从双狄拉克锥分岔出的对称性保护界面模

HABIB AMMARI 和 JIAYU QIU

Abstract. 我们严格证明了锐界面模型中界面模的存在性。这些界面模由超对称性破缺所诱导的能带反转而从双狄拉克锥分岔而出。我们确定了界面模的确切数量。证明基于层势框架的离散版本。此外，我们证明，这类界面模能够抵御保持反射对称性的扰动，因而具有对称性保护。

arXiv:2603.19442v1 [math-ph] 19 Mar 2026

关键词。 界面模，能带反转，双狄拉克锥，对称性保护，稳健性，对称性破缺，离散层势法**美国数学学会学科分类**。 35Q40, 35C20, 35P99, 82D25

Contents

1. 引言 1 1.1. 背景 1 1.2. 概述 3 2. 设置与主要结果 4 3. Γ点处的双狄拉克锥 13 3.1. 预备知识 13 3.2. 命题 2.4 的证明 14 3.3. 定理 2.5 的证明 15 4. Floquet-Bloch 本征对的带隙开启与渐近展开 16 4.1. 定理 4.1 的证明 18 5. 界面模的存在性 21 5.1. 预备知识 21 5.2. 界面模的离散层势表述 28 5.3. 边界算子的极限 29 5.4. 界面模的存在性 38 5.5. 界面模的数量 39 6. 界面模态的鲁棒性 41 6.1. 证明的主要思想 42 6.2. 引理 6.2 和命题 6.3 的证明 43 6.3. 命题 6.4 的证明 46 参考文献 48

1. Introduction

1.1. **背景**。 拓扑绝缘体的最新发展为稳健地引导波开辟了新途径。例如，根据体边对应（BEC）

原理，具有不同拓扑不变量的两种绝缘介质之间的界面，例如带隙陈数或 Kane-Mele 指数不同的界面，支持单向传播模态 [19,56]。由于源于拓扑，这类界面模只要系统中的拓扑指标保持不变，就能对无序和杂质表现出很高的稳健性；因此，这些界面模被称为拓扑保护的。值得注意的是，这种波的单向引导在经典波系统中同样能够实现，并不局限于凝聚态材料，例如光子系统 [51]。

然而，在实际系统中，由于非平凡拓扑指标十分稀少，利用体边对应实现波的稳健导引受到限制。例如，在光子介质中，通常需要通过磁光效应打破时间反演对称性，才能产生非零陈数，而这又需要强外磁场 [51]。这一困难促使人们探索其他机制，以期无需依赖传统拓扑指标也能产生稳健的界面模。

值得注意的是，在量子谷霍尔效应的研究中出现了一种此类机制。其基本结构可概述如下：

- 我们从一个由单粒子哈密顿量 $\mathcal{H}$ 描述的周期介质出发，该哈密顿量在对称群 $\mathcal{S}$作用下保持不变。对称性的存在可能会强制产生特殊的谱特征，包括相邻布洛赫能带之间的简并。例如，当 $\mathcal{S} = C_{3v}$ （六角对称性）时，能带结构可能会在高对称准动量 [31]处呈现锥形简并，即所谓的狄拉克点。
- 接下来，若通过将 $\mathcal{H}$ 替换为某个破坏对称性的项来扰动系统

$$\mathcal{H} + \delta\mathcal{H}_{per},$$

其中 $\mathcal{H}_{per}$ 不与（部分） $\mathcal{S}$对易，则简并会解除，原能带接触点附近将出现局部谱隙（示意图见图4）。重要的是，对于经过恰当选择的扰动，谱隙附近与上、下能带相关联的布洛赫特征空间，对于哈密顿量 $\mathcal{H} + \delta\mathcal{H}_{per}$和 $\mathcal{H} - \delta\mathcal{H}_{per}$呈现相反的对称特征，该特征由 $\mathcal{S}$中的剩余对称性衡量。这种现象通常称为能带反转 [65]。

- 接下来，我们考虑沿界面拼接由 $\mathcal{H} + \delta\mathcal{H}_{per}$ 和 $\mathcal{H} - \delta\mathcal{H}_{per}$ 描述的两种体介质所形成的异质结构。人们推测，在特定情形下，形式分析和严格分析均支持此处成立一种较弱形式的体边对应：即当相邻介质呈现能带反转时，会出现界面模。在这种情形下，界面态可视为从原先发生能带接触处的简并谱点分岔而出。

与基于非平凡拓扑指标的经典体边对应相比，能带反转机制在具体模型中往往更容易实现。例如，在光子系统中，可以通过对周期结构进行适当的几何形变来实现这一机制，而无需借助外磁场破坏时间反演对称性 [51]。尽管由此产生的界面模并非通常意义上源自全局拓扑不变量，但仍表现出某种稳健性。尤其值得关注的是对称性保护：假设体哈密顿量 $\mathcal{H} \pm \delta\mathcal{H}_{per}$以及在它们之间插值的界面构型，在原对称群 $\mathcal{S}$中的某个对称性 $\mathcal{O}$ 下保持不变。那么，预期相应的界面模能够抵抗保持该对称性 $\mathcal{O}$ [33]的扰动。本研究旨在对这一机制进行严格分析。我们证明了界面模的存在性

这些界面模由一类离散哈密顿量的能带反转诱导产生，并证明了它们在保持对称性的扰动下具有稳健性。

从数学角度来看，对能带反转诱导的界面模的分析始于 Fefferman 和 Weinstein [29] 的工作。在该论文中，作者证明了一维畴壁模型中界面模的存在性；该模型在两个周期性薛定谔算子之间平滑插值，而这两个算子在狄拉克点附近均表现出能带反转。此后，他们的多尺度分析被拓展至各种二维情形，证明了蜂窝状结构中从狄拉克点分岔出的界面模的存在性；例如参见 [26, 30, 43]。这些工作仍处于畴壁模型的框架之内。在亚波长谐振器链的背景下，Ammari等人采用虚源法和托普利兹理论研究界面模 [4, 7]。最近，Qiu等人发展了一种层势框架，可用于研究锐界面模型中的界面模；在这类模型中，两种体介质直接相邻，中间没有绝热调制。该方法适用于一维和二维系统中从狄拉克点或二次简并点分岔出的界面模 [45,57,59]。我们强调，在上述工作中，界面模完全由能带反转机制导出，并未假设存在非平凡的全局拓扑不变量。尤其是，对于这一非拓扑情形下二维界面模稳健性的严格分析，文献中似乎尚付阙如。相比之下，在某些特殊情形下，能带反转会产生非平凡的拓扑不变量。在这种情况下，界面模的存在性和稳健性可由（强）体-边对应原理推出。这一原理的数学理论已在多种情形下得到广泛发展，包括薛定谔算子 [21, 24, 25, 35, 40, 47, 63], 、狄拉克哈密顿量 [15, 16], 、紧束缚哈密顿量 [12–14, 20, 27, 28, 36–38, 42, 61], 以及经典波算子 [1–5, 7, 10,46, 48, 60, 64]；有关全面论述，还可参阅优秀专著 [55] 和近期综述 [17] 。

本文证明了界面模的存在性：它们从一种特定类型的谱简并处分岔而出。在这种简并中，由于系统具有额外对称性，两个狄拉克锥重合，形成双狄拉克锥。我们证明，破缺这一对称性后会发生能带反转，并由此产生局域界面态。我们的分析针对由离散哈密顿量支配的锐界面模型展开。证明依赖于层势框架的离散版本，该框架不仅使我们能够构造界面模，还能确定其精确重数。本文的一项主要成果是对对称性保护给出了严格证明：我们证明，界面模对于保持界面构型反射对称性的扰动具有稳健性。据我们所知，这是首次对二维界面模的稳健性进行完全严格的分析；这些界面模源于能带反转，且不存在非平凡的全局拓扑不变量。物理学文献最初提出了支撑双狄拉克锥的超对称结构，将其视为量子自旋霍尔效应的光子学类比 [44, 51, 66]。从数学角度看，近期 Zhu等人 [23], 运用受 Fefferman 和 Weinstein 启发的多尺度技术，在畴壁模型的背景下分析了从双狄拉克锥处分岔的界面模；文献 [50] 则研究了最近邻跃迁哈密顿量。相比之下，我们基于离散层势方法的研究适用于锐界面构型及任意跃迁值域。我们期望，这一框架，尤其是用于确立对称性保护稳健性的机制，能够为该领域带来新的见解。

1.2. **文章结构**。本文的组织结构如下：

• 在第 2 节中，我们首先详细介绍问题设置，包括晶格模型和所支配的离散哈密顿量。我们将说明哈密顿量具有超对称性时双狄拉克锥的形成过程（定理 2.5）。随后，我们将给出主要结果，包括超对称性破缺所诱发的能带反转带来的界面模的存在性及其精确数量（定理 2.11），以及此类界面模对于保持对称性的扰动的稳健性（定理 2.16）。

• 在第3节中，我们利用对称群的表示论证明定理 2.5 所述双狄拉克锥的出现。

• 在第 4 节中，我们详细给出对称性破缺的体哈密顿量 $\mathcal{H}_{\pm\delta}$ 的弗洛凯-布洛赫特征值对的渐近展开；见定理 4.1。渐近展开有两方面的意义。首先，由此可立即得出，双狄拉克锥在对称性破缺扰动下被抬升，并在 $\mathcal{H}_{\pm\delta}$ 之间打开一个共同带隙（见定理 2.7）。更重要的是，从弗洛凯-布洛赫特征函数的渐近展开可以清楚地看出，在共同带隙的端点处， $\mathcal{H}_{\delta}$ 会与 $\mathcal{H}_{-\delta}$ 交换其特征空间，即发生能带反转。这一现象是界面模分岔的核心，将在下一节中作更详细的阐述。

• 在第 5 节中，我们通过层势框架的离散版本，证明关于界面模存在性的第一个主要结果——定理 2.11。我们首先介绍一些预备知识，主要涉及物理格林算子和离散能流的性质；详见第 5.1 节。随后，我们在第 5.2 节建立层势公式，将界面模的研究转化为求解边界匹配算子的特征值问题；详见命题 5.9 和 5.10。为在小带隙区域（$\delta \ll 1$）内完成这一工作，关键步骤是研究边界匹配算子的极限，这在第 5.3 节中得以实现。值得注意的是，边界匹配算子的极限清晰地呈现出能带反转现象；详见注 5.14。基于第 5.3 节所得的信息，我们在第 5.4 节和第 5.5 节中求解边界匹配算子的特征值问题，从而完成定理 2.11 的证明。

•在第 6 节中，我们证明定理 2.16，说明界面模在保持对称性的扰动下具有稳健性。正如第 6.1 节所概述的，证明的主要思路基于周期近似法。具体而言，我们首先利用 Lyapunov-Schmidt 约化论证，在一系列宽度递增的条带上构造扰动界面模态；由于扰动哈密顿量具有对称性，该论证是成立的。随后，我们证明这些模态在无穷远处弱收敛。此过程的关键在于对条带上的扰动界面模态进行一致估计，如第 6.2 节所证。在此基础上，弱收敛性可由适用于我们条带几何的一种标准紧性论证推出，详见第 6.3 节。

2. Setup and Main Results

我们考虑定义在三角晶格上的单粒子哈密顿量，其内部自由度（DOF）为六。具体而言，该晶格定义如下：

$$\Lambda := \mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_1 \oplus \mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2, \quad \boldsymbol{\ell}_1 := (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^\top, \boldsymbol{\ell}_2 := (0,1)^\top.$$

自然地，态空间是

$$\mathcal{X} := \ell^2(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^6.$$

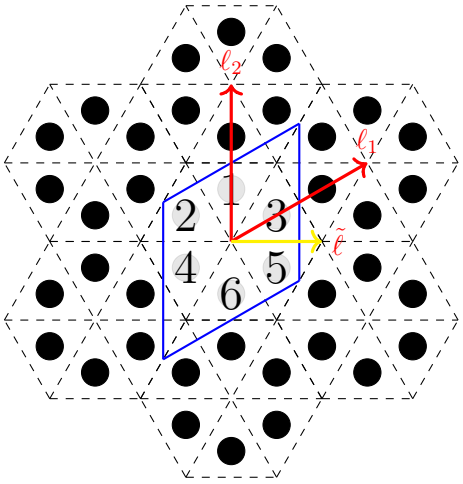


FIGURE 1. 一种超对称周期结构，包含六个子晶格（如单个原胞中的六个格点所示）。第一个原胞中的数字标示了子晶格的排列顺序。

在本文中，我们将内部自由度称为子晶格自由度，如图1所示。[1] 哈密顿量是作用于 $\mathcal{X}$ 上的有界自伴算子。在本文中，我们假设哈密顿量满足以下意义上的短程性质。

假设2.1。 若哈密顿量 $\mathcal{H}$ 的核满足以下条件，则称其具有范围 N，其中 $N>0$ 为某个

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})=0 \quad \textit{for any } \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\in\Lambda \textit{ with } \|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}\|_2>N,$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 表示 $\mathbb{R}^2$上的 $2-$范数。本文中出现的所有哈密顿量均假设具有相同的范围 N。

请注意，本文的讨论并不限于电子系统：尽管这些算子被称为“哈密顿量”，但对于一般物理系统，它们也可称为短程控制算子，例如亚波长声子和光子系统中的电容算子 [6]。

现在我们考虑一个关于 C_{6v} 点群对称的哈密顿量 $\mathcal{H}_b$。具体而言，我们考虑由以下两个元素生成的对称群：

$$\mathcal{S}=\langle \mathcal{R}_6,\mathcal{F}_x : \mathcal{R}_6^6=F_x^2=id,\ \mathcal{R}_6\mathcal{F}_x=\mathcal{F}_x\mathcal{R}_6^{-1}\rangle,$$

其中， $\mathcal{R}_6$ 和 $\mathcal{F}_x$ 分别表示 $\frac{\pi}{3}-$旋转算子和 $x-$轴反射算子（同时作用于晶格和内部自由度）。引入以下矩阵后，

$$R_6^{ext}:=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2},\quad R_6^{int}:=e_{13}+e_{21}+e_{35}+e_{42}+e_{56}+e_{64}\in\mathbb{R}^{6\times6},$$

$$F_x^{ext}:=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2},\quad F_x^{int}:=e_{16}+e_{24}+e_{35}+e_{42}+e_{53}+e_{61}\in\mathbb{R}^{6\times6},$$

