arXiv:2603.19164v1 [math.AP] 19 Mar 2026

与 Ornstein-Uhlenbeck算子相关的 Brunn-Minkowski型不等式评述

Francisco Mar´ın Sola 和 Francesco Salerno

摘要

我们研究了与 Ornstein-Uhlenbeck算子相关的扭转刚度 T_γ 和第一特征值 λ_γ 的 Brunn-Minkowski型不等式。我们给出反例，表明对于一般的有界凸集， T_γ 既不具有凹性，也不具有凸性。我们还证明，在这种情形下，对数凹性和对数凸性均不成立。对于中心对称集，我们回答 Cordero-Erausquin 和 Eske-nazis 提出的问题，证明 $T_\gamma^{1/(n+2)}$既非凸也非凹。另一方面，我们证明，当限制在以原点为中心的欧几里得球上时，$T_\gamma^{1/3}$关于 Minkowski加法是凸的。对于 λ_γ，我们对 Colesanti、Francini、Livshyts 和 Salani 提出的问题给出否定回答，证明不等式 $\lambda_\gamma(\Omega_t)^{-1/2} \geq (1-t)\lambda_\gamma(\Omega_0)^{-1/2} + t\lambda_\gamma(\Omega_1)^{-1/2}$并不成立，即使对于中心对称集也是如此。

关键词：布伦-明可夫斯基不等式；Ornstein-Uhlenbeck算子；高斯扭转刚度；高斯特征值。

MSC 2020：主要分类 52A40、35J25；次要分类 35P15。

1 引言

设 K_0、 K_1 是凸体（即 $\mathbb{R}^n$ 的紧凸子集，且内点非空），并且$t \in [0,1]$。布伦-明可夫斯基不等式指出

$$|K_t|^{\frac{1}{n}} \geq (1-t)|K_0|^{\frac{1}{n}} + t|K_1|^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

其中 $K_t = (1-t)K_0 + tK_1 = \{(1-t)x + ty\colon\ x \in K_0,\, y \in K_1\}$。这里 $|\cdot|$表示 n 维勒贝格测度或 体积。当且仅当 1 中的等号成立， K_0 与 K_1 是位似的。关于这一不等式及相关不等式的详尽综述，感兴趣的读者可参阅 [18]。

与 (1) 同类型的不等式，将体积替换为其他泛函后，会出现在许多不同的背景中（例如参见 [23, 第 7]节）。特别是，对于源自变分法的不等式，Colesanti 在 [10] 中进行了系统研究。更一般地，给定一个泛函

$$F : \mathcal{K}^n \to (0, +\infty),$$

其中，$\mathcal{K}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$中所有紧凸子集构成的类，它是 $\alpha \neq 0$阶齐次的。我们称 F 满足布伦-明可夫斯基不等式，如果

$$F((1-t)K_0 + tK_1)^{\frac{1}{\alpha}} \geq (1-t)F(K_0)^{\frac{1}{\alpha}} + tF(K_1)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{2}$$

对所有 K_0， $K_1 \in \mathcal{K}^n$ 以及对所有 $t \in [0,1]$。由于齐次性，要证明（2），只需证明 F 在 $\alpha > 0$（$\alpha < 0$）时是拟凹（拟凸）的，即

$$F((1-t)K_0 + tK_1) \geq \min\{F(K_0), F(K_1)\} \quad \text{if } \alpha > 0,$$
$$F((1-t)K_0 + tK_1) \leq \max\{F(K_0), F(K_1)\} \quad \text{if } \alpha < 0.$$

本文关注与 Ornstein-Uhlenbeck算子相关的一些几何量，即扭转刚度 T_γ 以及该算子的第一特征值 λ_γ（精确定义见§2）。这些量通常称为高斯扭转刚度和高斯特征值，代表了高斯空间中拉普拉斯算子的扭转刚度和主频率的对应量；后两者相应的布伦-明可夫斯基不等式分别由 [4] 和 [5]证明（另见 [10]）。

在近期的一项工作中， [11], 建立了关于 λ_γ 的布伦-明可夫斯基型不等式。具体而言，他们证明了第一特征值关于 Minkowski加法是凸的（另见 [13]，其中给出了这一结果的另一种证明；以及 [12]，其中将其推广到非线性情形）；

定理 1.1 (定理 1.2, [11]). 设 Ω_0, Ω_1 是 $\mathbb{R}^n$中的开有界子集。设 $t \in [0,1]$。那么

$$\lambda_\gamma(\Omega_t) \leq (1-t)\lambda_\gamma(\Omega_0) + t\lambda_\gamma(\Omega_1), \tag{3}$$

其中

$$\Omega_t = (1-t)\Omega_0 + t\Omega_1.$$

对于拉普拉斯算子的第一特征值，形如（3）的不等式结合其齐次性，意味着泛函 $\lambda^{-\frac{1}{2}}(\cdot)$ 的凹性。相反，由于缺乏这种齐次性，指数形式的布伦-明可夫斯基不等式并不能由（3）推出。高斯测度也存在类似现象；尽管布伦-明可夫斯基型不等式可由Borell刻画[3], 即

$$\gamma(\Omega_t) \geq \gamma(\Omega_0)^{1-t}\gamma(\Omega_1)^t,$$

但指数形式并不能直接推出。事实上， [19] 中猜想，前述不等式的指数形式，即对于 $\gamma^{1/n}$的不等式，可能对包含原点的凸集成立。Nayar和Tkocz在 [22], 中给出了后者的一个反例，其中关于这种不等式是否能对中心对称凸集成立的问题仍未解决。随后，Eskenazis和Moschidis在 [16]中取得了这一结果（另见 [21]以及其中关于证明该猜想的重要贡献的参考文献）。因此，一个自然的问题——也在 [11], 中提出——是类似的改进是否也适用于（3）。对此问题，我们给出否定答案，至少当其被理解为欧几里得情形下结果的推广时是如此。特别地，我们通过一个反例证明，形如

$$\lambda_\gamma(\Omega_t)^{-\frac{1}{2}} \geq (1-t)\lambda_\gamma(\Omega_0)^{-\frac{1}{2}} + t\lambda_\gamma(\Omega_1)^{-\frac{1}{2}}$$

即使对中心对称集也不成立。

鉴于欧几里得情形和定理1.1，自然也会想知道高斯扭转刚度是否满足某种布伦-明可夫斯基型不等式。具体而言，会引出以下问题：

(Q1) 对于有界开凸集，关于闵可夫斯基和的高斯扭转刚度是否具有凹性或凸性?

(Q2) 中心对称集的情形是否能让我们得出更多结论?

本文对这些问题作如下回答。关于（Q1），我们通过两个例子证明，对于开有界凸集，凹性和凸性一般都不成立。关于问题（Q2），针对 [14, 问题 18], 我们给出一个反例，证明泛函 $T_\gamma^{1/(n+2)}$ 对于中心对称凸集既非凹也非凸。具体而言，考虑 $\Omega_i = B_{R_i}$（以原点为中心、半径为 R_i 的欧几里得球），$i = 0, 1$，我们发现，在维数 $n \geq 3$下，对于指数为 $1/(n+2)$ 的高斯扭率，凹性和凸性均不成立。这将是例3.3的内容。

鉴于此，人们可能会想知道，对于中心对称凸集，使泛函 T_γ^α为凸（或凹）的最小指数 α 是多少。我们给出了部分答案；我们证明，对于欧几里得球，泛函 $T_\gamma^{1/3}$关于 Minkowski加法是凸的。这就是下述定理的内容。

定理 1.2. 设 $R_0, R_1 > 0$，则

$$T_\gamma(B_{R_t})^{\frac{1}{3}} \leq (1-t)T_\gamma(B_{R_0})^{\frac{1}{3}} + tT_\gamma(B_{R_1})^{\frac{1}{3}},$$

其中 $R_t = (1-t)R_0 + tR_1$。当且仅当 $R_0 = R_1$时，等号成立。此外，该指数是尖锐的.

