arXiv:2603.19437v1 [math.CT] 19 Mar 2026

客观线性代数中的符号：以外幂和行列式为例

Joachim Kock* 和 Jesper Michael Møller

哥本哈根大学

摘要

我们在一个新的框架下发展客观线性代数，其中的基数函子可以取负值。这些符号以微小同伦的形式出现，是定向之间的比值。为说明这一理论的运作方式，我们对外幂和行列式作了客观处理。

目录

1 引言 2 1.1 背景 . 2 1.2 贡献 . 3 1.3 相关工作 . 5 1.4 展望 . 6 1.5 论文结构 . 6

2 线性代数 7 2.1 不带符号的客观线性代数 . 7 2.2 奇偶性与“基域” . 9 2.3 群作用与同伦和 . 10 2.4 定向 . 11 2.5 线性映射 . 11 2.6 幺半结构 . 14 2.7 跨度的负元 . 15 2.8 标量 . 15 2.9 态（向量） . 16 2.10 群作用于 $\mathbb{P}$-跨度、态与标量 . 18 2.11 标量乘法、内积与投影 . 20 2.12 “坐标”中的跨度复合 . 22 **3 基数** 24 3.1 标量的基数 . 24 3.2 奇自同构 . 25 3.3 基数作为函子 . 25 3.4 基数函子的泛性质 . 27

4 外幂与行列式 29

4.1 $\mathbb{Z}$ 中的外幂 . 29 4.2 $lin^{\pm}$ 中的外幂 . 32 4.3 行列式 . 34 4.4 行列式的非实质部分 . 36

*主要所属机构：巴塞罗那自治大学和数学研究中心。本研究于2021–2023年获得欧盟地平线2020研究与创新计划玛丽·斯克沃罗夫斯卡-居里资助，资助协议编号为101028099。本研究于2023–2025年获得丹麦独立研究基金资助，资助编号为10.46540/3103-00099B。其他资助来源：西班牙资助项目PID2024-158573NB-I00（AEI/FEDER, UE）和加泰罗尼亚资助项目2021-SGR-1015；此外还有塞韦罗·奥乔亚与玛丽亚·德·梅斯图卓越研发中心与单位计划资助，资助编号为CEX2020-001084-M，以及丹麦国家研究基金会通过哥本哈根几何与拓扑中心（DNRF151）提供的资助。

1 引言

1.1 背景

动机：从数到结构。 自然数的基本算术运算——加法、乘法和幂运算——是有限集上的范畴运算的影子，分别对应不交并、笛卡尔积和映射集。尽可能在客观层面（直接处理对象本身，而不是它们的数量）开展工作有诸多好处。首先，可以利用函子性和泛性质揭示更多细节。与数不同，集合具有可以逐个访问的元素，集合可以承载更多结构，而且还具有对称性，从而引出同伦论。此外，在客观层面上，我们实际上可以处理无限集，而不只是有限集，从而进入数的范畴无法触及的领域。最近，第一作者利用从自然数到有限集的过渡，解决了理论计算机科学中的一个长期未解问题，即统一佩特里网的代数操作语义与几何操作语义 [23]。

客观视角的一个主要局限是缺少负数，而负数在代数中至关重要，不仅用于加法逆元，也用于大多数其他类型的求逆，例如矩阵求逆或幂级数求逆。因此，如何为负数提供一种组合模型，赋予难以捉摸的「负集合」概念以意义——即元素个数为负数的集合——是一项根本性挑战。过去 50 年来，人们提出了几种方法，详情将在下文「相关工作」一节中说明，但这些尝试缺少范畴论特征，因此未能取得长足进展。任何包含负集合的范畴都应具备一个非常理想的特征：它应当足够类拓扑斯，从而能够在其上发展客观线性代数。

客观线性代数 [2], [7]基本上就是以有限集而非数作为标量的线性代数。向量空间由切片范畴取代；由矩阵给出的线性映射由保余极限函子取代，而后者又由跨度给出，因此矩阵乘法就变成了跨度的拉回复合。在这一框架下，可以发展代数组合学某些基础部分的客观理论，例如关联代数和双代数 [8, 9, 10, 11]以及生成函数 [18, 19], [12], [15]。重要的是，该理论在标量取自群胚或∞-群胚时也同样适用。这种扩展使我们能够考虑对称性，并对非负有理系数建模。此扩展的重要要求是基底范畴应当类拓扑斯：它至少应具有有限极限与余极限，并且是局部笛卡尔闭且广延的（这意味着它是分配的）。存在一个（同伦）基数函子，将所有客观概念映射到相应的数值概念。总而言之，这是一套系统理论，旨在将自然数（分别地，非负有理数）上的代数提升到客观层面，也为我们希望如何将整数（分别地，有理数）上的代数提升到客观层面提供了蓝图。

在本文中，我们引入一种满足类托普斯的期望的“负集合”概念，并发展带符号的客观线性代数。我们着手处理外幂与行列式（并在一定程度上涉及矩阵求逆）。为此，我们运用一些初等同伦论：我们发现有必要使用有限群胚，而不只是有限集；最终，符号则以微小同伦的形式出现。

在概述这一方法之前，有必要说明为何必须涉及同伦论，以及为何难以实现拓扑斯型范畴。

群完备化与球谱。 正如整数是通过形式地对自然数的加法运算求逆而构造出来的，我们也可以提出这样一个问题：对有限集上的不交并运算进行形式求逆。答案——群完备化——是同伦论中的一个核心概念。这是一个经典定理（Quillen、Barratt–Priddy [3]）：有限集的群胚 $\mathbb{B}$ 的群完备化就是球谱 $\mathbb{S}$（它是一个 ∞-群胚，而非普通群胚）。

重要的是， $\mathbb{S}$ 具有乘法（也就是说，它是一个环谱），且这一乘法扩展了$\mathbb{B}$ 上的乘法运算（正如 $\mathbb{Z}$ 的乘法扩展了 $\mathbb{N}$上的乘法）。事实上， $\mathbb{S}$是始环谱，正如 $\mathbb{Z}$是普通代数中的始环。这便引出了这样一句口号：球谱才是真正的整数。无论带符号有限集如何定义，它都必须与球谱有意义地关联起来。

尽管球谱具有重要的泛性质，但它并不完全是应对寻找负集合这一组合学概念之挑战的解决方案，因为在从 $\mathbb{B}$ 到 $\mathbb{S}$ 的过程中，基本的组合特征丢失了。例如，映射 $\mathbb{B} \to \mathbb{S}$ 将置换压缩为其符号：一个有限集 n 被送至对象 $n \in \pi_0(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}$，而一个置换 $\tau : n \xrightarrow{\sim} n$ 被送至其符号，$\varepsilon(\tau) \in \pi_1(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}_2$。此外，与群胚 $\mathbb{B}$ 一样，球谱没有类似于满射或单射的东西（例如，它们在组合学中分别对分拆或二项式系数至关重要），也没有可用于线性代数的有意义的切片。这些特征属于范畴 $\mathbb{F}$

有限集及所有态射。对于不只是群胚的幺半群范畴，也存在群完备化的概念，但可以证明，对幺半群运算取逆会自动使态射也可逆 [31]：在$\boldsymbol{Cat}$中的一个群对象自动是一个群胚。这些事实表明，对于组合学而言，群完备化是一种过于激烈的操作。

总的来说，$\mathbb{F}$具有类似组合学（类拓扑斯）的特征，而$\mathbb{S}$具有代数型特征，两者之间的张力正是整个研究工作的主要难点。这种张力未必能以统一的方式化解，不同应用或许需要不同的负集合模型。（正如 Kapranov [21], 所论证的，符号的出现有多种原因，其中一些与 $\mathbb{Z}=\pi_0\mathbb{S}$、 $\mathbb{Z}_2=\pi_1$（$\mathbb{S}$）和 $\mathbb{Z}_2=\pi_2$（$\mathbb{S}$）中的符号有关。）但即使无法找到统一的解决方案，探究组合学能够在多大程度上延伸至代数，仍是一项重要工作。

1.2 贡献

本文的创新之处。本文旨在构建一种客观线性代数，其框架中存在一个取负值的基数函子。我们通过以下方式化解了上述张力：（1）在一个拓扑斯型范畴中工作，其中切片、跨度、拉回均有意义，因此可以从容地发展客观线性代数；（2）不将负基数赋予其对象，而只赋予其标量——这一概念相对于一种并非笛卡尔积的幺半结构才有意义。在普通线性代数中，向量可以写成基向量的线性组合，例如 $\sum_{b\in B}\lambda_b\mathbf{u}_b$，其中 B 是为基向量 $\mathbf{u}_b$ 编索引的集合，而 λ_b 是标量。因此，向量本质上是一个由 B 索引的标量族。在客观层面上，“向量”是一个映射 $E\to B$，可将其解释为有限集的（有限）族（$E_b\mid b\in B$）（而线性组合的解释体现为映射 $E\to B$ 同构于和 $\sum_{b\in B}E_b\cdot(1\overset{\ulcorner b\urcorner}{\to}B)$ 这一事实）。由此可见，B 不需要符号：我们目前并不关心具有负数个元素的基。我们需要符号的地方在于标量，它们是某个映射的纤维。

在 $\mathbb{F}$ 上的线性代数中，标量与对象之间没有区别。在我们所发展的框架中，关键在于这种区别由此产生：标量是「基域」的一个线性自同态，而且它不只是一个对象——它还带有一些额外的同伦数据，我们将其解释为一个符号。

尽管整个设定中都隐含着符号，但它们真正显现出来只是在取基数时。这正是其中一项主要发现：存在一个基数函子，乍看之下有些神秘，但结果表明它具有泛性质。由此可见，尽管「正」与「负」的量可能相等，人们或许会认为它们应该相互抵消，但我们不会 通过这种抵消将其约去，假装它就是空集。相反，这些「无关紧要的杂项」会在所有计算中保留下来，直到取基数时才消失。保留这些杂项并让它们自行处理，正是实现拓扑斯型范畴的关键；若过早将其约去，则会破坏重要的范畴性质。

以下是我们对这些想法的实现。我们需要使用有限群胚，而不是有限集。令 $\mathcal{F}$ 表示有限群胚范畴。[1]（有限 ∞-群胚（即 π-有限空间）也可以，但为了尽可能贴近有限集，我们仍采用群胚。）基底范畴是弱切片 $\mathcal{Z}:=\mathcal{F}_{/\mathbb{P}}$，其中 $\mathbb{P}=BO(1)$ 是有两个元素的循环群的分类空间，$O(1)=C_2=\{\pm1\}$。它是无限实射影空间的同伦型。因此，$\mathcal{Z}$ 中的对象是$f:S\to\mathbb{P}$，即位于 $\mathbb{P}$之上的有限群胚 S；这意味着 S 中的每个态射都有一个奇偶性，即偶或奇。我们坚持使用“偶”和“奇”这两个术语，以强调这些量还不是我们所追求的符号。奇偶性是我们据以定义定向的结构；最终，符号将体现为定向之间的比值。

客观线性代数在 $\mathcal{Z}$ 上的运作方式与在 $\mathcal{F}$上非常相似。由此得到范畴$\boldsymbol{lin}^{\pm}$，其对象是切片 $\mathcal{Z}_{/f}$（对所有带奇偶结构的有限群胚 f： $S\to\mathbb{P}$），其态射由 $\mathbb{P}$上的跨度给出。

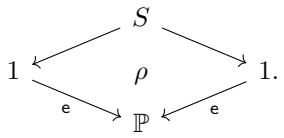
通常的基底范畴 $\mathcal{F}$ 通过赋予群胚中的所有态射偶奇偶性嵌入 $\mathcal{Z}$。范畴$\mathcal{Z}$ 具有幺半结构 $*$，它扩展了 $\mathcal{F}$中的笛卡尔积，但关键在于，它本身并非笛卡尔积结构。 $*$ 的单位对象是平凡奇偶结构 $\mathsf{e}:1\to\mathbb{P}$（它不是 $\mathcal{Z}$中的终对象）。幺半结构 $*$ 在$\boldsymbol{lin}^{\pm}$上诱导出相关的幺半结构 $\circledast$，从而得到一个（严格）幺半函子

$$(\boldsymbol{lin},\otimes,\mathcal{F})\to(\boldsymbol{lin}^{\pm},\circledast,\mathcal{Z}_{/\mathsf{e}}),$$

[1]当然，它适当地是一个 2-范畴，我们也需要 2-胞腔；但由于它只有可逆的 2-胞腔，我们将继续只写 t“范畴”。 ue

这是扩展普通客观线性代数所必需的。

下面介绍第一个重要观点。我们将 $\mathcal{Z}_{/\mathsf{e}}$ 的线性自函子定义为一个标量，也就是说，它是一个从 1 到 1、定义在 $\mathbb{P}$ 上的跨度。我们所说的「定义在 $\mathbb{P}$ 上」，当然是指同伦意义上的，这意味着存在一个 2-胞



这个 2-胞相当于将标量 S 不交并分解为两部分

$$S = S_{\oplus} \sqcup S_{\ominus},$$

因此，标量最终具有正部分和负部分。我们将此类标量 S 的基数定义为

$$|S| := |S_{\oplus}| - |S_{\ominus}|.$$

更一般的线性函子（一个定义在 $\mathbb{P}$ 上、以 (I, J) 为指标的矩阵）现在将具有作为标量的矩阵元素，因此其基数将是一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的矩阵，其中包括符号。

这些赋值应当合并成一个函子 $||: \boldsymbol{lin}^{\pm} \to \boldsymbol{vect}_{\mathbb{Q}}$。在群胚的情形下，这一见解归功于 Baez、Hoffnung 和 Walker [2]。在普通客观线性代数中， [7], 相应的赋值是

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{lin} & \longrightarrow & \boldsymbol{vect}_{\mathbb{Q}} \\ \mathcal{F}_{/I} & \longmapsto & \mathbb{Q}_{\pi_0 I} \end{array}$$

将 I 上的切片范畴映射到由 I 的连通分支张成的向量空间。在带符号情形中，也可以作出同样的赋值，但这并不是正确的赋值。为了说明正确的赋值，我们利用定向这一概念。具有奇偶结构 $S \to \mathbb{P}$ 的群胚的定向是经由 $1 \to \mathbb{P}$ （ $\mathbb{P}$ 的万能覆盖）进行的一个分解。当且仅当一个连通分支中的点都没有奇自同构时，该分支才是可定向的。群胚 I 的可定向轨迹是由可定向点 $I^{\circ} \subset I$ 构成的满子群胚。扮演标量角色的群胚显然是可定向的（事实上，标量的结构相当于两个定向之比）。我们证明，如果一个点 $i \in I$ 不可定向，那么任何矩阵 $I \leftarrow A \rightarrow J$ 的任意一个 i-指标所对应的标量基数都为零，这是因为可以利用 i 的任意一个奇自同构构造出抵消。因此，这样一个不可定向分支不应计作基元素。最终，将标量的基数赋值推广后，正确的基数赋值为

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{lin}^{\pm} & \longrightarrow & \boldsymbol{vect}_{\mathbb{Q}} \\ \mathcal{Z}_{/I} & \longmapsto & \mathbb{Q}_{\pi_0(I^{\circ})}. \end{array}$$

要证明这一点具有函子性，需要做一定的工作。难点在于，要证明某些群胚等价（这是无符号客观线性代数中的已知事实）实际上也是标量等价，从而能够沿着这些等价正确地传递符号。朝这个方向的一个关键结果是推论 2.12.4 ，它陈述了一个标量等价

$${}_i(X \times_J Y)_k \simeq \int_{j \in J} ({}_i X_j \times {}_j Y_k).$$

这一等价是带符号客观线性代数中的对应版本，类似于线性映射的复合由矩阵乘法给出这一基本事实。

起初，对可定向轨迹的限制或许会让人感到意外。但事实上，这个基数函子可以由一个泛性质刻画：它是函子 $\mathbb{P} \to \boldsymbol{vect}_{\mathbb{Q}}$ 的唯一 1-半加性扩张，该函子将点映到 $\mathbb{Q}$ ，并将 ± 1 映到 $\pm\mathrm{Id}$；这里用到了 Harpaz 的一个定理 [16]。（Maxime Ramzi 曾向我们建议采用这一刻画来描述我们的基数函子。）

对这个基数函子的一个更务实的解释（也是我们发现它的原因）是：它使外幂的概念得以成立。我们将有限集或群胚 S 的 k 次外幂定义为带有奇偶结构的群胚

$$\bigwedge^k S := (\tfrac{S^k}{k!} \to \mathbb{P}).$$

这里，群胚 $\binom{S^k}{k}!$ 是弱商映射 $\mathrm{Map}(k,\ S)/\Sigma_k$，重要的是，它的奇偶结构由符号表示 $\Sigma_k \to O(1)$ 诱导。$\binom{S^k}{k}!$ 的可定向点恰好是单射 $k \to S$。由此可知，若 S 有 n 个可定向分支，那么 $\bigwedge^k S$ 就有 $\binom{n}{k}$ 个可定向分支，正如预期。关于 $\bigwedge^k(\mathcal{Z}_{/S}) := \mathcal{Z}_{/\bigwedge^k S}$ 的预期性质现可由 $\boldsymbol{lin}^{\pm}$ 中的标准性质推出。特别地，我们证明 $\bigwedge^k(\mathcal{Z}_{/S})$ 作为交错线性函子的接收对象具有泛性质。

理清外幂的概念后，我们便可以定义行列式。给定一个形式为自跨 $I \leftarrow A \to I$ 的矩阵（它可以属于$\boldsymbol{lin}^{\pm}$，也可以只属于$\boldsymbol{lin}$），且 $\#(\pi_0 I^\circ) = n$，A 的行列式记作 $\mathrm{Det}(A)$，定义为跨度 $\bigwedge^n I \leftarrow \bigwedge^n A \to \bigwedge^n I$。这个跨度可能很大，也包含许多无关的冗余内容，但它的可定向部分是一个1×1矩阵，即技术意义上的标量，因此其基数是一个有理数。这样便得到了所需的结果：

$$|\mathrm{Det}(A)| = \det|A|.$$

我们从客观层面的一个更精巧的结果推导出这一结论：我们建立了一个带奇偶结构的群胚之间的自然等价（事实上是标量等价）：

$$\underline{x}(\textstyle\bigwedge^n A)_{\underline{x}} \simeq \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i\in n} x_i A_{x_{\sigma i}},$$

这是莱布尼茨展开的客观版本。对这个等价取基数，便得到前面的公式。

我们还可以利用次最高外幂 $\bigwedge^{n-1} A$ 定义一个跨度的余子式（或伴随矩阵），并建立群胚的一个自然等价

$$A \circ \mathrm{Adj}(A) \simeq \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Id}\,.$$