其中，$e_{i,j}$ 的元素 (i,j) 等于 1，而其余元素均为 0， $\mathcal{R}_6$ 和 $\mathcal{F}_x$ 定义如下

$$(\mathcal{R}_6u)(\boldsymbol{n}):=R_6^{int}\big[u(R_6^{ext}\boldsymbol{n})\big],\quad (\mathcal{F}_xu)(\boldsymbol{n}):=F_x^{int}\big[u(F_x^{ext}\boldsymbol{n})\big].$$

[1]事实上，它也可以表示自旋自由度。我们更倾向于将内部自由度解释为子晶格，原因在于这种情况下，可以通过对几何结构进行形变来轻松设计超对称破缺微扰；详情见图2(a)。

因此， $\mathcal{H}_b$ 的对称性可概括为以下对易关系。

假设 2.2。 $\mathcal{H}_b$ 关于 Λ平移不变，即：

$$\mathcal{H}_b(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e},\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e})=\mathcal{H}_b(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})$$

对所有 $\boldsymbol{e}\in\Lambda$。此外，对每个 $\mathcal{O}\in\mathcal{S}$，均有 $[\mathcal{O},\mathcal{H}_b]=0$。

例2.3。 构造一个满足假设 *2.2* 的哈密顿量，一种简单的方法是在图*1*所示的周期结构上采用常数最近邻跳跃模型。具体而言，引入如下映射：

$$\Xi:\Lambda\times\{1,2,3,4,5,6\}\to\mathbb{R}^2,\quad \Xi(\boldsymbol{n},i):=\boldsymbol{n}+\boldsymbol{d}_i$$

with

$$\boldsymbol{d}_1:=\frac{1}{3}\boldsymbol{\ell}_2,\quad \boldsymbol{d}_2:=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\ell}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\ell}_2,\quad \boldsymbol{d}_3:=\frac{1}{3}\boldsymbol{\ell}_1,\quad \boldsymbol{d}_4:=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\ell}_1,\quad \boldsymbol{d}_5:=\frac{1}{3}\boldsymbol{\ell}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{\ell}_2,\quad \boldsymbol{d}_6:=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\ell}_2.$$

那么，其核为 $\mathcal{H}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})=\Big(\mathcal{H}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})_{i,j}\Big)_{1\le i,j\le 6}$ 的哈密顿量按如下方式定义，显然满足假设 *2.2*：

$$\mathcal{H}_b(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})_{i,j}=\begin{cases}1, & \|\Xi(\boldsymbol{n},i)-\Xi(\boldsymbol{m},j)\|_2=\dfrac{1}{3},\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

$\mathcal{H}_b$ 的对称性使其具有特殊的谱结构，以下段落将对此进行详细讨论。令 $\Lambda^*:=\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_1^*\oplus\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2^*$ 为 Λ的对偶晶格，其中$\boldsymbol{\ell}_1^*:=2\pi(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0)^\top$，$\boldsymbol{\ell}_2^*:=2\pi(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ 1)^\top$。$\Lambda^*$（布里渊区）的原胞取为

$$Y^*:=\{s\cdot\boldsymbol{\ell}_1^*+t\cdot\boldsymbol{\ell}_2^*:-\frac{1}{2}\le s,t\le\frac{1}{2}\}.$$

对于每个 $\boldsymbol{\kappa}=\kappa_1\boldsymbol{\ell}_1^*+\kappa_2\boldsymbol{\ell}_2^*$，我们将 $\mathcal{H}_b$ 的 Floquet变换记为 $\mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa})$，即将 $\mathcal{H}_b$ 限制在空间

$$\mathcal{X}_{\boldsymbol{\kappa}}:=\{u\in\ell^2_{loc}(\Lambda)\otimes\mathbb{C}^6:\ u(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e})=e^{i\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\kappa}}u(\boldsymbol{n}),\ \forall\boldsymbol{e}\in\Lambda\}\simeq\mathbb{C}^6, \tag{2.1}$$

并赋予内积

$$(u,v)_{\mathcal{X}_{\boldsymbol{\kappa}}}:=(u(\boldsymbol{0}),v(\boldsymbol{0}))_{\mathbb{C}^6}.$$

那么 $\mathcal{H}_b$ 的对称性在动量空间中也有对应体现：

$$\mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa}+n_1\cdot\boldsymbol{\ell}_1^*+n_2\cdot\boldsymbol{\ell}_2^*)=\mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa}),\quad n_1,n_2\in\mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{R}_6\mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa})\mathcal{R}_6^{-1}=\mathcal{H}_b((R_6^{ext})^{-1}\boldsymbol{\kappa}), \tag{2.3}$$

and

$$\mathcal{F}_x\mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa})\mathcal{F}_x^{-1}=\mathcal{H}_b((F_x^{ext})^{-1}\boldsymbol{\kappa}). \tag{2.4}$$

动量空间中对称操作 (2.2)–(2.4) 的不动点称为高对称点，这些点会呈现有趣的谱性质。我们关注高对称点 $(0,\ 0)$（即物理学文献中的 Γ 点）及其附近的能带结构。由于内部自由度为六，$\mathcal{H}_b$ 的谱由六条能带组成，即 $\mathrm{Spec}(\mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa}))=\{\lambda_j(\boldsymbol{\kappa})\}_{1\le j\le 6}$。值得注意的是，由于 $\mathcal{X}_0$ 在群 $\mathcal{S}$ 的作用下保持不变，且根据假设 2.2，$\mathcal{H}_b(0)$ 的特征空间可按 $\mathcal{S}$ 的不同表示分解。在物理学文献中，$\mathcal{H}_b(0)$ 的简并特征值 λ_* 称为

通常简并的，如果其本征函数构成 $\mathcal{S}$ 的多维不可约表示的基。众所周知， $\mathcal{S}$ 有两个不同的二维不可约表示，这意味着 Spec($\mathcal{H}_b$(0)) 中存在偶数重简并。下述命题在遵循标准微扰理论（例如参见 [18]）的基础上于第3.2节证明，它指出，色散曲面在二重简并特征值附近局部平坦。

命题 *2.4.* 假设 $\lambda_* \in$*Spec*($\mathcal{H}_b$(0)) 的重数为二。设 $\lambda_1(\boldsymbol{\kappa})$ 和 $\lambda_2(\boldsymbol{\kappa})$ 是色散曲面的两个分支，满足 $\lambda_* = \lambda_1(\boldsymbol{\kappa}_*) = \lambda_2(\boldsymbol{\kappa}_*)$，并设 $u_n(\cdot;\boldsymbol{\kappa})$ $(n = 1, 2)$ 是相应的弗洛凯-布洛赫特征函数。若 $\{u_n(\cdot;0)\}_{n=1,2}$ 构成 $\mathcal{S}$ 的二维不可约表示的基，则有

$$\nabla\lambda_n\big|_{\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{0}} = 0, \quad n = 1, 2.$$

根据命题 2.4，某些特殊能带结构是不可能存在的：例如，单个狄拉克锥（即两个相邻的色散曲面呈锥形接触）不可能存在于 $\mathcal{H}_b$ 在 Γ 点的能带中。因此，一个自然的问题是，是否可能存在其他类型的有趣能带结构。下文将证明，答案确实是肯定的：通过在哈密顿量 $\mathcal{H}_b$ 上施加进一步的对称性，当特征值简并度大于二时，会出现双锥结构。具体而言，我们引入以下~超对称算子 $\mathcal{T}$，将其定义为在 $\mathcal{X}$ 的基上满足以下规则的线性延拓：

$$\tilde{\mathcal{T}}\big(\mathbb{1}_{\boldsymbol{n}} \otimes \boldsymbol{v}\big) := \mathbb{1}_{\boldsymbol{n}} \otimes (e_{32} + e_{54})\boldsymbol{v} + \mathbb{1}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\ell}_1} \otimes (e_{41} + e_{63})\boldsymbol{v} + \mathbb{1}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\ell}_1-\boldsymbol{\ell}_2} \otimes (e_{15} + e_{26})\boldsymbol{v}. \tag{2.5}$$

~直观而言，$\mathcal{T}$ 可以想象为沿着一个额外向量 $\boldsymbol{\ell} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)^\top$的平移算子，如图1所示。特别是，由于图1所示结构具有 $\mathbb{Z}\tilde{\boldsymbol{\ell}}$-平移不变性，可以验证，例2.3中构造的玩具哈密顿量实际上具有 $\mathcal{T}$-对称性。

值得注意的是，正如我们将在第3.3节看到的，由以下算子生成的对称群：C_{6v} 群~$\mathcal{S}$ 和超对称算子 $\mathcal{T}$ 具有一个四维不可约表示，它是通过将 $\mathcal{S}$的二维不可约表示捏合而成的。这使得当 $\mathcal{H}_b$ 具有超对称性时，Spec($\mathcal{H}_b$) 中可能出现重数为四的简并特征值 λ_*。在这样的简并点附近，实际上可能出现双狄拉克锥结构。

~**定理 2.5**。假设对于 $\mathcal{O} \in \mathcal{S} \cup \{\mathcal{T}\}$， $[\mathcal{O}, \mathcal{H}_b] = 0$ 且 $\lambda_* \in$ *Spec*$(\mathcal{H}_b(\mathbf{0}))$ 的重数为四。设 $\lambda_n(\boldsymbol{\kappa})$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ 为色散曲面的四个分支，使得 $\lambda_* = \lambda_n(\boldsymbol{\kappa}_*)$ 和 $u_n(\cdot;\boldsymbol{\kappa})$ $(n = 1, 2)$ 为相应的弗洛凯-布洛赫特征函数。若~本征函数 $u_n(\cdot;\mathbf{0})$ 构成 $\mathcal{S}$ 的四维不可约表示的一组基，且满足以下条件：

$$\alpha_* := \Big(u_1(\cdot;\mathbf{0}), \frac{\partial\mathcal{H}_b}{\partial\kappa_1}(\mathbf{0})u_3(\cdot;\mathbf{0})\Big)_{x_0} \neq 0, \tag{2.6}$$

于是我们得到

$$\lambda_1(\boldsymbol{\kappa}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha_*||\boldsymbol{\kappa}| + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\kappa}|^2), \quad \lambda_2(\boldsymbol{\kappa}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha_*||\boldsymbol{\kappa}| + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\kappa}|^2),$$
$$\lambda_3(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha_*||\boldsymbol{\kappa}| + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\kappa}|^2), \quad \lambda_4(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha_*||\boldsymbol{\kappa}| + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\kappa}|^2).$$

请注意，定理 2.5，尤其是条件（2.6）的有效性，已针对一般的连续薛定谔哈密顿量得到证明¨，该证明 [22] 基于解析延拓论证；在亚波长物理中，对于电容算子也已得到证明 [49]。我们在定理 2.5 中主要关注

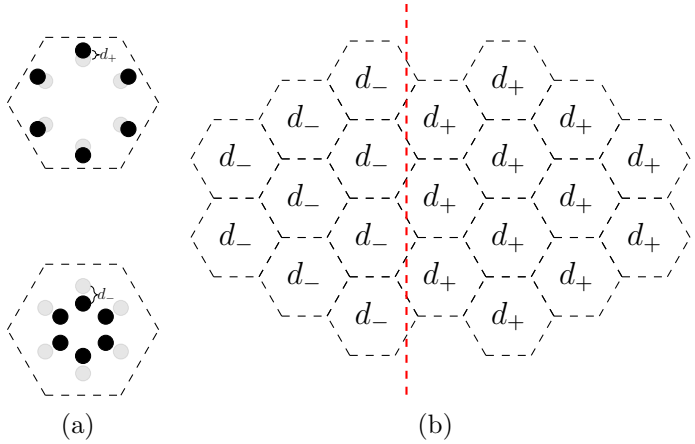


FIGURE 2. (a) 通过将子晶格向外移动距离 $d_+ > 0$ （上图）或向内移动距离$d_- > 0$（下图），打破 $\mathcal{T}$–结构。在这种情况下，位错晶格不再关于 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}$ 平移~保持平移不变。(b) 之字形界面模型：除了界面两侧， $\mathcal{T}$–对称性通过反向移动子晶格而被打破；每个晶胞中的字母 d_+ （分别为d_-）表示图2(a)中的第一种（分别为第二种）形变已实施。我们注意到，该界面结构沿 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2$ （之字形界面）平移不变，并关于 x–轴镜面对称。

的是对称性所发挥的作用，而不试图验证（2.6）；详见第3.3节。

~本文的主要关注点是</style}如果我们打破界面两侧的对称性，带隙内局域模的出现。首先，我们引入以下受扰动哈密顿量 $\delta > 0$:

$$\mathcal{H}_{\pm\delta} := \mathcal{H}_b \pm \delta\mathcal{H}_{per} \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \tag{2.7}$$

其中，扰动 $\mathcal{H}_{per}$ 满足以下性质。

假设 2.6。 $\mathcal{H}_{per}$ 相对于 Λ平移不变。此外，满足

$$[\mathcal{O}, \mathcal{H}_{per}] = 0, \quad [\tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{H}_{per}] \neq 0, \quad \forall \mathcal{O} \in \mathcal{S}.$$

~通过操控子晶格之间的相对位置（例如图2(a)所示的膨胀和收缩操作），并根据晶格格点之间相对间距的变化调整跃迁系数（见例2.3中的玩具哈密顿量），可以实现 $\mathcal{T}$对称性的破缺；详细构造参见 [50] 。

~由于 $\mathcal{T}$对称性破缺，受扰动哈密顿量 $\mathcal{H}_{\pm\delta}$ 不再具有一般的四维简并。因此，可以预期双狄拉克锥消失并打开带隙。以下结果将在第 4 节中证明:

定理 2.7。 假设定理 *2.5*中的条件、假设 *2.6*以及以下谱无折叠条件成立

$$\lambda_n(\boldsymbol{\kappa}) = \lambda_* \Longrightarrow n \in \{1, 2, 3, 4\} \ \ and \ \ \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}. \tag{2.8}$$

还假设前四条能带彼此隔离

$$\max_{\boldsymbol{\kappa} \in Y^*} \lambda_4(\boldsymbol{\kappa}) < \min_{\boldsymbol{\kappa} \in Y^*} \lambda_5(\boldsymbol{\kappa}). \tag{2.9}$$

定义 $\beta_{*,\,k}:=\big(u_k(\cdot;\,\mathbf{0})\;\mathcal{H}_{per}(\mathbf{0})u_k(\cdot;\,\mathbf{0})\big)_{\mathcal{X}_0}\in\mathbb{R}\,(k=1,3)$。我们假设

$$\beta_*:=\beta_{*,1}=-\beta_{*,3}>0. \tag{2.10}$$

于是，存在 $\Delta_0>0$ 使得对于任意 $c_*\in(0,\,1)$ 以及 $\delta\in(0,\,\Delta_0)$，$Spec(\mathcal{H}_{\pm\delta})$ 中都会打开一个带隙，其含义是

$$\Big(\lambda_*+c_*\delta\cdot\beta_*,\lambda_*-c_*\delta\cdot\beta_*\Big)\bigcap Spec(\mathcal{H}_{\pm\delta})=\emptyset. \tag{2.11}$$