关于指数的尖锐性，我们可以探讨使泛函 α_n $T_\gamma(B_R)^{\alpha_n}$ 为凸函数的最小维数指数。这个问题的答案可直接由定理 1.2 的证明得出。为完整起见，我们在下面的推论中列出这一结果。

推论1.3。 设 $R_0, R_1 > 0$，则

$$T_\gamma(B_{R_t})^{\alpha_n} \leq (1-t)T_\gamma(B_{R_0})^{\alpha_n} + tT_\gamma(B_{R_1})^{\alpha_n},$$

其中 $R_t = (1-t)R_0 + tR_1$ 并且

$$\alpha_n = \sup_{R>0}\left\{ \frac{R^{2n-2}e^{-R^2}}{\left(\int_0^R s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\right)^3} \int_0^R \frac{\left(\int_0^t s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\right)^2}{t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2}}}\,dt \left[\frac{n-1-R^2}{R^n e^{-\frac{R^2}{2}}}\int_0^R s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds - 2\right] + 1 \right\}.$$

我们顺便指出，若 T_γ^α对某个 $\alpha > 0$ 为凸函数，则 T_γ^β对任意 $\beta > \alpha$ 都是凸函数。由定理 1.2 的证明可以推得上述各个指数之间的如下关系:

$$\frac{1}{n+2} \leq \alpha_n \leq \sup_{n\geq 1}\alpha_n = \frac{1}{3}.$$

注意，当 $n = 1$ 时，第一个不等式取等号。数值证据表明，当 $n = 2$时等号成立，而当 $n \geq 3$时不等式严格成立。

要证明更一般的结果，似乎需要更深入地理解一般情形下凸性为何失效，以及中心对称性如何发挥作用。鉴于定理 1.2 以及已发现的反例，我们可以合理地猜想如下结论。

猜想 **1.4.** 设Ω_0, Ω_1 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个开、有界且中心对称的子集。 n

$$T_\gamma(\Omega_t)^{\frac{1}{3}} \leq (1-t)T_\gamma(\Omega_0)^{\frac{1}{3}} + tT_\gamma(\Omega_1)^{\frac{1}{3}},$$

其中 $\Omega_t = (1-t)\Omega_0 + t\Omega_1$。当且仅当 $\Omega_0 = \Omega_1$ 时，等号成立。

最后，我们研究无界集合的情形。在下一个结果中，我们证明，对于一类特定的无界集合，即半空间，高斯扭转刚度也是凸的。

命题 1.5. 设 $s \in \mathbb{R}$，并考虑半空间

$$H_s = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq s\}.$$

那么，对所有的 $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$

$$T_\gamma(H_{s_t}) \leq (1-t)T_\gamma(H_{s_0}) + tT_\gamma(H_{s_1}),$$

其中 $s_t = (1-t)s_0 + ts_1$。

本文结构如下。第 2 节回顾有关高斯测度的预备工具，并定义高斯特征值和扭转刚度。第 3 节讨论反例：首先针对高斯扭转刚度给出反例，以回答问题 **(Q1)**；然后讨论其指数版本，最后讨论高斯特征值的布伦-明可夫斯基不等式的指数版本。第 4 节证明定理 1.2，而命题 1.5 的证明则放在附录 A。最后，我们在附录 A 中讨论当 $n = 2$ 时，指数为 $1/(n+2)$ 的扭转泛函布伦 - 明可夫斯基不等式的数值证据。

2 预备知识

高斯空间

考虑高斯测度

$$\gamma(\Omega) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_\Omega e^{-\frac{|x|^2}{2}}\, dx,$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，$n \geq 1$是勒贝格可测的。高斯空间是空间 $\mathbb{R}^n$，赋予测度 γ。我们注意到（$\mathbb{R}^n$，γ）是一个概率空间。注意，γ 在平移下并不保持不变，而在绕原点的旋转下保持不变。我们提到，对于给定的可测集 Ω，可以在 $\mathbb{R}^n$中定义 Ω 的高斯周长。于是，高斯等周不等式（关于高斯周长的精确定义以及对该不等式的全面讨论，请参阅 [17, §5.7] ）表明，在所有具有给定高斯测度的 $\mathbb{R}^n$ 的子集当中，半空间具有最小的高斯周长。在接下来的两个小节中，我们将回到半空间作为等周图形所发挥的作用。在下文中，对于给定的开有界集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，$W^{1,2}(\Omega, \gamma)$ 表示由 L^2 函数组成的加权索Sobole夫空间，其弱一阶导数属于 L^2。于是，$W^{1,2}_0(\Omega, \gamma)$ 将表示具有零迹的 $W^{1,2}(\Omega, \gamma)$ 函数空间。

Ornstein-Uhlenbeck算子的第一特征值

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个具有 Lipschitz 边界的开有界集。主频率的高斯版本可定义为

$$\lambda_\gamma(\Omega) = \inf_{w \in W^{1,2}_0(\Omega,\gamma)\setminus\{0\}} R_\gamma(w), \tag{4}$$

其中

$$R_\gamma(w) = \frac{\int_\Omega |\nabla w|^2\, d\gamma}{\int_\Omega w^2\, d\gamma}.$$

下一个结果表明，(4) 实际上是一个最小值。

定理 2.1。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个具有 *Lipschitz* 边界的开有界集。那么存在$v \in W^{1,2}(\Omega, \gamma) \setminus \{0\}$，使得 $\lambda_\gamma(\Omega) = R_\gamma(v)$。

下面的结果刻画了 (4) 作为偏微分方程的一个解（例如参见 [20,命题 2。10]）。

定理 2.2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个具有 *Lipschitz* 边界的开有界集，并设 $v \in W^{1,2}(\Omega, \gamma) \setminus \{0\}$ 是 (4)中的一个极小化者。那么 v 满足

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_\gamma v = \lambda_\gamma(\Omega) v & in\ \Omega \\ v = 0 & on\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

注 2.1. 由于 $R_\gamma(|v|) = R_\gamma(v)$，我们可以选取一个非负极小化者 $v \geq 0$。此外，由 (5) 和最大值原理可知，$v > 0$ 在 Ω 中，且 $v = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上。

(5) 的解在相差一个正的乘法常数的意义下是唯一的，也就是说，第一特征值 λ_γ 是单重的。最后，特征值的定义可以推广到无界域。例如，参见 [15], ，其中尤其证明了半空间在具有相同高斯测度的集合中使第一特征值达到最小，即对于每个 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 开

$$\lambda_\gamma(\Omega) \geq \lambda_\gamma(H),$$

其中， H 是一个半空间，使得 $\gamma(\Omega) = \gamma(H)$（有关该主题的更多细节另见 [2] ，定量改进见 [7], 以及 Robin 边界条件的推广见 [8] ）。这一结果代表了拉普拉斯算子的第一特征值的 Faber-Krahn 不等式的高斯对应物。

Ornstein-Uhlenbeck算子的扭转刚度

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个具有 Lipschitz 边界的开有界集。高斯扭转刚度可定义为

$$T_\gamma(\Omega) = \sup_{w \in W_0^{1,2}(\Omega,\gamma)} \frac{\left(\int_\Omega w\, d\gamma\right)^2}{\int_\Omega |\nabla w|^2\, d\gamma}.$$

与第一特征值的情形一样，可以证明这个上确界实际上是一个最大值，并由下列方程的解取得：

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_\gamma v = 1 & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