左边是跨度的拉回复合（即矩阵乘法）；右边是标量乘以单位矩阵的一个适当概念。这是我们目前所能达到的最接近客观矩阵求逆的结果。由于余子式跨度的完整理论篇幅较长，我们决定不将其纳入本文。

1.3 相关工作

带符号有限集的基本思想，是考虑有限集对（A，B），并将其视为“A 减去 B”，同时规定正部与负部如何相互作用。要使这一构想成立是一项重大挑战。例如，若要保持分配律，这样的范畴将会完全坍缩 [31]。可以为这类带符号集合发展出一种特定的演算，其中最著名的是 Garsia 和 Milne 的对合原理 [14], ，他们用它证明了数论中一些深刻的组合恒等式。Zeilberger [33]及其他人利用这一演算，对一些基本的矩阵恒等式给出了双射证明。Conway 和 Doyle [4], [5], 及其他人从一维配边范畴的若干版本角度诠释了对合原理。一个重要的诠释是 Joyal、Street 和 Verity 的（较早）结果 [20]：该范畴是在带迹幺半群群胚 $\mathbb{B}$ 上的自由紧闭范畴。其上的迹 $\mathbb{B}$ 由剩余双射给出；值得注意的是，有限集之间的任何双射 $A + X \simeq A + Y$ 都会诱导出一个典范双射 $X \simeq Y$（见 [19]）。

另一项重要贡献是 Joyal 的虚物种理论 [19], ，它对幂级数求逆作出了客观的阐述。该理论具有如今称为 Joyal 符号规则的内容，其中 $\exp(-X)$ 被解释为满射的交错和。Loeb [26] 从具有 $\mathbb{Z}$ 值重数的多重集角度研究了负集合，并将其称为混合集合；他还用这种方法为带负项的二项式系数给出了组合解释。引入符号的方式能使公式得出正确结果，但可以说，这些符号本身并没有得到真正的解释。这种方法融合了组合学与代数，其中的符号直接取自代数。尽管这些理论曾发挥重要作用，而且至今仍在组合学中有所应用，但由于缺乏范畴性质，它们难以得到深入发展。虚物种和混合集合都无法构成一个可用的范畴。尤其是，这些方法并不适合用于发展客观代数组合学。它们所代表的重要观点和洞见，最终应当纳入一个更加统一的负集合理论之中。

负数也可以通过欧拉示性数产生，而不必坚持使用基数；人们还可以尝试用具有欧拉示性数的对象来代替负集合。

从组合学的角度看，一个自然的此类背景是有限 CW 复形或有限范畴 [25]。还值得关注 Schanuel 负集 [31]，它是根据欧几里得空间中多面体集合的欧拉示性数定义的。这里，开区间 (0，1) 被赋予了（Schanuel）欧拉示性数 -1，这是通过从闭区间 $[0,1]$（欧拉示性数为 1）中去掉两个点得到的。除了同伦不变性之外，这一概念满足欧拉示性数的所有预期公理。它确实是一个引人入胜的概念，值得进一步研究，但它并不完全符合客观线性代数的需求。

Kapranov 的工作。 Kapranov 对符号与球谱之间的关系进行了深入分析。在他那篇杰出的论文 [21]，中，他首先解释（沿袭 Joyal 的一个洞见）数学中的超几何以及 Koszul 符号规则如何源自 $\mathbb{Z}_2$ 以 $\pi_1(\mathbb{S})$ 的形式嵌入球谱的方式，随后又阐释物理学中的超几何概念（更多涉及旋量与平方根）如何与 $\mathbb{Z}_2 = \pi_2(\mathbb{S})$ 相关。因而，群 $\mathbb{Z}_2$ 中包含符号的这两种情形，与 $\mathbb{S}$的关系各不相同。接着，他分析了这两个同伦层级之间的相互作用，最后提出，对符号进行更深入的理解应当涉及完整的球谱。Kapranov 的工作是重要的灵感来源，但他的论文并未探讨我们在本文中所要解决的问题。Kapranov 的工作分析了符号的行为，并将向量空间（以及负标量）的概念视为既定前提；而本文则从更基础的层面着手，旨在通过组合方法实际构造出这些符号。[2]

1.4 展望

本文希望聚焦于符号这一概念，并围绕这一重点发展理论。不过，第 2–3 节中的大多数构造都可以推广到将 $\mathbb{P}$替换为阿贝尔群 A的分类空间 BA的情形。我们尚不完全清楚这种一般性的意义，但循环群以及极限群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 这一特例，似乎很有希望有助于获得复数的某种客观版本。此时我们讨论的将不再是奇偶性，而是相位。我们将在后续论文中进一步探索这一方向。

进一步研究的另一个方向，是将 $\mathbb{P}$ 替换为球谱零连通分支的完整同伦型，而不仅仅是它的 1-截断。对于迄今发展的理论而言，这并无太大影响，因为无论如何，基数函子都会压平高阶同伦；但鉴于 Kapranov 的工作，这无疑是一个值得进一步投入的研究方向。

我们希望强调，借助外幂和行列式进行建模所取得的成效，不应被视为对本文所引入的带符号集合模型可行性的普遍支持。毕竟，这个模型本质上就是为实现这一目标而设计的。尚不清楚这一概念在为代数组合学中的其他符号现象建模时表现如何。特别是，符号在莫比乌斯反演理论中起着关键作用，而在客观的论述 [8], [9], [10]，中，符号的处理方式相当临时：把“负号移到方程另一边”。目前，我们还无法在这一语境下从新模型中获益。

当务之急是对抵消现象进行一般性研究。人们认识到，代数零的概念并不等同于虚无；净基数为零的物质可以有大块之多，而且确实存在体现这些抵消的结构——这一思想与现代同伦论十分契合。现代同伦论日益被视为研究事物得以相等的不同方式的科学。学会以可控的方式处理这类抵消，尤其是涉及无穷的抵消，可能会对发散级数和微扰重整化等课题产生重大影响。

1.5 论文的组织结构

引言之后，本文分为三个章节。第2节以纯粹客观的方式，在 $\mathbb{Z}$ 上发展线性代数，不提基数。在这一层面上，能看到的符号并不多，这是一个特点——它们多少是隐含的，会自行处理好一切——但要证明某些群胚等价也是标量的等价，仍需做相当多的工作。在非常简短的第3节中，我们引入基数函子。由于大部分工作已在客观层面完成，这里要做的事情不多，但这仍是一个重要方面，特别是考虑到基数函子出人意料的性质。最后，在第4节中，我们推导外幂和行列式是什么

[2]同样，Ganter 和 Kapranov [13] 研究了“范畴的外幂”，但他们从一开始就假定其范畴是线性范畴（即在向量空间上 enriched），这意味着符号和负量从一开始就已经具备。

在我们的框架中。这里的大部分工作是进行验证，以说明这些相当出人意料的定义是合理的。我们沿途标示了四个转折点。

致谢。 我们谨向 Gon̦calo Marques、Andr´e Joyal、Maxime Ramzi、Rune Haugseng、Louis Martini、Imma G´alvez、Andy Tonks、Jan Steinebrunner、Anders Kock、Thomas Jan Mikhail、John Baez 和 Sebastian Wolf 致谢，感谢他们提出意见并给予帮助。

2 线性代数

2.1 不带符号的客观线性代数

客观线性代数的基础理论如今已是标准内容。 [7]给出了系统的论述。下面我们将快速回顾其中的要点，以确定记号并为后文铺垫。

2.1.1. 系数取有限集的线性代数。 令 $\mathbb{F}$ 表示有限集（及其所有映射）构成的范畴。在 $\mathbb{F}$ 上进行客观线性代数时，我们将切片范畴 $\mathbb{F}_{/S}$ 视作某种向量空间。之所以 $\mathbb{F}_{/S}$ 表现得像向量空间，是因为它是离散范畴 S的有限和完备化；这类似于由 S 张成的向量空间 $\mathbb{Q}_S$ 是 S的“线性组合完备化”。因此， $\mathbb{F}_{/S}$ 中的对象 $f : X \to S$ 扮演向量的角色。它可以写成其各个纤维之和。显然$X \simeq \sum_{s\in S} X_s$，更准确地说，我们有

$$f : X \to S \qquad \simeq \qquad \sum_{s\in S} X_s \cdot \ulcorner s \urcorner,$$

其中 $\ulcorner s \urcorner : 1 \to S$ 是选取元素 s的映射。因此，这些映射 $\ulcorner s \urcorner$ 构成一个基。

与通常的线性代数（在 $\mathbb{Q}$上）的联系通过基数建立：切片范畴 $\mathbb{F}_{/S}$ 的基数是由 S张成的向量空间 $\mathbb{Q}_S$ ，而切片中的对象 $X \to S$ 的基数，则是 $\mathbb{Q}_S$ 中的向量，由以下线性组合给出：

$$\sum_{s\in S} |X_s| \cdot \mathbf{u}_s. \tag{1}$$

（这里，$\mathbf{u}_s = |\ulcorner s \urcorner|$ 是与元素 $s \in S$对应的基向量。）

保持有限和的切片之间的函子称为线性的。由 $\mathbb{F}_{/S}$作为和完备化的泛性质，不难证明，每个线性函子 $\mathbb{F}_{/S} \to \mathbb{F}_{/T}$ 都由一个跨度给出（本质上唯一）：

$$S \xleftarrow{p} M \xrightarrow{q} T.$$

对应的函子是

$$\mathbb{F}_{/S} \xrightarrow{q_! \circ p^*} \mathbb{F}_{/T},$$

先沿 p拉回，再沿 q复合。其结果是线性代数中基本事实的客观版本：对于固定的基，每个线性映射都唯一地由一个矩阵给出。

跨度的复合由拉回给出（而 Beck–Chevalley 表明，这对应于函子的复合）。跨度可以解释为由有限集构成的矩阵，即双侧纤维 ${}_sM_t$；而线性映射的复合是矩阵乘法这一经典结论，在客体层面有如下类比，同样涉及按纤维分解的问题：

$${}_i(X \times_J Y)_k \simeq \sum_{j\in J} ({}_iX_j \times {}_jY_k)$$

取基数即可得到经典概念，这可直接由纤维公式得出：线性函子的基数是一个线性映射，其矩阵由该跨度的双侧纤维的基数组成。

两个切片的张量积由下式给出

$$\mathbb{F}_{/S} \otimes \mathbb{F}_{/T} = \mathbb{F}_{/(S\times T)}$$

这与 $\mathbb{Q}_S \otimes \mathbb{Q}_T = \mathbb{Q}_{S\times T}$ 紧密对应。总而言之，存在一个对称幺半范畴（$\boldsymbol{lin}$ $\otimes$， $\mathbb{F}$），其对象是 $\mathbb{F}$ 的切片，态射是线性函子（由跨度给出），而基数赋值汇集为一个函子

$$|\cdot| : \boldsymbol{lin} \to \boldsymbol{vect}$$

它是对称幺半的。

2.1.2. 有限群胚上的线性代数。 在有限群胚的 2-范畴 $\mathcal{F}$ 上，只要所有概念都取其同伦版本，情况就非常相似。因此，我们考虑同伦切片，并利用同伦切片 $\mathcal{F}_{/S}$ 是群胚 S的有限同伦和完备化这一事实。同伦和指对群胚取（同伦）余极限，正如通常的和指对集合取余极限一样。函子 $F\colon S \to \mathcal{F}$ 的同伦余极限的一种模型是格罗滕迪克构造 $\int_S F$，它等价于 $\sum_{s\in\pi_0 S} F(s)/s!$，其中的商是自然作用的同伦商

$$s! := \mathrm{Aut}(s)$$

关于 $F(s)$的内容。 [3]

从一个一般映射 $X\to S$出发，我们得到一个函子 $F\colon S \to \mathcal{F}$，它将 s 发送到同伦纤维 X_s，并得到 $X\to S$ 作为其纤维的同伦和的典范分解

$$X\to S \qquad \simeq \qquad \int_{s\in S} X_s \cdot \ulcorner s \urcorner \;\simeq\; \sum_{s\in\pi_0 S} \frac{X_s \cdot \ulcorner s \urcorner}{s!} \;\simeq\; \sum_{s\in\pi_0 S} X_s/s! \cdot \ulcorner s \urcorner \tag{2}$$

参考群 $s!$ 在映射 $X_s \cdot \ulcorner s \urcorner$ 或同伦纤维 X_s上的自然作用。我们再次看到，映射 $\ulcorner s \urcorner\colon\ 1 \to S$ 充当一个基。

现在，通过同伦基数，便可将其与 $\mathbb{Q}$ 上的通常线性代数联系起来。回忆一下（例如参见 [1]），群胚的（同伦）基数定义为

$$|S| := \sum_{s\in\pi_0 S} \frac{1}{|s!|}.$$

$f\colon X\to S$ 的基数现在为

$$|f| = \sum_{s\in\pi_0 S} \frac{|X_s|}{|s!|}\mathbf{u}_s \quad \in \mathbb{Q}_{\pi_0(S)}.$$

切片之间的函子 $\mathcal{F}_{/S} \to \mathcal{F}_{/T}$ 若保持有限同伦和，则称为 线性的；同样可以证明，这些函子恰好由跨度 $S \xleftarrow{p} M \xrightarrow{q} T$通过公式 $q_! \circ p^*$给出。现在，矩阵乘法的公式涉及同伦和，而不是离散和：

$${}_i(X \times_J Y)_k \simeq \int_{j\in J} ({}_iX_j \times {}_jY_k).$$

同样，基数赋值可扩展到线性函子，但这里有一个非常重要的转折：表示该线性函子基数的矩阵的条目不只是 $|{}_sM_t|$，而是

$$|{}_sM_t|/|t!|.$$

这些对称因子 $/t!$ 的必要性是同伦线性代数中的一个基本事实（见 [7]）。这是因为，矩阵的条目可被刻画为线性组合的系数；该线性组合以余域上的基来表示定义域中一个基向量的像。但在同伦情形中，这必须是一个同伦和，其中涉及这些分母；也正因如此，它们出现在余域中而非定义域中。

张量积 $\mathcal{F}_{/S} \otimes \mathcal{F}_{/T} = \mathcal{F}_{/S\times T}$ 以及对称幺半基数函子

$$|\cdot| : (\boldsymbol{lin}, \otimes, \mathcal{F}) \to (\boldsymbol{vect}, \otimes, \mathbb{Q})$$

其运作方式与离散情形相同。请注意，我们更新了符号 $\boldsymbol{lin}$，现在用它来表示群胚切片。

[3]阶乘记号 $s!:=\mathrm{Aut}(s)$ 既自然又实用。对称因子 $/s!$ 出现在与它们在组合学中相同的位置，并且在每种情况下都可被解释为一个群作用的同伦商，通常还会与和 $\sum_{s\in\pi_0 S}$ 一同出现，从而共同形成余极限数据而非系数数据。这类似于对指数生成函数系数的组合学解释：在 $\sum_i a_i \frac{z^i}{i}!$ 中，系数是 a_i，而不是 $a_i/i!$；$\sum_i$ 和 $/i!$ 一同作为有限集与双射所构成的群胚 $\mathbb{B}$ 上的同伦和出现。这正是物种理论带来的启示 [18], [19]（尽管只有在转向群胚值物种 [22], [15]之后，才能作出同伦和的解释）。

2.1.3. 例。为了清楚说明为什么矩阵元素中需要对称因子 $/t!$，考虑恒等跨度 $T \xleftarrow{=} T \xrightarrow{=} T$。那么矩阵的对角元素将来自双侧纤维 ${}_tT_t$，而这些纤维是 $\Omega BAut(t)$（t处的 T 的环路空间）。这个双侧纤维的基数是 $|t!|$，也就是 t的自同构数。仅凭这一点还不足以得到单位矩阵。不过，群 $t!$作用在这个环路空间上，而同伦商是可缩的，因为该作用既自由又传递，因此得到所需的对角元素 1。因此，加入对称因子 $/t!$后，我们确实得到了单位矩阵。

在本文余下部分，我们旨在探讨一个类似的故事，但所处的语境允许基数带有符号。按照我们的设定，集合情形和群胚情形中的主要步骤，出于一般性原因，都能平滑地推广到一般情形；不过，要真正看清这些符号，并确认它们在我们所定义的基数函子下正确地产生出来，仍需要做一些工作。

2.2 奇偶性与“基域”

将 $O(1)$ 所对应的乘法群 $\mathbb{Z}^\times = \{+1, -1\}$ 记作。相应的单对象群胚记作

$$\mathbb{P} := BO(1).$$

（字母 P 取自“奇偶性”（parities），但这个符号也可能会让我们想到，$\mathbb{P}$ 具有无限实射影空间的同伦型。）

群胚 S 上的一个奇偶结构，按定义是群胚的一个态射

$$f : S \to \mathbb{P}.$$

因此，它以一种与态射的复合相容的方式，为 S 中的每个态射 ± 1 赋予一个值。这些不是 将对应于正数/负数的符号，因此我们更愿意将赋予态射的这些值称为奇偶性，从而称一个态射为偶 态射或奇 态射。

令 $\mathcal{F}$ 表示由有限群胚、函子和可逆自然变换构成的 2-范畴。带有奇偶结构的有限群胚构成一个 2-范畴

$$\mathcal{Z} := \mathcal{F}_{/\mathbb{P}},$$

弱切片。因此，从 $f : S \to \mathbb{P}$ 到 $g : T \to \mathbb{P}$ 的态射是一个二元组 (u, θ)，其中 $u : S \to T$ 是群胚的一个态射（即函子），而 θ 是一个同伦（即自然变换）

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{u} & T \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} \theta & \\ & \mathbb{P}. & \end{array}$$

从 (u, θ) 到 (u', θ') 的 2-胞是一个 2-胞

$$S \underset{u'}{\overset{u}{\Downarrow \simeq}} T$$

介于 θ 和 θ' 之间。

2.2.1. 例。终对象群胚 1 仅有一种奇偶结构，我们将其记为

$$\mathsf{e} : 1 \to \mathbb{P}.$$

不过请注意，这个结构有两种与自身同构的方式：存在两个可能的自然变换 ε

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{=} & 1 \\ & {\scriptstyle \mathsf{e}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathsf{e}} \varepsilon & \\ & \mathbb{P}. & \end{array}$$

取决于 ε 的唯一分量是偶还是奇。特别地，对象 e 在 $\mathcal{Z}$ 中不是终对象。（$\mathcal{Z}$ 中的终对象当然是 $\mathrm{id} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$，但它在下文中不会起到任何重要作用。）