在下文中，我们将（2.11）中的带隙记为 $\mathcal{I}_\delta:=(\lambda_*+c_*\delta\cdot\beta_*,\;\lambda_*-c_*\delta\cdot\beta_*)$。

注 2.8。条件（2.8）和（2.10）是打开带隙以及产生带隙内界面模的必要条件；关于（2.8）不成立时狄拉克点分岔的相关结果，请参阅 *[58]*。假设（2.9）仅出于技术原因而引入。特别地，（2.10）表明，扰动 $\mathcal{H}_{per}$ 对 *Floquet*-布洛赫模态 $u_1(\boldsymbol{n};\,\mathbf{0})$ 和 $u_3(\boldsymbol{n};\,\mathbf{0})$ 具有非平凡且相反的影响（这两类模态具有不同的对称性）。这类似于外磁场对具有相反自旋的电子所产生的影响。在一个方面，与外场的相互作用会改变电子的能量，而能量变化的符号取决于自旋方向。这种能量涨落表现为双狄拉克锥简并的解除以及带隙的出现（因此（2.10）有时也称为非简并条件）；详见第 *4* 节。基于这一类比，本文后文研究的界面模展示了量子自旋霍尔效应 *[66]*的一个类似现象。

我们还指出，条件 (2.10) 可以推广到 $\beta_{*,1}\cdot\beta_{*,3}<0$ 的情形；定理 *2.7* 以及更重要的后续定理 *2.11*和定理*2.16*仍然成立。不过，为尽量减少本文中的技术细节，我们聚焦于简单情形 (2.10)。

注2.9。除了 $\mathcal{H}_\delta$ 与 $\mathcal{H}_{-\delta}$ 之间存在共同带隙之外，对称性破缺扰动更重要的后果是，它会在 $\mathcal{H}_\delta$ 与 $\mathcal{H}_{-\delta}$ 之间诱发能带反转，其特征是带隙 $\mathcal{I}_\delta$ 两端点处的布洛赫特征空间发生交换；详细讨论请参见注*4.3*和注*5.14*。

最后，我们准备介绍作为本文主要研究对象的界面模型。该模型由紧束缚哈密顿量 $\mathcal{H}_{zig}$ 描述，具体如下：

$$\mathcal{H}_{zig}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})=\begin{cases}\mathcal{H}_\delta(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}), & n_1,m_1\geq 0,\\ \mathcal{H}_{-\delta}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}), & n_1,m_1<0,\\ (\mathcal{H}_b+\delta\mathcal{E})(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}), & \text{otherwise},\end{cases} \tag{2.12}$$

其中，由界面引入的附加哈密顿量 $\mathcal{E}$ 满足以下条件。

假设 2.10。 $\mathcal{E}$ 相对于锯齿形界面 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2$是平移不变的，即

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\ell}_2,\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\ell}_2)=\mathcal{E}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})$$

对于所有的 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$均成立。此外，$\mathcal{E}$ 具有 $\mathcal{F}_x$ 对称性，即 $[\mathcal{E},\mathcal{F}_x]=0$。

我们所关注的界面结构如图 2(b)所示。需要强调的是，在假设 2.10 下，控制哈密顿量 $\mathcal{H}_{zig}$ 具有 $\mathcal{F}_x$（即反射）对称性。正如我们稍后将要展示的，这一性质对于界面模的稳健性至关重要。

界面模是 $\mathcal{H}_{zig}$ 的广义特征函数，在横向上局域，而沿界面 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2$ 延展。具体而言，我们引入以下空间，并在 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2$ 方向施加拟周期边界条件：

$$\mathcal{X}_{\kappa_\parallel}:=\{u\in\ell^2_{loc}(\Lambda)\otimes\mathbb{C}^6:\,u(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\ell}_2)=e^{i\kappa_\parallel}u(\boldsymbol{n}),\,\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\|u(n_1\boldsymbol{e}_1)\|^2<\infty\}, \tag{2.13}$$

其中 $\kappa_\parallel \in [-\pi,\pi]$。[2] 当 $\kappa_\parallel = 0$ （本文最常使用的情形）时，我们记作$\mathcal{X}_\sharp := \mathcal{X}_{\kappa_\parallel=0}$。

作为本文的第一个主要结果，我们证明了带隙内界面模的存在性，并确定了其确切数量。

定理 2.11（界面模的存在性）。 假设定理 *2.7* 和假设 *2.10* 的条件成立。另一方面，我们假设未扰动体哈密顿量在限制于 $\mathcal{X}_\sharp$ 时具有非奇异的 $N-$ 邻近跃迁，其含义是

$$\sum_{n_2} \mathcal{H}_b(\mathbf{0}, N\boldsymbol{\ell}_1 + n_2\boldsymbol{\ell}_2) \in GL(6,\mathbb{C}). \tag{2.14}$$

那么，存在 $\Delta_1 > 0$，使得如果 $0 < \delta < \Delta_1$，哈密顿量 $\mathcal{H}_{zig}\Big|_{\mathcal{X}_\sharp}$ 恰有两个带隙内特征值（按重数计）$\lambda_{zig,\ n} \in \mathcal{I}_\delta\ (n = 1,2)$，且它们接近带隙中间能量，即

$$\lambda_{zig,n} - \lambda_* = o(\delta). \tag{2.15}$$

相应的本征模记为 $u_{zig,\ n}$；相对于 $x-$ 轴的反射，它们具有相反的奇偶性，即

$$\mathcal{F}_x u_{zig,1} = u_{zig,1}, \quad \mathcal{F}_x u_{zig,2} = -u_{zig,2}. \tag{2.16}$$

我们注意到，结合定理 2.11 和解析微扰理论，可立即得出，当 $\kappa_\parallel$ 足够接近零时，$\mathcal{X}_{\kappa_\parallel}$ 中也存在带隙内界面模：

推论 2.12. 假设定理 *2.11* 中的条件成立。那么，存在 $\kappa_\parallel = 0$ 的一个邻域，在该邻域内，$\mathcal{H}_{zig}\Big|_{\mathcal{X}_{\kappa_\parallel}}$ 恰有两个本征值 $\lambda_{zig,\ n}(\kappa_\parallel)$ $(n = 1,2)$ 位于 $\mathcal{I}_\delta$ 内。

注 2.13. 由于谱无折叠条件 (2.8)，我们知道，未受扰动的哈密顿量 $\mathcal{H}_b$ 在 $\kappa_\parallel = \pi$ 附近已经是“局部带隙”的。更准确地说，存在 $\kappa_\parallel = \pi$ 的一个邻域，在该邻域内，$\mathcal{H}_b\big|_{\mathcal{X}_{\kappa_\parallel}}$ 的谱在 $\lambda = \lambda_*$ 附近为空。因此，当 δ 足够小时，根据标准微扰理论可以看出，平行动量为 $\kappa_\parallel = \pm\pi$ 的界面哈密顿量，即 $\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}_{\kappa_\parallel}}$，在 $\mathcal{I}_\delta$ 内没有特征值。换言之，推论 *2.12* 中所述界面特征值的延拓值域不包含 $\kappa_\parallel = \pm\pi$，前提是我们进一步限制参数 δ 的大小。

注 2.14。 出于技术原因，我们施加假设(2.14) ；参见(5.68) 和(5.69)之后的讨论。若考虑最近邻非奇异跃迁，即假设*2.1*中的 $N = 1$和 $\mathcal{H}_b(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}) \in \boldsymbol{GL}(6,\mathbb{C})$ 满足 $\boldsymbol{e} \in \{\pm\boldsymbol{\ell}_1, \pm\boldsymbol{\ell}_2\}$，则该假设成立。例如，可以通过加入距离小于一的晶格点之间的跃迁，改进例*2.3*中的玩具哈密顿量：

$$\mathcal{H}_b(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{3}\|\Xi(\boldsymbol{n},i) - \Xi(\boldsymbol{m},j)\|_2^{-1}, & \|\Xi(\boldsymbol{n},i) - \Xi(\boldsymbol{m},j)\|_2 \in [\frac{1}{3},1], \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

[2]符号说明：式 (2.1) 中定义的空间 $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\kappa}}$（下标带有向量 $\boldsymbol{\kappa}$）在两个方向上施加了准周期边界条件，因此其原胞是图1所示的平行四边形。另一方面，我们只在式 (2.13) 中沿单一方向 $\boldsymbol{\ell}_2$ 施加准周期边界条件，因此 $\mathcal{X}_{\kappa_\parallel}$（下标为标量）的单元结构是一个条带。

接下来可以验证，条件(2.14)成立。我们注意到，研究连续系统中的界面模时并不需要这一技术性假设，因为微分算子自然地涵盖了所有长程跃迁；参见 *[45, 57, 59]*。

定理 2.11 的证明基于层势框架。该框架最初由先前关于连续系统的研究建立，正如引言中所述；本文则将其推广到离散结构。我们还指出，借助这一框架并沿着 [45,节 9], 的思路，甚至可以进一步了解 $\mathcal{H}_{zig}$的带隙内谱，例如 $\kappa_{\|}=0$邻域内带隙内特征值的渐近展开；这留待感兴趣的读者探究。

本文的第二个主要结果表明，定理 2.11 中发现的界面模对保持对称性的扰动具有稳健性。为准确陈述这一结果，我们先引入一些记号。我们将未扰动界面特征值 $\lambda_{zig,\,n}$ 到体谱隙补集的隔离距离记为

$$d_{zig,n} := \operatorname{dist}(\lambda_{zig,n}, \mathcal{I}_\delta^c) > 0. \tag{2.17}$$

显然，由估计式 (2.15) 可知，$d_{zig,\,n}$ 与体谱隙处于同一量级，即 $\mathcal{O}(\delta)$。本节余下各段中，我们固定参数 δ。现在引入以下一类扰动哈密顿量（稍后将给出示例）。

定义 2.15 节。 若哈密顿量 $\mathcal{W}$ 满足以下条件，则属于 *(A)* 类：
(i)（反射对称性） $[\mathcal{W}, \mathcal{F}_x] = 0$；*(ii)*（纵向局域化）存在 $M_{\mathcal{W}} \in (0, \infty)$ 使得

$$\sup_{n_1\in\mathbb{Z}} \sum_{n_2\in\mathbb{Z}, \boldsymbol{m}\in\Lambda} \|\mathcal{W}(n_1\boldsymbol{\ell}_1 + n_2\boldsymbol{\ell}_2, \boldsymbol{m})\|_{\mathbb{C}^{6\times 6}} < M_{\mathcal{W}}. \tag{2.18}$$

将扰动施加于界面模型 (2.12)，得到如下新的哈密顿量：

$$\mathcal{H}_{zig,\mathcal{W}} := \mathcal{H}_{zig} + \mathcal{W}. \tag{2.19}$$

界面模的稳健性表述如下。

定理 2.16 (界面模的对称性保护**)。** 假设定理 *2.11* 中的条件成立，且 $\mathcal{W}$ 属于 *(A)* 类。进一步假设，具有平行动量 $\kappa_{\|}=\pm\pi$ 的未扰动界面哈密顿量在 $\mathcal{I}_\delta$ 内没有特征值（即注 *2.13* 的结论成立），也就是说

$$Spec\big(\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}_{\pm\pi}}\big) \cap \mathcal{I}_\delta = \emptyset. \tag{2.20}$$

那么，存在 $c_{\mathcal{W}} \in (0,\ 1\,2)$ 使得每当

$$M_{\mathcal{W}} < c_{\mathcal{W}} \min\{d_{zig,1}, d_{zig,2}\}, \tag{2.21}$$

受扰动哈密顿量 $\mathcal{H}_{zig,\,\mathcal{W}}$ 有两个带隙内广义特征值 $\lambda_{zig,\,\mathcal{W},\,n} \in \mathcal{I}_\delta$ *(*n =1，2*)*，其对应的本征模为 $u_{zig,\,\mathcal{W},\,n} \in \ell^2_{loc}(\Lambda)\otimes\mathbb{C}^6$。对于每个 n，本征模 $u_{zig,\,\mathcal{W},\,n}$在式(2.16)的意义下具有与 $u_{zig,\,n}$ 相同的奇偶性。此外，它们具有如下分解：

$$u_{zig,\mathcal{W},n} = u_{zig,n} + u^{(1)}_{zig,\mathcal{W},n} \quad for\ some\ u^{(1)}_{zig,\mathcal{W},n} \in \ell^2(\Lambda)\otimes\mathbb{C}^6.$$

换言之，扰动界面模态的远场剖面$u_{zig,\,\mathcal{W},\,n}$ 与未扰动模态$u_{zig,\,n}$相同，只差一个 ℓ^2 局域化散射部分 $u^{(1)}_{zig\,,\,\mathcal{W},\,n}$。

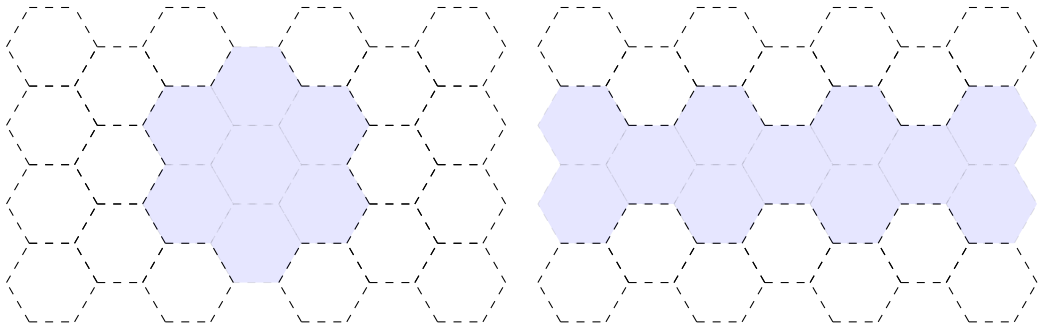


FIGURE 3. 两个受扰界面结构的示例。（a）紧致缺陷；（b）线缺陷。两种扰动均具有 $\mathcal{F}_x$ 对称性，并沿纵向局域化。

注2.17。 如果将 $\kappa_{\|} = \pm\pi$ 处带隙内特征值的隔离距离，即 $dist\big(\text{谱}\big(\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}_{\pm\pi}}\big) \cap \mathcal{I}_\delta, \mathcal{I}_\delta^c\big)$，加入(2.21)的右侧，就可以去掉(2.20) 。