此外，不难验证

$$T_\gamma(\Omega) = \int_\Omega v(x)\, d\gamma(x), \tag{7}$$

其中 v 是方程（6）的解。

我们注意到，高斯扭转刚度的定义可以扩展到无界区域。我们再次参阅 [15], ，其中证明了，在具有给定高斯测度的集合中，半空间使高斯扭转刚度达到最大值。具体而言，对于每个 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 开

$$T_\gamma(\Omega) \leq T_\gamma(H),$$

其中 H 是满足 $\gamma(\Omega) = \gamma(H)$ 的半空间（关于推广到 Robin 边界条件的情形，另见 [9] ）。这一结果是拉普拉斯算子的扭转刚度所对应的 Saint-Venant不等式的高斯对应物。我们还提及一个关于与 Ornstein-Uhlenbeck算子相关的第一特征值和扭转刚度的另一项等周结果。具体而言，在 [20], 中，作者证明了，在具有给定扭转刚度的集合中，半空间使第一特征值达到最小，即

$$\lambda_\gamma(\Omega) \geq \lambda_\gamma(H),$$

其中 H 是一个半空间，使得对于 $\mathbb{R}^n$ 中每个具有 Lipschitz 边界的开有界子集 Ω，均有 $T_\gamma(\Omega) = T_\gamma(H)$。这一结果是 Kohler-Jobin 不等式的高斯对应物（有关该主题的完整讨论，见 [6] ）。

3 反例

扭转刚度

我们先求解一般的一维问题，之后将展示 Ω 的特定选取。令 $\Omega_i = [a_i, b_i]$，则扭转问题 (6) 变为

$$\begin{cases} u''(x) - xu'(x) = -1 & a_i < x < b_i \\ u(a_i) = u(b_i) = 0. \end{cases}$$

将方程两边乘以 $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 并积分两次，可得

$$u(x) = \int_{a_i}^{x} e^{\frac{t^2}{2}} \left(C - \int_{a_i}^{t} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds \right) dt. \tag{8}$$

由边界条件 $u(b_i) = 0$ 可得常数为

$$C = \frac{\int_{a_i}^{b_i} e^{\frac{t^2}{2}} \int_{a_i}^{t} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds\, dt}{\int_{a_i}^{b_i} e^{\frac{t^2}{2}}\, dt}.$$

然后，由（8），我们有

$$T_\gamma([a_i, b_i]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_i}^{b_i} u(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_i}^{b_i} \left[\int_{a_i}^{x} e^{\frac{t^2}{2}} \left(C - \int_{a_i}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds \right) dt \right] e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx. \tag{9}$$

根据定理 1.2 的陈述，可以预期该结果对非中心对称集同样成立。为突出中心对称性的作用，我们将给出一个一维（非中心对称的）例子，其中 $T_\gamma(\Omega_t) > (1-t)\, T_\gamma(\Omega_0) + tT_\gamma(\Omega_1)$ 对某个 $t \in (0, 1)$ 成立。

例3.1。 取 $\Omega_0 = [-1, 1]$、$\Omega_1 = [-2, 0]$ 和 $t = 1/2$。然后，由（9）可得

$$T_\gamma(\Omega_t) - (1-t)T_\gamma(\Omega_0) - tT_\gamma(\Omega_1) \approx 0.024229258576.$$

此外，在下面的例子中我们将证明，对于中心对称集，对数凹性（我们无法先验排除这一点）和对数凸性一般都不成立：

例3.2。 设 $\Omega_0=[-1,1]$、$\Omega_1=[-3,3]$ 以及 $t=3/4$。于是，由（9）可得

$$T_\gamma(\Omega_t)-T_\gamma(\Omega_0)^{1-t}T_\gamma(\Omega_1)^t\approx -0.296068463159.$$

此外，取 $\Omega_0=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$、$\Omega_1=[-1,1]$和 $t=1/2$。然后，由 (9) 可得

$$T_\gamma(\Omega_t)-T_\gamma(\Omega_0)^{1-t}T_\gamma(\Omega_1)^t\approx 0.0184327921054.$$

[1]现在我们将证明，泛函 T_γ^{n+2}既不具有凹性也不具有凸性，这将是例 3.3的内容。为此，我们首先需要引入一个关于$T_\gamma(B_R)$ 的公式；设 u 为下列方程的解

$$\begin{cases}-\mathcal{L}_\gamma u=1 & \text{in } B_R,\\ u=0 & \text{on } \partial B_R.\end{cases}\tag{10}$$

由于我们求解方程的定义域是一个以原点为中心的球，我们知道解是一个径向函数。利用

$$\Delta=\partial_{rr}+\frac{n-1}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}},\quad \langle x,\nabla\rangle=r\partial_r,$$

其中 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 是拉普拉斯-贝尔特拉米算子，则 (10) 中的偏微分方程变为以下常微分方程

$$\begin{cases}u''(r)+\left(\frac{n-1}{r}-r\right)u'(r)=-1 \quad 0<r<R\\ u'(0)=u(R)=0.\end{cases}$$

于是，我们得到

$$u(r)=\int_r^R e^{\frac{t^2}{2}}t^{-(n-1)}\left(\int_0^t s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\right)dt.$$

现在，利用（7），我们可以将扭转泛函视为如下函数:

$$T_\gamma(R):=T_\gamma(B_R)=n\omega_n(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_0^R\frac{\left(\int_0^t s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\right)^2}{t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2}}}\,dt.\tag{11}$$

我们需要计算（11）的一阶和二阶导数。首先，经过直接计算可得

$$T_\gamma'(R)=n\omega_n(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{\left(\int_0^R s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\right)^2}{R^{n-1}e^{-\frac{R^2}{2}}}.\tag{12}$$

因此，再对 R 求导，我们得到

$$T_\gamma''(R)=n\omega_n(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_0^R s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\left(2-\frac{n-1-R^2}{R^ne^{-\frac{R^2}{2}}}\int_0^R s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\right).\tag{13}$$

例3.3。 设 $G_\gamma(R)=T_\gamma(R)^{\frac{1}{n+2}}$。直接计算可得

$$G_\gamma''(R)=-\frac{n+1}{(n+2)^2}T_\gamma(R)^{-\frac{2n+3}{n+2}}T_\gamma'(R)^2+\frac{1}{n+2}T_\gamma(R)^{-\frac{n+1}{n+2}}T_\gamma''(R).$$

因此，证明 G_γ 是凸的，等价于证明 $G_\gamma''(R) > 0$；而后者由于对所有 $R > 0$，$T_\gamma(R) > 0$，等价于证明

$$T_\gamma''(R) - \frac{n+1}{n+2}\frac{T_\gamma'(R)^2}{T_\gamma(R)} > 0.$$

于是，由（11）-（12）-（13）可知，G_γ（R）的凸性（凹性）等价于下述函数的正性（负性）：

$$f(R) = 2 - \frac{n-1-R^2}{R^n e^{-\frac{R^2}{2}}}\int_0^R s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds - \frac{n+1}{n+2}\frac{\left(\int_0^R s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\right)^3}{R^{2n-2}e^{-R^2}}\left(\int_0^R \frac{\left(\int_0^t s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\right)^2}{t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2}}}\,dt\right)^{-1}.$$

例如，考虑 $n = 3$，有 $f(1) \approx -0.019$，而 $f(2) \approx 0.248$。这一现象并非 $n = 3$ 所特有，而似乎对每个 $n \geq 3$ 都会出现。在附录中，除关于 $n = 1,\ 2$ 的数值证据外，还给出了 $n \geq 3$ 的图像，从而可以明确地看到上述论断。