2.2.2. 备注。 请注意，奇偶结构态射 (u,θ) 必须将偶自同构映射为偶自同构。对于不同对象之间的态射，偶箭头可能被映射为奇箭头，正如奇态射（包括奇自同构）也可能被映射为偶箭头一样。

2.2.3. 基底"托普斯"。 我们希望在 $\mathcal{Z} := \mathcal{F}_{/\mathbb{P}}$ 上发展客观线性代数。这是可行的，因为 $\mathcal{Z}$ 是 ∞-范畴意义下的前托普斯，因此可以定义有意义的切片、纤维等。事实上，它是 2-截断的；我们将把它视为一个只有可逆 2-胞的 2-范畴。

进行线性代数意味着基本对象是（弱）切片，例如

$$(\mathcal{F}_{/\mathbb{P}})_{/f} =: \mathcal{Z}_{/f} =: \mathcal{Z}_{/S}$$

对于某个 $f\colon S \to \mathbb{P}$。这些切片扮演向量空间的角色。建立理论时，明确提及 f 可能会很方便，但长远来看，省略对 f 的提及并用 $\mathcal{Z}_{/S}$ 代替 $\mathcal{Z}_{/f}$ 似乎更有用，因为我们假定所有群胚都配备了奇偶结构。于是，对于 S 中或任意奇偶群胚中的态射 a 的奇偶性，我们一概记作 $\mathrm{par}(a)$。

2.3 群作用与同伦和

由于同伦和（在群胚 I上的余极限）会分解为群作用的弱商的离散和：

$$\int_{i\in I} X_i \simeq \sum_{i\in \pi_0 I} X_i/\operatorname{Aut}(i),$$

又由于这种分解有助于与基数相容，因此群作用将在全文中发挥重要作用。我们简要介绍 $\mathcal{Z}$ 中的定义以及一些关键性质。

我们遵循如下约定：右作用是严格函子 $BG \to \mathcal{C}$ （取值于某个范畴），记作$x \mapsto x.g$；左作用则是（严格）函子 $BG^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$，记作 $x \mapsto g^{-1}.x$。

2.3.1. 奇偶结构上的作用。奇偶结构 $f\colon X \to \mathbb{P}$ 上的 G-作用是一个（严格）函子$BG \to \mathcal{Z}$，其取值为 f。因此，作用的数据由以下内容给出：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\cdot g} & X \\ & {\scriptstyle\theta_g}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\theta_g} & \\ & \mathbb{P} & \end{array}$$

对每个 g，都满足相容性条件

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\cdot g} & X & \xrightarrow{\cdot h} & X \\ & {\scriptstyle\theta_g}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\theta_h} & \swarrow & \\ & & \mathbb{P} & & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\cdot(gh)} & X \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\theta_{gh}} & \\ & \mathbb{P} & \end{array}$$

在本文余下部分，我们将这一条件称为"与复合相容"，不再详细展开。请注意，2-胞腔 θ_g 构成了结构的一部分，属于额外数据；它是一个自然变换，对每个点 $x \in X$都有一个分量$(\theta_g)_x$ 。在许多情况下，若我们已有一个奇偶结构$BG \to \mathbb{P}$，这部分数据就只是 $\theta_g = \mathrm{par}(g)$；请注意，此时 θ_g 独立于 x。

2.3.2. 弱商。若有限群 G作用于奇偶群胚 $X \to \mathbb{P}$，则 $\mathcal{Z}$ 中的余极限可先通过取弱商群胚 X/G来计算，然后为其描述奇偶结构。因此，它的对象就是 X的对象，而态射是形式复合 $x \to y \to y.g$。我们将形如 $x \to y$ 的态射称为旧态射，而形如 $y \to y.g$ 的态射称为新态射。在 X/G上的奇偶结构中，所有旧态射都保留其原有奇偶性，而新态射 $y \to y.g$ 的奇偶性为 $(\theta_g)_y$。

2.3.3. 例 子。假设我们有一个奇偶结构 $BG \to \mathbb{P}$，并令 G 作用于对象 $\mathsf{e}\colon 1 \to \mathbb{P}$ b y

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\mathrm{id}} & 1 \\ & {\scriptstyle \mathrm{par}(g)}\searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{P} & \end{array}$$

那么弱商e/G 具有 BG其原有的奇偶结构。这是一个非常平凡的例子，但它是证明接下来两个著名结果的关键要素（例如参见 [7]）。

引理 2.3.4。 每个 $X \to \mathbb{P}$ 都是若干个e的（唯一） $1 \to \mathbb{P}$的同伦和。**命题 2.3.5**。 $\mathcal{Z}$ 是 $\mathbb{P}$的有限同伦和完备化。

2.4 定向

下面的定向概念在逻辑上并非本文结果所必需，但在概念上非常有帮助。

奇偶结构 (S, f)上的<style id='1'>定向按定义是一个态射 (u, ω)

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{u} & 1 \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathsf{e}} & \\ & \mathbb{P} & \end{array} \qquad (\omega)$$

到平凡奇偶结构 $\mathsf{e}: 1 \to \mathbb{P}$，即 $\mathbb{P}$的万有（双重）覆盖。因此，定向奇偶结构范畴就是（弱）切片 $\mathcal{Z}_{/\mathsf{e}}$。

引理 2.4.1。 奇偶结构存在定向，当且仅当它没有奇自同构。在这种情况下，存在 2^k 个可能的定向（其中 k 为连通分支的数量）。

证明。 如果存在奇自同构 $g: s \to s$，那么就不可能相对于 g实现自然性：自然性方形应为

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\omega_s} & \cdot \\ {\scriptstyle f(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{e}u(g)} \\ \cdot & \xrightarrow{\omega_s} & \cdot \end{array}$$

因此，没有办法选择 ω_s 使其交换。反过来，如果不存在奇自同构，那么从 s 到 s' 的所有态射都具有相同的奇偶性。现在，可以通过为每个连通分支中的一个点 s 选择 ω_s，轻松构造一个定向。同一连通分支中其他所有点上的取值也就随之确定。若有 k 个连通分支，那么我们便得到 2^k种可能性，正如所述。 □

2.4.2. 例。 注意，终对象 $\mathrm{id}: \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ 不可 定向。

2.5 线性映射

2.5.1. 线性函子。 从 $\mathcal{Z}_{/f}$ 到 $\mathcal{Z}_{/g}$ 的线性函子 由 $\mathbb{P}$上的跨度给出，例如

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & {\scriptstyle p}\swarrow & \Big\downarrow{\scriptstyle m} & \searrow{\scriptstyle q} & \\ S & \overset{\varepsilon'}{\Leftarrow} & & \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} & T \\ & {\scriptstyle f}\searrow & \downarrow & \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & & \mathbb{P} & & \end{array} \tag{3}$$

我们用 M 表示整个跨度，包括 2-胞。

实际的函子是

$$\mathcal{Z}_{/f} \xrightarrow{q_! \circ p^*} \mathcal{Z}_{/g}.$$

2.5.2. 备注。 当基底范畴为 $\mathcal{F}$时，对每个 S 都有典范等价 $\mathcal{F}_{/S} \simeq \mathcal{F}^S$，这是证明以下（众所周知）事实的关键要素：切片之间的保余极限函子恰好是由跨度给出的函子（例如参见 [7, 2。10]）。

在 $\mathcal{Z}$ 上，情况要复杂得多，这一说法的朴素类比并不成立。举例来说，考虑 $s: BG \to \mathbb{P}$，它对应于一个满群同态；以及 $t: BG \to \mathbb{P}$，它对应于一个平凡群同态。那么，作为抽象范畴，$\mathcal{Z}_{/s}$ 和 $\mathcal{Z}_{/t}$ 都等价于 $\mathcal{F}_{/BG}$。在这些等价之下，恒等函子定义了一个函子 $\mathcal{Z}_{/s} \to \mathcal{Z}_{/t}$，它将对象 $X \to BG$ 映到同一个对象，但赋予其平凡奇偶结构。由于这是一个等价，该函子保留所有余极限；但它无法由一个 $\mathbb{P}$-跨度实现，因为余域是可定向的，而定义域不是。

解决这个问题的一种方法是在 $\mathcal{Z}$内部进行研究（见 [29]）。为此，必须先将所有切片 $\mathcal{Z}_{/f}$ 解释为 $\mathcal{Z}$ 内部的范畴；在这种解释下，有 $\mathcal{Z}_{/f} \simeq \mathcal{Z}^f$ [28, 备注 3.7。2],接着，保余极限函子由内部化的跨度给出的通常证明也可在内部进行，从而恢复对 $(\mathbb{P})$-跨度的解释：它们恰好就是（内部的）保余极限函子。

2.5.3. 备注。由于所有概念（切片、拉回、商等）都是同伦意义下的概念，因此可以像处理 ∞-群胚那样处理群胚，或许不必太在意 2-胞腔——在 ∞世界中，交换图表无论如何都只在同伦意义下成立。在关于 ∞-范畴的文献中，人们通常甚至不会提及这些同伦，但当然，这只会仅 发生在“不会出错”的情形中。在本文中，我们必须格外谨慎地处理 2-胞腔，因为符号正是编码在其中的（而经验表明，符号计算确实可能出错）。因此，下面对 2-胞腔所做的繁琐处理不应被视为吹毛求疵。

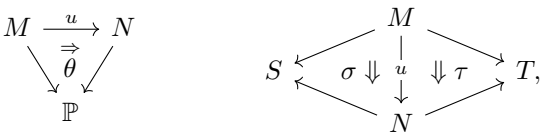
2.5.4. $\mathbb{P}$-跨度的态射。给定两个 $\mathbb{P}$-跨度



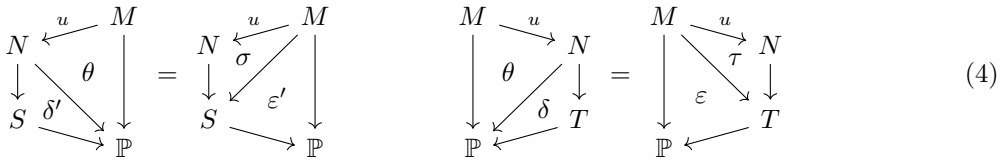
一个-跨度的态射，从 M 到 N，是一个四元组

$$(u, \theta, \sigma, \tau)$$

其中 $u\colon M \to N$ 是一个群胚态射，并且 θ、 σ和 τ 是 2-胞



它们必须满足兼容条件，即满足以下两个方程



(4)

（在左边的方程中，2-胞向左；在右边的方程中，2-胞向右，但无论如何，它们当然都是可逆的。）我们看到， θ 完全由 σ、 ε和 δ决定，而 θ 也完全由 τ、 ε' 和 δ'决定。总之， $\mathbb{P}$-跨度的态射由 u 以及 2- 胞 σ 和 τ 给出，它们必须满足兼容条件，从而导出相同的 θ。

$\mathbb{P}$-跨度态射的一般概念只会用于一些辅助构造。我们主要只关心可逆态射：

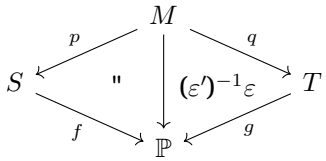
2.5.5. $\mathbb{P}$-跨度的等价。两个 $\mathbb{P}$-跨度之间的一个等价 是一个态射 $(u, \theta, \sigma, \tau)$，其中$u$是一个等价。这是一个常规计算。

引理 2.5.6。等价的跨度定义等价的函子。

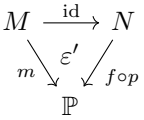
我们可以利用 $\mathbb{P}$-跨度等价的概念来简化计算：

引理 2.5.7。每个 $\mathbb{P}$-跨度 (3) 都等价于一个满足 ε' 平凡的情形（也等价于一个满足ε 平凡的情形）。该等价可取为保持底层跨度不变，因此只有顶点群胚上的奇偶结构 M 发生变化。

证明。等价的跨度为



对于这个等价，定义 (u,θ) 为三角形

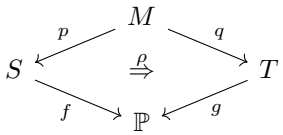


（带有 σ 和 τ 恒等态射）。方程（4）可立即验证。 □

跨度（3）的等价类只取决于两个 2-胞腔之间的“比值”

$$\rho := (\varepsilon')^{-1}\varepsilon.$$

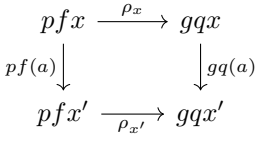
2.5.8. 简化跨越。实践中，最好将跨度简单地定义为



(5)

因为这样的简化跨越与拉回的相互作用更加优雅。与原始跨度（3）相比，我们有 $\rho = (\varepsilon')^{-1}\cdot\varepsilon$。

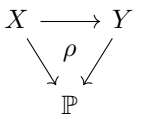
展开来说，自然变换 ρ 的数据如下：对每个点 $x\in M$，有一个态射 ρ_x 属于 $\mathbb{P}$，使得对于每个态射 $a: x\to x'$ 属于 M，我们都有方程



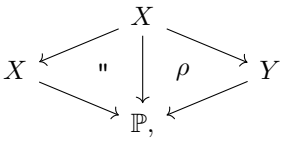
在群胚 $\mathbb{P}$ 中。

因此，简化跨越是如式（3）所示的、完全指定的跨越的一个等价类，其中等价关系是指模去底层跨越的等价为恒等映射的 $\mathbb{P}$-跨越之间的等价。

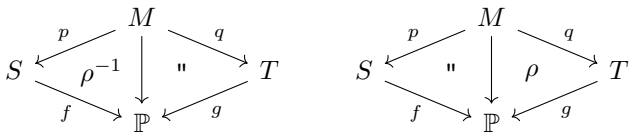
2.5.9. 备注。简化跨越之所以实用，且约定将 2-胞放在右侧，其中一个原因是自然函子 $\mathbb{Z}\to\textbf{\textit{lin}}^{\pm}$ 的值落在这里：该函子将 $X\to\mathbb{P}$ 映到切片 $\mathbb{Z}_{/X}$，并将一个态射



映到由 $\mathbb{Z}_{/X}\to\mathbb{Z}_{/Y}$ 给出的函子



有人可能会担心，在简化跨越中，顶点并未配备奇偶结构，因此无法定义良好的线性函子 $q_!\circ p^*: \mathbb{Z}_{/f}\to\mathbb{Z}_{/g}$。然而，简化跨越（5）等价于以下两个对象



它们对应的线性函子彼此等价，

$$(q,\mathrm{id})_!\circ(p,\rho^{-1})^*\simeq(q,\rho)_!\circ(p,\mathrm{id})^*$$

根据引理2.5.6。

2.5.10. 跨度的复合与双范畴 $\boldsymbol{lin}^{\pm}$。 $\mathbb{P}$-跨度通过拉回复合（当然，这里的拉回指同伦拉回）。拉回方块的 Beck–Chevalley 条件确保，由两个 $\mathbb{P}$-跨度经拉回复合定义的线性函子，与分别关联于这两个 $\mathbb{P}$-跨度的函子之复合存在典范等价。恒等跨度 $S \xleftarrow{=} S \xrightarrow{=} S$（连同指向 $\mathbb{P}$ 的恒等 2-胞腔）定义了恒等函子 $\mathcal{Z}_{/f} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathcal{Z}_{/f}$。

总之，我们定义了双范畴 $\boldsymbol{lin}^{\pm}$：其对象是切片 $\mathcal{Z}_{/f}$，其态射是由 $\mathbb{P}$-跨度给出的函子（包括那些 2-胞腔）。双范畴的 2-胞是$\mathbb{P}$-跨度之间的等价。在函子层面上，它们是线性函子之间的自然等价。在下文中，它们并不那么重要；也可以只考虑这样一个 1-范畴，其中态射是 $\mathbb{P}$-跨度的等价类。

2.5.11. 备注。也可以简单地说，$\boldsymbol{lin}^{\pm}$ 是一个范畴，其对象为奇偶结构，态射为 $\mathbb{P}$-跨度；但我们更倾向于切片范畴这一视角，因为切片是有限同伦和完备化，而且这种视角能让我们直接看到线性函子（而不只是矩阵代数）。此外，切片视角可以优雅地推广到无限基底的情形（即在无限群胚上取切片），这在组合学中很重要。例如，对于无限集 S，向量空间 $\mathbb{Q}_S$ 与前有限维向量空间 $\mathbb{Q}^S$ 之间的区别，可以通过 $\mathcal{F}_{/S}$ 和 $\mathcal{F}^S$（它们在无限的情况下并不等价 S）非常清晰地建模。论文《同伦线性代数》[7]令人信服地阐述了这些观点。

2.6 幺半结构

由于群 $O(1)$ 是阿贝尔群，范畴 $\mathbb{P} = BO(1)$ 具有幺半结构（事实上是对称幺半结构）：该幺半结构

$$\mathbb{P} \times \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$

在点上的赋值是唯一的，而在态射上的赋值为乘法。

由于 $\mathbb{P}$ 具有幺半结构，切片 $\mathcal{Z} = \mathcal{F}_{/\mathbb{P}}$ 获得了卷积张量积 $*$：

$$\begin{array}{ccc} S & & T \\ {\scriptstyle f}\downarrow & * & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{P} & & \mathbb{P} \end{array} := \begin{array}{c} S \times T \\ {\scriptstyle f\times g}\downarrow \\ \mathbb{P} \times \mathbb{P} \\ \downarrow{\scriptstyle \cdot} \\ \mathbb{P} \end{array}$$

此幺半结构的单位元是 $\mathsf{e}: 1 \to \mathbb{P}$。（注意，在等价 $\mathcal{F}_{/\mathbb{P}} \simeq \mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ 下，幺半结构 $*$ 对应于 Day 卷积。）

典范函子 $\mathsf{e}_!: \mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_{/1} \to \mathcal{F}_{/\mathbb{P}}$ 对于 $\mathcal{F}$ 上的笛卡尔积和 $\mathcal{F}_{/\mathbb{P}}$ 上的卷积积是幺半函子，为强调起见，表示如下：

$$(\mathcal{F}, \times, 1) \longrightarrow (\mathcal{Z}, *, \mathsf{e}).$$

2.6.1. 张量积。双范畴 $\boldsymbol{lin}^{\pm}$ 现在获得了一个幺半结构，其定义为

$$\mathcal{Z}_{/f} \circledast \mathcal{Z}_{/g} := \mathcal{Z}_{/f*g},$$

它是向量空间张量积的客体类比。该幺半结构的单位对象是切片 $\mathcal{Z}_{/\mathsf{e}}$。它扮演基域的角色。注意，$\mathcal{Z}_{/\mathsf{e}}$ 与 $\mathcal{Z}$并不等价（因为 e 不是终对象）。