例2.18。 最简单的 A 类哈密顿量描述的是紧致扰动，如图*3(a)*所示，其核指定为

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})_{i,j} = \begin{cases} \delta^2, & \|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}\|_2 \le 1,\ \|\boldsymbol{n}\|_2 \le 1 \ or\ \|\boldsymbol{m}\|_2 \le 1, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

或者更一般地，描述如图*3(b)*所示的线缺陷：

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})_{i,j} = \begin{cases} \delta^2, & \|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}\|_2 \le 1,\ |\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\ell}_2| \le 1 \ or\ |\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\ell}_2| \le 1, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

在这两种情况下， $\mathcal{W}$ 均沿 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_1$纵向局域化，如 n_2 求和所示，见(2.18)中的定义*2.15*。

基于拓扑绝缘体理论，特别是体边对应关系，人们熟知，如果体哈密顿量 $\mathcal{H}_{\pm\delta}$ 具有不同的拓扑性质，那么界面模便受到拓扑保护，即它们能够抵抗广泛的扰动。然而，正如我们在引言中强调的，实现非平凡拓扑性质并非易事。重要的是，定理 *2.11*中界面模的构造并不假设体哈密顿量具有非平凡拓扑性质。在这种情况下，可以预期，通过能带反转机制产生的界面模仅对有限类扰动 [33]具有稳健性。定理 2.16严格证明了这一观点，其中我们证明，系统中产生的界面模具有对称性保护，也就是说，当扰动具有镜面对称性时，它们是稳健的。据我们所知，定理 2.16是在缺乏拓扑保护的情况下关于界面模稳健性的首个严格结果。

值得注意的是，正如例2.18所示，定理 2.16表明，定理 2.11证明的界面模能够穿过线势垒，且在远场不受散射；我们希望这一理论结果能在实验中得到验证。

证明定理 2.16 的主要困难在于，界面特征值通常属于 $\mathcal{H}_{zig}$ 的连续谱，这是由沿着

界面 [62], 的周期性所导致的，这使得无法直接应用特征值微扰理论。我们通过周期近似论证来处理这一问题，该论证已被广泛用于研究非线性系统中的孤立波 [11, 52–54]。其思路是，首先在一条横穿界面、宽度等于 $L > 0$ 的条带上施加周期边界条件；随后，借助周期边界条件，可以应用微扰理论来确定此类条带内的界面模。最后，通过对界面模的范数进行一致估计，我们可以证明当 $L \to \infty$ 时条带界面模收敛，从而完成定理 2.16 的证明。详细内容见第 6 节。

注 2.19。 尽管本文假设哈密顿算子为有限程，但我们指出，主要结果（例如定理 *2.11*）可以推广到非对角元具有足够快（如指数）衰减的哈密顿算子。具体而言，可以通过以下步骤实现：*1*）将哈密顿算子截断至 $N-$值域；*2*）利用定理 *2.11* 证明每个 N 都存在界面模；最后，*3*）证明界面模在 $N \to \infty$ 时的收敛。此近似论证的关键在于对能隙大小进行 $N-$一致估计，即定理 *2.7*，从而控制截断哈密顿算子所引入的误差；这一估计可通过估算常数 (2.10) 得到。我们将这一推广留给有兴趣的读者。

3. Double Dirac Cone at the Γ Point

本节通过利用体哈密顿量 $\mathcal{H}_b$ 的对称性，证明命题 2.4 和定理 2.5。

3.1. 预备知识。

我们简要回顾证明中用到的表示论和微扰理论的若干方面，主要遵循 [18] 的思路。

考虑作用于 $\mathcal{X}$ 上的一般哈密顿量 $\mathcal{H}$。设 $\mathcal{G}$ 是一组作用于 $\mathcal{X}$ 上且与 $\mathcal{H}$ 对易的酉算子构成的有限群。众所周知， $\mathcal{X}$ 存在一个同型分解，可写为有限个子空间的正交直和，每个子空间都承载着 $\mathcal{G}$ 的一个不可约表示 ρ 的若干个副本。具体而言，

$$\mathcal{X} = \oplus_\rho \mathcal{X}(\rho).$$

对于每个 $u \in \mathcal{X}$（ρ），轨道 $\mathcal{G}u$ 的维数等于 ρ 的维数。由于 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{G}$ 对易， $\mathcal{H}$ 在每个同型分量 $\mathcal{X}$（ρ）上均不变。因此， $\mathcal{H}\big|_{\mathcal{X}(\rho)}$ 的特征值重数可被 ρ 的维数整除。需要指出的是，只要满足以下条件，上述论证也适用于准周期函数空间 $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\kappa}}$：**i)** 群 $\mathcal{G}$ 和哈密顿量 $\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\kappa}}$ 上均不变；**ii)** $[\mathcal{H}, \mathcal{G}] = 0$。

现在我们将讨论限定于体哈密顿量 $\mathcal{H}_b$。设群 $\mathcal{G}$ 满足条件 **i)** 和 **ii)**。对于每个 $g \in \mathcal{G}$, 其在动量空间中的对应量 $\hat{}g$ 定义为作用于 $\mathbb{R}^2$ 上并满足以下条件的酉算子

$$g\mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa})g^{-1} = \mathcal{H}_b(\hat{g}\boldsymbol{\kappa}). \tag{3.1}$$

例如，$\hat{}\,\mathcal{R}_6 = (R_6^{ext})^{-1}$ 由式 **(2.3)** 给出。设 $[\hat{}g] =([\hat{}g]_{ij})$ 为 $\hat{}g$ 在对偶基 $\{\boldsymbol{\ell}_1^*, \boldsymbol{\ell}_2^*\}$下的矩阵表示。若 $\boldsymbol{\kappa}_*$ 是 $\hat{}g$的不动点，我们令 $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_* + \kappa_1 \cdot \boldsymbol{\ell}_1^* + \kappa_2 \cdot \boldsymbol{\ell}_2^*$，并将式 **(3.1)** 展开至一阶项，

$$g\big(\kappa_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa}_*)}{\partial \kappa_1} + \kappa_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa}_*)}{\partial \kappa_2}\big)g^{-1} = \kappa_1 \cdot \sum_{i=1,2} [\hat{g}]_{i1} \frac{\partial \mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa}_*)}{\partial \kappa_i} + \kappa_2 \cdot \sum_{i=1,2} [\hat{g}]_{i2} \frac{\partial \mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa}_*)}{\partial \kappa_i}.$$

分离变量导致

$$g \cdot \frac{\partial \mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa}_*)}{\partial \kappa_j} \cdot g^{-1} = \sum_{i=1,2} [\hat{g}]_{ij} \frac{\partial \mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa}_*)}{\partial \kappa_i}, \quad j = 1, 2. \tag{3.2}$$

设 $u_1, \cdots, u_n$ 是 $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\kappa}}(\rho)$ 上表示 $\rho(g)$ 的一个基，即:

$$g(u_1 \cdots u_n)^\top = \rho(g)(u_1 \cdots u_n)^\top. \tag{3.3}$$

然后，对等式 (3.2) 两侧进行 $(u_1 \cdots u_n)$ 共轭变换，可得

$$\rho(g)^{-1} H_j \rho(g) = \sum_{i=1,2} [\hat{g}]_{ij} H_i, \quad j = 1, 2, \tag{3.4}$$

其中，矩阵 H_j 定义为

$$H_j := \left[\left(u_k, \frac{\partial \mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa}_*)}{\partial \kappa_j} u_p \right)_{\mathcal{X}_{\boldsymbol{\kappa}_*}} \right]_{1 \le k,p \le n}. \tag{3.5}$$

注意，等式 (3.4) 对所有 $g \in \mathcal{G}$ 均成立。在下一节中，我们将看到，对称性 (3.4) 如何简化矩阵 H_i 的表达式，而这对于应用微扰理论至关重要。事实上，通过求解以下方程，可以计算 $(\boldsymbol{\kappa}_*, \lambda_*)$ 附近色散曲面的 一阶展开（参见例如 [59, 节 5]）：

$$\det(\kappa_1 \cdot H_1 + \kappa_2 \cdot H_2 - \lambda \cdot \mathbb{I}_{2\times 2}) = 0. \tag{3.6}$$

因此，我们研究 $\mathcal{H}_b$ 在高对称点 $\boldsymbol{\kappa}_*$ 附近能带结构的方法总结如下:

(1) 找出与 $\mathcal{H}_b$ 对易的对称群 $\mathcal{G}$；(2) 固定一个特征值 $\lambda_* \in \mathrm{Spec}(\mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa}_*))$。然后，找出一个唯一的不可约表示 ρ，其 $\mathcal{G}$ 符合 $\mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa}_*)$ 的特征函数与特征值 λ_* 的对称性，即满足 (3.3)；(3) 对所有 $g \in \mathcal{G}$ 应用 (3.4)，以求解厄米矩阵 H_i；(4) 将第三步得到的 H_i 代入等式 (3.6)。然后，所得解即为所需的色散曲面一阶展开。

3.2. **命题 2.4 的证明**。现在我们应用第 3.1 节中概述的框架来证明命题 2.4。对于高对称点 $\boldsymbol{\kappa}_* = \mathbf{0}$ 以及 C_{6v} 对称群 $\mathcal{G} = \mathcal{S}$ 的选择，可以直接检查出，第 3.1 节中列出的所有假设均得到满足。

继续之前，我们注意到 $\mathcal{S}$ 在 $\mathcal{X}_{\mathbf{0}}$ 上有两个不同的二维不可约表示 :

$$\rho_1: \quad \mathcal{R}_6 \mapsto \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \overline{\tau} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$\rho_2: \quad \mathcal{R}_6 \mapsto \begin{pmatrix} \tau^2 & 0 \\ 0 & \overline{\tau}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\tau = e^{i\frac{\pi}{3}}$。接下来，设 $\lambda_* \in \mathrm{Spec}(\mathcal{H}_b(\mathbf{0}))$ 是一个重数为二的特征值，其对应的特征函数记为 $u_1(\cdot;\mathbf{0})$ 和 $u_2(\cdot;\mathbf{0})$。在命题 2.4 的假设下，这两个特征函数构成 ρ_1 或 ρ_2 的一个基。我们将证明，在前一种情况下，色散曲面必须在 λ_* 附近局部平坦；后一种情况的证明类似。

ˆ ˆ 为应用（3.4），注意到在对偶基 $\{\boldsymbol{\ell}_1^*, \boldsymbol{\ell}_2^*\}$ 下， $\mathcal{R}_6$ 和 $\mathcal{F}_x$ 的矩阵分别为

$$[\hat{\mathcal{R}}_6] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\hat{\mathcal{F}}_x] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

由 $\rho = \rho_1$，(3.4) 变为

$$\begin{pmatrix} \overline{\tau} & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} H_1 \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \overline{\tau} \end{pmatrix} = -H_2, \quad \begin{pmatrix} \overline{\tau} & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} H_2 \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \overline{\tau} \end{pmatrix} = H_1 + H_2, \tag{3.7}$$

and

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}H_1\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=H_1,\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}H_2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=-H_1-H_2. \tag{3.8}$$

由于 H_i 是厄米的，由 (3.7) 和 (3.8) 可直接计算得出 $H_i=0$。因此，(3.6) 表明色散曲面在 $(\mathbf{0},\lambda_*)$ 附近局部平坦。命题 2.4 的证明至此完成。

3.3. 定理 2.5 的证明。 在定理 2.5 的假设下，可以验证布洛赫哈密顿量 $\mathcal{H}_b(\mathbf{0})$ 在以下群的作用下保持不变

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}=\langle \mathcal{R}_6,\mathcal{F}_x,\tilde{\mathcal{T}}\big|_{\mathcal{X}_0}:&\mathcal{R}_6^6=F_x^2=\left(\tilde{\mathcal{T}}\big|_{\mathcal{X}_0}\right)^3=id,\\ &\mathcal{R}_6\mathcal{F}_x=\mathcal{F}_x\mathcal{R}_6^{-1},\,\mathcal{F}_x\tilde{\mathcal{T}}\big|_{\mathcal{X}_0}=\tilde{\mathcal{T}}\big|_{\mathcal{X}_0}\mathcal{F}_x,\,\mathcal{R}_6\tilde{\mathcal{T}}\big|_{\mathcal{X}_0}=\left(\tilde{\mathcal{T}}\big|_{\mathcal{X}_0}\right)^{-1}\mathcal{R}_6\rangle,\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中，超对称算子 $\tilde{\mathcal{T}}$ 定义于 (2.5)，而 $\tilde{\mathcal{T}}\big|_{\mathcal{X}_0}$ 表示其在 $\tilde{}$ 周期函数空间 $\mathcal{X}_{\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{0}}$ 上的限制。值得注意的是，可以验证有限群 $\mathcal{S}$ 有一个唯一的四维不可约表示，它由 $\mathcal{S}$ 的二维不可约表示 ρ_1 和 ρ_2 拼合而成：(3.10)

$$\tilde{\rho}:\mathcal{R}_6\mapsto\begin{pmatrix}\tau&0&0&0\\0&\overline{\tau}&0&0\\0&0&\tau^2&0\\0&0&0&\overline{\tau}^2\end{pmatrix},\quad \mathcal{F}_x\mapsto\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad \tilde{\mathcal{T}}\big|_{\mathcal{X}_0}\mapsto\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}i\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}i&0\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}i&-\frac{1}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}i&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_*\in\mathrm{Spec}(\mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa}_*))$ 是一个重数为四的特征值，其对应的特征函数记为 $u_j(\cdot;\boldsymbol{\kappa}_*)$（$1\le j\le 4$），它们构成表示 $\tilde{\rho}$ 的一组基。在这种情况下，(3.4) 变为

$$\tilde{\rho}(\mathcal{R})^{-1}H_1\tilde{\rho}(\mathcal{R})=-H_2,\quad \tilde{\rho}(\mathcal{R})^{-1}H_2\tilde{\rho}(\mathcal{R})=H_1+H_2, \tag{3.11}$$

$$\tilde{\rho}(\mathcal{F})^{-1}H_1\tilde{\rho}(\mathcal{F})=H_1,\quad \tilde{\rho}(\mathcal{F})^{-1}H_2\tilde{\rho}(\mathcal{F})=-H_1-H_2, \tag{3.12}$$

$$\tilde{\rho}\big(\tilde{\mathcal{T}}\big|_{\mathcal{X}_0}\big)^{-1}H_1\tilde{\rho}\big(\tilde{\mathcal{T}}\big|_{\mathcal{X}_0}\big)=H_1,\quad \tilde{\rho}\big(\tilde{\mathcal{T}}\big|_{\mathcal{X}_0}\big)^{-1}H_2\tilde{\rho}\big(\tilde{\mathcal{T}}\big|_{\mathcal{X}_0}\big)=H_2. \tag{3.13}$$

利用 (3.10)，可由 (3.11)–(3.13) 求得

$$H_1=\begin{pmatrix}0&0&\alpha_*&0\\0&0&0&\alpha_*\\\alpha_*&0&0&0\\0&\alpha_*&0&0\end{pmatrix},\quad H_2=\begin{pmatrix}0&0&\overline{\tau}^2\alpha_*&0\\0&0&0&\tau^2\alpha_*\\\tau^2\alpha_*&0&0&0\\0&\overline{\tau}^2\alpha_*&0&0\end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

其中 $\alpha_*:=\left(u_1(\cdot;\mathbf{0})\underline{\frac{\partial\mathcal{H}_b}{\partial\kappa_1}}(\mathbf{0})u_3(\cdot;\mathbf{0})\right)_{\mathcal{X}_0}\in\mathbb{R}$。因此，当 $\alpha_*\neq 0$ 时，(3.6) 有四个解

$$\lambda_1(\boldsymbol{\kappa})=-\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha_*||\boldsymbol{\kappa}|,\quad \lambda_2(\boldsymbol{\kappa})=-\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha_*||\boldsymbol{\kappa}|,\quad \lambda_3(\boldsymbol{\kappa})=\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha_*||\boldsymbol{\kappa}|,\quad \lambda_4(\boldsymbol{\kappa})=\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha_*||\boldsymbol{\kappa}|,$$

它们是相交于圆锥点的四个色散曲面的线性近似 lly.

