arXiv:2603.19171v1 [math.CA] 19 Mar 2026

温和非集中假设下的富斯滕伯格型估计

TUOMAS ORPONEN 与 PABLO SHMERKIN

摘要。我们证明了富斯滕伯格集合问题若干变体的 δ-离散化版本，其所需的非集中假设较以往工作更弱或有所不同。

目录

1. 引言与主要结果 1
2. 预备知识与记号 5
2.1. 二进尺度、管与良好构型 5
2.2. 均匀集与分支函数 6
2.3. 利普希茨分解引理 6
2.4. 良好构型的多尺度分解 7
3. 定理 1.2 的证明 7
4. 定理 1.4 和定理 1.5 的证明 12
5. 主要结果的锐性 15
5.1. 定理 1.2 和推论 1.3 的锐性 15
5.2. 定理 1.4 的锐性 16
5.3. 定理 1.5 的锐性 16
附录 A. 算术级数的比值 19
参考文献 21

1. 引言与主要结果

近年来，关于投影以及更一般的离散化关联问题的研究取得了许多重要进展。值得注意的是，富斯滕伯格集猜想最近由 Ren 和 Wang [10], 在我们先前工作的基础上 [7]得到了解决。接下来我们陈述这一估计的 δ-离散化版本。

日期：2026年3月20日。2010 数学主题分类28A80（主要），28A78（次要）。关键词与短语投影、富斯滕伯格集合。T.O. 获得欧盟「地平线欧洲」研究与创新计划下欧洲研究理事会（ERC）的资助（资助协议编号 101087499），并通过项目近似关联几何（资助编号 355453）获得芬兰研究理事会的资助。P.S. 获得 NSERC 探索基金资助。

Wolff 提出的原始猜想 [16], 是用豪斯多夫维数表述的，但 δ-离散化表述在应用中更有力，例如本文中的应用。关于表述中出现的离散化对象（如 Frostman 集和构型）的定义，请参见第2 节。这里我们仅作非正式说明：一个 $(\delta,\ s,\ C,\ M)$-构型 $(\mathcal{P},\ \mathcal{T})$ 由一对 δ-正方形 $\mathcal{P}$ 和 δ-管 $\mathcal{T}$组成，并且每个正方形 $p \in \mathcal{P}$ 都与一个 s-维子族中的所有管相交 $\mathcal{T}(p) \subset \mathcal{T}$，该子族的基数为 $|\mathcal{T}(p)| = M$。

定理 1.1（富斯滕伯格集估计）。设 $s \in (0,\ 1]$，$t \in [0,\ 2]$，并设

$$\gamma < \min\left\{t, \tfrac{s+t}{2}, 1\right\}.$$

那么，存在 $\epsilon = \epsilon(s、\ t、\ \gamma) > 0$ 以及 $\delta_0 = \delta_0(s、\ t、\ \gamma) > 0$，使得对所有 $\delta \in (0、\ \delta_0]$，以下结论成立。设 $(\mathcal{P}、\ \mathcal{T})$ 是一个 $(\delta、\ s、\ \delta^{-\epsilon}、\ M)$-良好构型，其中 $\mathcal{P}$ 是一个 *Frostman* $(\delta、\ t、\ \delta^{-\epsilon})$-集。那么，

$$|\mathcal{T}| \geqslant M\delta^{-\gamma}.$$

此外，δ_0、ϵ 可以选取得在固定紧子集 $(0、\ 1]\times[0、\ 2] \times (0$ 中所有 $(s、\ t、\ \gamma)$ 上均匀，最小值$\{t、\ \frac{s+t}{2}、\ 1\})$。

定理 1.1 是 [10, 定理 4。1]。定理 1.1 的许多变体已被证明，并在限制猜想和离散化的和积问题等方面有重要应用。参见 [2, 3, 14, 15]。这些变体都对管的非集中假设作了某种放宽$\mathcal{T}$（通常代价是对集合 $\mathcal{P}$增加一些额外假设）。

本文的主要目标是获得定理 1.1 的若干版本，使其在对集合 $\mathcal{P}$采用较弱的非集中假设、但对管族 $\mathcal{T}$仍保留较强的非集中假设时依然成立。第一个主要结果是下面的定理1.2 。该结果旨在改进“平凡”界 $|\mathcal{T}| \lessapprox M|\mathcal{P}|^{1/2}$（例如参见 [9, 命题 2。9] 中的精确表述），其假设是 $\mathcal{P}$ 不集中于边长为 $\delta|\mathcal{P}|^{1/2}$的（最小）正方形中的单个正方形。

定理 1.2。固定

$$s \in (0,1], \quad t \in [0,2], \quad u \in (0, \min\{t, 2-t\}],$$

and

$$0 < \zeta < \frac{t}{2} + \frac{s \cdot u}{2}.$$

那么，存在 $\epsilon = \epsilon(\zeta, s, t, u) > 0$ 和 $\delta_0 = \delta_0(\zeta, s, t, u) > 0$，使得对所有 $\delta \in 2^{-\mathbb{N}} \cap (0, \delta_0]$，以下结论成立。设 $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ 是一个 $(\delta, s, \delta^{-\epsilon}, M)$-良好构型。假设 $|\mathcal{P}| = \delta^{-t}$ 且

$$|\mathcal{P} \cap Q| \leqslant \delta^u |\mathcal{P}|, \quad Q \in \mathcal{D}_{\delta|\mathcal{P}|^{1/2}}. \tag{1.1}$$

Then

$$|\mathcal{T}| \geqslant M \cdot \delta^{-\zeta}. \tag{1.2}$$

众所周知，离散化 Furstenberg 集估计蕴含离散化投影估计。简而言之，对于一个 s-Frostman 方向集 $\Theta \subset S^1$，对每个 $p \in \mathcal{P}$，考虑经过 $\mathcal{T}(p)$ 且方向为 p 的管 $\theta \in \Theta$。然后，将 Furstenberg 集估计应用于 $(\delta,\ s,\ C,\ |\Theta|)$-良好构型 $(\mathcal{P}, \bigcup_p \mathcal{T}(p))$ 即可推出一个投影估计。由此论证，定理1.2 推出了以下在最弱非集中假设下的投影估计：

推论 1.3. 固定 $s,\ t,\ u,$ 以及 ζ 如定理 1.2中所述。则存在 $\epsilon = \epsilon(\zeta,\ s,\ t,\ u) > 0$以及 $\delta_0 = \delta_0(\zeta,\ s,\ t,\ u) > 0$ 使得对所有 $\delta \in 2^{-\mathbb{N}} \cap (0,\ \delta_0]$，以下结论成立。

假设 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}_\delta$ 具有 $|\mathcal{P}|_\delta = \delta^{-t}$，且满足 (1.1)。令 $\Theta \subset S^1$ 为一个非空的 *Frostman* $(\delta,\ s,\ \delta^{-\epsilon})$-集合。则存在 $\theta \in \Theta$ 使得

$$|\pi_\theta(\mathcal{P}')|_\delta \geqslant \delta^{-\zeta}, \qquad \mathcal{P}' \subset \mathcal{P},\ |\mathcal{P}'| \geqslant \delta^\epsilon |\mathcal{P}|. \tag{1.3}$$

这里 $\pi_\theta(x) :\ = x \cdot \theta$ 对于 $x \in \mathbb{R}^2$。

单尺度非集中假设（1.1）最早出现于 [11]，，第二作者在那里证明了推论1.3的一个非定量版本。我们注意到，在定理 1.1 和 1.2以及推论 1.3中，$t \in \{0,\ 2\}$ 这些情形很容易验证为平凡情形，但将它们纳入陈述中较为方便。

定理 1.2 和推论 1.3 是尖锐的；这将在第 5.1 节中证明。

接下来我们转向本文的第二个主要定理，其中对 1.1 中 $\mathcal{P}$ 的“最小”非集中性假设进行了升级，得到 *Katz-Tao*非集中性假设（见定义 2.1）。

定理 1.4。令 $s \in (0、\ 1]、\ t \in [s、\ 2-s]$ 和 $\eta > 0$。则存在 $\epsilon = \epsilon(s、\ t、\ \eta) > 0$ 以及 $\delta_0 = \delta_0(s、\ t、\ \eta) > 0$，使得对所有 $\delta \in (0、\ \delta_0]$，以下结论成立。设 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}_\delta$ 是一个 *Katz-Tao* $(\delta、\ t、\ \delta^{-\epsilon})$-集合，并设 $(\mathcal{P}、\ \mathcal{T})$ 是一个 $(\delta、\ s、\ \delta^{-\epsilon}、\ M)$-良好构型。则，

$$|\mathcal{T}| \geqslant \delta^\eta M |\mathcal{P}|^{(s+t)/(2t)}.$$

定理 1.4 也是锐的；参见 §5.2。锐性例子的形式为$P = A \times A$，其中 $A \subset \delta\mathbb{Z} \cap [0,\ 1]$ 是一个 Katz-Tao $(\delta,\ t/2)$-集合。定理 1.4 对于乘积集 $P = A \times B$，其中 $|A| \neq |B|$，是否也具有锐性？并非总是如此：有时甚至平凡上界 $|\pi_\theta(P)|_\delta \gtrsim |A|$ 也可能优于直接对 $(|A||B|)^{(1+s)/2}$ 应用定理 1.4 所得到的上界 $P = A \times B$。受此观察启发，我们给出定理 1.4 的一个变体，适用于（通常是）非对称乘积集。这几乎不增加额外代价，因为定理 1.5的证明与定理 1.4的证明几乎完全相同。

定理 1.5。设 $s \in (0, 1]$，设 $\alpha, \beta \in (0, 1]$ 满足 $\alpha + \beta \in [s, 2-s]$，并设 $\eta > 0$。那么存在 $\epsilon = \epsilon(s, \alpha, \beta, \eta) > 0$ 和 $\delta_0 = \delta_0(s, \alpha, \beta, \eta) > 0$，使得对所有 $\delta \in (0, \delta_0]$，以下结论成立。

- 设 $A \subset \delta\mathbb{Z} \cap [0, 1]$ 是一个 *Katz-Tao* $(\delta, \alpha, \delta^{-\epsilon})$-集合。
- 设 $B \subset \delta\mathbb{Z} \cap [0, 1]$ 是一个 *Katz-Tao* $(\delta, \beta, \delta^{-\epsilon})$-集合。

