截断德拉姆复形的直和。[49] 这种由 $\star\mathrm{d}$ 引起的变形很小，这一意义由同调微扰引理给出。

因此，我们将证明分成几个步骤：

(1) 我们结合霍奇理论与同调微扰理论，分析截断德拉姆复形的推前。我们发现，这个推前与一个由两个部分构成的小复形拟同构：一部分取决于上同调 $H^\ell(Y)$，另一部分取决于余闭形式

$$K^\ell(Y) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_Y^\star) \subset \Omega^\ell(Y),$$

这是由 Hodge 分解导致的。

(2) 我们将 $\widetilde{\mathrm{Mxw}}^{\mathrm{pert}}$ 视为两个截断德拉姆复形之和的扰动，并应用同调微扰引理，找到一个由这两类部分构成的小模型。

(3) 我们证明，第一个分量涉及上同调 $H^\bullet(Y)$，它在X上给出广义麦克斯韦理论，以及一些拓扑理论

(4) 我们分析第二个分量，它涉及Y上的余闭形式，并证明它是无环的，因此不会对我们的主要结果作出（非平凡的）贡献。

论证过程篇幅较长，但只是直接的推导，因此我们将在下面的两个小节中逐步展开。结论总结如下。

6.4.2. 微扰复形的一半。 作为研究微扰 Maxwell 理论的第一步，考虑 $X \times Y$上的截断德拉姆复形：

$$\Omega^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^k.$$

[49]请注意， Ω^0 的各个副本通常并不处于同一度数，尽管图示可能会让人这样认为。另一方面， Ω^p 和 Ω^{n-p-2} 确实都处于零度。

注意，$X \times Y$ 上的微分形式可以分解为

$$\Omega^k(X \times Y) = \bigoplus_{j=0}^{k} \Omega^j(X) \mathbin{\widehat{\otimes}} \Omega^{k-j}(Y) \tag{22}$$

其中 $\widehat{\otimes}$ 表示关于这些向量空间上的标准弗雷歇拓扑的完备射影张量积。为简洁起见，我们将这些直和项记作

$$\Omega^{[j,l]} = \Omega^j(X) \mathbin{\widehat{\otimes}} \Omega^l(Y)$$

。在本小节中，我们将k形式视为上同调次数为k的形式，因此 $\Omega^{[j,l]}$ 中元素的总次数为$j + l$。

就上述双分次而言，截断德拉姆复形是一个双复形的全化

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & \cdots & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
\Omega^{[0,k]} & & 0 & & \cdots & & & & \\
{\scriptstyle d_Y}\uparrow & & & & & & & & \\
\Omega^{[0,k-1]} & \xrightarrow{d_X} & \Omega^{[1,k-1]} & & 0 & & \cdots & & \\
{\scriptstyle d_Y}\uparrow & & {\scriptstyle d_Y}\uparrow & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & 0 & & \cdots \\
{\scriptstyle d_Y}\uparrow & & {\scriptstyle d_Y}\uparrow & & & & & & \\
\Omega^{[0,1]} & \xrightarrow{d_X} & \Omega^{[1,1]} & \xrightarrow{d_X} & \cdots & \xrightarrow{d_X} & \Omega^{[k-1,1]} & & 0 & & \cdots \\
{\scriptstyle d_Y}\uparrow & & {\scriptstyle d_Y}\uparrow & & & & {\scriptstyle d_Y}\uparrow & & & & \\
\Omega^{[0,0]} & \xrightarrow{d_X} & \Omega^{[1,0]} & \xrightarrow{d_X} & \cdots & \xrightarrow{d_X} & \Omega^{[k-1,0]} & \xrightarrow{d_X} & \Omega^{[k,0]} & 0 & \cdots
\end{array}$$

每一列都对应于Y 上的截断德拉姆复形与某个向量空间 $\Omega^j(X)$的张量积。

由于Y 是闭的，霍奇理论给出了一个显式分解

$$\Omega^k(Y) = H^k(Y) \oplus \mathrm{im}(\mathrm{d})^k \oplus \mathrm{im}(\mathrm{d}^\star)^k$$

其中 $\mathrm{d}^\star = \pm \star \mathrm{d} \star$（符号取决于形式次数和度量的符号），而$H^k(Y)$由调和$k$形式构成。我们在像上加上上标$k$，以明确标示形式次数。这个分解确定了截断德拉姆复形的一个变形收缩

$$\Omega^0(Y) \xrightarrow{d_Y} \cdots \xrightarrow{d_Y} \Omega^{\ell-1}(Y) \xrightarrow{d_Y} \Omega^\ell(Y)$$

到其上同调

$$H^0(Y) \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} H^{\ell-1}(Y) \xrightarrow{0} \Omega^\ell(Y)/d_Y(\Omega^{\ell-1}(Y)).$$

我们可以（并且确实会）要求上链同伦 η 在每个直和项 $H^k(Y)$上都为零。注意最右边的项非常大，但它可以分解为

$$\Omega^\ell(Y)/\mathrm{d}_Y(\Omega^{\ell-1}(Y)) = H^\ell(Y) \oplus \mathrm{im}(\mathrm{d}_Y^\star)^\ell$$

其中 $\mathrm{im}(\mathrm{d}^\star{}_Y)^\ell$ 表示 $\mathrm{d}^\star{}_Y$ 在 $\Omega^\ell(Y)$中的像。令

$$K^\ell(Y) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_Y^\star)^\ell \tag{23}$$

为简洁起见，采用简洁记号。注意，$K^y(Y) = 0$。

与 $\Omega^j(X)$作张量积后，我们也得到上链复形 $\Omega^j(X)\widehat{\otimes}\,\Omega^{\leq\ell}(Y)$的一个变形复形。推论 B.5 (同调微扰引理的推论)保证存在一个同伦等价

$$(H^\bullet(\Omega^{\leq k}(X\times Y), \mathrm{d}_Y), \pi\alpha\iota) \underset{\pi+\pi\alpha\eta}{\overset{\iota+\eta\alpha\iota}{\rightleftarrows}} (\Omega^{\leq k}(X\times Y), \mathrm{d}_Y + \mathrm{d}_X) \circlearrowleft \eta+\eta\alpha\eta$$

其中

$$\alpha = (1-\mathrm{d}_X\eta)^{-1}\mathrm{d}_X = \sum_{n\geq 0}(\mathrm{d}_X\eta)^n\mathrm{d}_X$$

且 η 是来自Y的霍奇理论中的上链同伦。具体而言，左侧的复形是双分次向量空间的全化

$$\begin{array}{ccccccc}
\begin{array}{c}\Omega^0(X)\otimes H^k(Y)\\ \oplus\,\Omega^0(X)\widehat{\otimes} K^k(Y)\end{array} & 0 & \cdots & & & & \\
\Omega^0(X)\otimes H^{k-1}(Y) & \begin{array}{c}\Omega^1(X)\otimes H^{k-1}(Y)\\ \oplus\,\Omega^1(X)\widehat{\otimes} K^{k-1}(Y)\end{array} & 0 & \cdots & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \cdots & & \\
\Omega^0(X)\otimes H^1(Y) & \Omega^1(X)\otimes H^1(Y) & \cdots & \begin{array}{c}\Omega^{k-1}(X)\otimes H^1(Y)\\ \oplus\,\Omega^{k-1}(X)\widehat{\otimes} K^1(Y)\end{array} & 0 & \cdots & \\
\Omega^0(X)\otimes H^0(Y) & \Omega^1(X)\otimes H^0(Y) & \cdots & \Omega^{k-1}(X)\otimes H^0(Y) & \Omega^k(X)\widehat{\otimes} H^0(Y) & 0 & \cdots
\end{array}$$