第一特征值

在给出反例之前，我们需要得到以原点为中心的球上的特征值表达式。与拉普拉斯算子的情形一样，这可以通过将第一特征值视为某个特殊函数的零点来实现。考虑特征值问题（5），其中 $\Omega = B_R$。我们可以将该微分算子写为如下形式

$$\Delta - \langle x, \nabla\rangle = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} - r\partial_r.$$

现在，我们将 u 展开为球谐函数

$$u(r,\theta) = \sum_{l\geq 0} R_l(r)Y_l(\theta),$$

其中 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}Y_l(\theta) = -l(l+n-2)Y_l(\theta)$。于是，方程变为

$$R_l''(r) + \left(\frac{n-1}{r} - r\right)R_l'(r) - \frac{l(l+n-2)}{r^2}R_l(r) = -\lambda_\gamma(\Omega)R_l(r) \tag{14}$$

对所有 $l \geq 0$ 均成立。引入变量替换 $r = \sqrt{2}s$，我们得到

$$\frac{d}{dr} = \sqrt{2s}\frac{d}{ds}, \quad \frac{d^2}{dr^2} = 2s\frac{d^2}{ds^2} + \frac{d}{ds}. \tag{15}$$

然后，若我们考虑 $R_l(r) = s^{\frac{l}{2}}w(s)$，应用 (15) 可得

$$\begin{aligned} R_l'(r) &= \frac{l}{\sqrt{2}}s^{\frac{l-1}{2}}w(s) + \sqrt{2}s^l w'(s), \\ R_l''(r) &= \frac{l(l-1)}{2}s^{\frac{l-2}{2}}w(s) + (2l+1)s^{\frac{l}{2}}w'(s) + 2s^{\frac{l+2}{2}}w''(s). \end{aligned}$$

采用这一记号，常微分方程 (14) 变为

$$sw''(s) + \left(l + \frac{n}{2} - s\right) w'(s) - \frac{l - \lambda_\gamma(\Omega)}{2} w(s) = 0,$$

其形式为库默尔方程

$$sw''(s) + (b - s)w'(s) - aw(s) = 0$$

其中有 $b = l + \frac{n}{2}$ 和 $a = \frac{l-\lambda_\gamma(\Omega)}{2}$。解 $w(s)$ 将是以下函数的线性组合

- 库默尔合流超几何函数： $M\left(\frac{l-\lambda_\gamma(\Omega)}{2},\ l + \frac{n}{2};\ s\right) = {}_1F_1\left(\frac{l-\lambda_\gamma(\Omega)}{2};\ l + \frac{n}{2};\ s\right)$，
- 特里科米合流超几何函数： $U\left(\frac{l-\lambda_\gamma(\Omega)}{2},\ l + \frac{n}{2};\ s\right)$，

参见 [1, 第 13] 章，以获取更全面的讨论。由于我们关注的是在 $r = 0$处正则的解，因此有

$$R_l(r) = r^l \, {}_1F_1\left(\frac{l - \lambda_\gamma(\Omega)}{2};\ l + \frac{n}{2};\ \frac{r^2}{2}\right)$$

并由边界条件 $R_l(R) = 0$ 可得

$${}_1F_1\left(\frac{l - \lambda_\gamma(\Omega)}{2};\ l + \frac{n}{2};\ \frac{R^2}{2}\right) = 0.$$

因此，第一特征值为 $R_0(R) = 0$，即

$${}_1F_1\left(-\frac{\lambda_\gamma(\Omega)}{2};\ \frac{n}{2};\ \frac{R^2}{2}\right) = 0. \tag{16}$$

现在我们可以给出这个反例了。

例3.4。 考虑 $R_0 = 4$， $R_1 = 6$， $n = 2$， $t = 1/2$。则 $R_t = (1 - t)R_0 + tR_1 = 5$。利用（16），我们可以对以下特征值进行数值近似：

$$\begin{aligned}
\lambda_\gamma(B_{R_0}) &\approx 0.0045931899, \\
\lambda_\gamma(B_{R_1}) &\approx 0.0000005157, \\
\lambda_\gamma(B_{R_t}) &\approx 0.0000848928.
\end{aligned}$$

那么，

$$\lambda_\gamma(B_{R_t})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\lambda_\gamma(B_{R_0})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\lambda_\gamma(B_{R_1})^{-\frac{1}{2}} \approx -595.$$

4 主要结果

本节将证明定理 1.2。为使说明更加清晰，我们先概述证明思路，并在本节中给出严格论证。

我们要证明，对于某个 $\alpha \in (0,1)$，函数 $f(R) = T_\gamma(R)^\alpha$ 是凸的；也就是说，要证明对所有 $R > 0$，都有 $f''(R) > 0$，并且与维数无关的最佳 α 取值为 $\alpha = 1/3$。直接计算可知，$f''(R) > 0$ 等价于

$$\alpha \geq 1 - \frac{T_\gamma(R)T_\gamma''(R)}{T_\gamma'(R)^2} =: \alpha_n(R).$$

因此，结论是

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{R>0} \alpha_n(R) = \frac{1}{3}.$$

为此，我们将得到关于 $\alpha_n(R)$的以下信息：

(i) $\lim_{R\to 0^+} \alpha_n(R) = \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3}$；

(ii) $\lim_{R\to+\infty} \alpha_n(R) = 0$;

(iii) 每当

$$\frac{d}{dR}\alpha_n(R)\Big|_{R=R^*} = 0,$$

对于某个 $R^* > 0$，则有 $\alpha_n(R^*) \leq 1/3$。

更具体地说，(i) 意味着存在 $\delta > 0$，使得对于所有 $R \in (0, \delta)$，都有 $\alpha_n(R) < 1/3$。类似地，(ii) 意味着存在 $M > 0$，使得对于所有 $R > M$，都有 $\alpha_n(R) < 1/3$。

一旦我们知道了这一点，如果对于某个 $R_0 > 0$ 和 $n \geq 1$ 有 $\alpha_n(R_0) > 1/3$，那么根据我们所述的内容，必然有 $R_0 \in [\delta, M]$。然后，根据魏尔斯特拉斯定理，存在 $R^* \in [\delta, M]$，使得

$$\alpha_n(R^*) \geq \alpha_n(R_0) > \frac{1}{3}, \quad \frac{d}{dR}\alpha_n(R)\Big|_{R=R^*} = 0,$$

这与 (iii) 矛盾。

定理 1.2 的证明安排如下。我们首先证明 (i)-(ii)-(iii)，这将由接下来的四个引理给出。随后在定理 1.2的证明中完成结论。我们先介绍以下记号：

$$\begin{aligned} &c_n = n\omega_n(2\pi)^{-\frac{n}{2}}, \quad I(R) = \int_0^R s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds, \quad J(R) = \int_0^R \frac{I(t)^2}{I'(t)}\,dt, \\ &h(R) = \frac{I(R)}{I'(R)}, \quad v(R) = \frac{J(R)}{h(R)I(R)}, \quad p(R) = \frac{n-1}{R} - R. \end{aligned} \tag{17}$$