根据其定义为卷积积可知，$\mathcal{Z}_{/f} \circledast \mathcal{Z}_{/g}$ 可以通过以下性质来刻画：a 泛性质，即作为泛双线性函子的接收对象。

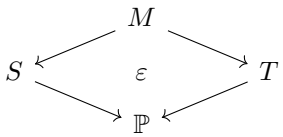
我们有一个典范幺半函子

$$(\boldsymbol{lin}, \otimes, \mathcal{F}) \longrightarrow (\boldsymbol{lin}^{\pm}, \circledast, \mathcal{Z}_{/\mathsf{e}}),$$

将 $\mathcal{F}_{/S}$ 映射到 $\mathcal{Z}_{/S}$，其中第二个 S 实际上是 $S \to \mathbb{P}$，带有平凡奇偶结构（所有态射都是偶的）。这意味着，群胚上的普通客观线性代数（如 2.1 节所述）嵌入了这一新框架（并且也与我们在 3 节引入的基数概念兼容）。

2.7 跨度的负元

$\mathbb{P}$-跨度的负元



记作 $M,\overline{\ }$按定义，它与原群胚跨度相同，但 2-胞腔取反，记作 ε，因此对于每个 $x \in M$，都有

$$\overline{\varepsilon}_x = -1 \cdot \varepsilon_x.$$

特别地，对于任意 $f\colon S \to \mathbb{P}$，考虑恒等 $\mathbb{P}$-跨度 $S \xleftarrow{=} S \xrightarrow{=} S$，其恒等 2-胞腔为 $\varepsilon_x = +1$，对所有 $x \in S$ 均成立；那么负元 $\overline{S}$ 在群胚层面与原跨度相同，但其 2- 胞腔 ε_x 定义为 $\varepsilon_x = -1$，对所有 $x \in \overline{S}$ 均成立。

参照这个 S，可通过与 $\overline{S}$ 预复合来得到 M 的负元：

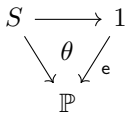
$$\overline{M} = \overline{S} \cdot M$$

（或者与 T 后复合。）

2.8 标量

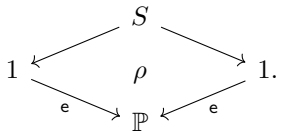
2.8.1. 态、余态、标量。回想一下，在幺半范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ 中，对象 V 的一个态是一个态射 $\mathbb{1} \to V$。余态（或效应 [24]）是一个态射 $V \to \mathbb{1}$，而标量是一个自态射$\mathbb{1} \to \mathbb{1}$。在 $(\mathbf{vect}_{\mathbb{k}}, \otimes, k)$ 中，自态射 $k \to k$ 与基域 k 中的一个元素是同一回事，但在 $(\mathbf{lin}^{\pm}, \circledast, \mathbb{Z}_{/\mathsf{e}})$ 中，两者有所不同：

在 $\boldsymbol{lin}^{\pm}$ 中，“基域”是 $\mathbb{Z}_{/\mathsf{e}}$，而这个切片中的一个元素是一个三角形



（也就是说，是 S 的一个定向）。相较之下：

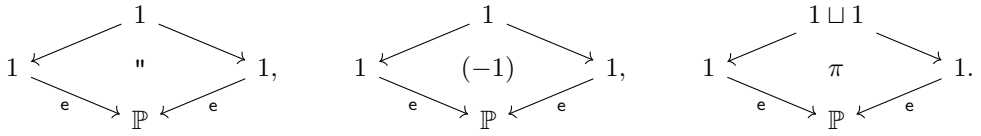
2.8.2. 标量。一个标量是一个线性自函子 $\mathbb{Z}_{/\mathsf{e}} \to \mathbb{Z}_{/\mathsf{e}}$，也就是说，一个 $\mathbb{P}$-跨度



我们用 $\widehat{S}$ 表示整个 $\mathbb{P}$-跨度。在完全指定跨度观点下，标量结构因此相当于奇偶结构上的两个定向。

一个标量态射就是一个跨度态射。（我们主要关注可逆的标量态射。）这定义了标量范畴$\boldsymbol{End}(\mathbb{Z}_{/\mathsf{e}})$。

2.8.3. 重要例子。以下是三个至关重要的标量，可将它们视为 1、 -1 和某种 0：



第二个标量是第一个标量的相反数（而且它们并非等价的标量）。第三个标量是前两个标量之和：自然变换 π 在一个分量上为正，在另一个分量上为负。这个跨距的重要性在于，方形图表 π 恰好是同伦拉回，换言之，它是 $\mathbb{P}$的环路空间，我们记作

$$1 \times_{\mathbb{P}} 1 = \Omega\mathbb{P} = 1 \sqcup 1 = \{\oplus, \ominus\}.$$

2.8.4. 符号分裂。根据拉回的泛性质，跨距 $\Omega\mathbb{P}$ 是终端标量：对于任何其他标量 S，都存在唯一一个由此导出的标量态射

$$S \to 1 \times_{\mathbb{P}} 1 = \{\oplus, \ominus\}$$

因此将标量 S 分裂为两部分，即正部分和负部分

$$S = S_\oplus \sqcup S_\ominus. \tag{6}$$

若需强调这种分裂，我们将 $\widehat{S}$ 写作 $(S_\oplus,\ S_\ominus)$。

在完全指定跨度观点（如 (3)）中，奇偶群胚上的标量结构可解释为以下数据：两个 定向。因此，符号分裂相当于分离出定向一致的那些分支，以及定向不一致的那些分支。在通常更受青睐的简化跨度观点（5）中，两个定向各自并未被良好定义，但它们的比值是良好定义的。

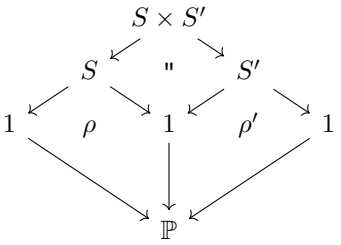
标量的符号分裂是显著符号首次出现之处。与奇偶性（和定向）不同，(6) 中的标量符号分裂是一个同伦不变概念：

引理 2.8.5。给定标量 $S = (S_\oplus, S_\ominus)$ 和 $T = (T_\oplus, T_\ominus)$，给出一个标量等价 $S \simeq T$，等同于给出两个群胚等价 $S_\oplus \xrightarrow{\sim} T_\oplus$ 和 $S_\ominus \xrightarrow{\sim} T_\ominus$。

更准确地说：

命题 2.8.6. 标量范畴 $\boldsymbol{End}(\mathcal{Z}_{/\mathbb{e}})$ 等价于范畴 $\mathcal{F}_{/\Omega\mathbb{P}} = \mathcal{F}_{/\{\oplus,\ominus\}}$。此等价是幺半的：标量上的幺半结构是卷积积 $*$，而 $\mathcal{F}_{/\{\oplus,\ominus\}}$ 上的幺半结构也是卷积积（相对于$\Omega\mathbb{P}$上的幺半结构）。

2.8.7. 备注。将标量视为底域上的线性自态射，这种观点有一个巧妙之处：标量的乘法变成了线性映射的复合。（等价地说，它就是张量积。）将两个标量的复合展开



我们发现，元素 (s, s') 的符号为

$$\rho_s \cdot \rho'_{s'},$$

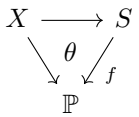
其中，$\cdot$ 是 $\mathbb{P}$ 中态射的复合（也就是 $O(1) = \{+1, -1\}$ 的群运算）。因此，元素 (s, s') 为正，当且仅当 s 和 s' 具有相同的符号；为负，当且仅当 s 和 s' 具有相反的符号。这给出公式

$$(S_\oplus, S_\ominus) \cdot (S'_\oplus, S'_\ominus) = (S_\oplus \cdot S'_\oplus + S_\ominus \cdot S'_\ominus\ ,\ S_\oplus \cdot S'_\ominus + S_\ominus \cdot S'_\oplus),$$

这就是婆罗摩笈多符号法则，因此是线性代数形式体系的推论（但当然，归根结底还是 $O(1)$ 中该法则的推论）。

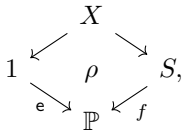
2.9 态（向量）

幺半范畴 $(\mathcal{C},\ \otimes,\ \mathbb{1})$ 中对象 S 的一个态 是一个线性映射 $\mathbb{1} \to S$。在许多常见的具体幺半范畴中，这基本上等同于 S 的一个元素。例如，在（集合 $\times$，1）中，集合 S 的一个态是态射 $1 \to S$，这与 S 中的一个元素相同；而在（$\boldsymbol{vect}_{\mathbb{Q}}$，$\otimes$）中，向量空间 V 的一个态 $\mathbb{Q} \to V$ 与 V 中的一个向量相同。不过，对于我们的幺半范畴 $\boldsymbol{lin}^{\pm}$，情况有所不同。$\mathcal{Z}_{/f}$ 中的一个对象是一个三角形



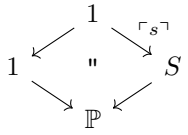
（我们可以把它看作是 S 上的一个丛）。态包含更多信息：

2.9.1. 态（向量）。 $\mathcal{Z}_{/S}$ 的态是一个线性函子 $\mathcal{Z}_{/\mathsf{e}} \to \mathcal{Z}_{/S}$，也就是说，它是一个 spa n



（换言之，它是一个丛与一个定向（ρ^{-1}）的组合。）

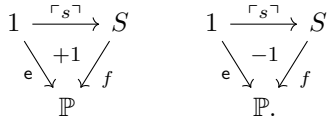
2.9.2. 初等态。 $\mathcal{Z}_{/S}$ 的初等态对每个 $s \in S$都由以下名称给出：



每当我们写作 $1 \leftarrow 1 \overset{\ulcorner s \urcorner}{\to} S$ 来指称一个初等态时，都默认它是正版本，其下至 $\mathbb{P}$的 2-胞是平凡的。

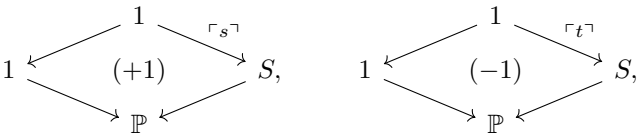
在没有符号的普通客观线性代数中，人们会为每个连通分支选取一个初等态，由 $\ulcorner s \urcorner \colon 1 \to S$ 给出。在一个连通分支内，任意两个选择都是等价的（作为态）。

在带符号情形中，情况要复杂得多，因为每个连通分支都可以带任一符号，而歧义在于使用基向量 $\mathbf{u}_s$ 还是 $-\mathbf{u}_s$。因此，如果奇偶群胚 $S \to \mathbb{P}$ 中有 k 个连通分支，那么就有 2^k 种可能的基。直接的歧义源于：对每个 $s \in S$，名称都有两个版本：



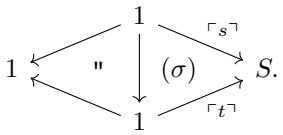
（将这两个对象视为态时，它们通常并不等价，见下文引理 2.9.5 。）对于这两个态，可以认为偶版本比奇版本更具典范性。但在 S 的单个连通分支中，可能存在奇态射 $s \to t$，此时尽管 s 和 t 属于同一个连通分支，对应的初等态却具有相反的符号：

引理 2.9.3。 若 $\sigma \colon s \leftrightsquigarrow t$ 是 S中的一个奇箭头，则这些态



等价。

证明。 一个等价由下式给出：



直接验证方程 (4) 中的两个等式即可。 □

因此在这种情况下，无法说 $\ulcorner s \urcorner$ 比 $-\ulcorner s \urcorner = \ulcorner t \urcorner$更具典范性。

最引人注目的例子是奇自同构 $\sigma \colon s \leftrightsquigarrow s$：

推论 2.9.4。 任意奇自同构 $\sigma \colon s \leftrightsquigarrow s$ 都会在初等态$1 \leftarrow 1 \overset{\ulcorner s \urcorner}{\to} S$ 及其负态之间诱导一个等价。

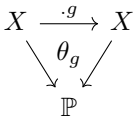
这是对与奇自同构相关的重要抵消现象的初步提示。另请注意：

引理 2.9.5. 如果 $s \in S$ 没有奇自同构，那么初等态 $1 \leftarrow 1 \overset{\ulcorner s \urcorner}{\to} S$ 不等价于其负态。

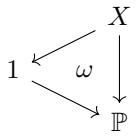
2.10 群在 $\mathbb{P}$-跨度、态和标量上的作用

我们简要指出群作用于 $\mathbb{P}$-跨度、态和标量时的一些微妙之处，接续讨论 2.3。

2.10.1. 在定向奇偶结构上的作用。对于一个 G-作用



与定向相容

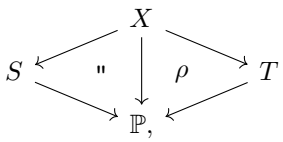


即满足方程

$$(\theta_g)_x \cdot \omega_{x.g} = \omega_x$$

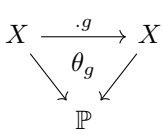
对每个 $x \in X$ 和 $g \in G$，如方程（4）左侧所示。这表明，对于保定向作用，2-胞腔数据是被强制确定的：要给出一个保定向作用，只需在底层群胚 X上给出一个作用，随后便存在唯一的2-胞使其成为定向奇偶结构的作用。特别地，如果 X 具有纯偶定向，那么2-胞腔数据是平凡的（即 $\theta_g = \mathrm{id}$）。

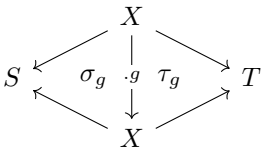
2.10.2. 在 $\mathbb{P}$-跨度上的作用。对于 G 有限群，在一个 $\mathbb{P}$-跨度上的 G-作用



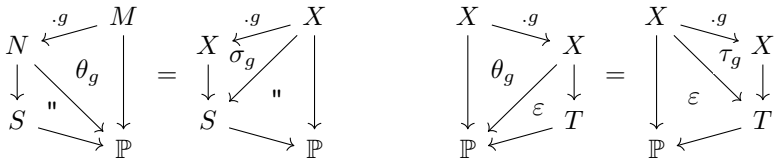
(7)

是一个函子，从 BG到 $\mathbb{P}$-跨度范畴，从 S 到 T，其值为给定的跨度。展开 $\mathbb{P}$-跨度态射2.5.4 的定义，我们看到它等价于以下数据





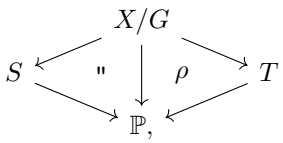
对于每个 $g \in G$，它与 G 中的群运算相容，并且应满足以下两个条件



左侧方程给出 $\theta_g = \mathrm{par}(\sigma_g)$（与 x 无关），据此，右侧方程变为

$$\mathrm{par}((\sigma_g)_x) \cdot \rho_{x.g} = \rho_x \cdot \mathrm{par}((\tau_g)_x). \tag{8}$$

G-作用的（弱）商为



它是在 X/G 群胚范畴中的商，由泛性质诱导出新的腿。2-胞腔结构逐点保持不变：关于 X/G 中的“新”态射的自然性也由（8）得出。

需要注意的是，在群胚范畴中存在的许多商并不能扩展到$\mathbb{P}$-跨度，因为作用本身并不是 $\mathbb{P}$-跨度的作用。下面给出一些例子。

2.10.3. 状态上的群作用。在 $\mathbb{P}$-跨度（7）是一个态的特殊情形下，也就是说，我们有 $S = 1$，那么必然有 $\sigma_g = \mathrm{id}$（对于所有 $g \in G$），因此也有 $\theta_g = \mathrm{id}$，方程（8）可简化为

$$\rho_{x.g} = \rho_x \cdot \mathrm{par}((\tau_g)_x). \tag{9}$$

这意味着，给态 $1 \leftarrow X \rightarrow T$ 指定一个作用，与在 $\mathfrak{T}_{/T}$中给 X 指定一个作用是等价的，但要求其 2-胞腔数据平凡 θ_g。

2.10.4. 标量上的群作用。专门考虑标量 $1 \leftarrow S \rightarrow 1$ 的情形，τ_g 也变为平凡，因此我们只剩下群胚 S 上的一个作用，但它仍须满足该条件；此时该条件归结为

$$\varepsilon_{x.g} = \varepsilon_x,$$

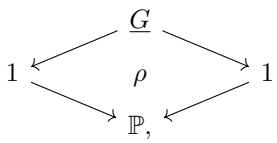
也就是说，作用必须保持符号分裂（正如我们从命题 2.8.6中已知的那样）。因此，群作用分裂为一个作用在 $S_\oplus$ 上的群作用，以及一个作用在 $S_\ominus$上的群作用。

这种作用的商就是标量

$$(S_\oplus/G, S_\ominus/G).$$

接下 来几个简单的例子展示了状态和标量上的群作用的一些微妙之处 s.