4. Band-gap Opening and Asymptotic Expansions of Floquet-BlochEigenpairs

本文的主要结果是对小 $\boldsymbol{\kappa}$ 和 δ 情形下受扰体哈密顿量 $\mathcal{H}_{\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa})$ 的弗洛凯-布洛赫本征对进行渐近展开，如下述定理 4.1 所示。正如我们在注 4.2 中指出的，定理 2.7 中所声称的带隙开启可直接由定理 4.1 推出。更重要的是，弗洛凯-布洛赫本征模的渐近展开表明，当我们调节 $-\delta \to \delta$ 时，体哈密顿量中会出现能带反转；这是产生界面模的基本机制，而界面模将处于不同相的两个此类体哈密顿量分隔开来；详情请参见注 4.3。

定理 4.1。 假设定理 *2.5*、假设 *2.6* 中的条件以及非退化条件 (2.10) 均成立。那么存在 $K_0, \Delta_0 > 0$，使得若 $|\boldsymbol{\kappa}| < K_0$ 和 $\delta < \Delta_0$，则 $\mathcal{H}_{\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa})$ 的前四个 *Floquet-Bloch*本征值具有如下膨胀：

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa}) &= \lambda_* - \sqrt{\beta_*^2\delta^2 + \frac{3}{4}|\alpha_*|^2|\boldsymbol{\kappa}|^2}\cdot(1+\mathcal{O}(|\boldsymbol{\kappa}|+\delta)),\\
\lambda_{2,\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa}) &= \lambda_* - \sqrt{\beta_*^2\delta^2 + \frac{3}{4}|\alpha_*|^2|\boldsymbol{\kappa}|^2}\cdot(1+\mathcal{O}(|\boldsymbol{\kappa}|+\delta)),\\
\lambda_{3,\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa}) &= \lambda_* + \sqrt{\beta_*^2\delta^2 + \frac{3}{4}|\alpha_*|^2|\boldsymbol{\kappa}|^2}\cdot(1+\mathcal{O}(|\boldsymbol{\kappa}|+\delta)),\\
\lambda_{4,\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa}) &= \lambda_* + \sqrt{\beta_*^2\delta^2 + \frac{3}{4}|\alpha_*|^2|\boldsymbol{\kappa}|^2}\cdot(1+\mathcal{O}(|\boldsymbol{\kappa}|+\delta)).
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

此外，存在 $r_{n,\pm\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}) \in \mathcal{X}_{\boldsymbol{\kappa}}\,(n=1,2,3,4)$，并满足估计

$$
\|r_{n,\pm\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa})\|_{\mathcal{X}_{\boldsymbol{\kappa}}} = \mathcal{O}(|\boldsymbol{\kappa}|+\delta)
$$

使得在同一值域 $|\boldsymbol{\kappa}| < K_0$ 和 $\delta < \Delta_0$内，与(4.1) 相关联的弗洛凯-布洛赫特征函数具有如下渐近行为：

$$
\begin{aligned}
u_{1,\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}) &= -\frac{(\kappa_1+\overline{\tau}^2\kappa_2)\alpha_*}{\beta_*\delta+\sqrt{\beta_*^2\delta^2+\frac{3}{4}|\alpha_*|^2|\boldsymbol{\kappa}|^2}}u_1(\cdot)+u_3(\cdot)+r_{1,\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}),\\
u_{2,\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}) &= -\frac{(\kappa_1+\tau^2\kappa_2)\alpha_*}{\beta_*\delta+\sqrt{\beta_*^2\delta^2+\frac{3}{4}|\alpha_*|^2|\boldsymbol{\kappa}|^2}}u_2(\cdot)+u_4(\cdot)+r_{2,\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}),\\
u_{3,\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}) &= u_2(\cdot)+\frac{(\kappa_1+\overline{\tau}^2\kappa_2)\alpha_*}{\beta_*\delta+\sqrt{\beta_*^2\delta^2+\frac{3}{4}|\alpha_*|^2|\boldsymbol{\kappa}|^2}}u_4(\cdot)+r_{3,\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}),\\
u_{4,\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}) &= u_1(\cdot)+\frac{(\kappa_1+\tau^2\kappa_2)\alpha_*}{\beta_*\delta+\sqrt{\beta_*^2\delta^2+\frac{3}{4}|\alpha_*|^2|\boldsymbol{\kappa}|^2}}u_3(\cdot)+r_{4,\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}),
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

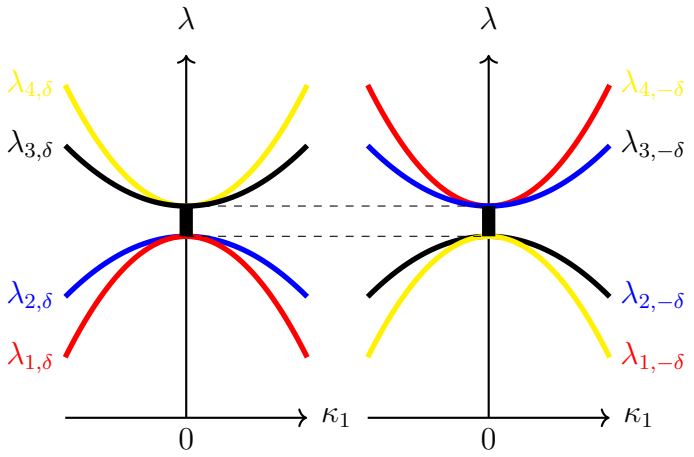


FIGURE 4. $\mathcal{H}_{\pm\delta}$ 的色散曲面（沿 $\kappa_2 = 0$切片）。对于 $\mathcal{H}_\delta$ 和 $\mathcal{H}_{-\delta}$，均会打开一个共同的带隙（ λ–轴上的粗体部分）。颜色的切换表示能带反转的出现。

and

$$
\begin{aligned}
u_{1,-\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}) &= u_1(\cdot) - \frac{(\kappa_1+\tau^2\kappa_2)\alpha_*}{\beta_*\delta+\sqrt{\beta_*^2\delta^2+\frac{3}{4}|\alpha_*|^2|\boldsymbol{\kappa}|^2}}u_3(\cdot) + r_{1,-\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}),\\
u_{2,-\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}) &= u_2(\cdot) - \frac{(\kappa_1+\overline{\tau}^2\kappa_2)\alpha_*}{\beta_*\delta+\sqrt{\beta_*^2\delta^2+\frac{3}{4}|\alpha_*|^2|\boldsymbol{\kappa}|^2}}u_4(\cdot) + r_{2,-\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa})),\\
u_{3,-\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}) &= \frac{(\kappa_1+\tau^2\kappa_2)\alpha_*}{\beta_*\delta+\sqrt{\beta_*^2\delta^2+\frac{3}{4}|\alpha_*|^2|\boldsymbol{\kappa}|^2}}u_2(\cdot) + u_4(\cdot) + r_{3,-\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}),\\
u_{4,-\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}) &= \frac{(\kappa_1+\overline{\tau}^2\kappa_2)\alpha_*}{\beta_*\delta+\sqrt{\beta_*^2\delta^2+\frac{3}{4}|\alpha_*|^2|\boldsymbol{\kappa}|^2}}u_1(\cdot) + u_3(\cdot) + r_{4,-\delta}(\cdot;\boldsymbol{\kappa}),
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

其中， $\boldsymbol{\kappa} = \kappa_1\cdot\boldsymbol{\ell}_1^* + \kappa_2\cdot\boldsymbol{\ell}_2^*$在对偶向量中展开，而特征函数 $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$构成(3.10)中引入的四维表示 $\tilde{\rho}$ 的一个基。

注 4.2。 在图*4*中，我们绘制了定理 *4.1*所述的 $\mathcal{H}_{\pm\delta}$ 的色散曲面。可以看到，在 $\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{0}$附近打开了一个“局部”带隙 $\mathcal{I}_\delta$ （定义见定理 *2.7*）。因此，根据谱无折叠条件(2.8)，不难看出，$\mathcal{I}_\delta$ 确实是 $\mathcal{H}_{\pm\delta}$ 的一个“全局”带隙，正如我们在定理 *2.7*中所声称的那样。

注 4.3。 忽略高阶项后，由(4.2)和(4.3)可得

$$
\begin{aligned}
span\{u_{1,\delta}(\cdot;\mathbf{0}),u_{2,\delta}(\cdot;\mathbf{0})\} &= span\{u_{3,-\delta}(\cdot;\mathbf{0}),u_{4,-\delta}(\cdot;\mathbf{0})\}\in\mathcal{X}_{\mathbf{0}}(\rho_2),\\
span\{u_{3,\delta}(\cdot;\mathbf{0}),u_{4,\delta}(\cdot;\mathbf{0})\} &= span\{u_{1,-\delta}(\cdot;\mathbf{0}),u_{2,-\delta}(\cdot;\mathbf{0})\}\in\mathcal{X}_{\mathbf{0}}(\rho_1),
\end{aligned}
$$

其中， ρ_i 是第*3.2*节中引入的 C_{6v} 的二维不可约表示。物理学文献通常将两个受扰系统的特征空间发生这种对称性互换称为能带反转；这通常会导致贝里曲率变号，因此一般被视为相变（例如，见 *[65,* 第*5.1.1*节*]*）。对于界面两侧存在能带反转的界面模型，通常预期会出现界面模，作为相变的一种体现。对此，各类系统都已有严格证明；

参见第*1.1*节列出的参考文献。特别是，正如我们稍后将看到的，在我们的设定中，能带反转清晰地体现为用于求解界面模的边界匹配算子的特殊表达式；参见注 *5.14*。

4.1. 定理 4.1 的证明。我们旨在利用微扰理论，在 $(\boldsymbol{\kappa},\lambda)=(\mathbf{0},\lambda_*)$ 的一个邻域内求解以下本征值问题

$$\mathcal{H}_{\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa})u=\lambda u,\quad u\in\mathcal{X}_{\boldsymbol{\kappa}}. \tag{4.4}$$

为此，我们引入 $\mathcal{H}_{\pm\delta}$ 的如下酉变换，其优点在于具有一个与 $\boldsymbol{\kappa}-$ 无关的定义域，因此更适合用于微扰分析

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{H}}_{\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa}):=e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{n}}\circ\mathcal{H}_{\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa})\circ e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{n}}:\quad &\mathcal{X}_{\mathbf{0}}\to\mathcal{X}_{\mathbf{0}},\\ &u(\boldsymbol{n})\mapsto\sum_{\boldsymbol{m}\in\Lambda}e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})}\mathcal{H}_{\pm\delta}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})u(\boldsymbol{m}).\end{aligned} \tag{4.5}$$

根据酉等价性，现在只需求解变换后的哈密顿量的本征值问题，而无需解 (4.4)

$$\underline{\mathcal{H}}_{\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa})u=\lambda u,\quad u\in\mathcal{X}_{\mathbf{0}}. \tag{4.6}$$

我们注意到，变换后的哈密顿算子 $\mathcal{H}_{\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa})$ 关于 $\boldsymbol{\kappa}$ 和 δ 都解析依赖。因此，自伴算子的本征值问题的稳定性定理表明，只要 $\boldsymbol{\kappa}$ 和 δ 足够小，$\mathcal{H}_{\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa})$ 在 λ_* 附近的本征值数目（按其重数计）与 $\mathcal{H}_{\delta=0}(\mathbf{0})=\mathcal{H}_b(\mathbf{0})$ 相同。因此，我们得出结论，(4.6) 有四个解，因为根据假设，λ_* 是 $\mathcal{H}_{\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa})$ 的一个重数为四的本征值。下文中，我们将计算 (4.6) 的解的显式表达式，从而完成定理 4.1 的证明。这一过程分为几个步骤。

步骤1. 作为扰动分析的第一步，我们将$\mathcal{H}_{\pm\delta,\boldsymbol{\kappa}}$ 展开到一阶 ：

$$\underline{\mathcal{H}}_{\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa})=\underline{\mathcal{H}}^{(0,0)}+\kappa_1\underline{\mathcal{H}}_1^{(1,0)}+\kappa_2\underline{\mathcal{H}}_2^{(1,0)}\pm\delta\underline{\mathcal{H}}^{(0,1)}+\underline{\mathcal{H}}^{rem}_{\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa}), \tag{4.7}$$

其中

$$\underline{\mathcal{H}}^{(0,0)}:=\underline{\mathcal{H}}_b(\mathbf{0}),\quad \underline{\mathcal{H}}_j^{(1,0)}=\partial_{\kappa_j}\underline{\mathcal{H}}_b(\mathbf{0}),\quad \underline{\mathcal{H}}^{(0,1)}=\underline{\mathcal{H}}_{per},$$