配备转移后的微分 $\pi\alpha\iota$（通过"沿阶梯向下"给出）。然而，由于 η 在直和项 $\Omega^j(X)\widehat{\otimes}H^{k-j}(Y)$上消失，[50] 这个微分简化为 $\pi \mathrm{d}_X \iota$，也就是说，只有水平微分保留下来。

我们记录结论如下。

引理 6.15。 当 Y 是维数为 y 的闭定向流形时，截断德拉姆复形

$$(\Omega^{\leq k}(X\times Y), \mathrm{d}_Y + \mathrm{d}_X)$$

拟同构于以下上链复形的直和

$$C_H \oplus C_K \tag{24}$$

其中

$$C_H = \left(\bigoplus_{\ell=0}^{\min(y,k)} \Omega^{\leq k-\ell}(X)\otimes H^\ell(Y)\ ,\ \mathrm{d}_X\otimes \mathrm{id}_{H^\ell(Y)} \right)$$

and

$$C_K = \bigoplus_{\ell=0}^{\min(y-1,k)} \Omega^{k-\ell}(X)\widehat{\otimes} K^\ell(Y).$$

注意，C_K 完全集中在上同调次数 k，而 C_H 则分布在次数 0 到 k 之间。

第一个上界是 $\min(y,k)$，因为 $H^\ell(Y) = 0$ 当 $\ell > y$。注意，$K^y(Y) = 0$，由此得到第二个上界。

6.4.3. 整个微扰复形。 回想一下，微扰复形

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p & \xrightarrow{\star\mathrm{d}} & \\ & & & & & & \Omega^{n-p-1} \\ \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-2} & \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} & \end{array} \tag{25}$$

可以看作复形的一个小变形

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^p & & \\ \Omega^0 & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-2} & \xrightarrow{-\kappa\mathrm{d}} & \Omega^{n-p-1} \end{array} \tag{26}$$

它是两个截断 de Rham 复形的直和。

复形（26）根据我们在前一节中的工作，可以得到一个简单的描述：它与直和 $T\ \oplus B$ 同伦等价，其中

$$T = \bigoplus_{\ell=0}^{\min(y,p)} (\Omega^{\leq p-\ell}(X)\otimes H^\ell(Y)[p], \mathrm{d}_X) \oplus \bigoplus_{\ell=0}^{\min(y-1,p)} \Omega^{p-\ell}(X)[p]\widehat{\otimes} K^\ell(Y) \tag{27}$$

[50]记号 $\widehat{\otimes}$ 表示这些弗雷歇向量空间的完备射影张量积。回想一下，对于任意光滑流形$C^\infty(X\times Y) = C^\infty(X)\widehat{\otimes} C^\infty(Y)$ X 和 Y，并且微分形式也有类似的结论。

and

(28)

$$B = \bigoplus_{k=0}^{\min(y,n-p-1)} (\Omega^{\leq (n-p-1)-k}(X) \otimes H^k(Y)[n-p-2], \mathrm{d}_X) \oplus \bigoplus_{k=0}^{\min(y-1,n-p-1)} \Omega^{(n-p-1)-k}(X) \widehat{\otimes} K^k(Y)[n-p-2]$$

利用（24）对（26）的顶行和底行的描述。[51]

回顾进一步分解$T = T_H \oplus T_K$ 其中

$$T_H = \bigoplus_{\ell=0}^{\min(y,p)} (\Omega^{\leq p-\ell}(X) \otimes H^\ell(Y), \mathrm{d}_X)$$

and

$$T_K = \bigoplus_{\ell=0}^{\min(y-1,p)} \Omega^{p-\ell}(X) \widehat{\otimes} K^\ell(Y).$$

同样，我们将$B = B_H \oplus B_K$分解。

由于复形 (25) 是 (26) 的小变形，因此仍需应用同伦扰动引理，为具有根本意义的复形 (25) 找到一个简单且更小的替代复形。

这里需要根据 (22) 的双分次来描述 $\star \mathrm{d}$。只需理解 $\star$ 在 $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ 上的作用。令 $\mathrm{x} = \dim(\mathrm{X})$, $\mathrm{y} = \dim(\mathrm{Y})$, 使得 $\mathrm{n} = \mathrm{x} + \mathrm{y}$。于是 $\star$ 将 $\Omega^{[\mathrm{j},\mathrm{k}]}$ 映为 $\Omega^{[\mathrm{x}-\mathrm{j},\mathrm{y}-\mathrm{k}]}$，而对于任意 $\alpha \in \Omega^j(\mathrm{X})$ 和 $\beta \in \Omega^k(\mathrm{Y})$, 可得

$$\star(\alpha \wedge \beta) = \pm(\star_X \alpha) \wedge (\star_Y \beta)$$

这里我们暂且不确定符号。（它取决于度量的符号，以及j、k。）

现在 $\star \mathrm{d} = \star(\mathrm{d}_X + \mathrm{d}_Y)$，并且它在$T$的两个直和项上的作用不同。事实上，全复形

$$T \xrightarrow{\star \mathrm{d}} B$$

分解为直和

$$(T_H \xrightarrow{\star \mathrm{d}_X} B_H) \oplus (T_K \xrightarrow{\star \mathrm{d}} B_K).$$

现在我们证明这一点，并考察其结果。

在式T_H （27）的直和项上， $\star \mathrm{d}$仅通过 $\star \mathrm{d}_X$ s作用，因为d_Y 会湮灭$H^\bullet(Y)$。直和项 $\Omega^{\leq}{}_{p-\ell}\, X \otimes H^\ell(Y)$ 的贡献取决于 ℓ 与$x = \dim(X)$、$y = \dim(Y)$以及p之间的关系。注意一个基本的二分情形：

(i) 若 $p - \ell \geq x$，则 d_X 在最后一项 $\Omega^{p-\ell}\, X$ 上作用为零。

[51]请注意，我们加入了向下移位；而在前一节中，我们使用的是微分形式的总次数。

(ii) 若 $p - \ell < x$，则 d_X 的作用非平凡。（注意，这意味着 $x - (p - \ell) - 1 \geq 0$，因此其陪域 $\Omega^{x-(p-\ell)-1} X$ 也非零。）

在情形 (i) 中，当 $\ell \leq p - x$ 时，我们得到一份完整的德拉姆复形

$$\Omega_X^0 \otimes H^\ell(Y) \xrightarrow{\mathrm{d}_X} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_X} \Omega_X^x \otimes H^\ell(Y)$$

因此，T_H 的这个子复形没有发生变形。在情形 (ii) 中，当 $\ell > p - x$ 时，对于$p - x + 1 \leq \ell \leq \min(y, p)$ 的每个取值，我们都会得到一份复形

(29)

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega_X^0 \otimes H^\ell(Y) & \xrightarrow{\mathrm{d}_X} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}_X} & \Omega_X^{p-\ell} \otimes H^\ell(Y) & \xrightarrow{\star \mathrm{d}_X} & \\ & & & & & & \Omega_X^{x-(p-\ell)-1} \otimes H^{y-\ell}(Y) \\ \Omega_X^0 \otimes H^{y-\ell}(Y) & \xrightarrow{\mathrm{d}_X} & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}_X} & \Omega_X^{x-(p-\ell)-2} \otimes H^{y-\ell}(Y) & \xrightarrow{-\kappa \mathrm{d}_X} & \end{array}$$

这是定义在 X 上、取值于阿贝尔李代数 $H^\ell(Y)$ 的微扰 $p - \ell$-形式麦克斯韦理论。（Y 上的庞加莱对偶保证 $H^{y-\ell}(Y) \cong H^\ell(Y)$。）因此我们有

$$\bigoplus_{\ell=\max(p-x+1,0)}^{\min(y,p)} \widetilde{\mathrm{Mxw}}^{\mathrm{pert}}_{p-\ell,x} \otimes H^\ell(Y)$$

得出了 (21) 中的结论，即将推前识别为取值于 Y 的上同调的麦克斯韦理论。

直和项 B_H 也呈现出类似的二分情况：

(iii) If $x + y - p - 1 - k \geq x$ (so $y - p - 1 \geq k$), then the final term $\Omega_X^{x+y-p-1-k}$ is zero, so $\star$d must act trivially.