2.10.5. 例。对于一个满群同态 $f\colon G \to O(1)$，其核为 K，取一个群元素 $a \notin K$，考虑标量

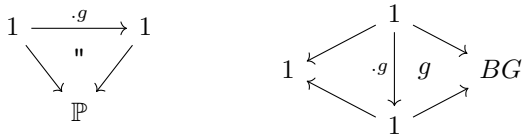


(10)

其中 ρ_x 对于 $x \in K$ 是偶的，对于 $x \in Ka$（K的非平凡陪集）是奇的。因此，作为一个标量，集合 G具有符号分裂（$G_\oplus$，$G_\ominus$）=（K，Ka）。现在，G通过右乘作用于集合 G，但奇群元素会交换正负两者。因此，这不是标量作用。

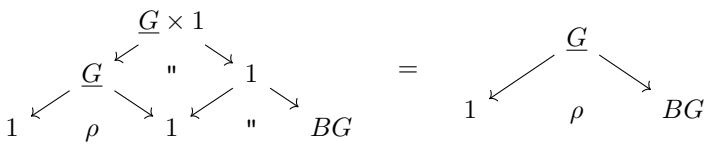
同样，商群胚 $G/G = 1$ 虽然是一个标量，但它并非作为标量的商——原标量甚至没有任何标量态射映入其中。

2.10.6. 例。态 $1 \leftarrow 1 \rightarrow BG$ 只允许一种 G-作用（于态），即具有平凡 2-胞腔的平凡作用。这由2.10.3可知。尝试通过以下方式在态上定义非平凡作用



当 G 含有奇元素时，这种做法行不通：虽然（4）左侧的方程成立，但右侧的方程不成立（而且也无法修改左边的交换三角形，否则左侧的方程就会被破坏）。

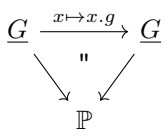
2.10.7. 例。接续前两个例子，考虑复合的 $\mathbb{P}$-跨度

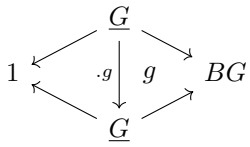


（回想一下，ρ_x 是群元素 $x \in G$的奇偶性。）正如我们刚才所见，两个单独的 $\mathbb{P}$-跨度各自都带有错误的G-作用，但这两个错误相互抵消，从而在复合的$\mathbb{P}$-跨度上定义了一个真正的作用，即对角作用（x，1）$\mapsto$（$x.g$，$1.g$）=（$x.g$，1），这正是

$$x \mapsto x.g$$

配备了 2-胞腔





这实际上可行：所需的方程是（对每个 $x \in G$ 和 $g \in G$）：_

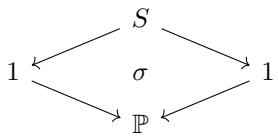
$$\rho_{x.g} = \rho_x \cdot \mathrm{par}(g),$$

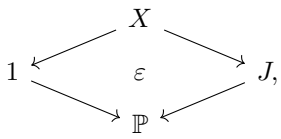
这显然成立。与反例 2.10.5相比，跨度以 BG 结尾而不是以 1 结尾，这为作用的正确实现留出了足够的余地。

T该例的复合是标量乘法的一个实例，我们接下来讨论：

2.11 标量乘法、内积与投影

2.11.1. 标量乘法。与任何幺半范畴一样，标量作用于态：给定一个 ^ ^标量 S 和一个态 X

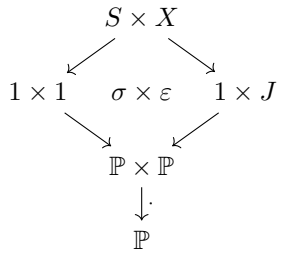




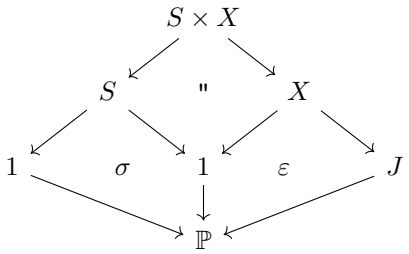
我们有标量乘法

$$\widehat{S} \cdot \widehat{X}$$

d既可定义为张量积 $S * X$，也可定义为跨度的复合，分别表示为

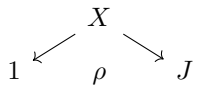


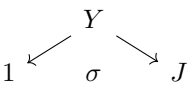
=



2.11.2. 内积。 由于我们的"向量空间" $\mathcal{Z}_{/J}$ 本质上已经带有坐标（但并非完全如此，因为符号存在歧义），因此配备了内积，或者等价地说，配备了对偶性：态 $1 \leftarrow X \rightarrow J$ 的对偶余态就是转置跨度 $J \leftarrow X \rightarrow 1$ （对于简化跨越，还需将 2-胞反转）。

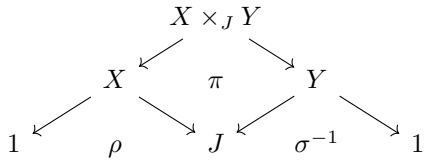
（典范）内积 $\langle$ $\widehat{X}, \widehat{Y}\rangle$ 两个态





按定义 ^ ^是通过跨度复合（矩阵乘法）将 X 与 Y的对偶进行复合所得的标量：

$\langle \widehat{X}, \widehat{Y} \rangle :=$



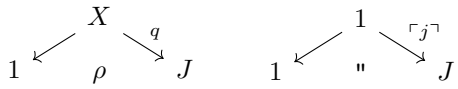
2.11.3. 投影到初等态。 在普通线性代数的内积空间中，向量 $\mathbf{x}$ 到基向量 $\mathbf{u}_j$ 的正交投影由公式给出

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}_j}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_j \rangle}{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle} \mathbf{u}_j. \tag{11}$$

这在同伦线性代数中有一个很好的解释：对于态 $1 \leftarrow X \to J$（简写为 $\widehat{X}$）到初等态 $1 \leftarrow 1 \xrightarrow{\ulcorner j \urcorner} J$的投影，我们有

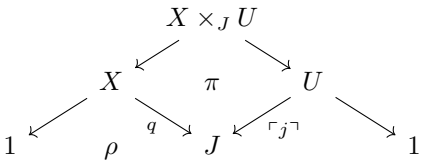
$$\mathrm{proj}_j(\widehat{X}) = \frac{X_j}{j!} \cdot \ulcorner j \urcorner. \tag{12}$$

这对符号情形也成立，不过公式需要稍作改变。具体来说，输入是$\mathbb{P}$-跨度



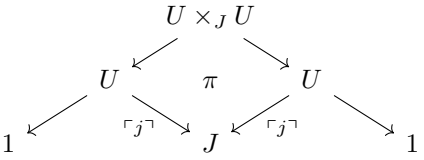
我们将这个第二个态记作 U（若设 $U = 1$，这个记法便有意义）。根据内积的定义，我们有

$$\langle \widehat{X}, \widehat{U} \rangle \quad = \tag{13}$$

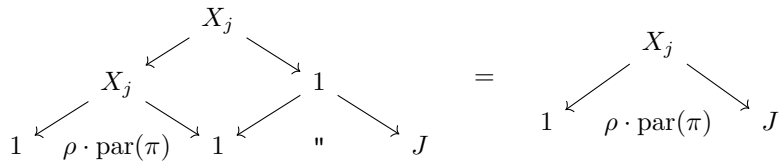


其顶点恰好是纤维 X_j，而且我们还有

$$\langle \widehat{U}, \widehat{U} \rangle \quad =$$

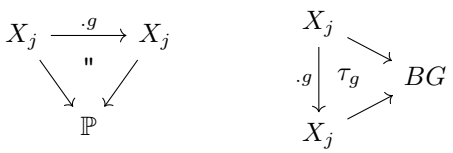


其顶点是处的环路空间 $j \in J$，即 $\Omega B\mathrm{Aut}(j)$。现在的想法是，将除法解释为对 $j! = \mathrm{Aut}(j)$ 在 X_j 上的典范作用取商，如（12）所示。然而，在带符号情形中，这并不完全成立，因为尽管 $j!$ 确实作用于群胚 X_j，但它一般并不作用于由标量定义的 X_j。这种情形的一个例子见2.11.4。然而，确实有 $j!$ 作用于整个态 $X_j \cdot U$，它由下式给出



(14)

此处的 2-胞 $\rho \cdot \mathrm{par}(\pi)$ 是在复合图表 (13) 中粘合 ρ 和 π 得到的。具体来说，回顾一下，X_j 的对象是形如 (x, a) 的有序对，其中有 $x \in X$ 和 $a : J$中的 $qx \xrightarrow{\sim} j$，$\rho \cdot \mathrm{par}(\pi)$ 在 (x, a) 上的分量 $\in X_j$ 由 $\rho_x \cdot \mathrm{par}(a)$ 给出。其作用由下式给出（对每个 $g \in j!$）：



如 2.10.2–2.10.3。2-胞 τ_g 在每个点（g，x，a）上都有分量。在群胚层面，作用为

$$(x, a) \mapsto (x, a.g).$$

方程（9）现在写成

$$\big(\rho \cdot \mathrm{par}(\pi)\big)_{(x,a).g} = \big(\rho \cdot \mathrm{par}(\pi)\big)_{(x,a)} \cdot \mathrm{par}\big((\tau_g)_{(x,a)}\big)$$

这进一步展开为

$$\rho_x \cdot \mathrm{par}(a.g) = \rho_x \cdot \mathrm{par}(a) \cdot \mathrm{par}(g)$$

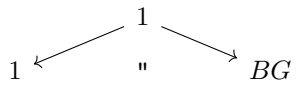
这显然成立。

因此，在带符号情形下，正确的公式[4] 对于投影而言应为

$$\mathrm{proj}_j(\widehat{X}) = \frac{X_j \cdot \ulcorner j \urcorner}{j!}.$$

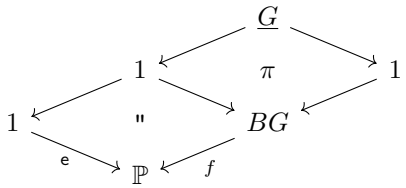
2.11.4. 例。 对于满群同态 $f\colon G \to O(1)$，考虑该态 te

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 1 & \text{"} & BG \end{tikzcd} \tag{15}$$



现在，纤维给出的标量就是该标量

$$\begin{tikzcd} & & \underline{G} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \pi & 1 \arrow[dl] \\ 1 \arrow[dr, "\mathsf{e}"'] & \text{"} & BG \arrow[dl, "f"] & \\ & \mathbb{P} & & \end{tikzcd} \tag{16}$$



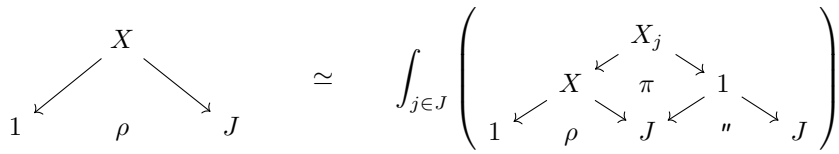
来自例2.10.5，相应的初等态则是例2.10.6中的初等态。复合跨度上的群作用则是例 2.10.7中的群作用。

命题 2.11.5。 任意态都是其在某个基的各元素上的投影之和。更准确地说 *y:*

$$1 \leftarrow X \rightarrow J \;\simeq\; \sum_{j \in \pi_0(J)} \frac{(1 \leftarrow X_j \rightarrow 1) \cdot (1 \leftarrow 1 \xrightarrow{\ulcorner j \urcorner} J)}{j!},$$

或者更概念性地说：

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 1 & \rho & J \end{tikzcd} \quad \simeq \quad \int_{j \in J} \left(\begin{tikzcd} & & X_j \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \pi & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 1 & \rho & J & \text{"} & J \end{tikzcd} \right)$$



在 J的态范畴中。或者更简洁地写作：

$$\widehat{X} \simeq \int_{j \in J} \ulcorner j \urcorner_! \ulcorner j \urcorner^*(\widehat{X}).$$

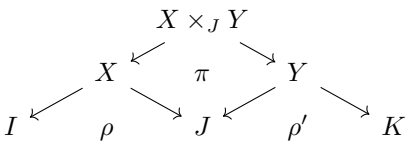
证明。 大部分工作我们已经完成了，也就是证明被积函数上的自然作用是一个态的作用。其余部分可以在群胚层面验证：同伦和分解为对 $\pi_0 J$ 的离散和，而在每个分支内，则是一个 $j!$-作用的弱商；在群胚层面，这就是 $j!$在 X_j上的典范作用。由于该作用存在于态层面，$\widehat{\ }$因此商也是一个态；而该商是 X 这一点，可以在群胚层面衡量，此处它就是众所周知的等价$X \simeq \sum_{j \in \pi_0 J} X_j / j!$。

□

2.12 跨度复合的“坐标”表示

2.12.1. “坐标”表示下的复合。 为了理解 $\mathbb{P}$-跨度的拉回复合如何

$$\begin{tikzcd} & & X \times_J Y \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \pi & Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ I & \rho & J & \rho' & K \end{tikzcd}$$



对应于“矩阵乘法”，我们需要公式

$${}_i(X \times_J Y)_k \simeq \int_{j \in J} ({}_iX_j \times {}_jY_k).$$

[4]我们想建议宇宙中的所有线性代数教材都进行修订，将 $\langle \mathbf{x}\langle {}_j{}^{,}{}_j \rangle^{j} \mathbf{u}_j \rangle \cdot \mathbf{uu}, \mathbf{u}$写成这样，而不是$\langle {}_j{}^{,}{}_j \rangle \mathbf{xuu}, \mathbf{u}\underline{\mathbf{u}j}$，但我们还不完全确定应该向谁提出这一建议。

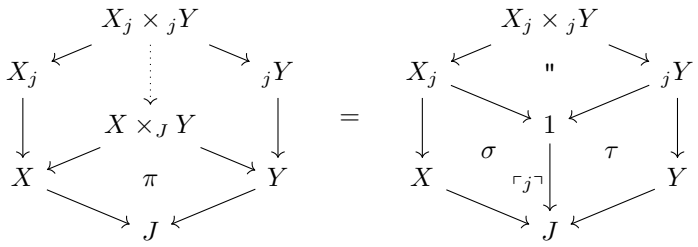
从无符号的同伦线性代数中，我们已经在群胚层面得到了这一等价，但我们需要在标量层面得到该等价，以确保符号在此等价下保持不变。这可能看起来有些令人担忧，因为复合跨度涉及来自三个 2-胞腔的符号：ρ、ρ' 和 π，而两个较小的跨度分别只有来自 ρ 和 ρ'的符号。不过，结果确实是正确的。该公式将是下面这个指标更少的一般性结果的一个推论。

命题 2.12.2. 群胚等价

$$X \times_J Y \simeq \int_{j\in J} (X_j \times {}_jY)$$

也是从 X 到 Y的 J-跨度等价。

证明。 我们先回顾群胚等价。固定 $j \in J$，考虑立方体



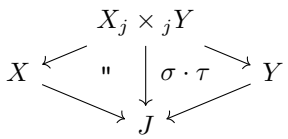
三个方形 π、σ和 τ 都是拉回。虚线态射由拉回的泛性质（目前是在群胚范畴中）唯一诱导而来，使未标记的方形严格交换。随着 $j \in J$变化，跨度 $X_j \times {}_jY$ 构成一个群胚图，其余极限为$X \times_J Y$。由于 J 是群胚，对它取余极限可分解为先对 $\pi_0 J$ 取离散和，再在每个分支内取一个 $j!$-作用的弱商；在此情形下，这个作用是 $j!$ 在 $X_j \times {}_jY$上的对角作用。

我们的任务是验证该图也是一个 J-跨度图，关键在于验证这个作用实际上是这种跨度的作用。这是因为它是两个作用的对角作用，而这两个作用的分量彼此抵消。X_j 中的对象是满足 $x \in X$ 和 s 的有序对 $(x,\ s)$：$px \xrightarrow{\sim} j$。自同构群 $j!$中的元素g 通过后复合起作用：$(x,\ s) \mapsto (x,\ s{\cdot}g)$。${}_jY$中的对象是满足 $y \in Y$ 和 t 的有序对 $(y,\ t)$：$j \xrightarrow{\sim} qy$。自同构群 $j!$中的元素 g 通过前复合起作用：$(y,\ t) \mapsto (y,\ g^{-1}{\cdot}t)$。

$g \in j!$ 对群胚 $X_j \times {}_jY$ 的作用是对角作用

$$(x, s, y, t) \mapsto (x, s{\cdot}g, y, g^{-1}{\cdot}t)$$

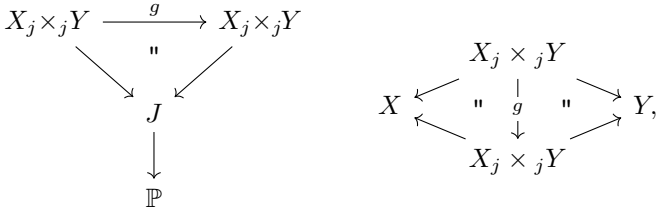
我们声称，这进一步构成了 J-跨度在该跨度上的作用



(17)

为便于计算，我们将其安排为 2-胞位于右侧。$\sigma \cdot \tau$ 在点 $(x,\ s,\ y,\ t)$ 上的分量就是 $s \cdot t$。

该作用的 2-胞腔数据（如 2.10.2 中所示，但这里是在 J 上，而非在 $\mathbb{P}$ 上）全都是恒等态射：



最后，我们只需检查一个方程，即

$$(\sigma\tau)_{(x,s,y,t).g} = (\sigma\tau)_{(x,s,y,t)}.$$

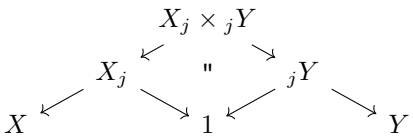
由于 $g \in j!$ 通过 $(x, s, y, t) \mapsto (x, sg, y, g^{-1}t)$ 作用，该方程归结为

$$sgg^{-1}t = st$$

这在 J 中当然成立。

既然我们已经看到，该作用实际上是跨度在 J 上的一个作用，那么群胚层面的弱商也就是跨度范畴中的弱商，正如所要求的那样。 □

2.12.3. 备注。 值得注意的是， $j!$ 在群胚 X_j 上的自然作用并不在 J-跨度 $X \leftarrow X_j \to 1$ 上给出一个作用，并且 $j!$ 在群胚 ${}_jY$ 上的自然作用也不在 J-跨度 $1 \leftarrow {}_jY \to Y$ 上给出一个作用。但这两个错误的作用合在一起，却在复合的 J-跨度上给出了一个正确作用



上述命题的动机是说明， $\mathbb{P}$-跨度的复合可以解释为某种矩阵乘法——即使在客观层面上，在取基数之前也是如此。（我们将在下一节中取基数。）现记录如下：

推论 2.12.4。 对于如上可复合的 $\mathbb{P}$-跨度 X 和 Y，我们有一个标量的典范等价

$$ {}_i(X \times_J Y)_k \simeq \int_{j \in J} ({}_iX_j \times {}_jY_k).$$

证明。 只需取 ${}_i(\ )_k$ 命题2.12.2中等价的纤维，注意到取纤维是一种拉回运算，因此与余极限可交换。从 J 到 X 的 Y- 跨度之间的等价，继而成为从 **1** 到 **1** 的 $\mathbb{P}$- 跨度之间的等价，也就是说，是标量等价。 □

3 基数

定义 $\mathbb{P}$-跨度的基数时，我们采取的策略是先定义标量的基数，因为在这种情况下，基数应当如何定义一目了然（参见下文（18））。然后，对于态和更一般的跨度，我们的思路是提取它们的纤维；纤维是标量，因此可以用标量来定义基数。这体现了一种看法：我们可以把跨度视为一个“装满群胚的盒子”，那么它的基数就应当是一个矩阵，其各项是这些群胚的基数。然而，这样简单地处理会忽略一个事实：所有这些群胚彼此交织，共同构成跨度的整体顶点。这种交织既涉及对称性，也涉及符号。