*Ass*设 $(A \times B, \mathcal{T})$ 是一个 $(\delta, s, \delta^{-\epsilon}, M)$-良好构型，且 $|A|^{\beta} \geqslant |B|^{\alpha}$。那么，

$$|\mathcal{T}| \geqslant \delta^{\eta} M \begin{cases} |A||B|^{(\beta+s-\alpha)/(2\beta)}, & \alpha \leqslant s, \\ |A|^{(\alpha+s)/(2\alpha)}|B|^{1/2}, & \alpha \geqslant s. \end{cases} \tag{1.4}$$

注 1.6。 我们仅在 1.5 的情形下考察了定理 $\alpha = \beta$的锐性。于是，对于 $|A| \geqslant |B|$, (1.4) 和 $2\alpha \in [s, \ 2-s]$, 上界 (1.4) 化简为

$$|\mathcal{T}| \geqslant \delta^{\eta} M \begin{cases} |A||B|^{s/(2\alpha)}, & \alpha \leqslant s, \\ |A|^{(\alpha+s)/(2\alpha)}|B|^{1/2}, & \alpha \geqslant s. \end{cases} \tag{1.5}$$

事实证明，第一个上界总是锐的，而第二个上界在 $|A|^{\alpha-s} \leqslant |B|^{\alpha}$时是锐的。事实上，当 $|A|^{\alpha-s} = |B|^{\alpha}$ 时，第二个上界化简为$|\mathcal{T}| \geqslant \delta^{\eta} M|A|$。在 $|B|^{\alpha} < |A|^{\alpha-s}$的范围内，“平凡上界” $|\mathcal{T}| \lessapprox M|A|$是锐上界（并且强于定理 1.5给出的上界）。

我们将在第 5.3节概述 (1.5) 的锐性例子。

定理 1.4–1.5 应与 H. Wang 和 S. Wu 的最新结果进行对比 [14, 15]。区别在于，定理1.4 中对管族 $\mathcal{T}(p)$ 与正方形 $p \in \mathcal{P}$ 关联所要求的非集中条件，明显强于 [14, 15]中的条件。另一方面，当 M 或 $|\mathcal{P}|$ 较小时，结论也更强。下面给出一个具体的比较：在 $t = 1$的情形下，将 [14]的主定理应用于定理 1.4 的设定，可得下界 $|\mathcal{T}| \lessapprox M^{3/2}\delta^{1/2}|\mathcal{P}|$。当 1.4 时，该下界小于（较弱于）定理 $M|\mathcal{P}|^{1-s} < \delta^{-1}$ 中的下界。事实上，甚至“平凡”界 $|\mathcal{T}| \lessapprox M|\mathcal{P}|^{1/2}$在 [14]时也优于 $M|\mathcal{P}| < \delta^{-1}$。

我们所有定理的证明都采用“组合尺度分解”方法。应用来自[11, 13], 的利普希茨函数组合分解后，我们能够定位出可应用定理 1.1 的尺度块。多尺度分解的细节是新的。不同的尺度块通过来自 [7]的多尺度关联估计结合起来。第 2 节回顾了这部分背景知识，主要定理的证明则见第3节和第4节。锐性例子将在第 5 节讨论。

注 1.7。 我们简要回顾本项目的历程。最初，我们在文章的第一个 1.2 （其中 $su/4$ 代替 $su/2$）版 *arXiv*中得到了定理 [8] 的一个非锐利版本（2023 年）。这一估计基于 [8]中得到的“粘性”富斯滕伯格估计。几个月后，K. Ren 和 H. Wang 证明了定理 1.1中的锐利 Furstenberg 集估计。我们意识到，应用他们的结果即可得到上文所述定理 1.2的锐利版本。由于定理 1.2 的锐利版本依赖于我们的预印本发表后才出现的锐利 Furstenberg 集估计，并采纳了一位审稿人的建议，我们决定将定理 1.2 从 [8] 中单独拆出，纳入本文。除了强化结果外，我们还补充并修正了证明中的细节，相较于 *arXiv* 版本的 [8]。定理1.4 和1.5在此首次发表。

2. 预备知识与记号

2.1. **二进尺度、管与良好构型**。我们固定二进尺度 $\delta,\ \Delta \in 2^{-\mathbb{N}}$ 并遵循 [8,第 2 节和附录 A]中的约定。

对于 $d \in \mathbb{N}$ 和 $A \subset \mathbb{R}^d$，记作

$$\mathcal{D}_\delta(A) := \{p \in \delta\mathbb{Z}^d + [0,\delta)^d : p \cap A \neq \varnothing\}$$

表示与 A相交的 δ-二进正方形。我们将 $\mathcal{D}_\delta := \mathcal{D}_\delta([-1,1)^d)$简记为。

我们记 $|A|_\delta = |\mathcal{D}_\delta(A)|$。将此推广到非二进 δ，定义 $|A|_\delta := |A|_{\delta'}$，其中 $\delta' =$ 最小，满足$\{2^{-n} : 2^{-n} \leqslant \delta\}$。相差一个乘法常数，$|A|_\delta$ 等于 A的 δ-覆盖数。

定义 2.1（Frostman 和 Katz-Tao (δ,s,C)-集合）。设 $\delta \in 2^{-\mathbb{N}}$、$s \geqslant 0$和$C > 0$。若集合 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}_\delta$满足以下条件，则称其为*Frostman* (δ,s,C)-集合

$$|\mathcal{P} \cap Q| \leqslant Cr^s|\mathcal{P}|, \qquad Q \in \mathcal{D}_r,\ r \in 2^{-\mathbb{N}} \cap [\delta,1].$$

类似地，如果一个集合 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}_\delta$ 被称为*Katz-Tao* $(\delta,\ s,\ C)$-集合，则需满足

$$|\mathcal{P} \cap Q| \leqslant C(r/\delta)^s, \qquad Q \in \mathcal{D}_r,\ r \in 2^{-\mathbb{N}} \cap [\delta,1].$$

若常数“C”是绝对常数，我们有时就简单地写作“Frostman $(\delta,\ s)$-集”或“Katz-Tao $(\delta,\ s)$-集”。

接下来定义二进 δ-管。对于 $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$，令

$$\mathbf{D}(a,b) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b\}.$$

这就是“点线对偶”映射。若 $p = [a,\ a+\delta) \times [b,\ b+\delta) \in \mathcal{D}_\delta([-1,\ 1) \times \mathbb{R})$，定义其对应的二进 δ-管为

$$\mathbf{D}(p) := \bigcup_{(a',b') \in p} \mathbf{D}(a',b').$$

令

$$\mathcal{T}^\delta := \{\mathbf{D}(p) : p \in \mathcal{D}_\delta([-1,1) \times \mathbb{R})\}.$$

对于 $T = \mathbf{D}([a,\ a+\delta) \times [b,\ b+\delta)) \in \mathcal{T}^\delta$，定义其斜率 为 $\sigma(T) := a$。

我们将 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}_\delta$ 子集视为 $\mathcal{P}$ 中正方形的并集。

对于一对 $(\mathcal{P},\ \mathcal{T}) \subset \mathcal{D}_\delta \times \mathcal{T}^\delta$ 和 $p \in \mathcal{P}$，记作

$$\mathcal{T}(p) := \{T \in \mathcal{T} : T \cap p \neq \varnothing\}, \qquad \sigma(\mathcal{T}(p)) := \{\sigma(T) : T \in \mathcal{T}(p)\}.$$

若对每个 $p \in \mathcal{P}$ 都成立，则称 $(\mathcal{P},\ \mathcal{T})$ 是一个 $(\delta,\ s,\ C,\ M)$-良好构型，

$$C^{-1}M \leqslant |\mathcal{T}(p)| \leqslant CM,$$

且 $\sigma(\mathcal{T}(p))$ 是 $(\delta,\ s,\ C)$ 中的 Frostman 集合 $[-1,\ 1)$。

最后，对于 $p \in \mathcal{D}_\Delta$，令 $S_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为将 p 映射到 $[0,\ 1)^2$ 上的保向位似变换。对于满足 $\delta \leqslant \Delta$ 的 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}_\delta$，

$$S_p(\mathcal{P} \cap p) := \{S_p(q) : q \in \mathcal{P},\ q \subset p\} \subset \mathcal{D}_{\delta/\Delta}.$$

有关上述定义的更多细节，请参阅 [8, 第 2] 节。

2.2. **均匀集与分支函数**。假设 $\delta = \Delta^m$ 满足 $\Delta = 2^{-T} \in 2^{-\mathbb{N}}$，并设 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}_\delta$。我们称 $\mathcal{P}$ 为 $\{\Delta^j\}_{j=1}^m$-均匀的，若存在数值 N_1、……、$N_m \geqslant 1$，使得对每个 $1 \leqslant j \leqslant m$ 以及每个 $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_{\Delta^{j-1}}(\mathcal{P})$,

$$\left|\mathcal{D}_{\Delta^j}(\mathcal{P}) \cap \mathbf{p}\right| = N_j.$$

在这种情况下，分支函数 $\beta\colon\ [0,\ m] \to [0,\ 2m]$ 的 $\mathcal{P}$ 定义为

$$\beta(j) := \frac{\log |\mathcal{P}|_{\Delta^j}}{T} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{j} \log N_i, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m,$$

然后对参数的非整数值进行线性插值。注意，β 是 2-利普希茨的、非递减的分段线性函数，并且满足 $\beta(0) = 0$ 和$\beta(m) = \log\ |\mathcal{P}|/\log(1/\Delta)$。

下一个标准的抽屉原理引理允许我们转而考虑一个较大的均匀子集（见 [8, 附录 A]）。

引理 2.2。设 $\epsilon > 0$。则存在 $T_0 = T_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$使下述结论成立。若 $\Delta = 2^{-T}$ 且 $T \geqslant T_0$、$\delta = \Delta^m$和 $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}_\delta$，则存在一个 $\{\Delta^j\}_{j=1}^m$-均匀集合$\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$，使得

$$|\mathcal{P}'| \geqslant \delta^\epsilon |\mathcal{P}|.$$

特别地，可以令 $T^{-1}\log(2T) \leqslant \epsilon$。

2.3. **利普希茨分解引理**。给定 $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ 以及数值 $\epsilon > 0, \sigma$，我们称 (f,a,b) 是 (σ,ϵ)- 超线性的，如果

$$f(x) \geqslant f(a) + \sigma(x-a) - \epsilon(b-a) \qquad \text{for all } x \in [a,b].$$

下一个引理是 [8, 引理 2.11]（它可由合并 [13,引理 5.21–5.22]直接推出）。

引理 2.3。对于每个 $d \in \mathbb{N}$和 $\epsilon > 0$，存在 $\tau = \tau(d,\epsilon) > 0$，使得以下结论成立：对于任意非递减的 d-利普希茨函数 $f\colon [0,m] \to \mathbb{R}$，满足 $f(0) = 0$，存在数列