(iv) If $x + y - p - 1 - k < x$ (so $y - p \leq k$), then $\star \mathrm{d}_X$ has a nontrivial codomain.

在情形 (iii) 中，我们得到一份完整的德拉姆复形

$$\Omega_X^0 \otimes H^k(Y) \xrightarrow{\mathrm{d}_X} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}_X} \Omega_X^x \otimes H^k(Y)$$

因此，B_H 的这个子复形未发生变形。情形（iv）给出了（29）的底行，其中顶行中 ℓ 的取值范围与底行中 $k = y - \ell$的取值范围相匹配。

综合这些情形，我们发现 $T_H \to B_H$ 同构于直和

$$\bigoplus_{\ell=\max(p-x+1,0)}^{\min(y,p)} \widetilde{\mathrm{Mxw}}^{\mathrm{pert}}_{p-\ell,x} \otimes H^\ell(Y) \oplus \bigoplus_{\ell=0}^{\min(p-x,y)} \Omega_X^\bullet \otimes H^\ell(Y)[p-\ell] \oplus \bigoplus_{k=0}^{y-p-1} \Omega_X^\bullet \otimes H^k(Y)[n-p-2-k]$$

正如命题 6.14 中所述。

现在我们转而分析复形 $T_K \to B_K$。

注意，根据霍奇理论，d_Y 在 $\Omega^\ell(Y)$ 内 $\mathrm{d}^\star_Y$ 的像上是同构：

$$\mathrm{d}_Y : K^\ell(Y) = \mathrm{im}(\mathrm{d}^\star_Y)^\ell \xrightarrow{\cong} \mathrm{im}(\mathrm{d}_Y)^{\ell+1}.$$

Thus

$$\star_Y \mathrm{d}_Y : K^\ell(Y) \xrightarrow{\cong} K^{y-(\ell+1)}(Y)$$

也是一个同构。

因此，由（T_K）27中的直和项，我们得到一个两项上链复形

$$\bigoplus_{\ell=0}^{p} \Omega^{p-\ell}(X) \widehat{\otimes} K^\ell(Y) \xrightarrow{\star \mathrm{d}} \bigoplus_{\ell=0}^{n-p-1} \Omega^{(n-p-1)-\ell}(X) \widehat{\otimes} K^\ell(Y)$$

它集中在次数 0 和 1。由于没有幽灵场，这个复形可以视为一种标量场论，尽管它取值于一个极大的向量空间。

在这个复形 B 中，算符 d_X 和 d_Y 都可能非平凡地作用。在每个直和项上，算符 $\star \mathrm{d}_X$ 是一个映射

$$\Omega^{p-\ell}(X) \widehat{\otimes} K^\ell(Y) \xrightarrow{\star \mathrm{d}_X} \Omega^{x-(p-\ell)+1}(X) \widehat{\otimes} K^{y-\ell}(Y)$$

而算符 $\star \mathrm{d}_Y$ 是一个映射

$$\Omega^{p-\ell}(X) \widehat{\otimes} K^\ell(Y) \xrightarrow{\star \mathrm{d}_Y} \Omega^{x-(p-\ell)}(X) \widehat{\otimes} K^{y-(\ell+1)}(Y)$$

我们想要理解总算符 $\star \mathrm{d}$ 的上同调。

引理 6.16. 复形 $T_K \xrightarrow{\star \mathrm{d}} B_K$ 的上同调是平凡的（即它是无环的）。

该引理确保只有复形 $T_H \to B_H$ 对推前理论有非平凡贡献。

证明。 我们分两种情况讨论：$p < y = 维(Y)$ 以及$y \leq p$。

设$p < y$。回忆$K^y(Y) = 0$。那么这个复形可以写为

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^p(X)\otimes K^0(Y) & \xrightarrow{\star \mathrm{d}_Y} & \Omega^{x-p}(X)\otimes K^{y-1}(Y) \\
& \nearrow_{\star \mathrm{d}_X} & \\
\Omega^{p-1}(X)\otimes K^1(Y) & \xrightarrow{\star \mathrm{d}_Y} & \Omega^{x-p+1}(X)\otimes K^{y-2}(Y) \\
& \nearrow_{\star \mathrm{d}_X} & \\
\Omega^{p-2}(X)\otimes K^2(Y) & \xrightarrow{\star \mathrm{d}_Y} & \vdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & \xrightarrow{\star \mathrm{d}_Y} & \Omega^{x-1}(X)\otimes K^{y-p}(Y) \\
& \nearrow_{\star \mathrm{d}_X} & \\
\Omega^0(X)\otimes K^p(Y) & \xrightarrow{\star \mathrm{d}_Y} & \Omega^x(X)\otimes K^{y-(p+1)}(Y)
\end{array}$$

其中，左侧列为T_K，右侧列为B_K。（注意，$y \geq p+1$，因此右下项非零。）由于 $\star \mathrm{d}_Y$ 是同构，这个复形是无环的。

现在令$y \leq p$。那么这个复形可以写成

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^p(X)\otimes K^0(Y) & \xrightarrow{\star \mathrm{d}_Y} & \Omega^{x-p}(X)\otimes K^{y-1}(Y) \\
& \nearrow_{\star \mathrm{d}_X} & \\
\Omega^{p-1}(X)\otimes K^1(Y) & \xrightarrow{\star \mathrm{d}_Y} & \Omega^{x-p+1}(X)\otimes K^{y-2}(Y) \\
& \nearrow_{\star \mathrm{d}_X} & \\
\Omega^{p-2}(X)\otimes K^2(Y) & \xrightarrow{\star \mathrm{d}_Y} & \vdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & \xrightarrow{\star \mathrm{d}_Y} & \Omega^{x-(p-y-2)}(X)\otimes K^1(Y) \\
& \nearrow_{\star \mathrm{d}_X} & \\
\Omega^0(X)\otimes K^y(Y) & \xrightarrow{\star \mathrm{d}_Y} & \Omega^{x-(p-y+1)}(X)\otimes K^0(Y)
\end{array}$$

因为$x-(p-y+1) = x+y-p-1 = n-p-1$。

由于 $\star \mathrm{d}_Y$ 是同构，这个复形也是无环的。 □

附录 A. 模空间栈与导出几何详述

本节将介绍本文所用构造在数学上的归属，即取值于导出栈的时空位上的层。这里的时空很简单，例如 Riem_n，即由黎曼n维流形及其等距嵌入构成的位点；但我们需要澄清导出栈的含义。本文对导出栈的需求很有限，因为

我们只通过由微分形式 Ω^k 或常值层 $\mathbb{Z}$构造的层来得到它们。因此，我们不会在此深入考察几何，尽管其中无疑有值得探索的有趣现象。

值得注意的是，这些对象作为光滑流形位点上的层，早已得到充分研究。[52] 例如，k-形式给出一个函子

$$\Omega^k : \mathsf{Mfld}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$$

将 $\Omega^k(M)$ 赋给每个光滑流形 M；截断的 de Rham 复形和 Deligne 复形也类似地给出如下函子：

$$\Omega^{\leq k}[k] : \mathsf{Mfld}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ch}$$

随后可以进一步映射到 $\mathcal{S}$空间。因此，阿贝尔规范理论的场内容（在 BRST 意义下）可以自然地纳入这一框架。

然而，这一框架存在一些局限：

- 不容易提取微扰特征，而且
- 不容易编码运动方程（以及 BV 形式体系中的反场内容）。

不过，只需对 Mfld 作适度扩充，改用导出流形而非流形作为测试对象，便可避免这些问题。

因此，我们在此将着重讨论导出方向，以补充高阶方向；后者已由物理学与同伦论之间的社群发展起来。

我们的方法是将导出栈视为模空间，因此把它定义为函子。按照当前的惯例，这类函子取值于 $\mathcal{S}$paces，即 ∞-范畴中的 ∞-群胚（或同伦型）。这类函子的定义域是一个位点，我们将位点中的对象视为参数空间。就我们的目的而言，这个位点既包含形式方向，也包含导出方向，这一点很有用；此外，我们也希望纳入微分几何，因为我们研究的是场论。因此，我们将概述导出微分几何的基本要点，遵循 [CS19；Car23；Ste23；Tar23；Tar26；AY23]。事实上，我们的概述不过是对 [Tar26].