3.0.1. 例。 给定一个态 $1 \leftarrow X \to J$，先将其写成初等态的同伦线性组合

$$\widehat{X} \simeq \int_j X_j \cdot \ulcorner j \urcorner$$

其中纤维 X_j 是标量。然后将基数定义为

$$|\widehat{X}| = \left| \int_j X_j \cdot \ulcorner j \urcorner \right| = \left| \sum_j \frac{X_j \cdot \ulcorner j \urcorner}{j!} \right| := \sum_j \frac{|X_j|}{|j!|} \cdot \mathbf{u}_j$$

3.1 标量的基数

我们首先定义标量 S 的基数为

$$|\widehat{S}| := |S_\oplus| - |S_\ominus|. \tag{18}$$

命题 3.1.1。 标量的基数对于同伦和与积的行为符合预期：

$$\begin{aligned} |S + T| &= |S| + |T| \\ |S/G| &= |S|/|G| \\ |S * T| &= |S| \cdot |T|. \end{aligned}$$

证明。 验证过程很直接。对于商，需要强调的是，所要求的作用必须是标量作用；这尤其意味着它保留符号分裂，正如 2.10.4 中所述。因此，该作用相当于分别在 $S_\oplus$ 和 $S_\ominus$ 上各有一个作用，其余验证也很容易。 □

3.1.2. 备注。 对于任意有限集 k，我们可以构造

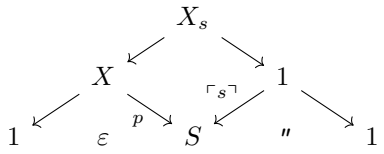
$$S^k = \underbrace{S * \cdots * S}_{k \text{ factors}}.$$

基数与 $*$的相容性现在也意味着

$$|S^k| = |S|^{|k|}.$$

3.2 奇自同构

引理 3.2.1。 考虑跨度复合



如果 s有一个奇自同构，那么标量 X_s 的基数为零。

证明。 纤维 X_s 的元素是一些有序对 $(x,\ a)$，其中 $x \in X$ 和 $a:\ px \leftrightsquigarrow s$ 是 S中的一个态射。我们通过 $X_s \dashrightarrow 1 \sqcup 1 = \{\oplus, \ominus\}$ 得到标量的一个分裂，从而得到

$$X_s = (X_s)_\oplus \sqcup (X_s)_\ominus .$$

点（$x,\ a$）的符号是 $\varepsilon_x \cdot \mathrm{par}(a)$。自同构群 $s!$ 自然地作用于群胚 X_s，其方式为

$$(x, a) \mapsto (x, a.g).$$

我们已经多次看到，这个作用不是标量作用，因为当 $g \in s!$ 为奇数时，它不会保持符号分裂。相反，显然，奇数 $g \in s!$ 会将正点映射为负点，并将负点映射为正点。因此，它在 X_s上定义了一个反转符号的对合，即群胚同构

$$(X_s)_\oplus \simeq (X_s)_\ominus$$

由此可见，这个标量的总基数为零。 □

3.3 基数作为函子

3.3.1. 讨论。 给定一个 $\mathbb{P}$-跨度 $I \leftarrow M \rightarrow J$，我们首先提取所有双侧纤维 ${}_iM_j$。每个纤维自然都是一个标量，其基数为

$$|{}_iM_j| = |({}_iM_j)_\oplus| - |({}_iM_j)_\ominus|.$$

整个跨度的基数将是一个数值矩阵。这个数值矩阵的各项不 仅仅是 $|{}_iM_j|$，而是

$$|{}_iM_j|/|j!|,$$

正如在无符号的同伦线性代数中已经如此， [7], 如前所述。

这个定义存在两个问题：其一，只有当对称因子在客观上已有意义，即作为群作用的商时，才应引入它；而我们已经见过一些例子，说明这个 $j!$-作用并不总是标量上的作用。其二，如果一个点 $j \in J$ 存在奇自同构，相应系数的基数总是零，因此不能作为基元素。解决这两个问题的方法是在基数的定义中排除所有不可定向点。

3.3.2. 定义：基数函子$\boldsymbol{lin}^{\pm} \to \boldsymbol{vect}$。我们先在对象上定义基数函子，定义如下：

$$\begin{aligned} |-| : \boldsymbol{lin}^{\pm} &\longrightarrow \boldsymbol{vect} \\ \mathcal{Z}_{/T} &\longmapsto \mathbb{Q}_{\pi_0 T^\circ}, \end{aligned}$$

向量 由符号 $\mathbf{u}_t$ 张成的向量空间，其中 t 在固定选定的初等态 $1 \xrightarrow{t} T\,\mathbf{f}$ 中运行 or
每个可定向 的 T 分量。

为了定义态射的基数，我们需要为每个 $\mathbb{P}$-跨度 $I \leftarrow M \to J$ 指定一个线性映射

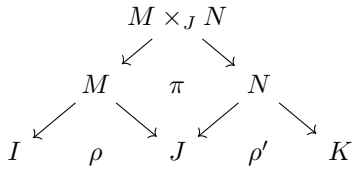
$$\mathbb{Q}_{\pi_0 I^\circ} \to \mathbb{Q}_{\pi_0 J^\circ},$$

由于这些向量空间已经配备了基，我们可以用矩阵 $[M]$ 来表示该映射。我们定义 $[M]$ 为 $\pi_0(I^\circ)$-行、$\pi_0(J^\circ)$-列矩阵，其 $(i,\ j)$ 项为

$${}_i[M]_j := |{}_iM_j/j!|.$$

注意，$j!$ 对 ${}_iM_j$ 的作用确实是标量上的作用，因为 j 没有奇自同构。还需检查函子性，我们将其表述为一个命题：

命题 3.3.3. 基数赋值具有函子性：复合 $\mathbb{P}$-跨度的基数



等于两个单独基数矩阵的矩阵乘积。准确地说，对于固定的 $i \in \pi_0(I^\circ)$和$k \in \pi_0(K^\circ)$，我们有如下有理数恒等式：

$${}_i[M \times_J N]_k = \sum_{j \in \pi_0(J^\circ)} {}_i[M]_j \cdot {}_j[N]_k$$

证明。我们 已经完成了大部分工作。由推论2.12.4，我们得到一个标量的等价 rs

$${}_i(M \times_J N)_k \simeq \int_{j \in J} ({}_iM_j \times {}_jN_k).$$

现在对这个等价取基数，并利用基数与和、商和积的相容性（参见 3.1.1），将基数符号进一步移入，从而得到

$$|{}_i(M \times_J N)_k| = \sum_{j \in \pi_0 J} \frac{|{}_iM_j| \cdot |{}_jN_k|}{|j!|}.$$

最后，将等式两边都除以 $|k!|$，得到

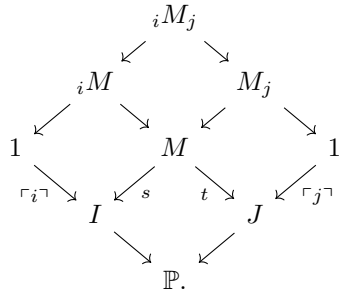
$$|{}_i(M \times_J N)_k/k!| = \sum_{j \in \pi_0 J} |{}_iM_j/j!| \cdot |{}_jN_k/k!|,$$

这正是我们想要证明的。 □

3.3.4. 哲 学性备注。令人欣喜的是，这些证明中并没有出现符号 s.
它们由 形式体系处理，而我们关注的是标量而非符号。

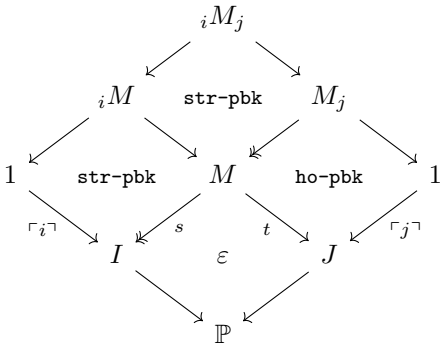
有人可能会想，是否可以从一开始就排除不可定向点，也就是奇自同构，甚至在第2节中就排除。但这是不可能的，因为奇自同构会自然地出现在许多构造中，即使是在一开始完全没有自同构的问题中也是如此。最后一节将对此加以说明。允许奇自同构是建立优雅理论所必需的，即便它们在基数上并不可见。

3.3.5. 计算说明。双侧纤维通过如下拉回计算 s:

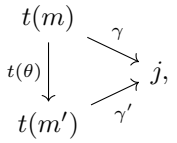


这里所有的方形都带有一个 2-胞：底部的方形是 M 原有的 $\mathbb{P}$-跨度结构，另外三个方形则是同伦拉回。双侧纤维上的标量结构涉及复合的 2-胞。

为便于计算，实际操作中可以假设（或设法使得） s 是一个纤维化。这样，我们只需借助一个同伦拉回和两个严格拉回来计算双侧纤维 ${}_iM_j$：



关键在于，多亏了同伦拉回，映射 $M \leftarrow M_j$ 也成为一个纤维化，因此这两个严格拉回在同伦意义下仍然有意义。在这个更严格（但与原版本同伦等价）的双侧纤维中， ${}_iM_j$ 的对象是形如 (m,γ) 的对，其中 $s(m) = i$，且 $\gamma\colon t(m) \xrightarrow{\sim} j$；从 (m,γ) 到 (m',γ') 的态射是 $\theta : m \xrightarrow{\sim} m'$ 中的态射，满足 $s(\theta) = \mathrm{id}_i$，并且

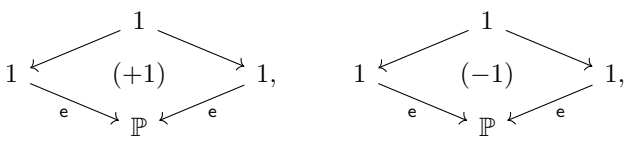


在标量 ${}_iM_j$ 中，点 $(m,\ \gamma)$ 的符号现在是乘积 $\varepsilon_m \cdot \mathrm{par}(\gamma)$。

要求 s 是一个纤维化，并不会实质性地损失一般性，因为总可以用一个纤维化来替代它，例如沿恒等映射作同伦拉回。我们将在第4节计算行列式时，利用这种不对称且更严格的设定。

3.4 基数函子的泛性质

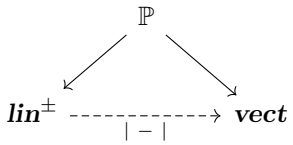
我们有自然函子 $\mathbb{P} \to \boldsymbol{vect}$，它将唯一的点映到 $\mathbb{Q}$，并将态射 ± 1 映到线性映射 $\pm\mathrm{Id}\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$（它们只是标量）。完全类似地，我们也有函子 $\mathbb{P} \to \boldsymbol{lin}^{\pm}$，它将唯一的点映到 $\mathbb{Z}_{/e}$，并将态射 ± 1 映到线性函子（同样只是标量）



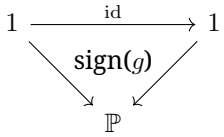
(19)

分别为。与之密切相关的是函子 $\mathbb{P} \to \mathbb{Z}$，它将唯一的点映射到 $\mathsf{e}\colon 1 \to \mathbb{P}$；正如我们所见，这表明 $\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{P}$ 的有限同伦和完备化。在这里，我们处理的是其线性版本，并着手明确 $\mathbb{P} \to \boldsymbol{lin}^{\pm}$ 以及基数函子的泛性质。

命题 3.4.1。 基数函子是使此三角形（在自然同构意义下）交换的唯一保有限同伦和函子：



证明。 三角形的交换性迫使我们取 $|\mathcal{Z}_{/\mathsf{e}}| = \mathbb{Q}$。接下来考虑 $\mathcal{Z}_{/BG}$的情形，其中$BG\to\mathbb{P}$ 对应于群同态 $G \to O(1)$。我们已经知道（由 2.3.3 可知）， $BG\to\mathbb{P}$是 G 对 e 的作用（由 $g \in G$ 作用为



这个在 $\mathcal{Z}$中的余极限描述也是 $\mathrm{lin}^{\pm}$中的余极限描述。但这些映射属于函子 $\mathbb{P} \to \mathrm{lin}^{\pm}$的像，因此我们只能将它们映到 $\pm\mathrm{Id} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$。由于我们构造的函子必须保留 $BG\to\mathbb{P}$的这一商描述，所以 $BG\to\mathbb{P}$ 在 vect 中的取值必定是 G 对 $\mathbb{Q}$的符号作用的商。（注意，vect 中的商就是通常的向量空间商，因为 vect 只是一个 1-范畴。）然而，只要 G 有一个奇元素，这个商就是零向量空间！换言之，如果 BG 有奇自同构，那么 $\mathcal{Z}_{/BG}$ 就会被映到向量空间 $\{0\} = \mathbb{Q}_{\emptyset} = \mathbb{Q}_{\pi_0(BG)^\circ}$。最后考虑一般情形：对于任意对象 $\mathcal{Z}_{/S} \in\mathrm{lin}^{\pm}$ （参照奇偶结构 $S\to\mathbb{P}$），我们先将 S 写成若干个 e 的同伦和（参见 2.3.4）。这将展开为对 $s \in \pi_0(S)$ 的离散和，其中包含对象 $B\mathrm{Aut}(s) \to \mathbb{P}$ （其奇偶结构由 S诱导而来）。对于这些直和项中的每一个，我们都会得到一个贡献 $\mathbb{Q}_{\pi_0 BG^\circ}$；由于函子必须保留和，因此总计得到

$$|\mathcal{Z}_{/S}| = \mathbb{Q}_{\pi_0 S^\circ},$$

由与来自 $\mathbb{P}$ 的函子的相容性要求所决定。

这表明，对对象的赋值是被强制确定的。对于态射的赋值，我们先讨论标量的情形。我们已经知道两个基本标量 (19) 的像。任何其他标量都是若干个这些基本标量的同伦和，因此，除了基数定义中已经给出的赋值之外，别无选择。

我们略去一般情形，转而讨论这一情形更广泛的背景。 □

Maxime Ramzi 向我们指出了泛性质更广泛的背景。下面这个一般性结果由 Harpaz 证明，其动机来自色同伦论。

定理 3.4.2 (Harpaz [16, 定理 4。1])。 点上的 ∞-范畴——由 m-有限 ∞-群胚构成的跨度范畴——是自由的 m-半加性 ∞-范畴。这意味着，对于任意 m-半加性 ∞-范畴 $\mathcal{D}$，自然函子

$$\mathrm{Fun}^{m\text{-sum}}(\boldsymbol{span}_m, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}$$

由在 $\mathcal{S}_m$ 处求值给出，是一个等价。

我们简要解释其中涉及的概念，详情请参阅 Harpaz 的论文。若一个 ∞-群胚是有限且 m-截断的，则称它为m-有限。因此，1-有限 ∞-群胚就是本文所讨论的群胚。函子所需保留的余极限，是取遍 m-有限 ∞-群胚的余极限，因此在$m = 1$ 的情形下，这对应于本文所称的同伦和。跨度$_m$ 是 m-有限群胚的跨度范畴，因此对于 $m = 1$，它就是我们所称的 ***lin*** （而对于 $m = \infty$，它是 [7] 中的 ∞-范畴 ***lin***）。

解释 m-半可加性的概念（最初由 Hopkins 和 Lurie 提出，参见 [16]）会让我们离题太远，因为这是一个微妙的概念，需要用归纳定义。粗略地说，若一个 ∞-范畴中，取遍 m-有限 ∞-群胚的余极限可通过一个特定的比较函子与极限等同，则称该范畴为 m-半可加的；这个比较函子的定义依赖于该范畴已经是（$m-1$）-半可加的这一假设。

因此，Harpaz 定理的 $m = 1$ 实例表述如下

推论 3.4.3。 范畴 ***lin*** 是由一个点自由生成的1-半加性范畴。这意味着，对于任意1-半加性范畴 $\mathcal{D}$，自然函子

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{hsum}}(\boldsymbol{lin}, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}$$

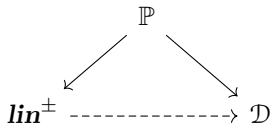
由在 $\mathcal{F}$ 处取值给出，是一个等价。

我们引用上述定理，是因为其思想只需几段话就能解释清楚。但我们实际需要的是一个更一般的定理（同样归功于 Harpaz）：

定理 3.4.4 (Harpaz [16, 定理 5.29])。 由 ∞-范畴构成的 $\mathcal{C}$-装饰跨度 m-有限 ∞-群胚是由-半加性 ∞-范畴在 $\mathcal{C}$ 上的自由对象。

我们不打算详述该命题的具体内容，也不打算定义 $\mathcal{C}$-装饰跨度，只需指出，当 $\mathcal{C}$ 本身是一个 m-群胚时， $\mathcal{C}$-装饰跨度就是 $\mathcal{C}$ 上方切片范畴中的跨度。现在可以将该定理应用于本文的情形，其中 $m=1$ 且 $\mathcal{C}=\mathbb{P}$，从而得到以下结果；因此，这只是 Harpaz 一般定理的一个特例：

命题 3.4.5。 范畴$\boldsymbol{lin}^{\pm}$ 是由 $\mathbb{P}$ 生成的自由1-半加性范畴。这意味着，对于任意1-半加性范畴 $\mathcal{D}$及函子 $\mathbb{P}\to\mathcal{D}$，存在唯一一个保有限同伦和函子



最后，$\boldsymbol{vect}$ 有理向量空间范畴是 1-半加性的（事实上，对所有 m 都是半加性的 $m\leq\infty$），而命题 3.4.1 可以看作只是确定了普适函子 $\boldsymbol{lin}^{\pm}\to\boldsymbol{vect}$ 是什么：它就是本节引入的基数函子。

4 外幂与行列式

全文将用 Σ_k 表示由 k 个字母构成的对称群。

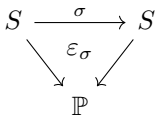
4.1 $\mathcal{Z}$中的外幂

对于 Σ_k 对群胚 S的作用，这里所说的“商”始终指弱商：群胚 S/Σ_k 的对象就是 S的对象，而商群胚 S/Σ_k 中的态射按定义是一个二元组（$a:x\to y,\ \sigma$），其定义域为 x，余域为 $y.\sigma$。