且 余项 $\mathcal{H}^{rem}_{\pm\delta,\boldsymbol{\kappa}}$ 包含所有高阶项，并满足以下估计 :[3]

$$\|\underline{\mathcal{H}}^{rem}_{\pm\delta}(\boldsymbol{\kappa})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X}_{\mathbf{0}})}=\mathcal{O}(|\boldsymbol{\kappa}|^2+\delta|\boldsymbol{\kappa}|).$$

与第3节中一样，我们引入以下一阶微扰矩阵：

$$\underline{H}_j^{(1,0)}:=\left[\left(u_i,\underline{\mathcal{H}}_j^{(1,0)}u_k\right)_{\mathbb{C}^6}\right]_{1\le i,k\le 4},\quad \underline{H}^{(0,1)}:=\left[\left(u_i,\underline{\mathcal{H}}^{(0,1)}u_k\right)_{\mathbb{C}^6}\right]_{1\le i,k\le 4}$$

其中 $u_i:=u_i(\cdot;\boldsymbol{\kappa}=0)$ 是未扰动的弗洛凯-布洛赫本征模。注意，根据酉等价关系 (4.5)，矩阵 $H_j^{(1,0)}$ 与 (3.14) 中引入的矩阵 H_j 相等；换言之，

$$\underline{H}_1^{(1,0)}=\begin{pmatrix}0&0&\alpha_*&0\\0&0&0&\alpha_*\\\alpha_*&0&0&0\\0&\alpha_*&0&0\end{pmatrix},\quad \underline{H}_2^{(1,0)}=\begin{pmatrix}0&0&\overline{\tau}^2\alpha_*&0\\0&0&0&\tau^2\alpha_*\\\tau^2\alpha_*&0&0&0\\0&\overline{\tau}^2\alpha_*&0&0\end{pmatrix},\quad \alpha_*\in\mathbb{R}. \tag{4.8}$$

我们还需要 $H^{(0,1)}$ 的显式形式，如下所示。

[3]该界可直接由表达式（4.5）以及所涉及的所有哈密顿量均为有限值域这一事实得到。

引理 4.4。 在假设 *2.6* 下，我们有

$$\underline{H}^{(0,1)} = \begin{pmatrix} \beta_{*,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{*,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{*,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{*,3} \end{pmatrix}, \quad \beta_{*,k} := \big(u_k, \mathcal{H}_{per}(\mathbf{0}) u_k\big)_{\mathcal{X}_0} \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

证明。 由于算子 $\mathcal{H}_{per}$**(0)** 是厄米的，只需证明：1）非对角元素均为零；2） $H_{11}^{(0,1)} = H_{22}^{(0,1)}$ ， $H_{33}^{(0,1)} = H_{44}^{(0,1)}$ 。同样，这可通过利用 $\mathcal{H}_{per}$ 的对称性，按照第3节中的思路加以证明。事实上，得益于假设 2.6 中假定的 $\mathcal{H}_{per}$ 对称性以及酉等价关系 (4.5)，我们看到扰动矩阵 $H^{(0,1)}$ 在旋转和反射算子的表示下保持不变。也就是说，

$$\tilde{\rho}(\mathcal{R}_6)^{-1} \underline{H}^{(0,1)} \tilde{\rho}(\mathcal{R}_6) = \underline{H}^{(0,1)}, \quad \tilde{\rho}(\mathcal{F}_x)^{-1} \underline{H}^{(0,1)} \tilde{\rho}(\mathcal{F}_x) = \underline{H}^{(0,1)}, \tag{4.10}$$

其中 $\tilde{\rho}$ 见 (3.10)。直接计算可知，任何满足 (4.10) 的厄米矩阵都具有性质 1）和 2）。证毕。 □

步骤 2。现在我们准备以微扰方式求解 (4.6)，这遵循了标准的 Lyapunov-Schmidt 约化论证，该方法已广泛用于研究周期算子的微扰能带结构。我们仅证明正微扰的情形，即在 (4.6) 中令 $\mathcal{H}_\delta(\boldsymbol{\kappa})$；另一种情形的证明类似。记作

$$\lambda = \lambda_* + \lambda^{(1)}, \quad u = u^{(0)} + u^{(1)}, \tag{4.11}$$

with

$$u^{(0)} = \sum_{k=1}^{4} c_k \cdot u_k \in \mathrm{Ker}(\underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \lambda_*), \quad u^{(1)} \in \mathrm{Ker}(\underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \lambda_*)^{\perp}, \tag{4.12}$$

其中 $\perp$ 表示 $\mathcal{X}_0$中的正交补。将这些试探形式代入 (4.6)，得到方程:

$$\begin{aligned} (\underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \lambda_*) u^{(1)} =& \big(\lambda^{(1)} - \underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \kappa_1 \underline{\mathcal{H}}_1^{(1,0)} - \kappa_2 \underline{\mathcal{H}}_2^{(1,0)} - \delta \underline{\mathcal{H}}^{(0,1)} - \underline{\mathcal{H}}_\delta^{rem}(\boldsymbol{\kappa})\big) u^{(0)} \\ &+ \big(\lambda^{(1)} - \underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \kappa_1 \underline{\mathcal{H}}_1^{(1,0)} - \kappa_2 \underline{\mathcal{H}}_2^{(1,0)} - \delta \underline{\mathcal{H}}^{(0,1)} - \underline{\mathcal{H}}_\delta^{rem}(\boldsymbol{\kappa})\big) u^{(1)}. \end{aligned}$$

将上述恒等式分解为正交分量颇有启发性：令 $Q_\parallel$ 为到核$(\mathcal{H}^{(0,0)} - \lambda_*)$的投影，并令 $Q_\perp := \mathbb{1} - Q_\parallel$，则可得到等价方程

$$\begin{aligned} (\underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \lambda_*) u^{(1)} =& Q_\perp \big(\lambda^{(1)} - \underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \kappa_1 \underline{\mathcal{H}}_1^{(1,0)} - \kappa_2 \underline{\mathcal{H}}_2^{(1,0)} - \delta \underline{\mathcal{H}}^{(0,1)} - \underline{\mathcal{H}}_\delta^{rem}(\boldsymbol{\kappa})\big) u^{(0)} \\ &+ Q_\perp \big(\lambda^{(1)} - \underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \kappa_1 \underline{\mathcal{H}}_1^{(1,0)} - \kappa_2 \underline{\mathcal{H}}_2^{(1,0)} - \delta \underline{\mathcal{H}}^{(0,1)} - \underline{\mathcal{H}}_\delta^{rem}(\boldsymbol{\kappa})\big) u^{(1)}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

and

$$\begin{aligned} 0 =& Q_\parallel \big(\lambda^{(1)} - \underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \kappa_1 \underline{\mathcal{H}}_1^{(1,0)} - \kappa_2 \underline{\mathcal{H}}_2^{(1,0)} - \delta \underline{\mathcal{H}}^{(0,1)} - \underline{\mathcal{H}}_\delta^{rem}(\boldsymbol{\kappa})\big) u^{(0)} \\ &+ Q_\parallel \big(\lambda^{(1)} - \underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \kappa_1 \underline{\mathcal{H}}_1^{(1,0)} - \kappa_2 \underline{\mathcal{H}}_2^{(1,0)} - \delta \underline{\mathcal{H}}^{(0,1)} - \underline{\mathcal{H}}_\delta^{rem}(\boldsymbol{\kappa})\big) u^{(1)}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

步骤 3。现在我们利用 (4.13) 证明，当参数较小时， $u^{(1)}$ 由 $u^{(0)}$ 唯一确定（κ_i， δ， $\lambda^{(1)}$）。注意，自伴算子 $\mathcal{H}^{(0,0)} - \lambda_*$ 在 $Q_\perp$的值域上可逆。因此，我们可以将 (4.13) 写成

$$(\mathbb{1} - T) u^{(1)} = T u^{(1)}, \tag{4.15}$$

其中

$$T = T(\boldsymbol{\kappa}, \delta, \lambda^{(1)}) := (\underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \lambda_*)^{-1} Q_\perp \big(\lambda^{(1)} - \underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \kappa_1 \underline{\mathcal{H}}_1^{(1,0)} - \kappa_2 \underline{\mathcal{H}}_2^{(1,0)} - \delta \underline{\mathcal{H}}^{(0,1)} - \underline{\mathcal{H}}_\delta^{rem}(\boldsymbol{\kappa})\big).$$

对于足够小的参数，有$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X}_0)} = \mathcal{O}(|\boldsymbol{\kappa}| + |\delta| + |\lambda^{(1)}|)$。这意味着存在 K_0， Δ_0， $E_0 > 0$，使得每当 $|\boldsymbol{\kappa}| < K_0$， $\delta < \Delta_0$， $|\lambda^{(1)}| < E_0$ 时，都有$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X}_0)} < 1$，因此， $\mathbb{1} - T$是可逆的。综上，我们可以从（4.15）中求解 $u^{(1)}$：

$$u^{(1)} = (\mathbb{1} - T)^{-1} T u^{(1)} = \sum_{k=1}^{4} c_k \cdot (\mathbb{1} - T)^{-1} T u_k. \tag{4.16}$$

步骤 4。接下来，我们求解 (4.14)，以获得 Floquet-Bloch本征值$\lambda^{(1)} = \lambda^{(1)}(\boldsymbol{\kappa}, \delta)$ 及其对应本征模的近似表达式。将 (4.16) 代入 (4.14) 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{4} c_k \cdot Q_{\|}\big(\lambda^{(1)} - \underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \kappa_1 \underline{\mathcal{H}}_1^{(1,0)} - \kappa_2 \underline{\mathcal{H}}_2^{(1,0)} - \delta \underline{\mathcal{H}}^{(0,1)} - \underline{\mathcal{H}}_\delta^{rem}(\boldsymbol{\kappa})\big) u_k \\
&+ \sum_{k=1}^{4} c_k \cdot Q_{\|}\big(\lambda^{(1)} - \underline{\mathcal{H}}^{(0,0)} - \kappa_1 \underline{\mathcal{H}}_1^{(1,0)} - \kappa_2 \underline{\mathcal{H}}_2^{(1,0)} - \delta \underline{\mathcal{H}}^{(0,1)} - \underline{\mathcal{H}}_\delta^{rem}(\boldsymbol{\kappa})\big)(\mathbb{1} - T)^{-1} T u_k = 0.
\end{aligned}$$

对等式两边进行 u_k 共轭变换，并应用恒等式 (4.8)-(4.9)，得到以下线性方程：

$$\Big(\mathcal{N}^{(0)}(\boldsymbol{\kappa}, \delta, \lambda^{(1)}) + \mathcal{N}^{(1)}(\boldsymbol{\kappa}, \delta, \lambda^{(1)})\Big) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0, \tag{4.17}$$

其中

$$\mathcal{N}^{(0)} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} - \beta_{*,1}\delta & 0 & -\alpha_*(\kappa_1 + \overline{\tau}^2 \kappa_2) & 0 \\ 0 & \lambda^{(1)} - \beta_{*,1}\delta & 0 & -\alpha_*(\kappa_1 + \tau^2 \kappa_2) \\ -\alpha_*(\kappa_1 + \tau^2 \kappa_2) & 0 & \lambda^{(1)} - \beta_{*,3}\delta & 0 \\ 0 & -\alpha_*(\kappa_1 + \overline{\tau}^2 \kappa_2) & 0 & \lambda^{(1)} - \beta_{*,3}\delta \end{pmatrix}$$

and

$$\mathcal{N}^{(1)} = \big(u_i, (-\kappa_1 \cdot \underline{\mathcal{H}}_1^{(1,0)} - \kappa_2 \cdot \underline{\mathcal{H}}_2^{(1,0)} - \delta \cdot \underline{\mathcal{H}}^{(0,1)} - \underline{\mathcal{H}}_\delta^{rem}(\boldsymbol{\kappa}))(\mathbb{1} - T)^{-1} T u_j\big)_{1 \le i,j \le 4}.$$

注意到 $\mathcal{N}^{(1)}$ 的每个元素均为 $\mathcal{O}(|\boldsymbol{\kappa}|^2 + |\delta|^2 + |\lambda^{(1)}|^2)$ 阶。因此，(4.17) 可解当且仅当

$$\det(\mathcal{N}^{(0)} + \mathcal{N}^{(1)}) = \Big((\lambda^{(1)})^2 - \beta_*^2 \delta^2 - \frac{3}{4}|\alpha_*|^2 |\boldsymbol{\kappa}|^2\Big)^2 + g(\boldsymbol{\kappa}, \delta, \lambda^{(1)}) = 0, \tag{4.18}$$

其中，函数 g 关于所有参数均为解析函数（在原点的某个邻域内），且满足界 $g = \mathcal{O}(|\boldsymbol{\kappa}|^5 + |\delta|^5 + |\lambda^{(1)}|^5)$；我们应用了假设 $\beta_{*,\,1} = -\beta_{*,\,3} =: \beta_*$。注意，(4.18) 的最高阶方程具有四支解：

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = -\sqrt{\beta_*^2 \delta^2 + \frac{3}{4}|\alpha_*|^2 |\boldsymbol{\kappa}|^2}, \quad \lambda_3^{(1)} = \lambda_4^{(1)} = \sqrt{\beta_*^2 \delta^2 + \frac{3}{4}|\alpha_*|^2 |\boldsymbol{\kappa}|^2}, \tag{4.19}$$

它们恰好是 (4.1) 中的首阶项。考虑余项 g 后，四个解分支分岔为 (4.18) 的四个解，其中由 g 出现所引起的余项通过隐函数定理估计，并且可证明其形式与 (4.1) 相同；此处省略这方面的技术计算，感兴趣的读者可参阅先前的工作 [57, 定理 3。6] 求解 $\lambda_k^{(1)} = \lambda_k^{(1)}(\boldsymbol{\kappa}, \delta)$ 后，进一步限制步骤 3 中施加的大小 K_0, Δ_0，使得若$|\boldsymbol{\kappa}| < K_0, \delta < \Delta_0$，则有 $|\lambda_k^{(1)}(\boldsymbol{\kappa}, \delta)| < E_0$；这样整个计算便保持一致。

步骤 5。最后，将步骤 4 求得的特征值 $\lambda^{(1)} = \lambda^{(1)}(\boldsymbol{\kappa}, \delta)$ 代入 (4.17)，即可求得系数 c_i，进而利用 (4.12) 和 (4.16) 得到弗洛凯-布洛赫特征函数 $u = u^{(0)} + u^{(1)}$ 的完整膨胀。定理 4.1 的证明至此完成。