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = m,$$
$$0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} \leqslant d,$$

使得：

(i) $a_{j+1} - a_j \geqslant \tau m$。*(ii)* (f, a_j, a_{j+1}) 是 $(t_j, 0)$-超线性的。*(iii)* $\sum_{j=0}^{n-1}(a_{j+1} - a_j)t_j \geqslant f(m) - \epsilon m$。

注记 2.4。注意，如果 F 是在 $[a_j,\ a_{j+1}]$ 上斜率为 t_j 且满足 $F(0) = 0$ 的分段仿射函数，那么 (ii) 和 (iii) 蕴含

$$F(a_j) \leqslant f(a_j) \leqslant F(a_j) + \epsilon m, \qquad j \in \{0,\ldots,n-1\},$$

因此

$$|f(a_i) - f(a_j) - (F(a_i) - F(a_j))| \leqslant \epsilon m, \qquad i,j \in \{0,\ldots,n-1\}.$$

2.4. **良好构型的多尺度分解**。 我们现在重复 [12, 推论 4。1]（其本身基于 [7, 命题 5。1]）。在陈述中， $A \lessapprox_\delta B$ 表示 $A \leqslant C$ 对数$(1/\delta)^C B$ 其中某个普适常数为 $C > 0$， 而 $A \approx_\delta B$也同样如此。

推论 2.5。 固定 $N \geqslant 2$ 以及一个满足以下条件的序列 $\{\Delta_j\}_{j=0}^N \subset 2^{-\mathbb{N}}$

$$0 < \delta = \Delta_N < \Delta_{N-1} < \ldots < \Delta_1 < \Delta_0 = 1.$$

设 $(\mathcal{P}_0, \mathcal{T}) \subset \mathcal{D}_\delta \times \mathcal{T}^\delta$ 是一个 (δ, s, C, M)-良好构型。那么，存在一个集合$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_0$，使得以下性质成立：

(i) $|\mathcal{D}_{\Delta_j}(\mathcal{P})| \approx_\delta |\mathcal{D}_{\Delta_j}(\mathcal{P}_0)|$ 且 $|\mathcal{P} \cap \mathbf{p}| \approx_\delta |\mathcal{P}_0 \cap \mathbf{p}|$, $1 \leqslant j \leqslant N$, $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_{\Delta_j}(\mathcal{P})$。(ii) 对于每个 $0 \leqslant j \leqslant N-1$ 和 $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_{\Delta_j}(\mathcal{P})$，都存在一些数

$$C_{\mathbf{p}} \approx_\delta C \quad \textit{and} \quad M_{\mathbf{p}} \geqslant 1,$$

以及一个管族 $\mathcal{T}_{\mathbf{p}} \subset \mathcal{T}^{\Delta_{j+1}/\Delta_j}$，满足性质 $(S_{\mathbf{p}}(\mathcal{P} \cap \mathbf{p}), \mathcal{T}_{\mathbf{p}})$ 是一个 $(\Delta_{j+1}/\Delta_j, s, C_{\mathbf{p}}, M_{\mathbf{p}})$-良好构型。

此外，可以选择这些族 $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}$，使得

$$\frac{|\mathcal{T}|}{M} \gtrsim_\delta \prod_{j=0}^{N-1} \max_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{D}_{\Delta_j}} \frac{|\mathcal{T}_{\mathbf{p}_j}|}{M_{\mathbf{p}_j}}.$$

$\approx_\delta$ 记号中所有隐含的常数均可依赖于 N。

3. 定理 的证明1.2

定理 1.2 的证明思路是，首先对（分支函数） $\mathcal{P}$ 应用引理2.3给出的多尺度分解。此过程将 δ 与1 之间的尺度分解为若干“区块”，在每个区块上 $\mathcal{P}$ 大致呈 t_j维，维数由一列递增的指数 $t_j \in [0, 2]$给出。对每个“区块”分别应用定理1.1得到下界，最后再应用推论2.5将这些估计合并起来。

注 3.1。 为便于理解下面的证明，我们先指出

$$\min\{t, \frac{s+t}{2}, 1\} = \begin{cases} t, & t \leqslant s, \\ \frac{s+t}{2}, & t \in [s, 2-s], \\ 1, & t \in [2-s, 2]. \end{cases} \tag{3.1}$$

定理 1.2 的证明。 固定陈述中的参数 s、 t、 u 和 $0 < \zeta < \frac{t}{2} + \frac{s \cdot u}{2}$。记

$$\omega := \frac{t}{2} + \frac{su}{2} - \zeta > 0,$$

并选择

$$0 < \eta < \frac{\omega}{8}.$$

令 $\xi = \xi(s, t, u, \zeta, \eta) > 0$ 为另一个小参数，满足

$$\xi < \frac{\omega}{8}.$$

为避免端点问题，我们始终在比相应端点值 η严格小的范围内应用定理 γ。令

$$K_\eta := \{(s,t',\gamma') : t' \in [0,2],\ \eta \leqslant \gamma' \leqslant \min\{t', \frac{s+t'}{2}, 1\} - \eta\}.$$

下文在应用定理1.1 时所用的所有参数三元组（即指标 $I_1^{\text{big}} \cup I_2 \cup I_3$对应的三元组）均属于 K_η，根据定理 1.1 的最后一句，我们可以在这个紧集上均匀地选取 $\epsilon_{\mathrm{F}} = \epsilon_{\mathrm{F}}(s,\ t,\ u,\ \zeta,\ \eta) > 0$ 以及小尺度阈值 δ_0。令 $\tau = \tau(2,\ \xi) > 0$ 为引理 2.3中的常数，并选取

$$\epsilon = \epsilon(s,t,u,\zeta,\eta,\xi) > 0$$

足够小，使得

$$\epsilon < \min\left\{\frac{\omega}{2s+4}, \frac{\tau\epsilon_{\mathrm{F}}}{2}\right\}.$$

特别是，

$$\frac{s\epsilon}{2} + 2\eta + \frac{3\xi}{2} < \omega \quad \text{and} \quad \frac{2\epsilon}{\tau} < \epsilon_{\mathrm{F}}.$$

不失一般性，我们可以假设 $\delta > 0$ 具有如下形式： $\delta = \Delta^m$ 其中 $\Delta \sim_\epsilon 1$ 且 $m \in \mathbb{N}$，并且 $\mathcal{P}$ 是 $\{\Delta^j\}_{j=1}^m$-均匀的。由于引理2.2的存在，这种化简是可行的；无论如何，该引理都允许我们找到一个 $\{\Delta^j\}_{j=1}^m$-均匀子集 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$，满足 $|\mathcal{P}'| \geqslant \delta^\epsilon |\mathcal{P}|$，前提是 $\Delta = 2^{-T}$满足 $T^{-1}\log(2T) \leqslant \epsilon$。

令 $\beta\colon [0,m] \to [0,2m]$ 为 $\mathcal{P}$在 §2.2中定义的分支函数。将引理 2.3 应用于 β，参数为 $d = 2$和 ξ。令 $\{a_j\}_{j=0}^n$, $\{t_j\}_{j=0}^{n-1}$ 为所得对象；由 (i) 可得 $n = O_\xi(1)$。令 F 为备注2.4中的分段仿射函数。特别地，

$$|\beta(a_i) - \beta(a_j) - \big(F(a_i) - F(a_j)\big)| \leqslant \xi m, \qquad i,j \in \{0,\ldots,n-1\}. \tag{3.2}$$

回想一下， $|\mathcal{P}| = \delta^{-t}$。那么，非集中假设（1.1）可写为

$$\beta((1-t/2)m) \geqslant (u-\epsilon)m. \tag{3.3}$$

（ ϵm 损失是由于我们必须从原始 $\mathcal{P}$中提取一个较大的均匀子集。）

我们将使用记号 $\lessapprox_\delta$ 来隐去多对数损失。

将推论 2.5 应用于序列 Δ^{a_j}, $j = n, n-1, \ldots, 0$。采用该推论中的记号，

$$\frac{|\mathcal{T}|}{M} \gtrapprox_\delta \prod_{j=0}^{n-1} \frac{|\mathcal{T}_{\mathbf{p}_j}|}{M_j},$$

为简洁起见，我们记 $M_j := M_{\mathbf{p}_j}$。受（3.1）启发，我们将指标$\{0,\ldots,n-1\}$ 分成 3 类:

$$I_1 = \{j : t_j \in [0,s]\}, \quad I_2 = \{j : t_j \in (s, 2-s)\}, \quad I_3 = \{j : t_j \in [2-s, 2]\}.$$

也进行拆分

$$I_1^{\text{big}} := \{j \in I_1 :\ t_j \geqslant 2\eta\}, \qquad I_1^{\text{small}} := I_1 \backslash I_1^{\text{big}}.$$

回顾一下，t_j 是递增的。设

$[0, A_1]$ 约定 $A_1 = 0$ 时，$I_1 = \varnothing$ 时为 $A_2 = A_1$，$I_2 = \varnothing$ 时为 $A_2 = m$，当 $I_3 = \varnothing$ 时为 $A_2 = m$（很容易看出，所有这些情形都是相容的）。

接下来，我们将分别估计每个因子 $|\mathcal{T}_{\mathbf{p}_j}|/M_j$。思路始终相同：根据推论 2.5，管族 $\mathcal{T}_{\mathbf{p}_j}$ 与一个

$$(\Delta^{a_{j+1}-a_j}, s, C_j, M_j)\text{-nice configuration } (\mathcal{P}_j, \mathcal{T}_{\mathbf{p}_j}),$$

其中 $\mathcal{P}_j$ 是一个 Frostman $(\Delta^{a_{j+1}-a_j}, t_j)$-集合（这由引理 2.3 的(ii)部分以及分支函数到 Frostman 集的对应关系得出，另见例如 [7, 引理 8.3]）。现在，t_j 的值域（$t_j \leqslant s$ 或 $t_j \in (s, 2-s)$ 或 $t_j \geqslant 2-s$）决定了定理 1.1 对 $|\mathcal{T}_{\mathbf{p}_j}|/M_j$ 给出的下界的具体形式。记 $\Delta_j := \Delta^{a_{j+1}-a_j}$。由推论 2.5，我们有 $C_j \lessapprox_\delta \delta^{-\epsilon}$。由于根据引理 2.3(i)，$a_{j+1} - a_j \geqslant \tau m$，因此可得 $\Delta_j \geqslant \delta^\tau$，从而

$$C_j \leqslant \Delta_j^{-2\epsilon/\tau} \leqslant \Delta_j^{-\epsilon_{\mathrm{F}}}, \tag{3.4}$$