首先，我们需要逐步构建位点，而这要从将导出流形 定义为普通流形的增强开始。然后，我们将在该位点上的 $\mathcal{S}$paces-值函子中刻画导出栈。这需要先给出一些定义。

[52] Freed 和 Hopkins [FH13] 为广泛读者提供了精彩的阐述；这是他们关于物理学中微分上同调工作的有用伴读材料。本书 [ADH23] 对流形上的微分上同调和层进行了非常易于理解且更为详尽的处理。最后，[MSF25]是一部面向物理学的阐述。

A.1. **用于光滑几何的导出环**。 我们首先确定自然的代数类，这一过程受到代数几何的启发：其中模型空间是仿射概形，而仿射概形在形式上与交换环对偶。

定义 A.1. 令 CartSp 表示这样一个范畴，其对象是对每个自然数$n \in \mathbb{N}$ 而言的光滑流形 $\mathbb{R}^n$，态射则是它们之间的光滑映射。

它是光滑流形范畴 Mfld 的满子范畴，由笛卡尔空间 $\mathbb{R}^n$ 构成。每个光滑流形M 都确定一个函子

$$C^\infty_M : \mathsf{CartSp} \to \mathsf{Set}$$

其中

$$C^\infty_M(\mathbb{R}) = C^\infty(M) = \mathrm{Map}_{C^\infty}(M, \mathbb{R})$$

and

$$\begin{aligned} C^\infty_M(\mathbb{R}^n) &= \mathrm{Map}_{C^\infty}(M, \mathbb{R}^n) \\ &= C^\infty(M)^{\times n} = C^\infty(M) \times \cdots \times C^\infty(M) \end{aligned}$$

其中右侧取n 个副本。任意光滑映射 $\phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 都会诱导一个映射

$$C^\infty_M(\phi) : \mathrm{Map}_{C^\infty}(M, \mathbb{R}^m) \to \mathrm{Map}_{C^\infty}(M, \mathbb{R}^n)$$

通过后合成得到。

例如，实数代数的乘法映射$m_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 会诱导函数上的乘法映射

$$C^\infty(M) \times C^\infty(M) = C^\infty_M(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{m_{\mathbb{R}} \circ -} C^\infty_M(\mathbb{R}) = C^\infty(M)$$

通过后复合。换言之，这个函子 C^∞_M 编码了流形 M上的光滑函数 代数。

注意，由构造可知，这个函子 C^∞_M 保有限积。稍加推导即可看出，存在一个全忠实函子

$$\mathsf{Mfld} \hookrightarrow \mathrm{Fun}^{\mathrm{prod}}(\mathsf{CartSp}, \mathsf{Set})$$

将流形 M 映射到其函子 C^∞_M；下标表示保有限积的函子。

更大　的函子范畴编码了如同流形上的光滑函数那样运作的环。

定义 A.2. 一个 C^∞-环是一个函子

$$R : \mathsf{CartSp} \to \mathsf{Set}$$

保持有限积。

令 Ring_{C^∞} 表示范畴 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{prod}}(\mathsf{CartSp}, \mathsf{Set})$。

我们已经看到，每个光滑流形都会给出这样一个环，但很容易通过取商构造新的例子。

构造 A.3。设$f_1,\ldots,f_k$是一组定义在流形M上的光滑函数。令$I = (f_1,\ldots,f_k) \subset C^\infty(M)$为它们生成的理想。那么，商环$C^\infty(M)/I$确定了一个$C^\infty$-环。

更明确地说，这些fi确定了一个光滑流形之间的映射$F : M \to \mathbb{R}^k$，从而得到一个C^∞-环映射

$$F^* : C^\infty_{\mathbb{R}^k} \to C^\infty_M$$

and 我们将“商C^∞-环”R定义为作为保持积的函子的推出，

$$\begin{array}{ccc} C^\infty_{\mathbb{R}^k} & \longrightarrow & C^\infty_* \\ \downarrow{\scriptstyle F^*} & & \downarrow \\ C^\infty_M & \longrightarrow & R \end{array}$$

其中$* = \mathbb{R}^0$是一个点，因此C^∞_*就是实数环$\mathbb{R}$。 ◊

阿廷代数以及由此而来的变形理论，自然地以这种方式出现。

例 A.4。对偶数[53] $\mathbb{R}[x]/(x^2)$是上述构造的一个特例。取带有坐标x的$M = \mathbb{R}$，并令函数$f(x) = x^2$,，于是与$C^\infty(\mathbb{R})/(x^2)$相关联的$C^\infty$-环以$x]/(x^2)$作为其底层交换环。◊

这样的函子R自动确定一个交换环，但这个环还具有更多运算。若将C^∞-环R视为某个空间（一个广义流形）上的函数，那么元素$r \in R(\mathbb{R})$应被视为编码了从该空间到实数直线$\mathbb{R}$的一个映射，因此我们应该能够与实数直线上的光滑函数复合。例如，存在某个复合$\exp \circ r$，其中$\exp$是指数映射。相比之下，对于一般的环，并没有办法讨论$\exp \circ r$。

注记 A.5. 为使这一想法更加精确，注意，元素$r \in R(\mathbb{R})$对应于一个自然变换$t_r : C^\infty_{\mathbb{R}} \to R$，它属于链复形范畴$C^\infty$-环。[54] 特别地，一个光滑函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$确定一个映射$t_f : C^\infty_{\mathbb{R}} \to C^\infty_{\mathbb{R}}$。因此，自然变换$t_f \circ t_r$确定一个元素$f \circ r \in R(\mathbb{R})$。◊

现在可以迅速给出一个导出推广。

[53]这种代数适用于以函子式方法计算切空间。[54]若$R = C^\infty_M$，则$r \in C^\infty_M(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$对应于流形之间的映射$r : M \to \mathbb{R}$，而这个自然变换就是函数的拉回$r^* : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(M)$。

定义 A.6。 A导出 C^∞-环是一个从 ∞-范畴出发的函子

$$\mathcal{R} : \mathsf{CartSp} \to \mathcal{S}\mathrm{paces}$$

且保持有限积。

令 $\mathcal{R}\mathrm{ing}_{C^\infty}$ 表示 ∞-范畴 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{prod}}(\mathsf{CartSp}, \mathcal{S}\mathrm{paces})$。

一个具体的例子来源是，给出一个保持积的函子，取值于一个自然地映射到 $\mathcal{S}$paces（且保持积）的范畴。例如，考虑这样的函子 $\mathsf{CartSp} \to \mathsf{Ch}_{\leq 0}$，然后与 Dold-Kan 构造复合并进行局部化：

$$\mathsf{CartSp} \to \mathsf{Ch}_{\leq 0} \to \mathsf{sAb} \to \mathcal{S}\mathrm{paces}\,.$$

第一个函子本质上是一个（连通的）微分分次 C^∞-环，而复合函子则是与之关联的导出 C^∞-环。我们将自由地把这类 dg C^∞-环用作导出C^∞-环的替身。[55]