回忆一下，奇偶结构 $f:S\to\mathbb{P}$ 上的 Σ_k-作用是一个函子

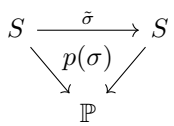
$$B\Sigma_k\to\mathcal{Z}$$

将唯一的点映到 $f:\ S\to\mathbb{P}$。这意味着，对于每个 $\sigma\in\Sigma_k$，都给定了一个奇偶结构态射



其中 2-胞 ε_σ 是数据的一部分，当然还要求 $\varepsilon_{\sigma\tau}=\varepsilon_\sigma\cdot\varepsilon_\tau$。由于 $\mathcal{Z}$具有有限余极限，我们可以构造（弱）商，记作 S/Σ_k。其底层群胚总是 S/Σ_k（因为遗忘函子 $\mathcal{Z}\to\mathcal{S}$ 保留余极限）。

4.1.1. 例。如果 $f:\ S\to\mathbb{P}$ 是一个奇偶结构，并且 Σ_k 作用于底层群胚 S，那么有两种将此作用转化为奇偶群胚上的作用的规范方式：或者我们可以定义 ε 为常值 $+1$（这就是纯偶作用），或者我们可以定义 ε 始终为置换的符号 σ（与 $s\in S$无关），并参考符号同态 $p:\ \Sigma_k\to O(1)$。第二种作用称为带符号作用，将是我们关注的重点：



（我们在 σ 上加波浪号，以强调这是带符号作用。）

4.1.2. 中的外幂。目前我们主要关注一种特定的 Σ_k-作用：对于奇偶群胚 X，我们考虑通过置换 k 因子在 $X * \cdots * X$ 上给出的 Σ_k-作用，其中 2-胞 ε 是带符号作用。注意， $X * \cdots * X$ 的底层群胚是笛卡尔积 $X \times \cdots \times X$，也可以方便地写作 Map(k, X)。

对于 $f\colon X \to \mathbb{P}$ 在 $\mathbb{Z}$ 和 $k \in \mathbb{N}$中，我们定义 k 次外幂

$$\bigwedge^k X := X^k/\Sigma_k$$

其结构映射由 $X^k/\Sigma_k \to \mathbb{P}^k/\Sigma_k \to \mathbb{P}$ 给出。关键在于，最后一个映射涉及奇偶映射$p\colon \Sigma_k \to O(1)$，交错符号正是由此产生的。具体而言， X^k/Σ_k 中从 $(y_1, \ldots\ldots, y_k)$ 到 $(x_1, \ldots\ldots, x_k)$ 的一个态射由一个置换 $\sigma \in \Sigma_k$ 和 k 个态射 $\gamma_j\colon y_j \to x_{\sigma(j)}$ 在 X 中组成。其奇偶性为 $p(\sigma)f(\gamma_1)\cdots f(\gamma_k) \in O(1)$。

看起来我们定义的是对称幂，而不是外幂，但我们很快就会看到，这是一个合理的定义。首先，一个令人放心的观察是，它具有正确的“维数”：

4.1.3. $\bigwedge^k X$ 的“维数”。如果 X 具有 n 个（可定向）连通分支，并且我们使用奇偶群胚$\bigwedge^k X$ 形成切片 $\mathbb{Z}_{/\bigwedge^k X}$ 作为向量空间的模型，那么根据 3.3.2，该向量空间是 $\mathbb{Q}_{\pi_0(\bigwedge^k X)^\circ}$，由 $\bigwedge^k X$ 的可定向分支张成。但在映射 $\phi \in \mathrm{Map}(k, X)/k!$ 中，所有非单射映射都有一个奇自同构：如果 k 中的两个元素被映射到 X 中的同一个点（或仅仅是同一个分支），那么这两个元素的换位就构成了 ϕ 的一个奇自同构。反之，如果所有元素都被映射到不同的连通分支，那么只有平凡置换能够固定 ϕ。因此，$\mathrm{Map}(k, X)/k!$ 的可定向部分是 $\mathrm{Inj}(k, X^\circ)/k!$. 注意， Σ_k 在 $\mathrm{Inj}(k, X^\circ)$ 上的作用是自由的，所以群胚 $(\bigwedge^k X)^\circ = \mathrm{Inj}(k, X^\circ)/k!$ 具有 $\binom{n}{k}$ 个连通分支，这正如外幂的概念所预期的那样。

4.1.4. 备注。 当然，我们的意图是将群胚 $\bigwedge^k X$ 的元素记作 $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$，但在本文中，我们仍致力于建立理论，因此发现沿用元组记号（x_1、…、 x_k）更为实用。

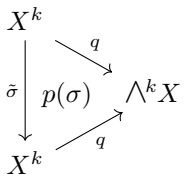
4.1.5. 例：离散集合的外幂。 若 X 只是一个基数为 n的离散集合，那么对每个 $k \in \mathbb{N}$ ，外幂 $\bigwedge^k X$ 都是一个奇偶群胚（而非离散集合），但其可定向部分是（同伦）离散的。事实上，可定向点是由互不相同的 点组成的元组 $x = (x_1, \ldots, x_k)$，因此 x 的自同构群是平凡的。

命题 4.1.6。 外幂 $\bigwedge^k X$ 是 Σ_k 在 X^k 上的带符号置换作用的弱商，换言之，是相应函子 $B\Sigma_k \to \mathbb{Z}$ 的（同伦）余极限。

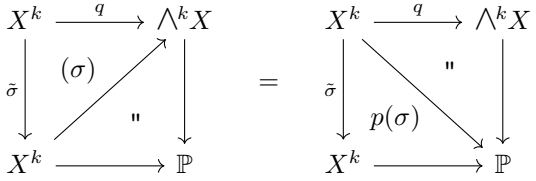
（相较之下，与 X^k 上 Σ_k 的直接置换作用相对应的 $B\Sigma_k \to \mathbb{Z}$ 的（同伦）余极限，是带有纯偶奇偶结构的普通弱商 $X^k/k!$ 这就是 X 的对称幂。）

下面的证明与标准证明并无太大不同；标准证明说明弱商是群胚范畴中的同伦余极限。我们详细给出证明，因为我们非常重视严谨处理奇偶结构。

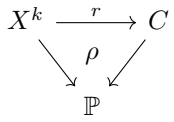
证明。 首先，我们检验 $\bigwedge^k X$ 是作用下的一个余锥。在底层群胚的层面上，很明显我们有所需的 2-胞



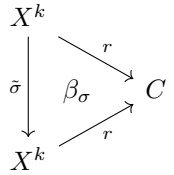
因为三角形不交换，但阻止其交换的置换恰好可作为 $\bigwedge^k X$ 中的态射。接下来还需检查这是在 $\mathbb{P}$ 上的：为此，我们首先应说明，商映射 $q\colon X^k \to \bigwedge^k X$ 带有平凡 2-胞腔。现在所需的方程为



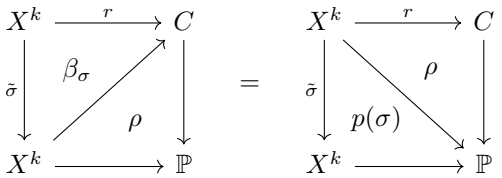
这一点显而易见。现在考虑作用下的一个挑战者余锥，即一个



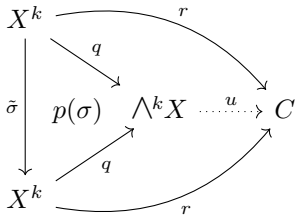
配备一个相容系统的



当然，这必须是在 $\mathbb{P}$上进行的，也就是说，我们有

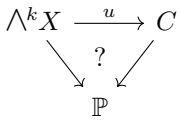


现在的结论是，存在唯一的 $u : \bigwedge^k X \to C$ 填充



(20)

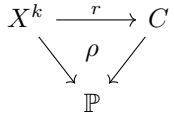
以给出 β_σ。我们可以让这两个三角形严格交换，并且存在一个真正唯一的 u 来实现这一点：在对象上的取值由 u 决定，因为 q 在对象上是恒等的。出于同样的原因， u 在“旧”态射上的取值也已确定。对于“新”态射，请注意，每个新态射都恰好作为自然变换 $p(\sigma)$的一个分量出现，因此 u在这类新态射上的取值必然是 β_σ中相应的分量。这个2-胞



“悬挂在.....之下” u 由 ρ唯一确定。如果允许 (20) 中的两个三角形不严格交换，而是带有一个2-胞，那么 u的定义就有一定的余地，因为我们可以将这样的2-胞从一个三角形移到另一个三角形；不过， u的不同选择之间由唯一确定的2-胞关联，因此选择空间仍然是可缩的。（在这一论证的细节中， q 在对象上为恒等这一点同样重要。）

□

4.1.7. 定义。余锥



如证明中所述，称为交错映射。

将 $\bigwedge^k X$ 描述为余极限，现在可改写为：

推论 4.1.8。 商映射 q： $X^k \to \bigwedge^k X$ 是泛交错映射。

4.1.9. 备注。 对于向量空间，外幂的一项关键性质是：如果有重复的因子，那么外幂就是零，例如 $v \wedge v = 0$ （有时这也被视为外幂的定义）。在客观层面，“零”并不是一个太可靠的概念，但显然（x, x） $\in \bigwedge^2 X$是一个不可定向点，因为它有一个奇自同构。因此，虽然它并不完全是“零”，但在取基数之后它就消失了。

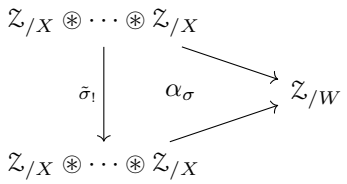
4.2 $\mathbf{lin}\mathit{lin}^{\pm}$中的外幂

本小节的目标是说明，$\bigwedge^k X$ 在 $\mathbb{Z}$ 中的泛性质可以推广为一个泛性质

$$\bigwedge^k(\mathbb{Z}_{/X}) := \mathbb{Z}_{/\bigwedge^k X}$$

在$\mathit{lin}^{\pm}$中。换句话说，泛性质也适用于由跨度给出的交错映射（而不只是它原本为之设计的 $\mathbb{Z}$ 中的纯正向映射）。我们首先需要定义交错线性函子。

4.2.1. 交错线性函子。若一个线性函子 $\mathbb{Z}_{/X} \circledast \cdots \circledast \mathbb{Z}_{/X} \to \mathbb{Z}_{/W}$ 配备了对每个 $\sigma \in \Sigma_k$ 都成立的相容 2-胞腔系统，则称其为交错的。

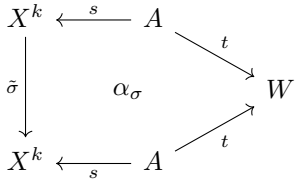


当然，这必须是在 $\mathbb{P}$ 上的。相容性就是 $\alpha_\sigma \alpha_t = \alpha_{\sigma\tau}$。

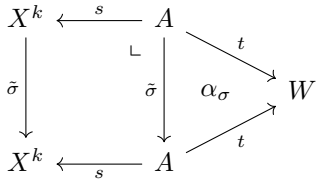
在跨度层面，这意味着我们有一个跨度

$$X^k \xleftarrow{s} A \xrightarrow{t} W$$

以及相容的 2-胞腔



通过 跨度的复合已经定义，因此我们可以将其整理为一个拉回方块和一个三角形 2-c ell



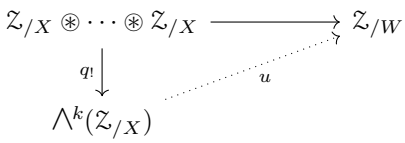
这些映射的全体 $A \to A$ 构成了对 A的一个 Σ_k-作用。这些映射再次记作 $\tilde{\sigma}$，因为该作用是沿 s 对 X^k上的带符号作用进行拉回所得。另请注意，数据 $(t,\ \alpha_\sigma)$ 将 W 展示为该作用下的一个余锥。

定义了交错线性映射后，我们就可以陈述泛性质了：

命题 4.2.2. 商映射

$$q_! : \mathbb{Z}_{/X} \circledast \cdots \circledast \mathbb{Z}_{/X} \longrightarrow \bigwedge^k(\mathbb{Z}_{/X})$$

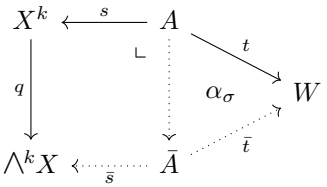
是泛交错线性映射。也就是说，任何其他交错线性映射 $\mathbb{Z}_{/X} \circledast \cdots \circledast \mathbb{Z}_{/X} \longrightarrow \mathbb{Z}_{/W}$都唯一地分解为



（通过线性映射 u）。

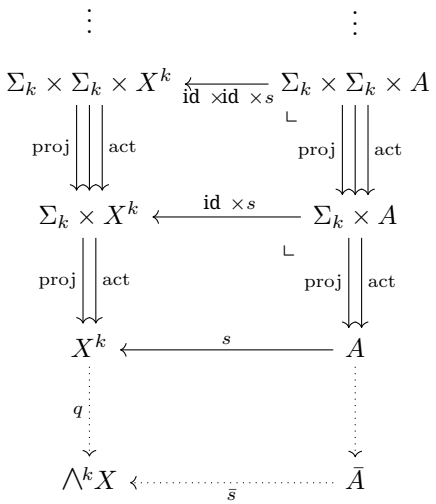
证明。 所有输入数据都是 $\mathbb{Z}$ 内的映射，尽管在记号中我们省略了到 $\mathbb{P}$ 的结构映射。该构造仅利用 $\mathbb{Z}$ 中成立的泛性质，因此无需检查

任何关于 $\mathbb{P}$ 的相容性。给定一个跨度（即一个 $\mathbb{P}$-跨度） $X^k \xleftarrow{s} A \xrightarrow{t} W$，我们需要（唯一地）给出以下数据



(21)

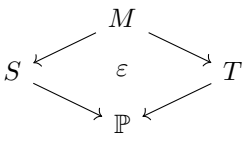
我们记 $\bar{A} := A/\Sigma_k$，这里参考的是由拉回从 X^k 上的带符号置换作用诱导的作用，正如交错函子的定义（4.2.1）中所述。这意味着 $\bar{A}$ 是一个单纯群胚的几何实现， $\Sigma_k{}^\bullet \times A$，正如 $\bigwedge^k X$ 是单纯群胚 $\Sigma_k{}^\bullet \times X^k$的几何实现一样，并且二者组成如下图表



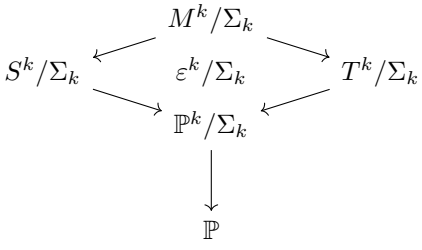
根据对 A上作用的构造，单纯映射中的所有方形都是拉回方块。我们调用下降来推出，几何实现之间的方形同样是拉回方块：根据 Thomason 的全息极限定理 [32], ，弱商同时也是一个 ∞-范畴余极限，因此由下降 [27,定理 6.1.0.6] ，在 ∞-空间上的 $\mathbb{P}$ -topos 中，带有余极限的方形也是拉回方块，因为单纯映射中的所有方形都是如此。现在我们构造出了（21）中的拉回方块。三角形由 A的泛性质得出：由于交错函子的概念包含如下条件： W 是 A上 Σ_k-作用下的余锥，商的泛性质 A 给出了映射 $\bar{t}$ 以及三角形 2-胞腔 α_σ，并且这一选择是唯一的。事实上， A 的选择同样是被迫的：由于（21）中的方形必须是拉回方块，而根据交错线性函子的定义，单纯映射中的所有方形也是拉回方块，因此由余极限的泛性质（即 $\mathbb{Z}$ 是局部笛卡尔闭的这一事实）可知， A 必须是该余极限。

□

4.2.3. 外幂的函子性。 $\mathbb{P}$ 跨度的外幂只需逐分量定义：对于



第 k 个外幂是



(22)

其中，最后一个奇偶映射 $\mathbb{P}^k/\Sigma_k$ 由 p诱导： $\Sigma_k \to O$（1）。这与跨度的复合相容，因为函子 $\boldsymbol{Grpd} \to \boldsymbol{Grpd}$ $X \mapsto X^k/\Sigma_k$ 保持拉回（参见 [15]）。

4.3 行列式

我们将定 义自端跨度的行列式为其最高外幂（相对于其定义域） .

4.3.1. 设定与记号。 在本小节中，我们固定一个具有 n 个可定向分支的群胚 X 。我们在每个可定向分支中固定一个基点 x_i ，并构成元组

$$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

4.3.2. 最高外幂。 沿用上述记号，最高外幂$\bigwedge^n X$ 的元素是 X 中元素组成的 n 元组。一旦 n 元组中有任何一项具有奇自同构，那么整个 n 元组在 $\bigwedge^n X$ 中也会具有奇自同构；如果 n 元组中有一对同构元素，则换位会给出一个奇自同构。因此， $\bigwedge^n X$ 中的可定向点恰好是由可定向点组成且两两不同构的 n 元组。

n 元组 $x =(x_1, \ldots, x_n)$ 是 $\bigwedge^n X$ 中的一个可定向点，且每个可定向点都与它同构。将 $\bigwedge^n X$ 描述为一个 Σ_n 作用的商，可精确描述这些同构：若 $(y_1, \ldots, y_n) \simeq (x_1, \ldots, x_n)$ 是 $\bigwedge^n X$ 中的一个同构，那么由于这些元组中的各个元素两两不同构，存在唯一确定的置换 $\sigma \in \Sigma_n$ ，使得

$$(y_1, \ldots, y_n) \simeq (x_{\sigma 1}, \ldots, x_{\sigma n}) \simeq (x_1, \ldots, x_n)$$

其中第一部分是 X 中映射构成的元组，例如 $\gamma_i : y_i \xrightarrow{\sim} x_{\sigma i}$；第二部分是置换$\sigma^{-1}$。

在 $y = x$ 的特殊情形下，我们看到 x 的自同构群是 n 点的自同构群的乘积（根据假设，这些点都是偶的）。总之：

引理 4.3.3。 设 X 是一个具有 n 个可定向分支的群胚，其基点分别为 x_1、……、 x_n。那么，最高外幂 $\bigwedge^n X$ 的可定向部分是连通的，其自同构群为$x! \ = x_1! \ \cdots x_n!$ 。

–

(Note，即若 X 没有可定向分支，则最高外幂是 $\bigwedge^0 X = X^0/0! \ = 1$.)