只要 $\delta > 0$ 选取得足够小。因此，下面所有对定理 1.1 的应用都是成立的，且所用的一致常数仅依赖于 s、t、u、ζ、η。特别地，定理 1.1 本身不会导致下文出现额外的小损失；唯一显式的损失来自最初提取一个较大的均匀子集，以及通过注记 F 和 β 进行比较 2.4。

对于区间 $[\Delta^{a_{j+1}}, \Delta^{a_j}]$，其中 $j \in I_1^{\mathrm{big}}$，因此 $t_j \in [2\eta, s]$，我们应用定理1.1，取

$$\gamma_j^{(1)} := t_j - \eta < t_j,$$

并且对于 $j \in I_1^{\mathrm{small}}$，我们使用平凡上界

$$\frac{|\mathcal{T}_{\mathbf{p}_j}|}{M_j} \gtrsim 1.$$

因此，利用注记 2.4，

$$\begin{aligned}
\prod_{j\in I_1} \frac{|\mathcal{T}_{\mathbf{p}_j}|}{M_j} &\gtrapprox_\delta \prod_{j\in I_1^{\mathrm{big}}} \Delta^{(a_j-a_{j+1})(t_j-\eta)} \\
&\gtrapprox_\delta \prod_{j\in I_1} \Delta^{(a_j-a_{j+1})(t_j-2\eta)_+} \\
&\gtrapprox_\delta \Delta^{-F(A_1)+2\eta A_1} \\
&\overset{(3.2)}{\gtrapprox} \delta^\xi \Delta^{-\beta(A_1)+2\eta A_1}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

对于区间 $[\Delta^{a_{j+1}}, \Delta^{a_j}]$ 其中 $j \in I_2$，我们应用定理 1.1，并取

$$\gamma_j^{(2)} := \frac{s+t_j}{2} - \eta < \frac{s+t_j}{2},$$

和备注 2.4，得到

$$\begin{aligned}\prod_{j\in I_2}\frac{|\mathcal{T}_{\mathbf{p}_j}|}{M_j} &\gtrsim_\delta \prod_{j\in I_2}\Delta^{\frac{(a_j-a_{j+1})t_j}{2}}\cdot\Delta^{\frac{s(a_j-a_{j+1})}{2}}\cdot\Delta^{-\eta(a_{j+1}-a_j)}\\ &\gtrsim_\delta \Delta^{-\frac{F(A_2)-F(A_1)}{2}}\cdot\Delta^{-\frac{s(A_2-A_1)}{2}}\cdot\Delta^{\eta(A_2-A_1)}\\ &\overset{(3.2)}{\gtrsim} \delta^{\xi/2}\cdot\Delta^{-\frac{\beta(A_2)-\beta(A_1)}{2}}\cdot\Delta^{-\frac{s(A_2-A_1)}{2}}\cdot\Delta^{\eta(A_2-A_1)}.\end{aligned}$$

对于区间 $[\Delta^{a_{j+1}},\ \Delta^{a_j}]$ 满足 $j\in I_3$的情形，我们应用定理1.1，取 $\gamma^{(3)}:=1-\eta<1$ 从而得到

$$\prod_{j\in I_3}\frac{|\mathcal{T}_{\mathbf{p}_j}|}{M_j}\gtrsim_\delta \prod_{j\in I_3}\Delta^{(a_j-a_{j+1})(1-\eta)}=\Delta^{A_2-m+\eta(m-A_2)}. \tag{3.6}$$

综合这三种情形，并利用 $\delta^{-\frac{t}{2}}=\Delta^{-\frac{1}{2}\beta(m)}$ 和 $\Delta^{\eta A_1}\geqslant\Delta^{\eta m}=\delta^\eta$,

$$\frac{|\mathcal{T}|}{M}\gtrsim_\delta \delta^{-\frac{t}{2}+2\eta+\frac{3\xi}{2}}\left[\Delta^{-\frac{\beta(A_1)}{2}}\cdot\Delta^{\frac{s(A_1-A_2)}{2}}\cdot\Delta^{(A_2-m)+\frac{1}{2}(\beta(m)-\beta(A_2))}\right]. \tag{3.7}$$

这样书写不等式，是为了明确指出“Δ”的所有幂次均为非正数。令 $A:=(1-\frac{t}{2})m$。现在我们根据 A_1，A_2 相对于 A 的大小，将论证分为几种情形。

情形 $A_1\geqslant A$ 或 $A_2\leqslant A$。情形 $A_1\geqslant A$ 几乎是显然的：在这种情形下，我们只需根据 β 的单调性注意到,

$$\Delta^{-\frac{\beta(A_1)}{2}}\geqslant\Delta^{-\frac{\beta(A)}{2}}\overset{(3.3)}{\geqslant}\delta^{-\frac{u-\epsilon}{2}}.$$

将其代入（3.7）可得到一个比我们所声称的更好的估计。

那么我们来考虑这种情况 $A_2\leqslant A$。现在，主要的观察是，由于β 是 2-利普希茨的，因此我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\beta(A_2)&\geqslant\frac{1}{2}\beta\left(A\right)-(A-A_2)\\ &\overset{(3.3)}{\geqslant}\frac{(u-\epsilon)m}{2}-(A-A_2).\end{aligned}$$

因此，回想起 $\beta(m)=mt$，我们得到

$$\begin{aligned}\Delta^{(A_2-m)+\frac{1}{2}(\beta(m)-\beta(A_2))}&=\Delta^{A_2-A-\frac{1}{2}\beta(A_2)}\\ &\geqslant\Delta^{-\frac{(u-\epsilon)m}{2}}=\delta^{-\frac{u-\epsilon}{2}}.\end{aligned}$$

再次将其代入（3.7），得到的估计比我们声称的更好。

情形 $A_1 \leqslant A \leqslant A_2$。这是主要情形。我们将（3.7）中的因子拆分为

$$\begin{aligned}
&\Delta^{-\frac{\beta(A_1)}{2}} \cdot \Delta^{\frac{s(A_1-A_2)}{2}} \cdot \Delta^{(A_2-m)+\frac{1}{2}(\beta(m)-\beta(A_2))} \\
&= \Delta^{-\frac{\beta(A_1)}{2}} \cdot \Delta^{\frac{s(A_1-A)}{2}} \cdot \Delta^{\frac{s(A-A_2)}{2}} \cdot \Delta^{A_2-A-\frac{1}{2}\beta(A_2)} \\
&= \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_4.
\end{aligned}$$

我们希望将因子 Π_3 和 Π_4结合起来：

$$\Pi_3 \cdot \Pi_4 = \Delta^{(A_2-A)(1-\frac{s}{2})-\frac{1}{2}\beta(A_2)}. \tag{3.8}$$

注意，由于 $\beta(m) = mt$，且 β 是 2-利普希茨的，因此我们有

$$\frac{1}{2}(mt - \beta(A_2)) \leqslant m - A_2 \quad \Longleftrightarrow \quad A_2 - A \leqslant \frac{1}{2}\beta(A_2).$$

将此代入（3.8），并利用 $A_2 \geqslant A$，可得

$$\begin{aligned}
\Pi_3 \cdot \Pi_4 &= \Delta^{[(A_2-A)(1-\frac{s}{2})-(1-\frac{s}{2})\frac{1}{2}\beta(A_2)]-\frac{s}{4}\beta(A_2)} \\
&\geqslant \Delta^{-\frac{\beta(A_2)s}{4}} \geqslant \Delta^{-\frac{\beta(A)s}{4}} \overset{(3.3)}{\geqslant} \Delta^{-\frac{ms(u-\epsilon)}{4}} = \delta^{-\frac{s(u-\epsilon)}{4}}.
\end{aligned}$$

利用平凡估计 $\frac{1}{2}\beta(A_1) \geqslant \frac{1}{4}\beta(A_1)s$、$\beta$ 的 2-利普希茨性质以及 $A_1 \leqslant A$，可以得到乘积 $\Pi_1 \cdot \Pi_2$ 的类似估计：

$$\begin{aligned}
\Pi_1 \cdot \Pi_2 &= \Delta^{-\frac{\beta(A_1)}{2}} \cdot \Delta^{\frac{s(A_1-A)}{2}} \\
&\geqslant \Delta^{-\frac{\beta(A_1)s}{4}} \cdot \Delta^{\frac{(\beta(A_1)-\beta(A))s}{4}} \\
&= \Delta^{-\frac{\beta(A)s}{4}} \overset{(3.3)}{\geqslant} \delta^{-\frac{s(u-\epsilon)}{4}}.
\end{aligned}$$

总而言之，

$$\Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_4 \geqslant \delta^{-\frac{s(u-\epsilon)}{2}}.$$

将其代入（3.7），得到

$$\frac{|\mathcal{T}|}{M} \gtrsim_\delta \delta^{-\Lambda}, \qquad \Lambda := \frac{t}{2} + \frac{s(u-\epsilon)}{2} - 2\eta - \frac{3\xi}{2}.$$

根据 η，ϵ，ξ 的选取，

$$\Lambda = \frac{t}{2} + \frac{su}{2} - \left(\frac{s\epsilon}{2} + 2\eta + \frac{3\xi}{2}\right) > \frac{t}{2} + \frac{su}{2} - \omega = \zeta.$$

因此，当 δ 足够小（取决于 s、t、u、ζ）时，所声称的界1.2便成立。□

4. 定理 的证明 1.4 和 1.5

我们先证明定理1.4。定理1.5 的证明只会在最后的计算中有所不同，我们会指出所需的改动。固定 $s \in (0, 1]$、 $t \in [s, 2-s]$以及 $\eta > 0$。令 $P \subset [0,1]^2$ 为一个 Katz-Tao $(\delta, t, \delta^{-\epsilon})$-集。我们要证明，若 δ、 $\epsilon > 0$ 相对于 s、 t、 η足够小，则

$$|\mathcal{T}| \geqslant \delta^{\eta} M |P|^{(s+t)/(2t)}. \tag{4.1}$$

这些证明中"小常数的管理"与定理1.2的证明类似。主要有三个参数：给定的 $\eta > 0$，然后是我们将要选取的$\epsilon > 0$，最后是一个中间参数 $\zeta \in (\epsilon, \eta)$，它大致相当于定理 ϵ_F的证明中的"1.2"。由于再次加入所有小常数会使论证显得复杂，我们在此采用一种记号更简洁的策略：允许 $\lessapprox_\delta$ 记号隐藏形如 $\delta^{-o_{\zeta\to 0}(1)}$的常数。这样，我们最终得到的下界将具有形式$\gtrapprox \delta^{o_{\zeta\to 0}(1)} M |P|^{(s+t)/(2t)}$,因此，选取4.1，即可得到（ $\zeta > 0$相对于 η足够小。所需的 ζ 的小量最终将决定$\epsilon \ll \zeta$的阈值，具体通过关系式（4.2）。