5. Existence of Interface Modes

本节旨在证明本文的首个主要结果——定理 2.11。我们的证明基于层势框架，该框架已在连续系统中从多个方面建立并得到应用，本文则将其推广至离散结构。该框架研究界面模的核心思想是采用阻抗匹配法，通过边界匹配算子揭示能带反转现象[4], ，并理解谱简并点处物理格林算子及其远场渐近行为。

证明从第5.2节开始，该节将建立界面模的离散层势表述。在此之前，我们先在第5.1节列出一些必要的预备知识，尤其是物理格林算子的定义、其在双狄拉克锥处的渐近行为，以及渐近展开中出现的传播型弗洛凯-布洛赫模。第5.2节建立框架后，我们将在微扰区间内（即 (2.12) 中 δ 较小时）求解边界匹配问题。为此，我们在定理 4.1 中得到的 Floquet-Bloch 本征对的渐近展开，以及第5.1.2节给出的格林算子渐近性至关重要[5]；详情见第5.4节。

5.1. **预备知识**。

5.1.1. 弗洛凯-布洛赫特征对的解析标记。 为了应用极限吸收原理来讨论双狄拉克锥处远场格林算子的渐近行为，我们需要对弗洛凯-布洛赫本征对进行光滑参数化。本节将对此进行描述。

我们首先回顾限制在圆柱面上的哈密顿量的弗洛凯理论，即 $\mathcal{H}_{b,\,\sharp} := \mathcal{H}_b\Big|_{\mathcal{X}_\sharp}$。显然，$\mathcal{H}_{b,\,\sharp}$ 是弗洛凯-布洛赫哈密顿量 $\mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa})$ 沿平面 $\kappa_2 = 0$ 的截面。由于 $\mathcal{H}_{b,\,\sharp}$ 具有 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_1$-平移不变性，其谱可通过 Floquet变换分解，即

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{H}_{b,\sharp}) = \bigcup_{-\pi\le\kappa_1<\pi} \mathrm{Spec}(\mathcal{H}_{b,\sharp,\kappa_1}),$$

其中 $\mathcal{H}_{b,\,\sharp,\,\kappa_1} := \mathcal{H}_b(\kappa_1\boldsymbol{\ell}_1^*)$。根据这一关系，如果我们定义

$$\lambda_{n,\sharp}(\kappa_1) := \lambda_n(\boldsymbol{\kappa}) \quad \text{with } \boldsymbol{\kappa} = \kappa_1\boldsymbol{\ell}_1^*,$$

其中，$\lambda_n(\boldsymbol{\kappa})$ 是 $\mathcal{H}_b(\boldsymbol{\kappa})$ 的本征值，则可直接得出

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{H}_{b,\sharp}) = \cup_{-\pi\le\kappa_1<\pi}\mathrm{Spec}(\mathcal{H}_{b,\sharp,\kappa_1}) = \cup_{1\le n\le 6}\big\{\lambda_{n,\sharp}(\kappa_1) :\ -\pi \le \kappa_1 < \pi\big\}$$

and

$$\lambda_{1,\sharp}(\kappa_1) \le \cdots \le \lambda_{6,\sharp}(\kappa_1).$$

因此，我们称 $\{\lambda_{n,\sharp}(\kappa_1)\}_{1\le n\le 6}$ 为按递增顺序标记的$\mathcal{H}_{b的\ Floquet\text{-}Bloch\ 本征值,\ \sharp}$。显然，这种递增标记会导致 $\lambda_{n,\,\sharp}(\kappa_1)$ 在 $1 \le n \le 4$ 处、$\kappa_1 = 0$ 处出现奇异性，这一点表现为图5(a)中所示的导数跳变，其原因是存在一个双

[4]具体而言，即式 (5.23) 和 (5.25)。[5]简言之，利用 Floquet-Bloch 本征对的渐近展开推导边界匹配方程 (5.23) 和 (5.25) 的极限，见命题 5.12；而格林算子的渐近行为则有助于求解这些极限方程。

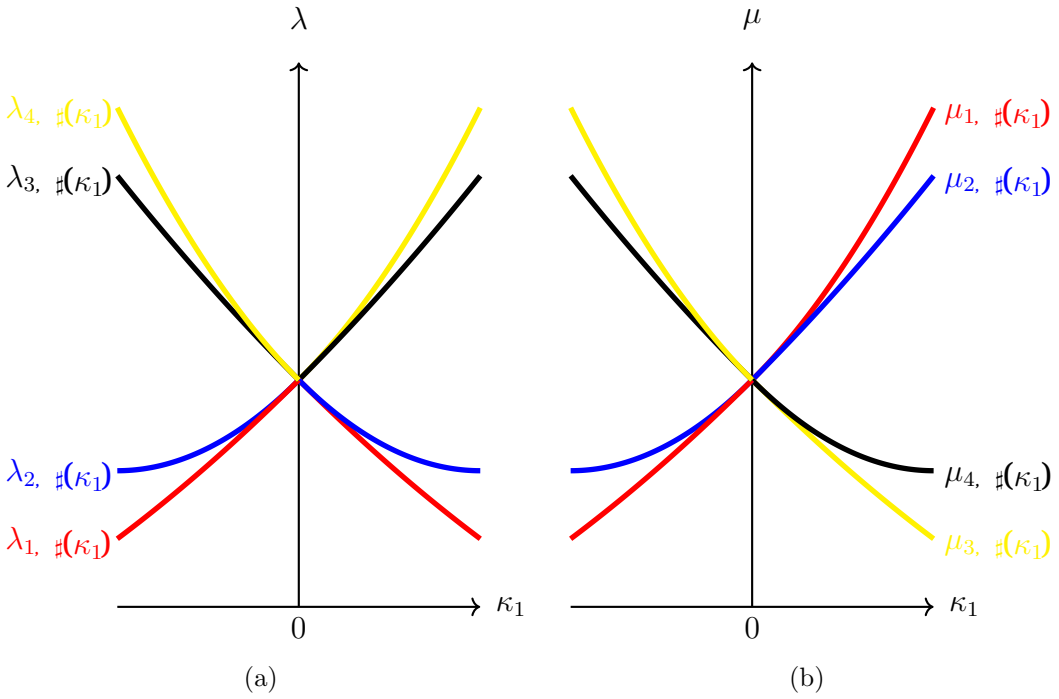


FIGURE 5. (a) 递增标记。每条彩色曲线代表 Floquet-Bloch 本征值 $\lambda_{n,\,\sharp}$的一个分支。显然，由于锥形结构，$\lambda_{n,\,\sharp}$ 的导数在$\kappa_1 = 0$ 处发生跳变。(b) 解析标记。每条彩色曲线在 κ_1中都是光滑的。注意，这种本征值重排可以写成，例如，对于 $\kappa_1 \leq 0$ ，有 $\mu_{1,\,\sharp}(\kappa_1) = \lambda_{1,\,\sharp}(\kappa_1)$ ；对于 $\kappa_1 > 0$，有 $\mu_{1,\,\sharp}(\kappa_1) = \lambda_{4,\,\sharp}(\kappa_1)$。

狄拉克锥。这种奇异性可通过适当重新排列这些本征值来消除。事实上，由于哈密顿量 $\mathcal{H}_{b,\,\sharp,\,\kappa_1}$ 是一个六维矩阵，且关于 κ_1 解析依赖，Kato-Rellich 定理指出，存在六个函数 $\{\mu_{n,\sharp}(\kappa_1)\}_{1\leq n\neq 6}$ ，它们在实轴的某个邻域内解析，并且对每个 $\kappa_1 \in [-\pi, \pi]$，都穷尽 $\mathcal{H}_{b,\,\sharp,\,\kappa_1}$ 的全部本征值。我们称 $\{\mu_{n,\sharp}(\kappa_1)\}_{n\geq 1}$ 为$\mathcal{H}_b$的解析标记的*Floquet-Bloch*本征值，$\sharp$。对于每个动量 κ_1，解析标记的本征值集合构成对按递增顺序标记的本征值的一种重新排列：

$$\cup_{1\leq n\leq 6}\{\mu_{n,\sharp}(\kappa_1)\} = \cup_{1\leq n\leq 6}\{\lambda_{n,\sharp}(\kappa_1)\}, \quad -\pi \leq \kappa_1 < \pi. \tag{5.1}$$

我们在图 5 中展示了双狄拉克锥附近的这种重排。从图中可以清楚地看出，解析标记缓和了递增标记所产生的奇异性。值得注意的是，Kato-Rellich 定理指出，与 $\mu_n(\kappa_1)$ 相关联的归一化 Floquet-Bloch 特征函数也可以选为解析函数[6]。应当牢记，本征函数的选择并不唯一（事实上，它仅在全局规范选择意义下唯一）。在下文中，我们将固定一个特定的规范，并将与 $\mu_{n,\sharp}(\kappa_1)$ 相关联的解析本征函数记为 $v_{n,\sharp}(\boldsymbol{n}; \kappa_1)$。这一特定规范的选择由条件 (5.3) 和 (5.4) 指定，稍后将予以介绍。尽管如此，我们要指出，这种规范选择只是为了便于计算，本文的主要结果与规范无关。

[6]参见 [39, 第七章定理 3.9]。我们也请读者参阅 [32, 第3节。3], 其内容与本文密切相关；事实上，我们从 [32], 学到了利用格林函数渐近行为的方法，这对我们研究界面模至关重要。

我们将上述讨论总结为以下命题。

命题 5.1. 对于每个 $1 \le n \le 6$，都存在一个复邻域 $\mathcal{D}_n \supset \mathbb{R}$，以及两个解析映射

$$\kappa_1 \in \mathcal{D}_n \mapsto \mu_{n,\sharp}(\kappa_1) \in \mathbb{C}, \quad \kappa_1 \in \mathcal{D}_n \mapsto v_{n,\sharp}(\cdot;\kappa_1) \in \mathcal{X}_{\kappa_1 \ell_1^*}$$

使得 $\{(\mu_{n,\sharp}(\kappa_1) v_{n,\sharp}(\cdot;\kappa_1))\}_{1\le n\le 6}$ 表示 $\mathcal{H}_{b,\sharp,\kappa_1}$ 在 $-\pi \le \kappa_1 < \pi$ 时的所有 *Floquet-Bloch* 本征对。特别地，$\{v_{n,\sharp}\}$ 满足条件 (5.3) 和 (5.4)。

此外，作为定理 2.5 中所述双狄拉克锥以及系统 $\mathcal{F}_x$- 对称性的体现，按解析方式标记的特征值具有以下展开。

命题 5.2. 按解析方式标记的特征值具有对称性，并且在 κ_1 接近零时满足以下渐近行为：

$$\begin{cases} \mu_{1,\sharp}(\kappa_1) = \mu_{3,\sharp}(-\kappa_1) = \lambda_* + \dfrac{\sqrt{3}}{2}|\alpha_*|\kappa_1 + \mathcal{O}(|\kappa_1|^2), \\ \mu_{2,\sharp}(\kappa_1) = \mu_{4,\sharp}(-\kappa_1) = \lambda_* + \dfrac{\sqrt{3}}{2}|\alpha_*|\kappa_1 + \mathcal{O}(|\kappa_1|^2). \end{cases} \tag{5.2}$$

注 5.3. 如前文所述，弗洛凯-布洛赫特征函数的解析选取并不唯一。这里，我们给出 $v_{n,\sharp}(\cdot;\kappa_1)$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ 在 $\kappa_1 = 0$ 附近满足以下对称性的一个显式构造：

$$v_{3,\sharp}(\cdot;\kappa_1) = \mathcal{F}_y v_{1,\sharp}(\cdot;-\kappa_1), \quad v_{4,\sharp}(\cdot;\kappa_1) = \mathcal{F}_y v_{2,\sharp}(\cdot;-\kappa_1), \tag{5.3}$$

and

$$\begin{pmatrix} v_{1,\sharp}(\cdot;0) \\ v_{2,\sharp}(\cdot;0) \\ v_{3,\sharp}(\cdot;0) \\ v_{4,\sharp}(\cdot;0) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} sgn(\alpha_*) & sgn(\alpha_*) & 1 & 1 \\ sgn(\alpha_*) & -sgn(\alpha_*) & 1 & -1 \\ -sgn(\alpha_*) & -sgn(\alpha_*) & 1 & 1 \\ sgn(\alpha_*) & -sgn(\alpha_*) & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\cdot) \\ u_2(\cdot) \\ u_3(\cdot) \\ u_4(\cdot) \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

其中，$\{u_n\}$ 是定理 *4.1* 中确定的四维不可约表示 $\tilde{\rho}$ 的基。证明基于第 *4* 节中的微扰论证（其中令 $\delta = 0$和 $\kappa_2 = 0$）。正如我们稍后将在第 *5.3–5.5* 节看到的，选取这些解析的弗洛凯-布洛赫特征函数特别便于研究界面模。

考虑第一支，即$v_{1、\sharp}$。如第 *3.1* 节所示，当 κ_1 接近零时，$v_{1,\sharp}(\cdot;\kappa_1)$完全由$v_{1,\sharp}(\cdot;0)$决定，也就是其在零动量[7]处的取值。换言之，只需确定$v_{1,\sharp}(\cdot;0)$在张成$\{u_n : \ n = 1, 2, 3, 4\}$的基上的投影系数。将 $\lambda^{(1)} = \mu_{n,\sharp}(\kappa_1) - \lambda_* = \frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha_*|\kappa_1 + \mathcal{O}(|\kappa_1|^2)$代入式（*4.17*），其中 $n = 1$取 *2*，即可求出这些系数，得到

$$v_{1,\sharp}(\cdot;0) = a \cdot \big(sgn(\alpha_*)u_1 + u_3\big) + b \cdot \big(sgn(\alpha_*)u_2 + u_4\big), \tag{5.5}$$

and

$$v_{2,\sharp}(\cdot;0) = c \cdot \big(sgn(\alpha_*)u_1 + u_3\big) + d \cdot \big(sgn(\alpha_*)u_2 + u_4\big), \tag{5.6}$$

其中，a、b、c、$d \in \mathbb{C}$ 为待定常数。利用（*5.5*）和（*5.6*）构造出前两支特征函数 $v_{1、\sharp}(x;\kappa_1)$ 和 $v_{2、\sharp}(x;\kappa_1)$ 后，我们应用 $\mathcal{F}_y-$ 对称性，按照（*5.3*）确定另外两支 $v_{3、\sharp}(x;\kappa_1)$ 和 $v_{4、\sharp}(x;\kappa_1)$。现在，我们利用 $\mathcal{F}_x$-对称性计算（*5.5*）–（*5.6*）中的系数 a、b、c、d；正如我们将看到的，这将导出