4.3.4. 备注。 我们称它为最高外幂，因为它是具有可定向点的最高次幂。但请注意，高次幂并非空集——它们只是不具可定向性。

4.3.5. 行列式。设 X 是如上所述具有 n 个可定向分支的有限群胚。自端跨度 $X \leftarrow A \to X$ 的行列式 A，记作 Det(A)，按定义为如下跨度

$$\bigwedge^n X \leftarrow \bigwedge^n A \to \bigwedge^n X.$$

（2-胞腔结构与 (22) 中的相同。）

涉及的是所有元组，而不只是单射元组，这意味着行列式是一个大得多的对象（参见下文4.4 ），远超经典线性代数中的预期。尤其是，它并非只是一个标量或单个群胚。不过，由于 $(\bigwedge^n X)^\circ$ 是连通的（基点为 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$），双侧纤维给出的标量 –

$$\underline{x}(\bigwedge^n A)_{\underline{x}}$$

is 是跨度中可定向部分的唯一一个项，而这个 1×1矩阵的基数 is

$$|\mathrm{Det}\, \widehat{A}|/|\underline{x}!|,$$

是一个有理数。我们接下来证明，这个有理数等于 $\widehat{\ }$ 的基数矩阵的通常行列式 A。这将是下文推论 4.3.7 。实际上，我们证明该结果的客观版本：

命题 4.3.6 (客观莱布尼茨展开)。 设 $X \xleftarrow{s} A \xrightarrow{t} X$ 是 $\mathcal{Z}$ 中的一个自端跨度，并设 $x = (x_1、\ldots\ldots、 x_n)$ 是一个由可定向点组成的元组，其中每个可定向分支各取一个点。那么，标量之间存在一个典范等价

$$\underline{x}(\bigwedge^n A)_{\underline{x}} \simeq \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i \in n} {}_{x_i} A_{x_{\sigma i}}.$$

Cor推论 4.3.7。 对于 $\mathbb{Z}$ 中的任意自端跨度 $X \xleftarrow{s} A \xrightarrow{t} X$，我们有有理数之间的一个等式 rs

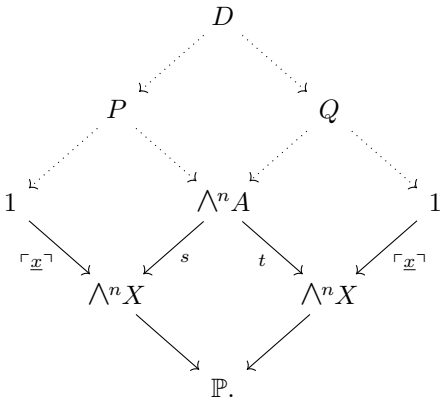
$$|\mathrm{Det}\,\widehat{A}| = \det|\widehat{A}|.$$

由命题 4.3.6 的等价取基数（并追踪若干对称因子）即可得到推论。

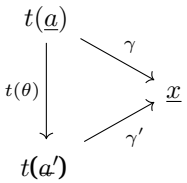
命题的证明。双侧纤维

$$D := {}_{\underline{x}}(\textstyle\bigwedge^n A)_{\underline{x}}$$

是实线图表的极限 D



为便于计算这个极限，我们假设 s 是一个纤维化。（这不失一般性，因为总可以通过纤维化替换来实现，而不改变同伦类型。）现在可以使用例 3.3.5 中给出的双侧纤维描述。D的对象是一些对 (a,γ)，其中 $a \in \bigwedge^n A$ 满足 $s(a) = x$，并附带一个同构 $\gamma\colon t(a) \simeq x$，它属于 $\bigwedge^n X$。从 (a,γ) 到 (a',γ') 的态射是 $\bigwedge^n A$ 中的一个态射 $\theta\colon a \sim a'$，满足 $s(\theta) = \mathrm{id}_x$，并且



条件 $s(\theta) = \mathrm{id}_x$ 意味着这样的态射 θ 不可能涉及置换。

同构 $\gamma\colon t(a) \leftrightarrows x$ 具有定义良好的置换分量 σ，因为列表 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 中的各项彼此不同构。这意味着 γ可以唯一地写成

$$t(\underline{a}) \leftrightarrows (x_{\sigma 1}, \ldots, x_{\sigma n}) \leftrightarrows (x_1, \ldots, x_n)$$

其中，第一部分是 X 中的映射元组 $(\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_n)$，满足 $\gamma_i\colon t(a_i) \leftrightarrows x_{\sigma i}$；第二部分则是置换 σ^{-1}。不同的 σ 位于 D 的不同连通分支中，因为连接它们的同构 θ 不可能涉及置换。因此，D 可分解为按置换索引的和

$$D = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} D_\sigma.$$

在每个直和项 D_σ 内，一切都是逐坐标进行的：D_σ 的点是由元组对 $(a,\ \gamma)$ 构成的，其中 $a = (a_1, \ldots\ldots, a_n)$ 且 $\gamma = (\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_n)$，满足 $\gamma_i\colon t(a_i) \leftrightarrows x_{\sigma i}$；$D_\sigma$ 中的态射也同样是逐坐标进行的，正如前面所述。因此，D_σ 是群胚的乘积

$$D_\sigma = \prod_{i=1}^{n} D_{\sigma,i},$$

其中，$D_{\sigma,i}$ 是由满足以下条件的配对 (a_i,γ_i) 构成的群胚：a_i 属于 A，且 $s(a_i) = x_i$ 和 $\gamma_i\colon t(a_i) \leftrightarrows x_{\sigma i}$（态射由相容的 $a_i \to a_i'$给出）。这意味着我们有

$$D_{\sigma,i} \simeq {}_{x_i}(A)_{x_{\sigma i}},$$

原始跨度的双侧纤维之一。

现在我们已经得到了群胚等价

$$D \simeq \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \prod_{i\in n} {}_{x_i}(A)_{x_{\sigma i}},$$

接下来只需检查符号。条目 ${}_{x_i}(A)_{x_{\sigma i}}$ 可能各自带有符号，这些符号在乘积中与 D_σ 的符号一致；但在 D 的定义中，还会出现新的符号，它们来自定义 Q 的方形中的 2-胞腔数据。这些符号恰好是 $\mathrm{sign}(\sigma)$，因此我们得到了莱布尼茨展开公式；现在将它表述为群胚层面上的标量等价

$$D = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i\in n} {}_{x_i}(A)_{x_{\sigma i}}.$$

□

推论的证明。 $\mathrm{Det}(\widehat{A})$ 的基数等于双侧纤维 $D = {}_x(\wedge^n A)_x$的基数除以对称因子 $|x!|$。根据命题 4.3.6，此基数展开为

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i\in n} |{}_{x_i}(A)_{x_{\sigma i}}| \,/\, |\underline{x}!| = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i\in n} \left(|{}_{x_i}(A)_{x_{\sigma i}}| / |x_{\sigma i}!| \right)$$

(使用 $\underline{x}! = x_1! \cdots x_n!$（引理 4.3.3），并重新排列因子），这个表达式恰好就是$\widehat{\ }$有理数矩阵的经典（数值层面）行列式莱布尼茨展开 $|A|$（其条目为 $|{}_{x_i}A_{x_j}|/|x_j!|$）。

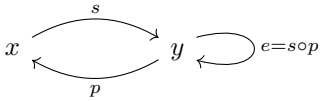
□

4.3.8. 备注。 在组合学的应用中，跨度 $X \leftarrow A \rightarrow X$ 通常只是有限集的一个跨度（也就是一个有向图）。在这种情况下，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，跨度 $\wedge^k X \leftarrow \wedge^k A \rightarrow \wedge^k X$ 都具有这样的性质：它的所有双侧纤维仍然是离散的。事实上，函子 $\wedge^k$ 保持离散纤维化，因此跨度的两条腿都是离散纤维化。在计算双侧纤维时，可得 P和 Q 都是离散的。因此，群胚 D 最终是离散的（但带有符号）。此外，正如 4.1.5中已经指出的，$\wedge^k X$ 中可定向点的自同构群是平凡的，所以 $\wedge^k A$ （其可定向部分的）基数矩阵是整数矩阵。

4.4 行列式中无关紧要的部分

在上面的行列式计算中，我们只关注了“实质”部分，也就是基数中实际可见的部分。如前所述，行列式的客观定义要庞大得多，其中包含许多冗余内容，而这些内容会相互抵消。尽管如此，这些内容依然存在。我们不知道它们是否有什么意义。这里我们只做一个非常简单的计算，以便至少窥见其中一斑。

4.4.1. 例。考虑由一个分裂幂等元给出的范畴：该范畴有两个对象，x和 y，以及五个态射，如下图所示：



其中 $p\circ s = \mathrm{id}_x$，且 $s\circ p =: e$ 是幂等元。我们考虑由底层图给出的跨度，因此所讨论的跨度具有 $X = \{x, y\}$ 和 $A = \{x, y, s, p, e\}$，左腿 d_1 由“定义域”给出，右腿 d_0 由“余域”给出。基数矩阵为$\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\2&\end{smallmatrix}\right)$，其行列式为1。

客观行列式是通过在整个跨度上取 $\wedge^2$ 得到的。我们看到，$\wedge^2 X$ 有四个元素：xx，xy，yx，yy（为节省空间，我们写作 xx，而不采用规范写法 $x \wedge x$）。xy 和 yx之间有来回的态射，并且 xx 和 yy有非恒等（因此为奇）自同构。总的来说，$\wedge^2 X$ 有三个连通分支，其中只有一个是可定向的，也就是包含 xy 和 yx的那个。我们已经知道，要计算行列式的基数，只需计算矩阵的（xy，xy）项（下图中的白色项）；不过，为了展示非实质部分，我们实际计算$\wedge^2 A$ 的全部9个双侧纤维（非实质项以灰色标出）：

	xy	xx	yy
xy	$(xy,\ \mathrm{id})$ $(xe,\ \mathrm{id})$ $(sp,\ \tau)$	$(xp,\ \mathrm{id})$ (xp,τ)	$(sy,\ \mathrm{id})$ (sy,τ) $(se,\ \text{标识})$ (se,τ)
xx	$(xs,\ \mathrm{id})$ $(sx,\ \tau)$	$(xx,\ \mathrm{id})$ $(xx,\ \tau)$	$(ss,\text{恒等映射})$ (ss,τ)
yy	$(py,\ \mathrm{id})$ (yp,τ) $(pe,\ \mathrm{id})$ (ep,τ)	$(pp,\ \mathrm{id})$ (pp,τ)	(yy,id) (yy,τ) $(ey,\text{恒等映射})$ (ey,τ) $(ye,\text{恒等映射})$ $(ye,\ \tau)$ $(ee,\ \mathrm{id})$ $(ee,\ \tau)$

所有元素都由一对态射和一个置换构成。（这对态射并排写在一起，例如最后一个元素中的 ee 。）置换为恒等置换 id 的元素是正的，而置换为换位 τ 的元素是负的。一般而言，根据命题 4.3.6 的证明中的描述， ab-cd 项中的元素为

$$\text{pairs of morphisms} \quad a \xrightarrow{f} c \quad b \xrightarrow{g} d \quad \text{with identity permutation} \qquad \text{written } (fg, \mathrm{id})$$

or

$$\text{pairs of morphisms} \quad a \xrightarrow{f} d \quad b \xrightarrow{g} c \quad \text{with transposition } \tau \text{ (interchanging the two codomains).}$$

在可定向部分中， $\wedge^2 A$的 xy-xy-纤维有三个可能的元素：
• 这对从对象对 xy 到对象对 xy 的态射 xy （因此置换为 id），
•这对同样从 xy 到 xy 的态射 xe （置换为 id），
• 从 xy 到 xy 的换位的这一对 sp （因此具有一个 τ）。
总而言之，行列式的“实质部分”的基数为 $2-1=1$ （与基数矩阵（$\begin{smallmatrix}1&1\\1&2\end{smallmatrix}$）一致）。

所有灰色项的净基数均为零（并不真正构成矩阵基数的一部分）。例如，在 xx-xy 项中，态射对 xs 从 xx 到 xy （带有恒等态射），而 sx 则从 xx 到 xy 的换位（因此具有一个 τ）。 yy-xy 项与此类似。在矩阵的 xx 列和 yy 列中，由于余域是一个对称对，每一项都同时以恒等态射和 τ 的形式出现，显然会相互抵消。

4.4.2. 历史注记与挑战。在离散情形下，跨度 $X \leftarrow A \rightarrow X$ 是一个有向图。用有向图来解释行列式（尤其是莱布尼茨展开），至少可以追溯到 Jackson [17]和 Foata [6], ；后来 Zeilberger [33], 用带有可交换不定元权重的图，优美地统一了许多矩阵恒等式。不过，他们的框架是符号性的，而且符号的引入多少有些随意。

目前的设定更像是在客观层面建立的一个系统性框架，其特点是符号的出现完全自然而然。我们认为，在我们的设定中自然地重做 Zeilberger 的证明应该是可行的（并将其视为一项有趣的挑战），因为看起来每种情况下的符号都源自置换。我们希望， [33] 中的巧妙抵消（反号对合）最终会被证明只是更自然的群胚等价中不可定向的部分。

参考文献

[1] John C. Baez 和 James Dolan。《从有限集到费曼图》。载于 B. Engquist 和 W. Schmid 编，《数学无限——2001及以后》，第 29–50 页。Springer-Verlag，柏林，2001 年。arXiv:math.QA/0004133。

[2] John C. Baez、 Alexander E. Hoffnung和 Christopher D. Walker。高维代数 *VII*：群胚化。《理论与应用范畴》*24*（*2010*），*489–553*。*arXiv:0908.4305*。[3] Michael Barratt 和 Stewart Priddy。关于非连通幺半群及其相关群的同调。《瑞士数学评论》*47*（*1972*），*1–14*。[4] Peter G. Doyle。双射组合学的一个范畴。预印本，*arXiv:1907.09015*。[5] Peter G. Doyle 和 John Horton Conway。三除法。预印本，*arXiv:math/0605779*。[6] Dominique Foata。*Jacobi* 恒等式的一个组合证明。《离散数学年刊》*6*（*1980*），*125–135*。[7] Imma Gálvez-Carrillo、 Joachim Kock和 Andrew Tonks。同伦线性代数。《爱丁堡皇家学会学报 *A*》*148*（*2018*），*293–325*。*arXiv:1602.05082*。[8] Imma Gálvez-Carrillo、 Joachim Kock和 Andrew Tonks。分解空间、关联代数与 *Möbius* 反演 *I*：基本理论。《数学进展》*331*（*2018*），*952–1015*。*arXiv:1512.07573*。[9] Imma Gálvez-Carrillo、 Joachim Kock和 Andrew Tonks。分解空间、关联代数与 *Möbius* 反演 *II*：完备性、长度滤过与有限性。《数学进展》*333*（*2018*），*1242–1292*。*arXiv:1512.07577*。[10] Imma Gálvez-Carrillo、 Joachim Kock和 Andrew Tonks。分解空间、关联代数与 *Möbius* 反演 *III*：*Möbius* 区间的分解空间。《数学进展》*334*（*2018*），*544–584*。*arXiv:1512.07580*。[11] Imma Gálvez-Carrillo、 Joachim Kock和 Andrew Tonks。组合学中的分解空间。载于：《高阶 *Segal* 空间及其应用》（*Banff 2024*），《当代数学》第 *383* 卷，美国数学学会（*2026*）。*arXiv:1612.09225*。[12] Nicola Gambino 和 Joachim Kock。多项式函子与多项式单子。《剑桥哲学学会数学会刊》*154*（*2013*），*153–192*。*arXiv:0906.4931*。[13] Nora Ganter 和 Mikhail Kapranov。范畴的对称幂与外幂。《变换群》*19*（*2014*），*57–103*。*arXiv:1110.4753*。[14] Adriano M. Garsia 和 Stephen C. Milne。一个 *Rogers–Ramanujan* 双射。《组合理论杂志 *A* 辑》*31*（*1981*），*289–339*。[15] David Gepner、 Rune Haugseng和 Joachim Kock。 ∞-拟运算子作为解析单子。《国际数学研究通知》*2021*（*2021*），*12516–12624*。*arXiv:1712.06469*。[16] Yonatan Harpaz。双向性与有限跨度的普适性。《伦敦数学学会会刊》*121*（*2020*），*1121–1170*。*arXiv:1703.09764*。[17] David M. Jackson。李代数中 *Jacobi* 恒等式的组合解释。《组合理论杂志 *A* 辑》*23*（*1977*），*233–257*。[18] André Joyal。形式级数的一个组合理论。《数学进展》*42*（*1981*），*1–82*。[19] André Joyal。解析函子与结构集合。载于《枚举组合学》（蒙特利尔/魁北克，*1985*），《数学讲义》第 *1234* 卷，第 *126–159* 页。施普林格，柏林，*1986* 年。[20] André Joyal、 Ross Street和 Dominic Verity。带迹幺半范畴。《剑桥哲学学会数学会刊》*119*（*1996*），*447–468*。[21] Mikhail Kapranov。数学与物理中的超几何。载于 *M. Anel* 和 *G. Catren* 编，《数学与物理中的新空间》。剑桥大学出版社，*2021* 年。*arXiv:1512.07042*。[22] Joachim Kock。具有对称性的数据类型与群胚上的多项式函子。载于《第 *28* 届程序语义的数学基础会议论文集》（巴斯，*2012*），《电子理论计算机科学笔记》第 *286* 卷，第 *351–365* 页，*2012* 年。*arXiv:1210.0828*。[23] Joac

[24] Karl Kraus.《量子理论》的基本概念：态、效应与操作，物理学讲义第 190 卷。Springer-Verlag，柏林海德堡，1983 年。[25] Tom Leinster. 范畴的欧拉示性数。《数学文献》**13**（2008 年），21–49。arXiv:math/0610260。[26] Daniel Loeb. 具有负数个元素的集合。《数学进展》**91**（1992 年），64–74。[27] Jacob Lurie. 高阶托普斯理论，数学研究年刊第 170 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009 年。arXiv:math/0608040。[28] Louis Martini. 内部高阶范畴的米田引理。预印本，arXiv:2103.17141。[29] Louis Martini 和 Sebastian Wolf. 内部高阶范畴论中的极限与余极限。《高阶结构》**8**（2024 年），97–192。arXiv:2111.14495。[30] David Mumford. 负数为何如此令人困惑？——跨文化比较。载于 C. S. Seshadri 编，《印度数学史研究》，第 113–143 页。印度斯坦图书社，古尔冈，2010 年。[31] Stephen H. Schanuel. 负集合具有欧拉示性数和维数。载于范畴论（科莫，*1990*），数学讲义第 1488 卷，第 379–385 页。施普林格，柏林，1991 年。[32] Robert W. Thomason. 小范畴范畴中的同伦余极限。《剑桥哲学学会数学会刊》**85**（1979 年），91–109。[33] Doron Zeilberger. 矩阵代数的组合方法。《离散数学》**56**（1985 年），61–72。