接下来我们正式开始证明。首先，我们不妨假设 P是一个 Katz-Tao $(\delta, t, 1)$-集，因为 Katz-Tao $(\delta, t, \delta^{-\epsilon})$-集 P包含一个基数为 $(\delta, t, 1)$- 的 Katz-Tao 子集 P'，见 $|P'| \gtrapprox_\delta |P|$，参见 [6, 引理 2。2]。

与定理 1.2的证明一样，我们不妨假设 $\delta = \Delta^m$ 且 P是 $\{\Delta^j\}_{j=1}^m$-均匀的，适用于 $\Delta \sim_\epsilon 1$。令 $\beta\colon [0, m] \to [0, 2m]$为 P的分支函数，其定义见第 2.2节，并将引理 2.3 应用于 β，参数为 $d = 2$ 和 ζ。我们选取 $\epsilon > 0$(依赖于 ζ，因此最终依赖于 η)，使其足够小，从而

$$2\epsilon/\tau(\zeta) \leqslant \zeta, \tag{4.2}$$

其中 $\tau(\zeta) > 0$ 是引理 2.3给出的参数。

令 $\{a_j\}_{j=0}^n$、 $\{t_j\}_{j=0}^{n-1}$ 为引理2.3给出的对象；则由引理2.3(i)，有 $a_n = m$。假设 P为 $(\delta, t, 1)$-Katz-Tao 蕴含了均匀上界

$$t_j \leqslant t,$$

特别地， $t_j \leqslant 2 - s$，因为 $t \leqslant 2 - s$。

我们将推论2.5 应用于序列 Δ^{a_j}、 $j = n$、 $n-1$、.....、0。按照该推论的记号，我们估计

$$\frac{|\mathcal{T}|}{M} \gtrapprox_\delta \prod_{j=0}^{n-1} \frac{|\mathcal{T}_{\mathbf{p}_j}|}{M_j}. \tag{4.3}$$

下界（4.3）中的隐常数具有 $\gtrsim (\log(1/\delta))^{-O_\zeta(1)}$,的形式，特别地，当 $\delta > 0$充分小时，它大于 $\delta^{\eta/2}$

进一步沿用推论 2.5， $(S_{\mathbf{p}_j}(P \cap \mathbf{p}_j), \mathcal{T}_{\mathbf{p}_j})$ 是一个 $(\Delta_j, s, C_{\mathbf{p}_j}, M_j)$-良好构型，其中 $\Delta_j := \Delta^{a_{j+1}-a_j}$，且 $C_{\mathbf{p}_j} \lesssim (\log(1/\delta))^{O_\epsilon(1)} \delta^{-\epsilon}$。特别地，

由于 $a_{j+1}-a_j \geqslant \tau m$ 根据引理 2.3，并由（4.2），可得

$$C_{\mathbf{p}_j} \leqslant \Delta_j^{-2\epsilon/\tau} \leqslant \Delta_j^{-\zeta}, \tag{4.4}$$

前提是 $\delta>0$ 取得足够小。

我们将指标 $\{0、\ldots\ldots、\ n-1\}$ 分成两类:

$$I_1=\{j\in\{0,\ldots,n-1\}: t_j\in[0,s]\},\quad I_2=\{j\in\{0,\ldots,n-1\}: t_j\in(s,2-s]\}.$$

回想一下，数列 t_j 递增，且 $a_n=m$。令

$$[0,\mathfrak{a}]=\cup_{j\in I_1}[a_j,a_{j+1}],\quad [\mathfrak{a},m]=\cup_{j\in I_2}[a_j,a_{j+1}],$$

约定：若 $I_1=\varnothing$，则 $\mathfrak{a}=0$；若 $I_2=\varnothing$，则 $\mathfrak{a}=m$。

对于 $j\in I_1$，我们将定理 1.1 应用于构型 $(S_{\mathbf{p}_j}(P\cap\mathbf{p}_j),\ \mathcal{T}_{\mathbf{p}_j})$ 在尺度Δ_j下，并取 $t_j\leqslant s$。注意，$S_{\mathbf{p}_j}(P\cap\mathbf{p}_j)$ 是 $(\Delta_j,\ t_j,\ O_\epsilon(1))$-Frostman，这归功于 $(t_j,0)$-超线性性质 $(\beta,\ a_j,\ a_{j+1})$，详见 [7,引理 8。3] 结论为

$$\prod_{j\in I_1}\frac{|\mathcal{T}_{\mathbf{p}_j}|}{M_j}\gtrapprox_\delta \prod_{j\in I_1}\Delta_j^{-t_j}\gtrapprox_\delta \Delta^{-\beta(\mathfrak{a})}=|P|_{\Delta^{\mathfrak{a}}}. \tag{4.5}$$

在这个界中，构型的“良性”常数$(S_{\mathbf{p}_j}(P\cap\mathbf{p}_j),\ \mathcal{T}_{\mathbf{p}_j})$由上界 $\Delta_j^{-\zeta}$控制，这一点至关重要；根据（4.4），$\Delta_j^{-\zeta}$这保证了（4.5）中的隐常数确实具有 $\geqslant\delta^{o_\zeta\to 0(1)}$的形式。还需指出，（$\gtrapprox_\delta\ \Delta^{-\beta(\mathfrak{a})}$ 4.5）中的中间估计同样使用了备注 2.4，其方式与定理1.2的证明中估计（3.5）所采用的方式相同。

对于 $j\in I_2$，我们类似地应用定理 1.1，其中取 $t_j\in[s,\ 2-s]$ 并结合备注 2.4，得到

$$\prod_{j\in I_2}\frac{|\mathcal{T}_{\mathbf{p}_j}|}{M_j}\gtrapprox_\delta \prod_{j\in I_2}\Delta_j^{-(s+t_j)/2}\gtrapprox_\delta \Delta^{-\frac{\beta(m)-\beta(\mathfrak{a})}{2}}\Delta^{-\frac{s(m-\mathfrak{a})}{2}}=|P|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}^{1/2}\cdot\left(\frac{\Delta^{\mathfrak{a}}}{\delta}\right)^{s/2}. \tag{4.6}$$

这里 $|P|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}=|P|/|P|_{\Delta^{\mathfrak{a}}}$,以及

$$\left(\frac{\Delta^{\mathfrak{a}}}{\delta}\right)^{s/2}\geqslant|P|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}^{s/(2t)}$$

得益于 Katz-Tao $(\delta,\ t,\ 1)$-集合性质 P。结合（4.5）—（4.6）中的界，并注意到 $1/2+s/(2t)\leqslant 1$ 根据 $s\leqslant t$，我们得到

$$\frac{|\mathcal{T}|}{M}\gtrapprox_\delta |P|_{\Delta^{\mathfrak{a}}}|P|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}^{1/2+s/(2t)}\geqslant|P|_{\Delta^{\mathfrak{a}}}^{1/2+s/(2t)}|P|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}^{1/2+s/(2t)}=|P|^{(s+t)/(2t)}.$$

定理1.4的证明至此完成。

接下来，我们讨论证明定理 1.5所需的修改。令 $A,B\subset\delta\mathbb{Z}\cap[0,1]$ 如定理 1.5的陈述所示。则 $P:=A\times B$ 满足定理 1.4 的假设，其中 $t:=\alpha+\beta$，因此我们可以重复证明，得到估计式（4.5）-（4.6）。因此，

$$\frac{|\mathcal{T}|}{M}\gtrapprox_\delta |P|_{\Delta^{\mathfrak{a}}}|P|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}^{1/2}\cdot\left(\frac{\Delta^{\mathfrak{a}}}{\delta}\right)^{s/2}=|A|_{\Delta^{\mathfrak{a}}}|B|_{\Delta^{\mathfrak{a}}}|A|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}^{1/2}|B|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}^{1/2}\cdot\left(\frac{\Delta^{\mathfrak{a}}}{\delta}\right)^{s/2}. \tag{4.7}$$

与前面的论证相比，有一个小小的区别：在定理1.4的证明中，给定的集合 P 最初被替换为一个 $\{\Delta^j\}$-均匀子集，其基数与原集合的基数几乎相当。而这里，我们分别将 A 和 B 替换为 $\{\Delta^j\}$-均匀子集 A'，B'，然后定义 $P := A' \times B'$。显然，P此时也 $\{\Delta^j\}$-均匀。将 P 定义为一个积集，可确保 $|P|_{\Delta^{\mathfrak{a}}} = |A'|_{\Delta^{\mathfrak{a}}}|B'|_{\Delta^{\mathfrak{a}}}$和 $|P|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta} = |A'|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}|B'|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}$，这正是（4.7）所需的。

为继续进行，固定 $\theta \in [0,\ 1]$ 满足

$$\max\{\theta s/\alpha, (1-\theta)s/\beta\} \leqslant 1. \tag{4.8}$$

我们首先得到一个关于 θ 的界依赖界，最后优化 θ 以证明定理 1.5。根据 Katz–Tao $(\delta,\ \alpha)$-集合和 $(\delta,\ \beta)$-集合的性质，A 以及 B，

$$\left(\frac{\Delta^{\mathfrak{a}}}{\delta}\right)^{s/2} = \left(\frac{\Delta^{\mathfrak{a}}}{\delta}\right)^{\theta s/2} \cdot \left(\frac{\Delta^{\mathfrak{a}}}{\delta}\right)^{(1-\theta)s/2} \geqslant |A|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}^{\theta s/(2\alpha)} |B|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}^{(1-\theta)s/(2\beta)}.$$

将这个下界代入（4.7），并利用

$$1 \geqslant \max\{\frac{1}{2} + \theta s/(2\alpha), \frac{1}{2} + (1-\theta)s/(2\beta)\},$$

我们得到

$$\begin{aligned}\frac{|\mathcal{T}|}{M} &\gtrapprox_\delta |A|_{\Delta^{\mathfrak{a}}}^{1/2+\theta s/(2\alpha)} |B|_{\Delta^{\mathfrak{a}}}^{1/2+(1-\theta)s/(2\beta)} |A|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}^{1/2+\theta s/(2\alpha)} |B|_{\Delta^{\mathfrak{a}}\to\delta}^{1/2+(1-\theta)s/(2\beta)} \\ &= (|A||B|)^{1/2} |B|^{s/(2\beta)} \cdot (|A|^{s/(2\alpha)} |B|^{-s/(2\beta)})^{\theta}.\end{aligned}$$