引理 4.1. 设 v 定义如 (17)所示，则

$$\lim_{R\to 0^+} v'(R) = \frac{1}{n+2}.$$

证明。 思路是将 $v(R)$ 写作 $R \sim 0$。回顾 v 由（17）给出的定义，我们先在积分号下展开 $e^{-\frac{s^2}{2}}$

$$I(R) = \int_0^R s^{n-1}\left(1 - \frac{s^2}{2} + O(s^4)\right)\,ds = \frac{R^n}{n} - \frac{R^{n+2}}{2(n+2)} + O(R^{n+4}),$$

and

$$I'(R) = R^{n-1}\left(1 - \frac{R^2}{2} + O(R^4)\right).$$

由此，我们可以写出

$$h(R) = \frac{I(R)}{I'(R)} = \frac{R}{n} + O(R^3).$$

因此，

$$h(R)I(R) = \frac{R^{n+1}}{n^2} + O(R^{n+3}). \tag{18}$$

关于 $J(R)$，由于被积函数满足

$$\frac{I(t)^2}{I'(t)} = \frac{t^{n+1}}{n^2} + O(t^{n+3}),$$

我们得到

$$J(R) = \frac{R^{n+2}}{n^2(n+2)} + O(R^{n+4}). \tag{19}$$

然后，结合（18）-（19），可得

$$v(R) = \frac{J(R)}{h(R)I(R)} = \frac{R}{n+2} + O(R^3).$$

后者即得所需结论。 □

引理 4.2。 令 v 如 (17)所定义。则

$$\lim_{R\to+\infty} v'(R) = 0.$$

证明。 首先，注意到

$$I(R) \to c_n = \int_0^{+\infty} s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds,$$
$$I'(R) = R^{n-1}e^{-\frac{R^2}{2}} \to 0,$$

因为 $R \to +\infty$。因此， $h(R) = I(R)/I'(R) \to +\infty$ 且 $h(R) \sim c_n R^{1-n} e^{\frac{R^2}{2}}$。现在，回想一下

$$p(R) = \frac{n-1}{R} - R = \frac{I''(R)}{I'(R)},$$

我们得到

$$h'(R) = 1 - \frac{I(R)I''(R)}{I'(R)^2} = 1 - \frac{I(R)p(R)}{I'(R)} = 1 - h(R)p(R). \tag{20}$$

因此，利用（20）以及 $p(R)$ 的定义，我们得到

$$\frac{1+h'(R)}{Rh(R)} = \frac{2-h(R)p(R)}{Rh(R)} = 1 + \frac{2}{Rh(R)} - \frac{n-1}{R^2} \to 1, \tag{21}$$

作为 $R \to +\infty$。

现在定义 $\varphi(R) = Rv(R)$。从 $v(R)$ 的定义出发，经过直接计算可得

$$v'(R) = 1 - \frac{2v(R)}{h(R)} + p(R)v(R),$$

then

$$\varphi'(R) = R + v(R)\left(1 + Rp(R) - \frac{2R}{h(R)}\right).$$

此外，根据 $p(R)$的定义，我们发现

$$1 + Rp(R) - \frac{2R}{h(R)} = n - R^2 - \frac{2R}{h(R)},$$

这与 $v(R) = \varphi(R)/R$一起给出

$$\varphi'(R) = R - R\varphi(R) + \varphi(R)\left(\frac{n}{R} - \frac{2}{h(R)}\right).$$

最后，我们得到

$$\varphi'(R) = R(1 - \varphi(R)) + E(R)\varphi(R), \tag{22}$$

其中

$$E(R) = \frac{n}{R} - \frac{2}{h(R)},$$

并且 $E(R) \to 0$ 为 $R \to +\infty$.

现在我们将证明， φ 是有界的。为此，我们首先注意到，由于对所有 $R > 0$都有$R(> 0)$ v，因此$R(> 0)$ φ。此外，由于$R(\to 0)$ E，取 $R_0 > 0$ 使得，例如，对所有 $R \geq R_0$都有$R(| \leq 1/2)|E$。现在，如果对于某个 $R_1 \geq$ 满足$\max\{R_0, 2\}$，有$R_1(= 2)$ φ，那么根据(22)以及$R(E)$的有界性，我们有

$$\varphi'(R_1) = -R_1 + 2E(R_1) \leq 1 - R_1 < 0.$$

因此， φ 被压低到$R_1(= 2)$ φ以下，由此我们可以得出，对于所有$R > 0$， $R(\leq M)$ $0 < \varphi$，其中

$$M = \max\left\{2, \sup_{R\in(0,R_0]} \varphi(R)\right\}.$$

我们将通过证明以下结论来完成证明： $\varphi(R) \to 1$ 当 $R \to +\infty$时，这与(21)一同将推出该结论。为此，固定 $\delta > 0$ 并取 $R_1 > 1 + M$ 足够大，使得

$$|E(R)| \leq \delta \tag{23}$$

对所有 $R \geq R_1$均成立。我们首先证明， φ 不可能从下方穿过 $1 + \delta$ 。为此，假设反证法所得结论不成立，即存在 $R_2 \geq R_1$ 使得

$$\varphi(R_2) = 1 + \delta \quad \text{and} \quad \varphi'(R_2) \geq 0.$$

于是，由（22）-（23），可得

$$\varphi'(R_2) = -\delta R_2 + E(R_2)(1 + \delta) \leq \delta(1 + M - R_2) < 0,$$

其中用到了 $\delta < M$（只要将 δ 取得足够小，我们总可以作此假设）以及 $R_2 \geq R_1 > 1 + M$。后者意味着 $0 \leq \varphi'(R_2) < 0$，这就产生了矛盾。用同样的方法可以证明，φ 不可能从上方穿过 $1-\delta$；也就是说，不存在 $R_2 \geq R_1$ 使得 $\varphi(R_2) = 1-\delta$ 且 $\varphi'(R_2) \leq 0$。

总之，到目前为止我们证明了：若对于某个 $R \geq R_1$，有 $1-\delta \leq \varphi(R) \leq 1+\delta$，那么 $1-\delta \leq \varphi(R) \leq 1+\delta$ 对所有 $R \geq R$均成立。现在假设 $\varphi(R) > 1+\delta$对所有 $R \geq R_1$均成立。那么，由（22）-（23），可得

$$\varphi'(R) = R(1-\varphi(R)) + E(R)\varphi(R) \leq -\delta R + \delta\varphi(R) \leq -\delta R + \delta(1+M) < 0,$$

这里我们再次用到了 $R \geq R_1 > 1+M$和 $\varphi(R) \leq M < 1+M$。特别地，若对前一个不等式在 $[R_1, R]$上积分，则得到

$$\varphi(R) \leq \varphi(R_1) + (R-R_1)\left(\delta(1+M) - \frac{\delta}{2}(R+R_1)\right) \to -\infty$$

因为 $R \to +\infty$。这与 $\varphi(R) > 0$矛盾。因此，存在 $R_1 \geq R_1$ 使得 $\varphi(R_1) \leq 1+\delta$成立，并且根据此前的证明，$\varphi(R) \leq 1+\delta$ 对所有 $R \geq R_1$ 均成立。现在假设$\varphi(R) < 1-\delta$ 对所有 $R \geq R_1$ 均成立。因此，由（22），可得

$$\begin{aligned}\varphi'(R) &= R(1-\varphi(R)) + E(R)\varphi(R) > \delta R + E(R)\varphi(R) > \delta R - \delta\varphi(R)\\ &> \delta R - \delta(1-\delta).\end{aligned}$$

再次对 $[R_1, R]$ 前面的不等式积分，我们得到

$$\varphi(R) \geq \varphi(R_1) + (R-R_1)\left[\frac{\delta}{2}(R+R_1) - \delta(1-\delta)\right] \to +\infty,$$

这与事实 $\varphi(R) \leq M$ 矛盾。因此，存在 $R_2 \geq R_1$，使得 $\varphi(R_2) \geq 1-\delta$，并且根据我们已经证明的结果，对于所有 $R \geq R_2$，都有 $\varphi(R) \geq 1-\delta$。最后，我们发现，对于所有$R \geq \max\{R_1, R_2\}$，有

$$1-\delta \leq \varphi(R) \leq 1+\delta.$$

由于 δ 是任意的，我们可以得出 $\varphi(R) \to 1$ 当 $R \to +\infty$时。为完成证明，注意到后者与 (21) 蕴含

$$v'(R) = 1 - \frac{1+h'(R)}{h(R)}v(R) = 1 - \frac{1+h'(R)}{Rh(R)}\varphi(R) \to 1-1 = 0$$