例 A.7. 移位对偶数 $\mathbb{R}[y]/(y^2)$，其生成元 y 的次数为 $|y| < 0$，给出了一个导出 C^∞-环的例子。注意，这个代数模掉y后就是实数 $\mathbb{R}$，而我们已经看到，$\mathbb{R}$是由 C^∞_*编码为一个C^∞-环的。因此，我们只需将移位对偶数定义为函子$C^\infty_*[y]/(y^2)$，将其视为一个取值于链复形范畴的函子。$\Diamond$

A.2. **导出流形**。 每个光滑流形都通过其函数环C^∞-环$C^\infty(M)$确定一个导出C^∞-环，因此这一构造确定了一个函子

$$\mathcal{O} : \mathsf{Mfld} \to \mathcal{R}\mathrm{ing}^{\mathrm{op}}_{C^\infty}\,.$$

我们希望找出一个良好的C^∞ -环子范畴 $\mathcal{R}\mathrm{ing}^{\mathrm{op}}$，它包含 Mfld，且性质更好。[56]

回顾普通光滑流形的构造方式，可作为一份有益的路线图。图册让我们能够将简单的局部片段组合起来；这一拼接过程是一种余极限。这些局部片段通常被描述为笛卡尔空间的子集，即某个方程组的解；这样的子集是光滑映射 $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ 的零点集，因而是纤维积（一种极限）。但我们需要解集处处光滑，而这一光滑性条件正是使 Mfld 成为一个难以处理的范畴的部分原因：光滑函数 $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ 的零点集并不总是光滑流形，因此有些极限图表并不具备极限。受此观察启发，我们通过拼接笛卡尔空间上所有光滑函数的纤维积来定义导出流形。

[55]事实上，这类 dg C^∞-环呈现了所有导出 C^∞-环。解释见 [Nui18], 的注 2.2.11，该注是第 2 章对这一框架进行系统阐述的总结。[56]范畴 Mfld 包含的极限并不多。例如，流形 M 中的两个子流形S_1,S_2 可能没有纤维积（或拉回）M MfldMfld中的纤维积：如果它们的交集 $S_1 \cap S_2$ 不是流形，那么这个纤维积就不存在。

定义 A.8. 令 $\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}$ 表示 $\mathcal{R}\mathrm{ing}^{\mathrm{op}}{}_{C^\infty}$ 的满子范畴，其中包含图表[57]的所有拉回

$$* \to \mathbb{R}^k \leftarrow \mathbb{R}^N$$

并且在有限极限和收缩下封闭。

换言之，导出流形不仅包含非横截子流形的交，也包含通常那些良好的交。

例 A.9. 作为一个简单但富有启发性的例子，考虑实数直线上的两个原点副本的拉回：

$$* \xrightarrow{\text{zero}} \mathbb{R} \xleftarrow{\text{zero}} * \tag{30}$$

也就是说，原点的自交。原点的嵌入 $* \to \mathbb{R}$ 对应于环映射 $C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$，它将函数 f 映到 $f(0)$，即其在原点处的取值。换言之，原点处的函数构成商 C^∞-环 $C^\infty(\mathbb{R})/(x)$，其中 x 表示实数直线上的坐标函数。它也可以用带微分 $x\partial_\xi$ 的微分分次 C^∞-环 $C^\infty(\mathbb{R})[\xi]$ 来表示，其中 $|\xi| = -1$；这个微分分次环是其在 C^∞ 情形下的 Koszul 分解。因此，拉回 (30) 上的函数由带微分 $x\partial_{\xi_1} + x\partial_{\xi_2}$ 的微分分次 C^∞-环 $C^\infty(\mathbb{R})[\xi_1, \xi_2]$ 编码。这个微分分次 C^∞-环与移位对偶数 $\mathbb{R}[y]/(y^2)$ 拟同构，其中 $|y| = -1$。$\Diamond$

值得注意的是，导出流形有许多具体建模方式，例如配备上同调向量场的超流形或微分分次流形。许多强有力的结果使我们能够在不同的具体模型之间转换，并说明如何利用已有成果。实际上，这些方法会在普通范畴中构造对象，并存在一个函子将其映至 ∞-范畴 $\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}$，这与上链复形表示导出范畴中的对象颇为相似。特别是，有一个很好的微分分次流形dgMfld范畴，其∞-范畴局部化

$$\mathrm{dgMfld} \to \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}$$

表示导出流形，正如链复形范畴$_{\mathbb{Z}}$ 表示 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ [Car23；Tar23]。

这个 ∞-范畴 $\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}$满足一个优美的泛性质，正如 [CS19], 所示，它是Mfld的一个性质良好的扩张。

对于一个具有有限极限的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，令 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{lex}}(\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}, \mathcal{C})$ 表示左正合函子（即保持有限极限的函子）构成的 ∞-范畴。令 $\mathrm{Fun}^{\pitchfork}(\mathrm{Mfld}, \mathcal{C})$ 表示光滑流形范畴 Mfld 中保持横截拉回的函子（∞-范畴之间的函子）构成的 ∞-范畴。

[57] 这些图表与环中的推出图表互为对偶：$C^\infty(\mathbb{R}^N) \leftarrow C^\infty(\mathbb{R}^k) \to C^\infty(*) = \mathbb{R}$ 于环$_{C^\infty}$中。68

定理 A.10 ([CS19])。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴，包含所有有限极限且是幂等完备的。[58] 存在一个 ∞-范畴的等价

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{lex}}(\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}, \mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Fun}^{\pitchfork}(\mathrm{Mfld}, \mathcal{C})$$

通过与嵌入函子 $\iota :\ \mathrm{Mfld} \to \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}$前复合。

从这个意义上说，导出流形是通过添加流形中原本不存在的所有有限极限而得到的。借用 Spivak 的说法，它们是“适合进行交理论”的空间。

A.3. **导出栈**。 导出流形将作为导出栈的测试空间，而导出栈被视为函子。换言之，我们将研究由导出流形参数化的族。

这意味着我们需要为 $\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}$ 配备位点结构，我们将以一种简单直接的方式，借鉴通常的拓扑学做法，如下所述。

首先，每个导出流形 $\mathcal{M}$ 都有一个底层拓扑空间 $|\mathcal{M}|$。具体而言，如果 $\mathcal{M}$ 是作为 $\mathcal{R}\mathrm{ing}^{\mathrm{op}}$ $\mathcal{C}^\infty$ 中的有限极限构造出来的，我们就令 $|\mathcal{M}|$ 表示 Top 中相应的有限极限。因此，实际上， $|\mathcal{M}|$ 是笛卡尔空间 $\mathbb{R}^N$的某个闭子集，而 $\mathcal{M}$ 则是配备了一个有趣的微分分次交换代数的那个拓扑空间 $|\mathcal{M}|$ 。

D定义 A.11。 给定一个导出流形 $\mathcal{M}$，一组导出流形之间的映射 s

$$\{\mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{M}\}_{\alpha \in A}$$

如果其相关连续映射构成一个覆盖

$$\{|\mathcal{U}_\alpha| \to |\mathcal{M}|\}_{\alpha \in A}$$

是开嵌入，且它们的像的并集为整个 $|\mathcal{M}|$ （即它们联合满射），并且每个 C^∞-环 $\mathcal{O}(\mathcal{M}) \to \mathcal{O}(\mathcal{U}_\alpha)$ 映射都是相关的 C^∞-局部化。

这一概念在 $\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}$上生成一个 Grothendieck 拓扑。

定义 A.12。 一个导出栈是一个函子 $\mathbb{X} :\ \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{paces}$ ，它相对于定义A.11中的 Grothendieck 拓扑是一个层。