接下来需要在约束 θ 下优化 $\theta \in [0,\ 1]$ 以及（4.8）下的取值。假设 $|A|^\beta \geqslant |B|^\alpha$ 等价于 $|A|^{s/(2\alpha)}|B|^{-s/(2\beta)} \geqslant 1$, 因此，我们希望最大化 θ。

注 4.1。实际上，假设 $|A|^\beta \geqslant |B|^\alpha$ 在形式上并非此处所必需——甚至在定理 1.5 中也不需要——但它说明了我们为何希望将 θ 选得尽可能大。反之，若 $|A|^\beta < |B|^\alpha$ 我们则会改为最小化 θ，以得到不同的界。我们没有在任何地方明确列出这些界，因为只需在定理 A、B 1.5 中交换二者的角色即可得到。

若 $\alpha \leqslant s$，我们选择 $\theta := \alpha/s \in [0,1]$，得到

$$\frac{|\mathcal{T}|}{M} \gtrapprox_\delta |A||B|^{(\beta+s-\alpha)/(2\beta)}.$$

（注意，条件 $(1-\theta)s/\beta = (s-\alpha)/\beta \leqslant 1$ 可由 $s \leqslant \alpha + \beta$ 保证。）若 $\alpha \geqslant s$，则改为选择 $\theta := 1$，得到

$$\frac{|\mathcal{T}|}{M} \gtrapprox_\delta |A|^{(\alpha+s)/(2\alpha)} |B|^{1/2}.$$

定理 1.5 的证明至此结束。

5. 主要结果的锐性

本节将验证主要结果的锐性。首先，我们回顾一个标准构造，它体现了与定理 1.1 对应的投影估计的锐性。该构造至少可追溯至 [16]；另见 [4, §2.2，情形 2] 以及 [1, 附录 A。1]简言之， P_0 是由 $\sim \rho^{-t}$多个 ρ球组成的并集，这些球排列在一个乘积网格上；而 Θ_0 则由以分母较小的有理数为中心的圆弧构成。

引理 5.1 （标准锐投影例子）。 对于任意二进尺度 $\rho \in (0、 1]$，任意 $s \in (0、 1]$，以及任意 $t \in [s、 2-s]$，都存在：

- 一个形如 $P_0 = A \times A \subset \rho\mathbb{Z}^2 \cap [0、 1]^2$ 的集合，其中 $A \subset \rho\mathbb{Z} \cap [0、 1]$ 是具有 $|A| \sim \rho^{-t/2}$，
- 的 *Frostman* 和 *Katz-Tao* $(\rho、 t/2)$-集合，也是具有 $|\Theta_0|_\rho \sim \rho^{-s}$ 的 *Frostman* 和 *Katz-Tao* $(\rho、 s)$-集合 $\Theta_0 \subset S^1$，

使得

$$|\pi_\theta(P_0)|_\rho \lesssim \rho^{-(s+t)/2}, \qquad \theta \in \Theta_0.$$

上述断言中的 *Frostman* 和 *Katz-Tao* 常数都是绝对常数。此外， P_0 中的元素两两 $\gtrsim \rho^{t/2}$-分离。

5.1. **定理 1.2 及推论 1.3的锐性**。 只需证明推论 1.3的锐性，因为利用标准的投影／管状字典即可得到定理1.2对应的锐性。

固定参数 s、 t、 u，如推论 1.3中所述，并令 $\delta > 0$ 足够小。选取二进尺度 $\Delta \sim \delta^u$ 和 $\rho \sim \delta^{1-t/2-u/2}$，，使得

$$\delta^{1-t/2} \sim \rho\Delta^{1/2} \quad \text{and} \quad \rho^2\Delta\delta^{-2} \sim \delta^{-t}.$$

应用引理5.1 ，取参数 $t = 1$ ，尺度为 Δ。于是存在集合 $\mathcal{P}_1 = A_1 \times A_1 \subset \Delta^{1/2}\mathbb{Z}^2 \cap [0,1]^2$，它是 $(\Delta, 1, O(1))$-Frostman 集，满足 $|\mathcal{P}_1|_\Delta \sim \Delta^{-1}$；并且根据引理的分离结论，它具有这样的性质：每个$\Delta^{1/2}$-正方形与 $\mathcal{P}_1$ 相交于 $O(1)$ 个 Δ-正方形。此外，存在一个 Frostman(Δ, s)-斜率集合 Θ_1，使得

$$|\pi_\theta(\mathcal{P}_1)|_\Delta \lesssim \Delta^{-(1+s)/2}, \qquad \theta \in \Theta_1.$$

现在定义 $\mathcal{P}_0 := \rho\mathcal{P}_1$ （按 ρ 缩放）。于是 $|\mathcal{P}_0|_\delta \sim \delta^{-t}$，并且由于 $\delta^{1-t/2} \sim \rho\Delta^{1/2}$, 每个 $\delta^{1-t/2}$-正方形至多包含 $O(\Delta)$ 比例的 $\mathcal{P}_0$，即

$$|\mathcal{P}_0 \cap Q|_\delta \lesssim \delta^u |\mathcal{P}_0|_\delta, \qquad Q \in \mathcal{D}_{\delta^{1-t/2}}.$$

接下来，将 Θ_1 改为 Frostman $(\delta, s, O(1))$-集合 Θ_0： 把Θ_1 中的每个 Δ-区间替换为 $\sim (\Delta/\delta)^s$ 个间距最大的 δ- 区间。若 $\theta' \in \Theta_0$ 大于 $\theta \in \Theta_1$，则 $|\theta' - \theta| \lesssim \Delta$，因此

$$|\pi_{\theta'}(\mathcal{P}_0)|_{\rho\Delta} \lesssim |\pi_\theta(\mathcal{P}_0)|_{\rho\Delta} \lesssim \Delta^{-(1+s)/2}.$$

从尺度 $\rho\Delta$ 过渡到尺度 δ，对每个 $\theta' \in \Theta_0$，可得：

$$|\pi_{\theta'}(\mathcal{P}_0)|_\delta \lesssim \frac{\rho\Delta}{\delta} \cdot \Delta^{-(1+s)/2} \sim \delta^{-(t/2+su/2)}.$$

由于同一上界显然也适用于每个子集 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}_0$，因此推论 1.3 中的指数是最优的。

5.2. **定理 1.4的锐性**。 固定 $s \in (0, 1]$、 $t \in [s, 2-s]$和 $\delta \in 2^{-\mathbb{N}} \cap (0, 1]$。选取 $\rho \in 2^{-\mathbb{N}} \cap [\delta, 1]$，并在尺度 ρ上应用引理 5.1 。于是存在一个集合 P_0和一个 Frostman (ρ, s)-集合 Θ_0，如引理中所述，且满足 $|P_0| \sim \rho^{-t}$ 和

$$|\pi_\theta(P_0)|_\rho \lesssim \rho^{-(s+t)/2} \sim |P_0|^{(s+t)/(2t)}, \qquad \theta \in \Theta_0.$$

按因子 δ/ρ,重新缩放后，我们得到一个 Katz-Tao $(\delta, t, O(1))$-集合 $P := (\delta/\rho)P_0$ 满足$|P| = |P_0| \sim \rho^{-t}$ 和

$$|\pi_\theta(P)|_\delta \lesssim \rho^{-(s+t)/2} \sim |P|^{(s+t)/(2t)}, \qquad \theta \in \Theta_0.$$

取 ρ-邻域 Θ 的 Θ_0 不会改变相同的上界（除常数因子外），并得到一个 Frostman (δ, s)-方向集合。由于 ρ 可以在 $[\delta$中任意取二进制值，$1]$，因此基数 $|P| \sim \rho^{-t}$（除常数因子外）遍历整个可行区间 $[1, \delta^{-t}]$。这表明，定理 1.4 中的下界在基数的整个可行范围内都是锐的。

5.3. **定理 1.5 的锐性**。 最后，我们讨论定理 1.5 对乘积集的锐性，但仅限于特殊情形 $\alpha = \beta$，且 $2\alpha \in [s, 2-s]$，正如备注 1.6 中所述。在这种情况下，回顾一下，定理 1.5 给出的界为

$$|\mathcal{T}| \geqslant \delta^\eta M \begin{cases} |A||B|^{s/(2\alpha)}, & \alpha \leqslant s, \\ |A|^{1/2+s/(2\alpha)}|B|^{1/2}, & \alpha \geqslant s, \end{cases} \tag{5.1}$$

对于 $|A| \geqslant |B|$ （对于 $|A| < |B|$ 也成立，但并非最优）。

我们先来考察当 $\alpha \leqslant s$时（5.1）的锐性。固定“目标基数” $|A| \geqslant |B|$。目标是构造具有这些基数的 Katz–Tao (δ, α)-集 $A, B \subset [0, 1]$，以及一个管族 $\mathcal{T}$，使得 $(A \times B, \mathcal{T})$ 构成一个 $(\delta, s, C, \delta^{-s})$-良好构型，并且（5.1）中的第一个界取等。

回忆引理 5.1 （其中 $t := 2\alpha$）中的对称尖锐例子具有如下形式 $B_0 \times B_0$。令 $\ell := \delta|B|^{1/\alpha}$, 选取 $B_0 \subset \delta\mathbb{Z} \cap [0, \ell]$ 使其为一个 Katz-Tao(δ, α)-集合，满足 $|B_0| = |B|$；选取一个 Katz-Tao (ℓ, α)-集合 $D \subset \ell\mathbb{Z} \cap [0, 1-\ell]$ 满足$|D| \sim N := |A|/|B|$ （这是可行的，因为 $|A| \lesssim \delta^{-\alpha}$，因此 $N \lesssim (\delta|B|^{1/\alpha})^{-\alpha} = \ell^{-\alpha}$），并定义

$$A_0 := D + B_0.$$

于是 $|A_0| = N|B_0| \sim |A|$，而 A_0仍是一个 Katz-Tao (δ, α)-集合：若 I是长度为 $r \leqslant \ell$的区间，则它至多与 $O(1)$ 个平移副本 $d + B_0$相交；而对于 $r \geqslant \ell$，它至多与 $O((r/\ell)^\alpha)$个这样的平移副本相交，每个平移副本至多贡献 $|B_0| \sim (\ell/\delta)^\alpha$ 个点。因此，$A_0 \times B_0$是由 N个互不相交的 $B_0 \times B_0$的平移副本构成的并，对所得构型有

$$|\mathcal{T}| \lesssim MN \cdot |B|^{(s+2\alpha)/(2\alpha)} \sim M|A||B|^{s/(2\alpha)}.$$