当 $R \to +\infty$ 时。 □

引理 4.3。 设 h 按 (17)中的定义，则 $h'(R) > 0$。

证明。 我们首先回顾，根据 (20)，有 $h'(R) = 1 - h(R)p(R)$。我们分三种情况讨论。

情况 1： $n = 1$。在这种情况下，我们有 $p(R) = -R < 0$，而对于所有 $R > 0$，$h(R) > 0$，于是$h'(R) = 1 - h(R)p(R) > 0$ 对所有 $R > 0$成立。

情况 2： $n \geq 2$ 和 $R \geq \sqrt{n-1}$。在这种情况下，我们有

$$p(R) = \frac{n-1}{R} - R \leq \sqrt{n-1} - R \leq 0,$$

而对于所有 $R > 0$，$h(R) > 0$，则对于所有 $R > 0$，$h'(R) = 1 - h(R)p(R) > 0$。

情形 3: $n \geq 2$ 以及 $0 < R < \sqrt{n-1}$。现在，对于所有 $R > 0$，我们有 $p(R)\ h(R) > 0$。首先我们注意到，在前述引理的证明中，对于 $R \sim 0$，考察 $h(R)$ 的展开式，可得

$$\lim_{R\to 0^+} h'(R) = \lim_{R\to 0^+} (1 - h(R)p(R)) = \lim_{R\to 0^+} \left(1 - \left(\frac{n-1}{R} - R\right)\frac{R}{n}\right) = 1 - \frac{n-1}{n} > 0.$$

假设存在 $R_0 \in (0,\ \sqrt{n-1})$，使得

$$h'(R) > 0 \quad \forall\, R \in (0, R_0) \quad \text{and} \quad h'(R_0) = 0.$$

因此 $h''(R_0) \leq 0$，后者给出

$$0 \geq h''(R_0) = -h'(R_0)p(R_0) - h(R_0)p'(R_0) = -h(R_0)p'(R_0),$$

其中，在最后一个等号处，我们使用了 $h'(R_0) = 0$。于是，我们发现 $h(R_0)p'(R_0) \geq 0$，这与以下事实矛盾:

$$p'(R) = -\frac{n-1}{R^2} - 1 < 0, \tag{24}$$

且 $h(R) > 0$。

□

引理 4.4. 假设对于某个 $R^* > 0$，有 $v''(R^*) = 0$，那么

$$v'(R^*) = \frac{2h'(R^*) + p'(R^*)h(R^*)^2}{(1 + h'(R^*))^2 + 2h'(R^*) + p'(R^*)h(R^*)^2} \leq \frac{1}{3}.$$

证明。 我们首先回顾

$$v(R) = \frac{J(R)}{h(R)I(R)}.$$

现在，求导，由于 $1 + h'(R) = 2 - p(R)h(R)$，我们得到

$$v'(R) = \frac{J'(R)}{h(R)I(R)} - \frac{J(R)(h(R)I(R))'}{h(R)^2I(R)^2} = 1 - \frac{(1 + h'(R))v(R)}{h(R)} = 1 - \frac{2v(R)}{h(R)} + p(R)v(R). \tag{25}$$

再次对（25）求导，得到

$$v''(R) = v'(R)\left(p(R) - \frac{2}{h(R)}\right) + v(R)\left(\frac{2h'(R)}{h(R)^2} + p'(R)\right). \tag{26}$$

假设存在 $R^* > 0$使得 $v''(R^*) = 0$。考虑到 $p(R)h(R) = 1 - h'(R)$，由（26）可得

$$v'(R^*) = \frac{v(R^*)\left(\frac{2h'(R^*)}{h(R^*)} + p'(R^*)h(R^*)\right)}{1 + h'(R^*)}. \tag{27}$$

令

$$w(R) = \frac{v(R)}{h(R)}, \quad A(R) = 2h'(R) + p'(R)h(R)^2, \quad s(R) = 1 + h'(R),$$

(27) 变为

$$v'(R^*) = \frac{w(R^*)A(R^*)}{s(R^*)}.$$

此外，由 (25)，我们有 $v'(R) = 1 - s(R)w(R)$. 结合前两个恒等式可得

$$w(R^*) = \frac{s(R^*)}{A(R^*) + s(R^*)^2}. \tag{28}$$

因此

$$v'(R^*) = 1 - s(R^*)w(R^*) = \frac{A(R^*)}{A(R^*) + s(R^*)^2}. \tag{29}$$

根据引理 4.3，我们有 $s(R) = 1+h'(R) > 0$，以及 $w(R) > 0$。由于 (28) 给出 $s(R^*) = w(R^*)(s(R^*)^2+A(R^*))$，因此必有 $s(R^*)^2 + A(R^*) > 0$，且 (29) 定义良好。由 (29) 可知，$v'(R^*) \le 1/3$ 当且仅当 $2A(R^*) \le s(R^*)^2$。根据 $A(R)$ 和 $s(R)$ 的定义，利用 (24)，我们得到

$$\begin{aligned} s(R^*)^2 - 2A(R^*) &= (1 + h'(R^*))^2 - 2(2h'(R^*) + p'(R^*)h(R^*)^2) \\ &= (h'(R^*) - 1)^2 - 2p'(R^*)h(R^*)^2 \ge 0, \end{aligned}$$

这就得到了所要证明的结论。 □

现在我们可以开始证明 §1 中陈述的第一个结果了。

定理 *1.2* 的证明。令 $\alpha \in (0, 1)$，并考虑 $f(R) = T_\gamma(R)^\alpha = T_\gamma(B_R)^\alpha$。我们希望证明存在一个阈值 α_n，使得如果 $\alpha \in [\alpha_n, 1)$，那么 $f''(R) > 0$。根据定义，我们有

$$f''(R) = \alpha T_\gamma(R)^{\alpha-1} T_\gamma''(R) + \alpha(\alpha - 1)T_\gamma(R)^{\alpha-2} T_\gamma'(R)^2,$$

其中 T_γ， T_Γ， $T_{\Gamma\Gamma}$均在（11）-（12）-（13）中给出。因此，有 f''（R） > 0当且仅当

$$T_\gamma(R)T_\gamma''(R) + (\alpha - 1)T_\gamma'(R)^2 \ge 0,$$

这等价于

$$\begin{aligned} \alpha &\ge -\frac{T_\gamma(R)T_\gamma''(R)}{T_\gamma'(R)^2} + 1 \\ &= \frac{R^{2n-2}e^{-R^2}}{\left(\int_0^R s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\right)^3} \int_0^R \frac{\left(\int_0^t s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\right)^2}{t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2}}}\,dt \left[\frac{n-1-R^2}{R^n e^{-\frac{R^2}{2}}} \int_0^R s^{n-1}e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds - 2\right] + 1 =: \alpha_n(R). \end{aligned}$$