在实践中，可以通过描述一个函子（即预层），然后对其进行层化，来获得一个导出栈。

[58]第二个条件大致是说，每个幂等自同态都是一个回缩。这听起来可能有些晦涩，因此不妨注意到，每个流形都是欧几里得空间中某个开子集的回缩。（具体而言，将流形嵌入欧几里得空间，再将其法丛与管状邻域等同起来。不过，每个流形也都是其上某个向量丛的回缩：通过作为零截面的嵌入以及到底空间的投影即可得到。）因此，Mfld 可视为其自身在欧几里得空间中的开集子范畴的幂等完备化。

示例 **A.13.** 对于任意导出流形 $\mathcal{X}$——因而也包括任意光滑流形 X——我们有 e

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}(-,\mathcal{X}) : \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathsf{fld}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{paces}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbb{M}\mathrm{ap}(\mathcal{M},\mathcal{X}) &= \mathrm{Map}_{\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathsf{fld}}(\mathcal{M},\mathcal{X}) \\ &= \mathrm{Map}_{\mathcal{R}\mathrm{ing}_{C^\infty}}(\mathcal{O}(\mathcal{X}),\mathcal{O}(\mathcal{M}))\end{aligned}$$

右端表示 ∞-范畴中的映射空间。 ◊

这里我们重新讨论另一个重要例子。

例 A.14. 给定一个光滑流形 M，考虑函子

$$\Omega^k_M : \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathsf{fld}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{paces}$$

其中

$$\Omega^k_M(\mathcal{M}) = \{\text{sections of the bundle } \pi^*(\Lambda^k T^*M) \to M \times \mathcal{M}\}$$

其中 $\pi\colon\ M \times \mathcal{M} \to M$ 是投影映射。这个函子编码了以导出流形 $\mathcal{M}$ 为参数的k-形式族，定义在M 上。它确定一个导出栈，我们用同一符号表示该导出栈。◊

例 A.15. 在前一个例子的基础上，有一个自然算子

$$\mathrm{d} : \Omega^k_M \to \Omega^{k+1}_M$$

它源于M-方向上的通常外微分。因此，可以构造第 3.1 节中关键构造的导出版本。例如，取定义3.4 中的闭$p+1$-形式，可得 $\Omega^{p+1}\,\mathrm{cl},_M$。◊

例 A.16. 令 $\mathbb{B}\mathrm{un}^{\nabla}_{p,M}$ 表示光滑流形M上带联络的$U(1)$ p-丛的导出栈。它在导出流形 $\mathcal{M}$ 上的取值由此类丛在M上的 $\mathcal{M}$-族构成。◊

注记 A.17。关于将丛（以及带联络丛）的模空间系统而全面地发展为导出栈，参见 [Bun+26]。他们的工作应能使人们以类似于本文处理阿贝尔规范理论的方式发展非阿贝尔规范理论。◊

掌握几何中的另一个要素也会有所帮助。

一个导出栈 $\mathbb{X}$ 有一个函数环，或者更准确地说，有一个结构层 $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$。由于我们采用点函子的方式来研究几何，表述如下。回想一下，我们有一个“遗忘”函子

$$\mathcal{O} : \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathsf{fld} \to \mathcal{R}\mathrm{ing}^{\mathrm{op}}_{C^\infty}.$$

因此，每个导出流形 $\mathcal{M}$ 都有一个自然的 C^∞-函数环：只需将 $\mathcal{M}$ 视为更大的环境 ∞-范畴 $\mathcal{R}$ ing$_{C^\infty}$中的一个对象$\mathcal{O}$（$\mathcal{M}$）。我们希望利用这一结构，从 $\mathbb{X}$中得到C^∞-环。注意，我们有米田嵌入

$$\mathcal{Y} : \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld} \hookrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{paces})$$

因此，我们有一个 ∞-范畴 $\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}_{/\mathbb{X}}$，它是上范畴 $\mathrm{Fun}(\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{paces})_{/\mathbb{X}}$的一个子范畴。它将 $\mathbb{X}$ 的信息编码为一个纤维化

$$\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}_{/\mathbb{X}} \to \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}$$

其中，$\mathcal{M}$ 上的纤维编码了 $\mathbb{X}$ 的 $\mathcal{M}$-点空间。因此，我们有一个复合 te

$$\mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}_{/\mathbb{X}} \to \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld} \xrightarrow{\mathcal{O}} \mathcal{R}\mathrm{ing}^{\mathrm{op}}_{C^\infty}$$

它编码了 $\mathbb{X}$ 的每个“点”上的C^∞-函数环。我们将这个函子称为导出栈的结构层 $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$。

注记 A.18（例 A.14 重访）。 粗略地说， $\Omega^k_M(\mathcal{M})$ 是 $\Omega^k(M) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{M})$，因为它是取值于$M$上的 k-形式的 $\mathcal{M}$ 上的光滑函数。即使 $\mathcal{M}$ 是普通的光滑流形，这个张量积也不够；必须对代数张量积取完备化（例如，使用完备射影张量积）。[59] 相反，我们直接将模问题表述为拉回丛的截面，这样编码的正是我们真正想要的答案。◊

注记A.19（例A.15 再探）。在微分分次流形的情形中，定义如下函子十分直接：

$$\Omega^{p+1}_{\mathrm{cl},M} : \mathsf{dgMfld}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ch}_{\mathbb{Z}}$$

它呈现导出栈 Ω^{p+1} cl,M。粗略地说，

$$\Omega^{p+1}_{\mathrm{cl},M}(\mathcal{M}) \simeq \Omega^{p+1}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathcal{M})$$

但存在与前一条注记中讨论的相同的张量积问题。 ◊

A.4. **我们的场论作为导出栈**。回想一下，在我们的情形中，我们希望场论的场定义一个函子

$$\mathcal{F} : \mathsf{Open}(M)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{S}\mathrm{tacks}$$

其中 $\mathsf{Open}(M)$ 是光滑流形 M （“时空”）的开子集所构成的位点，或一个函子

$$\mathcal{F} : \mathsf{Riem}^{\mathrm{op}}_n \to \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{S}\mathrm{tacks}$$

其中，Riem_n 是研究“欧几里得”场论时，n维黎曼流形及其等距变换所构成的位点。（洛伦兹理论对应的位点为 Lrtz_n。）本节其余部分将用 ST 表示“时空”位点，具体取决于所研究的

[59]我们轻率地忽略了如何定义这个张量积，只是假定可以进行某种类似于非导出构造的操作。真正的要点是恰当地表述模问题。

理论；读者可以自行替换为 $\mathbf{Open}(M)$ 、$\mathbf{Riem}_n$ 或自己偏好的其他位点。

总之，我们的目标是描述一个函子

$$\mathcal{F} : \mathsf{ST}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathsf{fld}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathsf{paces}$$

它对我们的场进行编码。

在我们的例子中，构造所用的材料来自（截断的）Deligne 复形，共有两类。

首先，时空流形上有微分k-形式：

$$\Omega^k_{\mathsf{ST}} : \mathsf{ST}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathsf{fld}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathsf{paces}$$

其中

$$\Omega^k_{\mathsf{ST}}(M, \mathcal{M}) = \Omega^k_M(\mathcal{M})$$

其中，空间 $\Omega^k_M(\mathcal{M})$ 来自例 A.14 ，它对导出流形上的光滑族进行编码 $\mathcal{M}$的 k-形式，定义在光滑流形 M上。存在一个自然算子

$$\mathrm{d} : \Omega^k_{\mathsf{ST}} \to \Omega^{k+1}_{\mathsf{ST}}$$

源自时空（或M）方向上的通常外微分。

其次，在时空流形上有到S^1 的映射空间：

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathsf{ST}}(-, S^1) : \mathsf{ST}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathsf{fld}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathsf{paces}$$