这与（5.1）中的第一个界一致。

接下来，我们讨论（5.1）中第二个界的锐性。这基于以下离散表述：

引理 5.2. 对于$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C} \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，满足

$$\mathbf{A} \geqslant \{\mathbf{B}, \mathbf{C}\} \quad \textit{and} \quad \mathbf{A} \leqslant \mathbf{BC}, \tag{5.2}$$

存在集合 A、B、$C \subset [0,\ 1]$，其基数分别与$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$相当，使得

$$|A + cB| \lesssim \sqrt{\mathbf{ABC}}, \qquad c \in C.$$

此外，集合 A、B、C 彼此间隔最大：

$$|A|_{\mathbf{A}^{-1}} \sim \mathbf{A}, \quad |B|_{\mathbf{B}^{-1}} \sim \mathbf{B} \quad \textit{and} \quad |C|_{\mathbf{C}^{-1}} \sim \mathbf{C}. \tag{5.3}$$

注 5.3. 这个引理与 ABC《和积定理的锐性》中的 [5, 定理 12]密切相关。由于 [5] 似乎没有陈述对我们有用的精确离散结论，我们在下面给出一个初等论证。

证明。令 $A \subset [0,\ 1]$ 为一个包含 0、间隔为$\mathbf{A}^{-1}$的极大等差数列（AP）。接下来，令 $B \subset A$ 为一个满足 $0 \in B$、在区间$[\frac{1}{2}\mathbf{B}^{-1}, \mathbf{B}^{-1}]$上间隔为$\mathbf{A}/\mathbf{B} \geqslant 1$的极大子等差数列。这是存在的，因为$\mathbf{A}/\mathbf{B} \geqslant 1$，所以存在一个自然数$m \in [\frac{1}{2}\mathbf{A}/\mathbf{B},\ \mathbf{A}/\mathbf{B}]$。采用这个记号，$B$的间隔可以是 $m\mathbf{A}^{-1}$。

设 $a \in A$ 和 $b \in B$ 是满足以下条件的最大元素

$$a \leqslant \sqrt{\mathbf{C}/\mathbf{AB}} \quad \text{and} \quad b \leqslant \sqrt{\mathbf{C}/\mathbf{AB}},$$

分别。注意到 $a \geqslant b > 0$ 因为 $B \subset A$，且 $\mathbf{B}^{-1} \leqslant \sqrt{\mathbf{C}/\mathbf{AB}}$ 由 (5.2) 可知。利用 B 是一个等差数列，$b > 0$ 可推出 更进一步地 $a,\ b \sim \sqrt{\mathbf{C}/\mathbf{AB}}$，并且

$$|B \cap [0, b]| \sim b\mathbf{B} \sim \sqrt{\mathbf{BC}/\mathbf{A}}.$$

记为

$$I := [0, a] \subset [0, \sqrt{\mathbf{C}/\mathbf{AB}}] \overset{(5.2)}{\subset} [0, 1],$$

以及 $A_I := A \cap I$，和 $B_I := B \cap I = B \cap [0,\ b]$。

设 C 由形如 $a/b \in [0, 1]$, 的有理数组成，其中

$$a \in A_I - A_I \quad \text{and} \quad b \in (B_I - B_I)\setminus\{0\}.$$

我们断言

$$|C|_{\mathbf{C}^{-1}} \sim \mathbf{C}. \tag{5.4}$$

要看出这一点，首先注意到 $A' := \{\mathbf{A}a\colon\ a \in A \cap I\} = \{0,\ \ldots\ldots,\ \mathbf{A}a\}$ 由介于 0 和 $n := \mathbf{A}a$之间的所有自然数组成。其次，$B' := \{\mathbf{A}b\colon\ b \in B \cap I\} \subset \{0,\ \ldots\ldots,\ n\}$ 是一个公差为$|B'| = |B_I| \sim \sqrt{\text{不列颠哥伦比亚省}}/\mathbf{A}$ 的等差数列，并且

$$D := \operatorname{diam}(B') \sim \mathbf{A}b \sim \sqrt{\mathbf{AC}/\mathbf{B}}.$$

现在将推论 A.3 应用于 A' 和 B' 可得

$$\Big|[0,1] \cap \frac{A' - A'}{(B' - B')\setminus\{0\}}\Big|_{(|B'|D)^{-1}} \sim |B'|D \sim \mathbf{C}.$$

这意味着（5.4），因为 $A',\ B'$ 是 $A_I,\ B_I$ 的缩放副本，且公因子为 $\mathbf{A}$。

最后，我们断言

$$|A+cB| \lesssim \ell(I)|A||B| \sim \sqrt{\mathbf{ABC}}, \qquad c \in C,$$

其中 $\ell(I)$ 是 I的长度。为此，固定 $c=(a_1-a_2)/(b_1-b_2)$ 和 $r \in A+cB$，其中 $a_j \in A \cap I$ 和 $b_j \in B \cap I$。特别地，$\max\{a_j,\ b_j\} \leqslant \ell(I)$。

我们将证明

$$|\{(a,b) \in (A+A-A) \times (B-B+B) : a+cb=r\}| \gtrsim \ell(I)^{-1} \tag{5.5}$$

对所有 $r \in A+cB$均成立，从而得到所需的估计

$$|A+cB| \lesssim \ell(I)|(A+A-A) \times (B-B+B)| \lesssim \ell(I)|A||B|.$$

为证明（5.5），固定 $r \in A+cB$，并令 $(a_0,\ b_0) \in A \times B$ 其中 $a_0+cb_0=r$。回顾可知 $c=(a_1-a_2)/(b_1-b_2)$, 也

$$(a_0+ma_1-ma_2)+c(b_0-mb_1+mb_2)=r, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

对于 $m \leqslant \ell(I)^{-1}$，有 $\max\{ma_j,\ mb_j\} \leqslant 1$。因此，对于 $m \leqslant \ell(I)^{-1}$，点 ma_j是等差数列 $A \subset [0$中的元素 $1]$（$[0$上的最大等差数列 $1]$，间隔为 $\mathbf{A}^{-1}$），而点 mb_j 同样是 $B \subset [0$的元素 $1]$。因此 $a_0+ma_1-ma_2 \in A+A-A$ 且 $b_0-mb_1+mb_2 \in B-B+B$ 对于 $m \leqslant \ell(I)^{-1}$，从而得到（5.5）。□

现在我们回到 (5.1) 中第二个界的锐性。设 $|A|,|B| \in [1,\delta^{-\alpha}]$ 满足 $|B| \leqslant |A|$ 和 $|B|^{\alpha} \geqslant |A|^{s-\alpha}$，它们是我们要证明 (5.1) 具有锐性的“目标基数”。我们的目标是构造 Katz-Tao(δ,α)- 集合 $A,B \subset [0,1]$，使其基数大致为这些值，并构造一个 Frostman (δ,s)-集合$\Theta \subset S^1$，使得对所有 $\theta \in \Theta$ 都有 $|\pi_\theta(A \times B)| \lesssim |A|^{1/2+s/(2\alpha)}|B|^{1/2}$。更确切地说，我们将构造一个 Frostman (δ,s)-集合 $C \subset [0,1]$，使得

$$|A+cB|_\delta \lesssim |A|^{1/2+s/(2\alpha)}|B|^{1/2}, \qquad c \in C. \tag{5.6}$$

令 A_0、B_0、$C_0 \subset [0$、$1]$ 为引理 5.2 中取如下参数时得到的集合

$$\mathbf{A} := |A|, \quad \mathbf{B} := |B|, \quad \text{and} \quad \mathbf{C} := |A|^{s/\alpha}.$$

回顾 $s \leqslant \alpha$，可以验证条件（5.2）成立；特别是 $\mathbf{A} \leqslant$ **不列颠哥伦比亚省** 等价于 $|B|^{\alpha} \geqslant |A|^{s-\alpha}$。然后（5.3）保证，例如 C_0包含一个 $|A|^{-s/\alpha}$-分离子集，其基数为 $\sim |C_0| \sim |A|^{s/\alpha}$。我们将 C_0缩减到这个子集，因此接下来假设 C_0 是 $|A|^{-s/\alpha}$-分离的。

记 $\Delta := \delta|A|^{1/\alpha}$，并令

$$A := \Delta A_0 \quad \text{and} \quad B := \Delta B_0.$$

利用 $|B| \leqslant |A|$ 和（5.3），容易验证 A，B 是 Katz-Tao $(\delta,\ \alpha)$-集。此外，

$$|A+cB|_\delta \leqslant |A_0+cB_0|_{|A|^{-1/\alpha}} \lesssim \sqrt{|A_0||B_0||C_0|} \sim |A|^{1/2+s/(2\alpha)}|B|^{1/2}, \quad c \in C_0. \tag{5.7}$$

显然（5.7）对所有 $c \in C$都成立，其中 C 是 $|A|^{-1/\alpha}$的邻域 C_0。因此，我们已经对 A、B和 C建立了（5.6）。接下来只需检验 C是一个 Frostman $(\delta,\ s)$集合。

首先回顾一下， C_0 是 $|A|^{-s/\alpha}$-分离的，并且 $|C_0| \sim |A|^{s/\alpha}$。由于 $s \leqslant 1$，可得

$$|C|_\delta \sim \frac{|A|^{-1/\alpha}}{\delta} \cdot |C_0| \sim |A|^{(s-1)/\alpha}\delta^{-1}.$$

现在，对于 $I \in \mathcal{D}_r([0,\ 1])$，当 $\delta \leqslant r \leqslant |A|^{-1/\alpha}$, 时，我们有 $r^{1-s} \leqslant |A|^{(s-1)/\alpha}$,，因此

$$|C \cap I|_\delta \leqslant (r/\delta) \leqslant r^s|A|^{(s-1)/\alpha}\delta^{-1} = r^s|C|_\delta.$$

对于 $|A|^{-1/\alpha} \leqslant r \leqslant |A|^{-s/\alpha}$，我们利用 C_0 的 $|A|^{-s/\alpha}$-分离性来估计

$$|C \cap I|_\delta \lesssim \frac{|A|^{-1/\alpha}}{\delta} \leqslant r^s|A|^{(s-1)/\alpha}\delta^{-1} \sim r^s|C|_\delta.$$