在证明的剩余部分，我们将证明 α_n（R） $\le \frac{1}{3}$。为此，我们将证明α_n（R） $= v'$（R），其中 v（R）定义于（17）中。由于

$$J'(R) = \frac{I(R)^2}{I'(R)} = h(R)I(R),$$

we 有 T_γ'（R） $= c_n h$（R）I（R），其中所有这些量均定义于（17）中。由于

$$I''(R) = [(n-1)R^{n-2} - R^n]e^{-\frac{R^2}{2}} = p(R)I'(R),$$

并且 $h'(R) = 1 - p(R)h(R)$，我们得到

$$T_\gamma''(R) = c_n(h(R)I(R))' = c_n I(R)(1 + h'(R)).$$

Then

$$\alpha_n(R) = 1 - \frac{T_\gamma(R)T_\gamma''(R)}{T_\gamma'(R)^2} = 1 - \frac{J(R)(1+h'(R))}{h(R)^2 I(R)} = 1 - \frac{(1+h'(R))v(R)}{h(R)}.$$

计算 $v'(R)$，经过直接计算可得 $\alpha_n(R) = v'(R)$。现在反设存在 $R_0 > 0$ 和 $n \geq 1$，使得 $\alpha_n(R_0) > 1/3$。由引理 4.1 以及 $\alpha_n(R)$的连续性，我们得到，对于所有 $R \in (0, \delta)$，当 $\delta > 0$ 充分小时，$\alpha_n(R) < 1/3$。同理，由引理 4.2，当 $M > 0$ 充分大时，对于 $R > M$，有 $\alpha_n(R) < 1/3$。由于 $\alpha_n(R_0) > 1/3$且 $R_0 \in [\delta, M]$，由魏尔斯特拉斯定理可知，存在最大值 $R^* \in (\delta, M)$，满足

$$\alpha_n(R^*) > \frac{1}{3}, \quad \frac{d}{dR}\alpha_n(R)\Big|_{R=R^*} = 0,$$

这与引理4.4矛盾。 □

备注 4.1（等号情形）。考虑 $F(t) = T_\gamma(R(t))^{\frac{1}{3}}$，其中 $R(t) = (1-t)R_0 + tR_1$，且 $t \in (0,1)$。定理的陈述是，对于任意 $t \in (0,1)$，都有 $G(t) = F(t) - (1-t)F(0) - tF(1) \leq 0$。由于$G(0) = G(1) = 0$，且 $G(t)$ 是凸的，若对某个 $t_0 \in (0,1)$ 有 $G(t_0) = 0$，则必有$G(t) = 0$对所有 $t \in (0,1)$ 均成立。因此，我们可以假设对所有 $t \in (0,1)$，都有 $G(t) = 0$。这等价于对所有 $t \in (0,1)$，都有$F''(t) = 0$，而后一条件又等价于以下条件

$$R'(t)^2 \left(T_\gamma(R)T_\gamma''(R) - \frac{2}{3}T_\gamma'(R)^2 \right) = 0. \tag{30}$$

我们要证明方括号中的量不可能为零。为此，回顾定理 1.2 的证明可知，对于所有 $\alpha > \alpha_n(R)$，$T_\gamma(R)T_\gamma''(R) + (\alpha - 1)T'\gamma(R)^2 > 0$。此外，当且仅当 $\alpha = \alpha_n(R)$ 时，上述不等式取等号。在这种情况下，$\alpha = 1/3$ 且 $\alpha_n(R) < 1/3$，其中仅当 $n = 1$ 为 $R \to 0^+$ 时等号成立。因此，由 (30) 可得，对所有$t \in (0,1)$，$R'(t) = 0$，这意味着 $R_0 = R_1$。

资助： 第一位作者获得资助项目 PID2021-124157NB-I00 的支持，该项目由 MCIN/AEI/10.13039/501100011033/“欧洲区域发展基金：建设欧洲的一种方式”资助；此外还获得“穆尔西亚大区自治区通过竞争性研究团队科研项目资助计划（该计划列入塞内卡基金会——穆尔西亚大区科学与技术机构的科研促进区域计划（2022 年行动计划））资助的项目，参考编号：21899/PI/22”的资助。第二位作者获得意大利国家高等数学研究所（INdAM）所属数学分析、概率论及其应用国家小组（GNAMPA）的部分资助，并获得 INdAM GNAMPA 2026 项目的部分资助；该项目为“非线性扩散过程：解的正则性与分类”，CUP E53C25002010001。

致谢： 这项工作始于第二位署名作者访问穆尔西亚大学数学系期间，当时他在 Mar´ıa A. Hern´andez Cifre 教授和 Jes´us Yepes Nicol´as 教授的指导下开展研究。我们感谢两位教授给予的宝贵建议与支持。

利益冲突： 作者声明，就本研究而言不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun。《数学函数手册：公式、图表和数学表》，美国国家标准局应用数学丛书第 55 卷。美国政府印刷局，华盛顿特区，1964 年。[2] M. F. Betta、F. Chiacchio 和 A. Ferone。某类线性椭圆问题第一特征函数的等周估计。《应用数学与物理杂志》，58(1)：37–52，2007 年。[3] C. Borell。d空间中的凸集函数。《匈牙利数学期刊》，6(2)：111–136，1975 年。[4] C. Borell。格林势与凹性。《数学年刊》，272(1)：155–160，1985 年。[5] H. J. Brascamp 和 E. H. Lieb。关于布伦-明可夫斯基定理和 Pr´ekopa-Leindler 定理的推广，包括对数凹函数的不等式及其在扩散方程中的应用。《泛函分析杂志》，22(4)：366–389，1976 年。[6] L. Brasco。关于扭转刚度与基频：Kohler-Jobin 重排技术导论。《ESAIM：控制、优化与变分法》，20(2)：315–338，2014年。[7] A. Carbotti、S. Cito、D. A. La Manna 和 D. Pallara。高斯法贝尔-克拉恩不等式的稳定性。《纯粹与应用数学年刊》(4)，203(5)：2185–2198，2024 年。[8] F. Chiacchio 和 N. Gavitone。带罗宾边界条件的厄米特算子的 Faber-Krahn 不等式。《数学年刊》，384(1-2)：789–804，2022 年。[9] F. Chiacchio、N. Gavitone、C. Nitsch 和 C. Trombetti。带罗宾边界条件的高斯扭转刚度的锐利估计。《势分析》，59(3)：1107–1116，2023 年。[10] A. Colesanti。变分泛函的布伦-明可夫斯基不等式及相关问题。《数学进展》，194(1)：105–140，2005 年。[11] A. Colesanti、E. Francini、G. V. Livshyts 和 P. Salani。Ornstein-Uhlenbeck 算子第一特征值的布伦-明可夫斯基不等式及相关特征函数的对数凹性。预印本， arXiv:2407.21354，2024 年。[12] A. Colesanti、L. Qin 和 P. Salani。高斯空间中椭圆偏微分方程解的几何性质及相关的布伦-明可夫斯基型不等式。《数学进展》，489：110827，2026 年。[13] A. Colesanti、L. Qin 和 P. Salani。与 Ornstein-Uhlenbeck 算子相关的抛物型方程解的对数凹性及其应用。预印本， arXiv:2601.07426，2026 年。[14] D. Cordero-Erausquin 和 A. Eskenazis。加权边缘分布的凹性原理。预印本，arXiv:2506.16941，2025 年。[15] A. Ehrhard。高斯积分的等周不等式。《高等师范学校科学年刊》(4)，17(2)：317–332，1984 年。[16] A. Eskenazis 和 G. Moschidis。高斯空间中的维数型布伦-明可夫斯基不等式。《泛函分析杂志》，280(6)：论文编号 108914，第 19 页，2021 年。