其中

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}_{\mathsf{ST}}((M, \mathcal{M}), S^1) = \mathbb{M}\mathrm{ap}(M \times \mathcal{M}, S^1)$$

其中，空间 $\mathbb{M}\mathrm{ap}(M \times \mathcal{M}, S^1)$ 来自例 A.13 ，它编码了从光滑流形 $\mathcal{M}$到圆的映射构成的光滑族，其定义域为导出流形[60]

这两种构件都可以赋予阿贝尔群结构，因为我们可以用取值于 链复形范畴的函子来表示这些导出叠，正如备注 A.19 中所述。

我们可以将这些构件组装成本文讨论的场论。例如，为了描述p形式的麦克斯韦理论，我们从函子开始

$$\mathsf{ST}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{dgMfld}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ch}$$

将上链复形赋给 $((M, g), \mathcal{M})$

$$\mathrm{Map}(M \times \mathcal{M}, S^1) \xrightarrow{\mathrm{d}\log} \Omega^1_M(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \to \Omega^p_M(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathrm{d}\star\mathrm{d}} \Omega^{n-p}_M(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^n_M(\mathcal{M})$$

[60]粗略地说，

$$\mathbb{M}\mathrm{ap}(M \times \mathcal{M}, S^1) \simeq \mathrm{Map}(M, S^1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(\mathcal{M})$$

因为 $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$是一个 $\mathbb{R}$-模。

其中 $\Omega^p{}_M(\mathcal{M})$ 位于零次度。这个函子通过对拟同构进行局部化，确定了一个到 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}$ 的函子，因此它给出了一个函子

$$\mathsf{ST}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}\mathrm{er}\mathcal{M}\mathrm{fld}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}(\mathcal{S}\mathrm{paces})$$

通过截断。

Appendix B. Homological perturbation lemma

我们遵循 [Cra04], ，并对记号作了少量修改。

定义 B.1. 一个 同伦等价是如下数据

$$(S, \mathrm{d}_S) \underset{\pi}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} (B, \mathrm{d}_B) \circlearrowleft \eta$$

其中

- $(S,\ \mathrm{d}_S)$ 和 $(B,\ \mathrm{d}_B)$ 分别是上链复形（“小”和“大”），
- ι 和 π 分别是拟同构（分别称为“嵌入”和“投影”），并且
- η 是B 的一个次数为 -1 的线性自同态，使得

$$\iota \circ \pi = 1_B + \mathrm{d}_B \circ \eta + \eta \circ \mathrm{d}_B,$$

即， η 是B 上的恒等映射与 $\iota \circ \pi$之间的上链同伦等价。

椭圆复形的霍奇定理是我们重要的例子来源。

定义 B.2。 (B, d_B) 的扰动 是分次向量空间B 上的一个一阶自同态 δ，使得 $\mathrm{d}_B + \delta$ 的平方为零。

我们将$(B, \mathrm{d}_B + \delta)$ 视为B 的一个变形，并希望知道能否相容地变形S。

定义 B.3。 给定一个同伦等价，若B 上的零次自同态 δ 使自同态 $1_B - \delta \circ \eta$ 可逆，则称其为小的。

小型 当 δ 为幂零元或由类似于.....的形式参数加权时，常会出现扰动 $\hbar$.

为求简洁，我们将不再写出 $\circ$ 来表示复合。

命题 B.4（同调微扰引理，或 HPL）。 如果 δ 是 d_B 的小扰动，那么存在一个同伦等价

$$(S, \mathrm{d}'_S) \underset{\pi'}{\overset{\iota'}{\rightleftarrows}} (B, \mathrm{d}_B + \delta) \circlearrowleft \eta'$$

其中

$$A = (1_B - \delta\eta)^{-1}\delta$$

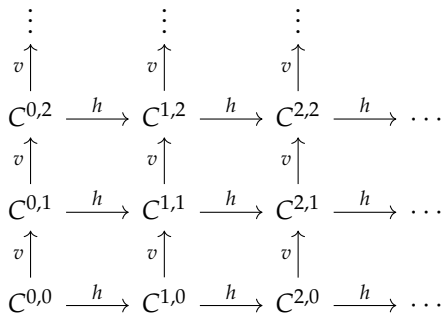
and

$$\mathrm{d}'_S = \mathrm{d}_S + \pi A\iota, \quad \iota' = \iota + \eta A\iota, \quad \pi' = \pi + \pi A\eta, \quad \eta' = \eta + \eta A\eta.$$

换言之，对B 的一个小扰动决定了整个同伦等价的一个扰动。

作为一个特例，我们使用 HPL 重新考察一个经典情形（阶梯引理以及一个双复形的谱序列）。

考虑一个集中在右上象限的双复形



在这种情况下，对于每一列（C^k,•,v），我们都可以构造一个回缩到其垂直上同调的变形复形。将所有行中的这些数据汇总起来，我们得到一个同伦等价

$$(H^\bullet(C,v),0) \underset{\pi}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} (C,v) \circlearrowleft \eta \tag{31}$$

在这里，我们可以将这个回缩看作保持在双复形的全化上。

我们将水平微分h 视为扰动（即 δ）。注意，$h\eta$ 将$C^{j,k}$映射到$C^{j+1,k-1}$ ——也就是说，“沿阶梯向下走”——因此它是幂零的，因为最终它会越过最底下一行。（幂零的阶数取决于$j+k$的值。）因此，$1-h\eta$ 是可逆的，其逆由几何级数给出

$$(1-h\eta)^{-1} = 1 + h\eta + (h\eta)^2 + \cdots + (h\eta)^n + \cdots.$$

这个算子作用于一个元素，并“沿阶梯向下”，在每一级都留下自身的痕迹。令

$$\alpha = (1-h\eta)^{-1}h \tag{32}$$

在 HPL 中扮演A 的角色。

推论 B.5。 设 $(C^{\bullet\bullet}, h + v)$ 是一个第一象限双复形，并且沿行配备了如 (31)中所示的变形收缩。由于 $1 - h\eta$ 可逆（即 h 很小），令 $\alpha = (1 - h\eta)^{-1}h$。则存在一个同伦等价

$$(H^\bullet(C, v), \pi\alpha\iota) \underset{\pi + \pi\alpha\eta}{\overset{\iota+\eta\alpha\iota}{\rightleftarrows}} (C, h + v) \circlearrowleft \eta+\eta\alpha\eta$$

之 间是完整双复形与带有“转移”微分的 v 的上同调 .