最后，对于 $|A|^{-s/\alpha} \leqslant r \leqslant 1$,，我们利用 C_0 的 $|A|^{-s/\alpha}$-分离性，以及 C_0 的 Frostman $(|A|^{-s/\alpha}, s)$-集性质来估计

$$|C \cap I|_\delta \lesssim \frac{|A|^{-1/\alpha}}{\delta} \cdot |C_0 \cap I| \leqslant \frac{|A|^{-1/\alpha}}{\delta} \cdot r^s|C_0| \sim r^s|C|_\delta.$$

我们现在已经验证 C 是一个 Frostman $(\delta,\ s)$-集，并证明了式（5.1）中第二个界的尖锐性。

附录 A. 等差数列的比值

本附录包含一些（极有可能是）标准事实，这些事实是证明引理 5.2所需的。我们从以下狄利克雷逼近定理的一个变体开始：

引理 A.1. 假设 $m, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 满足 $m \leqslant n$，且 m 整除 n。记作 $A = \{0, 1, \ldots, n\}$ 以及 $B = \{0, m, 2m, \ldots, n\}$。那么，对于所有 $x \in [0,1]$，存在 $a \in A - A$ 和 $b \in (B-B)\setminus\{0\}$，使得

$$|x - \frac{a}{b}| \leqslant \frac{m}{|b|n}.$$

证明。固定 $x \in [0,1]$。对于每个 $k \in \{0, \ldots, n/m\}$，我们可以写成 $kmx = n_k + x_k$，其中 $n_k \in \{0, \ldots, km\} \subset A$ 且 $x_k \in [0,1)$。共有 $n/m+1$ 个数 x_k，因此存在一对 x_i, x_j，满足 $i \neq j$ 且 $|x_i - x_j| \leqslant m/n$。因此，

$$|(i-j)mx - (n_i - n_j)| = |x_i - x_j| \leqslant m/n,$$

这可以重新整理为

$$\left|x - \frac{n_i - n_j}{im - jm}\right| \leqslant \frac{m}{|im-jm|n}.$$

这就得到了带有 $a = n_i - n_j$ 和 $b = im - jm$ 的结论。 □

以下命题是 [1, 命题 A 的非对称变体。5]

命题 A.2。令 A，B 如引理 A.1中所述。则

$$\left|[0,1] \cap \frac{A-A}{(B-B)\setminus\{0\}}\right|_{(|A||B|)^{-1}} \gtrsim |A||B| = \frac{n^2}{m}.$$

证明。 我们将引理A.1 的结论改写如下:

$$[0,1] \subset \bigcup_{b \in (B-B)\setminus\{0\}} \bigcup_{a \in A-A} B\left(\frac{a}{b}, \frac{m}{|b|n}\right).$$

我们可以稍微加强这一点。若固定 $b \in (B-B)\setminus\{0\}$，则所有满足以下条件的点 $a \in A-A$：对于某个 $x \in [0,\ 1]$，有 $\mathrm{dist}(a,\ b[0,\ 1]) \leqslant n^{-1}$。因此， a 落在某个长度至多为 $|b| + n^{-1}$ 的区间 I_b 上。考虑到这一点，

$$[0,1] \subset \bigcup_{b \in (B-B)\setminus\{0\}} \bigcup_{a \in (A-A)\cap I_b} B\left(\frac{a}{b}, \frac{m}{|b|n}\right).$$

我们来考虑：前述并集中满足 $|b| \leqslant cn$ 的那部分，最多能覆盖多少 $[0,\ 1]$？ 这里， $c > 0$ 是一个适当的常数，稍后将予以确定。考虑到 $\mathrm{card}((A-A)\cap I_b) \leqslant |b| + 1 \leqslant 2|b|$ 和 $\mathrm{card}(\{b \in B-B:\ |b| \leqslant cn\}) \lesssim cn/m,$，这部分“坏”集合 $I_{\mathrm{bad}} \subset [0,\ 1]$ 的测度至多为

$$|I_{\mathrm{bad}}| \leqslant \sum_{\substack{b \in (B-B)\setminus\{0\} \\ |b| \leqslant cn}} \mathrm{card}((A-A)\cap I_b) \cdot \frac{2m}{|b|n} \lesssim \sum_{\substack{b \in (B-B)\setminus\{0\} \\ |b| \leqslant cn}} 2|b| \cdot \frac{2m}{|b|n} \lesssim c.$$

因此，若 $c > 0$ 充分小，则有 $|[0,\ 1]\setminus I_{\mathrm{bad}}| \geqslant \frac{1}{2}$。此外，

$$[0,1]\setminus I_{\mathrm{bad}} \subset \bigcup_{\substack{b \in (B-B)\setminus\{0\} \\ |b| \geqslant cn}} \bigcup_{a \in (A-A)} B\left(\frac{a}{b}, \frac{m}{|b|n}\right) \subset \bigcup_{\substack{b \in (B-B)\setminus\{0\} \\ |b| \geqslant cn}} \bigcup_{a \in (A-A)} B\left(\frac{a}{b}, \frac{m}{cn^2}\right).$$

由这一包含关系可知

$$\frac{1}{2} \leqslant |[0,1]\setminus I_{\mathrm{bad}}| \lesssim |\{\frac{a}{b} : (a,b) \in (A-A)\times(B-B)\setminus\{0\}\}|_{m/n^2} \cdot \frac{m}{n^2},$$

这就得到了所述结论。 □

最后，我们记述一个不含整除性假设的、更具适用性的版本 s:

推论 A.3。 设 $n \in \mathbb{N}$, $A := \{0,\dots,n\}$，并设 $B \subset \{0,\dots,n\}$ 为一个等差数列，且 $D := \mathrm{diam}(B) > 0$。则，

$$\left|[0,1] \cap \frac{A-A}{(B-B)\setminus\{0\}}\right|_{(|B|D)^{-1}} \gtrsim |B|D.$$

证明。 记 $B = \{b_0, b_0 + m_0, b_0 + 2m_0, \dots, b_1\}$，其中 $b_1 - b_0 = D$，且 $m_0 \geqslant 1$ 是 B的间隔。只需证明

$$\left|[0,1] \cap \frac{(A\cap[b_0,b_1]) - (A\cap[b_0,b_1])}{(B-B)\setminus\{0\}}\right|_{(|B|D)^{-1}} \gtrsim |B|D$$

记 $n_0 := b_1 - b_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $A_0 := (A \cap [b_0, b_1]) - b_0 = \{0, \dots, n_0\}$，以及 $B_0 := B - b_0 \subset \{0, \dots, n_0\}$。采用这一记号，

$$\frac{(A \cap [b_0, b_1]) - (A \cap [b_0, b_1])}{(B-B)\setminus\{0\}} = \frac{A_0 - A_0}{(B_0 - B_0)\setminus\{0\}}.$$

现在，间隔“m_0”整除 B （因此 B_0）整除 n_0，所以我们可以应用命题 A.2。另注意到 $|A_0| = D$ 以及 $|B_0| = |B|$，结论为

$$\left|[0,1] \cap \frac{A-A}{(B-B)\setminus\{0\}}\right|_{(|B|D)^{-1}} \geqslant \left|[0,1] \cap \frac{A_0 - A_0}{(B_0-B_0)\setminus\{0\}}\right|_{(|B|D)^{-1}} \gtrsim |B|D,$$

正如所需。 □

参考文献

[1] Damian D ̨abrowski、Tuomas Orponen 和 Hong Wang。《重直线能覆盖多少？》J. Lond. Math. Soc. (2), 109(5):论文编号 e12910，共 33 页，2024 年。[2] Ciprian Demeter 和 William O’Regan。《准乘积集的关联估计及其应用》。arXiv 预印本，2025 年 11 月。arXiv:2511.15899。[3] Ciprian Demeter 和 Hong Wang。《管的 Szemerédi–Trotter 界及其应用》。Ars Inven. Anal., 第 1 号论文，共 46 页，2025 年。[4] Yuqiu Fu、Shengwen Gan 和 Kevin Ren。《$\mathbb{R}^2$中管的一个关联估计和一个 Furstenberg 型估计》。J. Fourier Anal. Appl., 28(4):论文编号 59，共 28 页，2022 年。[5] Longhui Li 和 Bochen Liu。《丢番图逼近的维数及其在调和分析中的若干应用》。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2409.12826，2024 年 9 月。[6] Tuomas Orponen。《 ABC Katz-Tao 集的和积定理》。arXiv 预印本，2025 年 11 月。arXiv:2511.05091。[7] Tuomas Orponen 和 Pablo Shmerkin。《平面中 Furstenberg 集的豪斯多夫维数与正交投影》。Duke Math. J., 172(18):3559–3632，2023 年。[8]Tuomas Orponen 和 Pablo Shmerkin。《投影、Furstenberg 集与 ABC和积问题》。J. Amer. Math. Soc.，已接受发表，2026 年。预印本：arXiv:2301.10199。[9] Tuomas Orponen 和 Guangzeng Yi。《极值关联构型中的大团》。Rev. Mat. Iberoam., 41(4):1431–1460，2025 年。[10] Kevin Ren 和 Hong Wang。《平面中的 Furstenberg 集估计》。arXiv 预印本，2023 年 8 月。arXiv:2308.08819。[11] Pablo Shmerkin。《Bourgain 投影定理的非线性版本》。J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 25(10):4155–4204，2023 年。[12] Pablo Shmerkin 和 Hong Wang。《Furstenberg 集的维数及 Bourgain 投影定理的推广》。Anal. PDE, 18(1):265–278，2025 年。[13] Pablo Shmerkin 和 Hong Wang。《由维数 $d/2$ 属于$\mathbb{R}^d$的集合生成的距离集》。Geom. Funct. Anal., 35(1):283–358，2025 年。[14] Hong Wang 和 Shukun Wu。《利用解耦定理和双端 Furstenberg 不等式的限制估计》。arXiv 预印本，2024 年 11 月。arXiv:2411.08871。[15] Hong Wang 和 Shukun Wu。《平面中的双端 Furstenberg 估计》。arXiv 预印本，2025 年 9 月。arXiv:2509.21869。[16] Thomas Wolff。《与 Kakeya 问题相关的近期工作》。载于《数学展望》（美国新泽西州普林斯顿，1996 年），第 129–162 页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1999 年。

于韦斯屈莱大学数学与统计系，邮政信箱 35（MAD），FI-40014 于韦斯屈莱大学，芬兰电子邮箱地址：tuomas.t.orponen@jyu.fi

数学系，不列颠哥伦比亚大学，1984 MATHEM- ATICS ROAD，温哥华，不列颠哥伦比亚省，加拿大电子邮箱地址：pshmerkin@math.ubc.ca