[17] N. Fusco. 定量等周不等式及相关主题。《数学科学通报》，5(3):517– 607，2015年。[18] R. J. Gardner. 布伦-明可夫斯基不等式。《美国数学会通报》 *(N.S.)*，39(3):355–405，2002年。[19] R. J. Gardner and A. Zvavitch. 高斯布伦-明可夫斯基不等式。《美国数学会汇刊》，362(10):5333–5353，2010年。[20] O. Herscovici and G. V. Livshyts. Kohler-Jobin遇上Ehrhard：在高斯扭转刚度固定时，通过重排得到高斯主频率的尖锐下界。《美国数学会会刊》，152(10):4437–4450，2024年。[21] A. V. Kolesnikov and G. Livshyts. 关于Gardner-Zvavitch猜想：布伦-明可夫斯基型不等式中的对称性。《数学进展》，384:论文编号107689，23，2021年。[22] P. Nayar and T. Tkocz. 关于高斯测度的一个布伦-明可夫斯基不等式的注记。《美国数学会会刊》，141(11):4027–4030，2013年。[23] R. Schneider.《凸体：布伦-明可夫斯基理论》，收录于第151卷《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，剑桥，英国剑桥，第二扩充版，2014年。

A 附录

现在我们给出命题1.5的证明。为此，我们需要以下初等引理。为完整起见，这里给出证明。

引理 A.1. 设 $s \in \mathbb{R}$，则

$$\int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \geq \frac{s}{s^2+1} e^{-\frac{s^2}{2}}.$$

证明。 考虑函数

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{t}{t^2+1}.$$

则其一阶导数为

$$f'(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{t^4+2t^2-1}{(t^2+1)}.$$

由于

$$\frac{t^4+2t^2-1}{(t^2+1)} = 1 - \frac{2}{(t^2+1)^2} \leq 1,$$

我们可以推断出

$$-f'(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{t^4+2t^2-1}{(t^2+1)} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。对后一个不等式积分可得

$$\int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \geq \int_s^{+\infty} -f'(t)\,dt = f(s) - \lim_{t\to+\infty} f(t).$$

由于 $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$，命题得证。 □

命题1.5的证明。令 $s \in \mathbb{R}$ 并考虑半空间

$$H_s = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq s\}.$$

我们回顾一下（见 [20, §2.3]），其高斯扭转刚度为 H_s

$$T_\gamma(s) := T_\gamma(H_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_s^{+\infty} e^{\frac{t^2}{2}} \left(\int_t^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \, d\tau \right)^2 dt.$$

因此，我们要证明对于所有 $s \in \mathbb{R}$, $T''_\gamma(s) \geq 0$。直接计算可得

$$T'_\gamma(s) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{s^2}{2}} \left(\int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \right)^2,$$

$$T''_\gamma(s) = -\frac{s e^{\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt.$$

因此，当且仅当 $T''_\gamma(s) \geq 0$

$$2 - s e^{\frac{s^2}{2}} \int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \geq 0.$$

当 $s \leq 0$ 时，后者显然成立。接下来，给定

$$f(s) = s e^{\frac{s^2}{2}} \int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt,$$

我们需要证明 可知 $f(s) \leq 2$。事实上，我们将利用以下两个事实证明 $f(s) \leq 1$ s:

- f 单调递增，
- $f(s) \leq$ 极限$_{s \to +\infty} f(s) = 1$.

另一方面，由引理 A.1

$$f'(s) = e^{\frac{s^2}{2}} \int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt + s^2 e^{\frac{s^2}{2}} \int_s^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt - s$$
$$\geq \frac{s}{1+s^2} + \frac{s^3}{1+s^2} - s = 0.$$

另一方面，例如利用洛必达法则

$$\lim_{s \to +\infty} f(s) = \lim_{s \to +\infty} \frac{-e^{-\frac{s^2}{2}}}{-e^{\frac{s^2}{2}} - s^2 e^{\frac{s^2}{2}}} s^2 e^{s^2} = \lim_{s \to +\infty} \frac{s^2}{1+s^2} = 1.$$

正如我们所要证明的。 □

我们以如下讨论作为结尾：回顾例3.3， $G''_\gamma(R)$ 的符号，其中$G_\gamma(R) = T_\gamma(R)^{\frac{1}{n+2}}$，由下列函数的符号决定 —

$$f(n,R) = 2 - \frac{n-1-R^2}{R^n e^{-\frac{R^2}{2}}} \int_0^R s^{n-1} e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds - \frac{n+1}{n+2} \frac{\left(\int_0^R s^{n-1} e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds \right)^3}{R^{2n-2} e^{-R^2}} \left(\int_0^R \frac{\left(\int_0^t s^{n-1} e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds \right)^2}{t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2}}} \, dt \right)^{-1}.$$

由于定义 $f(n,R)$ 时涉及的积分无法用初等函数求解，因此我们仅展示该函数在不同 n 值下的图像。

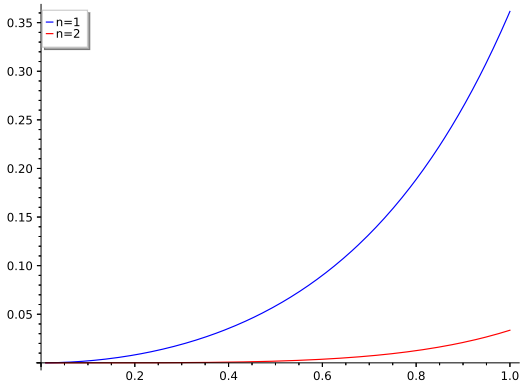

图1： $f(1,\ R)$ 和 $f(2,\ R)$ 的图像。

如 ca 可从图 1， $f(2,\ R)$ 对所有 $R>0$均为正；这等价于说 t hat

$$T_\gamma(B_{R_t})^{\frac{1}{4}} \le (1-t)T_\gamma(B_{R_0})^{\frac{1}{4}} + tT_\gamma(B_{R_1})^{\frac{1}{4}},$$

对所有 $R_0,\ R_1>0$，其中 $R_t=(1-t)R_0+tR_1$。因此，考虑到 $n=1$ 的情形，以下问题仍未解决：

(Q) 设 $n\in\{1,\ 2\}$ 且 Ω_0,Ω_1 是开、有界且中心对称子集，属于 $\mathbb{R}^n$。泛函 $t\mapsto T_\gamma(\Omega_t)^{\frac{1}{n+2}}$ 是凸的吗?

当我们考虑 $n\ge 3$ 时，情况有所不同。

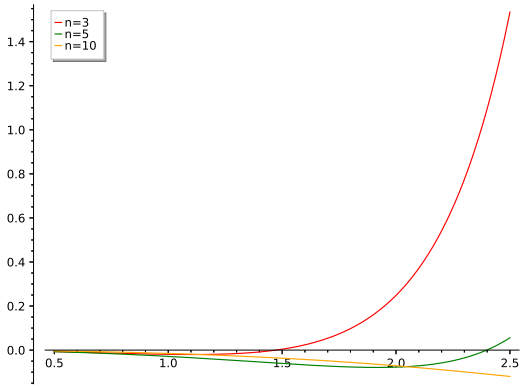

图2： $f(3,\ R)$、 $f(5,\ R)$ 和 $f(10,\ R)$ 的图像。

事实上，从图2可 $f(n,\ R)$ 的符号会发生变化，例如当 $n=3$、5、10 时。特别要指出的是，这种现象似乎对每个 $n\ge 3$都存在。在这种情况下，我们可以得出结论：即使将范围限制在中心对称的集合上，泛函 $T_\gamma(\Omega)^{\frac{1}{n+2}}$也不具有凹性或凸性。

F. Mar´ın Sola（通讯作者）： francisco.marin7@um.es

计算机工程与技术系，应用数学领域。穆尔西亚大学，西班牙。

F. Salerno： f.salerno@ssmeridionale.it

先进材料与技术的数学和物理科学，南方高等学院，圣马塞利诺广场10号，80138那不勒斯，意大利。