请注意，如果我们先使用水平上同调，也有类似的陈述。

参考文献

[ABP13] D. Arinkin、J. Block 和 T. Pantev。“傅里叶–穆凯变换的⋆量子化”。《几何与泛函分析》23.5（2013年），第 1403–1482 页。网址：https://doi.org/10.1007/s00039-013-0233-8。[ADH23] A. Amabel、A. Debray 和 P. J. Haine。《微分上同调：范畴、特征类与联络》。2023年。arXiv：2109.12250 [math.AT]。网址：https://arxiv.org/abs/2109.12250。[Alv85] O. Alvarez。“拓扑量子化与上同调”。《数学物理通讯》100.2（1985年），第 279–309 页。网址：http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103943448。[AY23] L. Alfonsi 和 C. A. S. Young。《通过导出微分几何构造非微扰 BV 理论》。2023年。arXiv：2307.15106 [hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/2307.15106。[Bec+17] C. Becker、M. Benini、A. Schenkel 和 R. J. Szabo。“整体双曲时空上的阿贝尔对偶”。《数学物理通讯》349.1（2017年），第 361–392 页。网址：https://doi.org/10.1007/s00220-016-2669-9。[BEM04] P. Bouwknegt、J. Evslin 和 V. Mathai。“T 对偶：由 H通量引起的拓扑变化”。《数学物理通讯》249.2（2004年），第 383–415 页。网址：https://doi.org/10.1007/s00220-004-1115-6。[BH11] C. Bunster 和 M. Henneaux。“扭曲自对偶作用量”。《物理评论D辑》83（2011年），第 125015 页。arXiv：1103.3621 [hep-th]。[Bry08] J.-L. Brylinski。《环空间、特征类与几何量子化》。Birkhäuser经典丛书。1993年版重印。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，MA，2008年，第 xvi +300 页。网址：https://doi. org/10.1007/978-0-8176-4731-5。[BS05] U. Bunke 和 T. Schick。“关于 T 对偶的拓扑”。《数学物理评论》17.1（2005年），第 77–112 页。网址：https://doi.org/10.1142/S0129055X05002315。[Bun +08] U. Bunke、T. Schick、M. Spitzweck 和 A. Thom。“拓扑阿贝尔群层的对偶性与 T 对偶”。《K 理论与非交换几何》。欧洲数学学会会议报告丛书。欧洲数学学会，苏黎世，2008年，第 227–347 页。网址：https://doi.org/10.4171/060-1/10。[Bun+26] S. Bunk、L. Müller、J. Nuiten 和 R. J. Szabo。《导出微分几何中的对称性与高形式联络》。2026年。arXiv：2602.03441 [math.DG]。网址：https://arxiv.org/abs/2602.03441。[Bun 21] S. Bunk。“几何、场论与量子化中的丛格”。《复流形》8.1（2021年），第 150–182 页。网址：https://doi.org/10.1515/coma-2020-0112。[Bus87] T. H. Buscher。“弦背景场方程的一种对称性”。《物理快报B辑》194（1987年），第 59–62 页。[Car23] D. Carchedi。《导出流形作为微分分次流形》。2023年。arXiv：2303. 11140 [math.DG]。网址：https://arxiv.org/abs/2303.11140。[Cra04] M. Crainic。《关于扰动引理与形变》。2004年。arXiv：math / 0403266 [math.AT]。网址：https://arxiv.org/abs/math/0403266。[CS19] D. Carchedi 和 P. Steffens。《导出流形的泛性质》。2019年。arXiv：1905. 06195[math.AT]。网址：https://arxiv.org/abs/1905.06195。

[DP08] R. Donagi 和 T. Pantev。“环面纤维化、丛格与对偶性”。《美国数学会回忆录》193.901（2008年）。附录由 Dmitry Arinkin 撰写，第 vi+90 页。网址：https://doi.org/10.1090/memo/0901。[DT76] S. Deser 和 C. Teitelboim。“阿贝尔规范场与非阿贝尔规范场的对偶变换”。《物理评论D辑》（第 3 版）13.6（1976年），第 1592–1597 页。网址：https://doi.org/10.1103/PhysRevD.13.1592。[Ell19] C. Elliott。“广义麦克斯韦理论的阿贝尔对偶”。《数学物理分析与几何》22.4（2019年），论文编号 22，共 40 页。网址：https://doi.org/10.1007/s11040-019-9319-3。[FH00] D. S. Freed 和 M. Hopkins。“关于 Ramond-Ramond 场与 K 理论”。《高能物理杂志》5（2000年），论文 44，共 14 页。网址：https://doi.org/10.1088/1126-6708/2000/05/044。[FH13] D. S. Freed 和 M. J. Hopkins。“陈-韦伊形式与抽象同伦论”。《美国数学会通报》（新系列）50.3（2013年），第 431–468 页。网址：https://doi.org/10.1090/S0273-0979-2013-01415-0。[FMS07a] D. S. Freed、G. W. Moore 和 G. Segal。“海森堡群与非交换通量”。《物理年刊》322.1（2007年），第 236–285 页。网址：https://doi.org/10.1016/j.aop.2006.07.014。[FMS07b] D. S. Freed、G. W. Moore 和 G. Segal。“通量的不确定性”。《数学物理通讯》271.1（2007年），第 247–274 页。网址：https://doi.org/10.1007/s00220-006-0181-3。[Gai+15] D. Gaiotto、A. Kapustin、N. Seiberg 和 B. Willett。“广义全局对称性”。《高能物理杂志》2（2015年），172，前置部分+61。网址：https://doi.org/10.1007/JHEP02(2015)172。[Gaj97] P. Gajer。“德利涅上同调的几何”。《发明数学》127.1（1997年），第 155–207 页。网址：https://doi. org/10.1007/s002220050118。[GHM23] B. Gammage、J. Hilburn 和 A. Mazel-Gee。《周变 schober 与三维镜像对称》。2023年。arXiv：2202.06833 [math.RT]。网址：https://arxiv.org/abs/2202.06833。[Hor+03] K. Hori 等。《镜像对称》。第 1 卷。Clay 数学专著。序言由 Vafa 撰写。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯；Clay 数学研究所，马萨诸塞州剑桥，2003年，第 xx+929 页。[HT86] M. Henneaux 和 C. Teitelboim。“p-形式电动力学”。《基础物理学》16.7（1986年），第 593–617 页。网址：https://doi.org/10.1007/BF01889624。[KS06] M. Kashiwara 和 P. Schapira。《范畴与层》。第 332 卷。《数学科学基础丛书》 [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]。Springer-Verlag，柏林，2006年，第 x+497 页。网址：https://doi.org/10.1007/3-540-27950-4。[Moo25] G. Moore。《p-形式难题》。会议报告。2025年。网址：https://cmsa.fas.harvard.edu/event/mpqft25/。通过同伦论与算子代数研究量子场论与拓扑相，数学科学与应用中心，哈佛大学。[MSF25] G. W. Moore、V. Saxena 以及 D. S. Freed 等。“关于拓扑场论与微分上同调的 TASI 讲座”。理论高级粒子物理研究所 2023：对称性的若干方面。2025年10月。arXiv：2510.07408 [hep-th]。[Nui18] J. Nuiten。《导出微分拓扑中的李代数丛》。博士论文——乌得勒支大学。2018年。网址：https: //dspace.library.uu.nl/handle/1874/364151。[Pol77] A. M. Polyakov。“夸克禁闭与规范群的拓扑”。《核物理B》120（1977年），第 429–458 页。[RV92] M. Roˇcek 和 E. Verlinde。“对偶性、商与流”。《核物理B》373.3（1992年），第 630–646 页。网址：https://doi.org/10.1016/0550-3213(92)90269-H。[Sat87] B. Sathiapalan。“统计力学与弦论中的对偶性”。《物理评论快报》58（1987年），第 1597 页。[Ste23] P. Steffens。《导出 C∞-几何 I：基础》。2023年。arXiv：2304 .08671 [math.AG]。网址：https:// arxiv.org/abs/2304.08671。[SW23] I. Saberi 和 B. R. Williams。“BV形式体系中的约束：六维超对称及其扭曲”。《数学进展》412（2023年），论文编号 108806，共 87 页。网址：https://doi.org/10.1016/j.aim.2022. 108806。[Tar23] G. Taroyan。《导出栈的等价模型》。2023年。arXiv：2303.12699 [math.DG]。网址：https://arxiv. org/abs/2303.12699。

[Tar26] G. Taroyan.《导出微分几何中的德拉姆理论》。2026年。arXiv：2505.03978 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/2505.03978。[Ver95] E. Verlinde。“电磁对偶的全局方面”。《核物理B》455.1-2（1995年），第211–225页。网址：https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00431-Q。[Wit95] E. Witten。“阿贝尔规范理论中的S对偶”。SelectaMath. (N.S.) 1.2（1995年），第383–410页。网址：https: //doi.org/10.1007/BF01671570。[Wit99] E. Witten。“量子场论的动力学”。《量子场与弦：数学家课程》，第1、2卷（新泽西州普林斯顿，1996/1997）。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1999年，第1119–1424页。