[7]事实上，固定一个特定向量 $v \in \mathcal{X}_0$ 后，只需将公式 (4.12) 和 (4.16) 与 $u^{(0)} = v$ 一起应用即可。这将得到 $\mathcal{H}_{b、\sharp、\kappa_1}$ 的 Floquet-Bloch 本征值解析族，当 $\kappa_1 = 0$ 时，该族等于 v。

（5.4）。注意，由于 $\mathcal{X}_{\kappa_1\boldsymbol{\ell}_1^*}$ 沿 $\boldsymbol{\ell}_2$ 的周期性，$\mathcal{F}_x v_{k,\sharp}(\cdot;\kappa_1)$ 仍是 $\mathcal{H}_{b,\sharp,\kappa_1}$ 的 *Floquet-Bloch* 本征函数。这意味着，在 $\kappa_1 = 0$ 的某个邻域内，必有 $\mathcal{F}_x v_{k,\sharp}(\cdot;\kappa_1)$ 与 $v_{k,\sharp}(\cdot;\kappa_1)$ 平行，其中 $k = 1, 2$。因此，结合（5.5）-（5.6）以及 u_n 在表示（3.10）中的对称性，可以求得

$$a^2 = b^2, \quad c^2 = d^2. \tag{5.7}$$

另一方面，$v_{1,\sharp}(\boldsymbol{x};\ \kappa_1)$ 与 $v_{2,\sharp}(\boldsymbol{x};\ \kappa_1)$ 之间的正交性给出

$$ac + bd = 0. \tag{5.8}$$

（5.7）-（5.8）的一个非平凡解为 $a = b = c = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{2}$（其中添加了 $\frac{1}{2}-$ 因子以进行归一化），利用公式（5.5）和（5.6），可以直接验证（5.4）。

5.1.2. 极限吸收原理与物理格林算子。正如本节开头所指出的，物理格林算子及其远场渐近行为在界面模的研究中发挥着重要作用。更准确地说，正如我们将在第5.4节中看到的，物理格林算子在用于求解界面模的边界匹配方程中占据主导部分，而其远场渐近行为则是这些方程可解性的基础。

我们首先介绍物理格林算子的定义。对于哈密顿量$\mathcal{H}_{b,\sharp}$，格林函数通常定义为与预解式$(\mathcal{H}_{b,\sharp}-\lambda)^{-1}$相关联的核。然而，对于 $\lambda = \lambda_*$，这种定义显然并不适用，因为它作为双狄拉克锥的能级，位于谱 Spec($\mathcal{H}_{b,\sharp}$)中。尽管如此，由于双狄拉克锥具有特殊的谱性质，尤其是其附近的线性色散，仍然可以通过在无穷远处选择适当的辐射条件来定义物理格林算子，使其仍是哈密顿量的右逆（见 (5.12)）。辐射条件的选取由极限吸收原理确定。具体而言，我们记 $\mathcal{G}_{b,\sharp}(\lambda) := (\mathcal{H}_{b,\sharp} - \lambda)^{-1}$ 为与哈密顿量 $\mathcal{H}_{b,\sharp}$相关联的预解式。根据 [32, 定理 6], ，可以证明，对于任意 $u \in \ell^1(\Lambda/\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2) \otimes \mathbb{C}^6 \subset \mathcal{X}_\sharp$，以下极限存在：[8]

$$\mathcal{G}^{l.a.}_{b,\sharp} u := \lim_{\epsilon \to 0^+} (\mathcal{H}_{b,\sharp} - \lambda_* - i\epsilon)^{-1} u. \tag{5.9}$$

物理格林算子包含在 $\mathcal{G}^{l.a.}_b$中，$\sharp$。为说明这一点，我们来看一下 (5.9) 证明的主要思路；详细内容请参阅原论文 [32]。利用傅里叶展开，$(\mathcal{H}_{b,\sharp} - \lambda_* - i\epsilon)^{-1} u$ 可写成 $\mathcal{H}_{b,\sharp}$的弗洛凯-布洛赫本征模的线性组合：[9]

$$(\mathcal{H}_{b,\sharp} - \lambda_* - i\epsilon)^{-1} u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\kappa_1 \sum_{1 \le n \le 6} \frac{v_{n,\sharp}(\boldsymbol{n};\kappa_1)\big(u(\cdot), v_{n,\sharp}(\cdot;\kappa_1)\big)_{\mathcal{X}_\sharp}}{\mu_{n,\sharp}(\kappa_1) - (\lambda_* + i\epsilon)}, \tag{5.10}$$

其中 $(\mu_{n,\sharp}, v_{n,\sharp})$ 是上一节引入的、按解析方式标记的 Floquet-Bloch 本征对。由 (5.10) 可知，双狄拉克锥处的分母存在奇异性，因此 $(\mathcal{H}_{b,\sharp} - \lambda_*)^{-1}$ 定义不明确（即对于 $n = 1,2,3,4$ 和 $\kappa_1 = 0$）。然而，由于按解析方式标记的本征函数 $\mu_{n,\sharp}$ 的光滑性及其非零导数

[8]注意，[32, 定理 6] 原本针对拉普拉斯算子的预解式；然而，证明仅依赖于算子的能带结构，而非其微分性质，因此可直接应用于离散哈密顿量 $\mathcal{H}_{b,\sharp}$。（事实上，在这种情况下证明甚至更简单，因为无需处理正则性问题。）[9]括号 $\big(u(\cdot)v_{n,\sharp}(\cdot;\kappa_1)\big)_{\mathcal{X}_\sharp}$中的记号略有滥用：它实际上指的是 $\ell^1 - \ell^\infty$ 配对（请回忆，$v_{n,\sharp}(\cdot;\kappa_1)$并非 ℓ^2 局域化），而不是 $\mathcal{X}_\sharp$的内积。不过，只要配对有定义，两者的表达式就相同。为使记号简洁，本文将始终沿用这一约定。

在 $\kappa_1 = 0$处，(5.10) 关于 $\epsilon \to 0^+$ 的极限存在，它由柯西主值积分和在 $\kappa_1 = 0$处的投影项组成:

(5.11)

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\kappa_1 \sum_{1\le n\le 6} \frac{v_{n,\sharp}(\boldsymbol{n};\kappa_1)\big(u(\cdot), v_{n,\sharp}(\cdot;\kappa_1)\big)_{\mathcal{X}_\sharp}}{\mu_{n,\sharp}(\kappa_1) - (\lambda_* + i\epsilon)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\text{p.v.}\int_{-\pi}^{\pi} d\kappa_1 \sum_{1\le n\le 6} \frac{v_{n,\sharp}(\boldsymbol{n};\kappa_1)\big(u(\cdot), v_{n,\sharp}(\cdot;\kappa_1)\big)_{\mathcal{X}_\sharp}}{\mu_{n,\sharp}(\kappa_1) - (\lambda_* + i\epsilon)} + \frac{i}{2|\alpha_*|}\sum_{1\le n\le 4} v_{n,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{n,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp}$$

$$=: \mathcal{G}_{b,\sharp}^{p.v.}u + \frac{i}{2|\alpha_*|}\sum_{1\le n\le 4} v_{n,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{n,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp}.$$

这里，p.v. 表示 κ_1–积分按柯西主值积分[10]的意义理解。积分部分，即 $\mathcal{G}_b^{p.v.}{}_{,\sharp}$，称为物理格林算子。其基本性质总结如下。

命题 5.4。 物理格林算子 $\mathcal{G}_b^{p.v.}{}_{,\sharp}$: $\ell^1(\Lambda/\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2)\otimes\mathbb{C}^6 \subset \mathcal{X}_\sharp \to \ell^\infty(\Lambda/\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2)\otimes\mathbb{C}^6$是有界的。它是哈密顿量的一个右逆，具体而言

(5.12) $$(\mathcal{H}_{b,\sharp} - \lambda_*)\mathcal{G}_{b,\sharp}^{p.v.} = \mathbb{1} \quad on\ \ell^1(\Lambda/\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2)\otimes\mathbb{C}^6.$$

此外，对于任意 $u \in \ell^1(\Lambda/\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2) \otimes \mathbb{C}^6$，函数 $\mathcal{G}_b^{p.v.}{}_{,\sharp}\, u$ 具有如下远场渐近行为

(5.13)

$$\lim_{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\ell}_1\to+\infty}\Big[(\mathcal{G}_{b,\sharp}^{p.v.}u)(\boldsymbol{n}) - \frac{i}{2|\alpha_*|}\big(v_{1,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{1,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp} + v_{2,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{2,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp}$$
$$- v_{3,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{3,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp} - v_{4,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{4,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp}\big)\Big] = 0,$$

and

(5.14)

$$\lim_{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\ell}_1\to-\infty}\Big[(\mathcal{G}_{b,\sharp}^{p.v.}u)(\boldsymbol{n}) + \frac{i}{2|\alpha_*|}\big(v_{1,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{1,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp} + v_{2,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{2,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp}$$
$$- v_{3,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{3,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp} - v_{4,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{4,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp}\big)\Big] = 0,$$

其中，收敛速率为指数级。

物理格林算子的有界性由柯西主值积分的标准估计得出，证明思路与 [57, 命题 4.4] 类似。可逆性 (5.12) 以及远场渐近行为 (5.13)-(5.14) 的证明与 [32,定理 6]中的论证相同。

注 5.5. 将命题 *5.4* 中给出的远场渐近行为代入(5.11)，其物理意义便一目了然。事实上，通过这一代入可以看出，由极限吸收原理得到的算子 $\mathcal{G}_b^{l.a.}{}_{,\sharp}$ 满足

$$\lim_{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\ell}_1\to+\infty}\Big[(\mathcal{G}_{b,\sharp}^{l.a.}u)(\boldsymbol{n}) - \frac{i}{|\alpha_*|}\big(v_{1,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{1,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp} + v_{2,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{2,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp}\big)\Big] = 0,$$

and

$$\lim_{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\ell}_1\to-\infty}\Big[(\mathcal{G}_{b,\sharp}^{l.a.}u)(\boldsymbol{n}) - \frac{i}{|\alpha_*|}\big(v_{3,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{3,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp} + v_{4,\sharp}(\boldsymbol{n};0)\big(u(\cdot), v_{4,\sharp}(\cdot;0)\big)_{\mathcal{X}_\sharp}\big)\Big] = 0.$$

[10]事实上，柯西主值积分仅对 $1 \le n \le 4$ in (5.11) 是必要的，因为对于 $n = 5,6$，其被积函数不存在奇异性。

这意味着，对于任意 u, $\mathcal{G}_b^{l.a.,\sharp}u$ 均由一个倏逝部分和一个向右传播（向左传播）部分组成，其中传播部分恰好由双狄拉克锥处群速度为正（负）的 *Floquet-Bloch* 模态组成，即 $v_{n,\sharp}(\cdot;0)$ 对于 $n=1,2$ （$n=3,4$），如图 *5(b)* 所示。在下一节中，将基于能流的概念，更详细地说明双狄拉克锥处 *Floquet-Bloch* 模态的不同传播方向。

5.1.3. 双狄拉克锥处 *Floquet-Bloch* 模态的离散能流。 在本节中，我们在 $\mathcal{X}_\sharp$上引入一个半双线性型。当将其应用于 Floquet-Bloch 本征模 $v_{n,\sharp}(\cdot;\kappa_1)$时，它给出了相应本征模所携带的能流（或者，在省略所有单位后，也可视为群速度）。此外，正如我们将在第5.4节中看到的，这个半双线性型为 $\mathcal{X}_\sharp$ 提供了一种便捷的正交化方法，从而能够求解边界匹配方程并获得界面模。

我们先固定记号。由于 $\mathcal{X}_\sharp \simeq \ell^2(\Lambda_1)\otimes\mathbb{C}^6$ 与由单位向量 $\boldsymbol{\ell}_1$生成的一维晶格 $\Lambda_1=\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_1$ 相关联，我们将 $\mathcal{X}_\sharp$ 称为条带空间，并将$\mathcal{H}_{b,\sharp}$ 上的体哈密顿量 $\mathcal{X}_\sharp$ 称为条带哈密顿算子。将条带哈密顿算子写成最近邻跃迁形式会很方便。为此，我们引入如下同构：

$$\begin{aligned}\iota:\mathbb{Z}\times(\{1,\cdots,N\}\times\{1,\cdots,6\})&\to\Lambda_1\times\{1,\cdots,6\},\\ (n,(\sigma_1,\sigma_2))&\mapsto\big((n\cdot N+\sigma_1)\boldsymbol{\ell}_1,\sigma_2\big),\end{aligned}\tag{5.15}$$

其中 $N>0$ 为哈密顿量作用范围（见定义 2.1）。稍微滥用一下记号，由 ι 诱导的、在 $\tilde{\mathcal{X}}_\sharp := \ell^2(\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}^{6N}$ （称为分块条带空间）与 $\mathcal{X}_\sharp$ 之间的同构仍记为 ι，其伴随记为 ι^*。采用这一记号，最近邻跃迁（*NNH*）条带哈密顿量定义如下

$$\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp} := \iota^*\mathcal{H}_{b,\sharp}\iota \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{X}}_\sharp).$$

顾名思义，引入 NNH 条带哈密顿量的关键原因在于，其核满足

$$\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(n,m)=0,\quad \text{for } |n-m|>1.$$

直观而言，我们将晶格上的 N 个格点（原哈密顿量 $\mathcal{H}_{b,\sharp}$定义于此）封装成一个块，使得 NNH 哈密顿量中的跃迁项 $\mathcal{H}_{b,\sharp}$ 仅限于最近邻之间。

有了这些 准备工作，我们现在可以引入能流的半双线性型 .

定义 5.6 (能流型)。 对于任意 $\phi,\varphi\in\mathcal{X}_\sharp$，格点 $n\in\mathbb{Z}$ 处能流的半双线性型定义为

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}(\phi,\varphi;n) &:= \big(\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(n,n-1)\phi(n-1),\varphi(n)\big)_{\mathbb{C}^{6N}} - \big(\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(n-1,n)\phi(n),\varphi(n-1)\big)_{\mathbb{C}^{6N}}\\ &= \big(\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(1,0)\phi(n-1),\varphi(n)\big)_{\mathbb{C}^{6N}} - \big(\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,1)\phi(n),\varphi(n-1)\big)_{\mathbb{C}^{6N}}.\end{aligned}$$

或者更明确地说，

$$\mathfrak{a}(\phi,\varphi;n)=\overline{\varphi(n)}^{\top}\cdot\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(1,0)\phi(n-1)-\overline{\varphi(n-1)}^{\top}\cdot\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,1)\phi(n).$$

请注意，引入 NNH 条带哈密顿量的优势之一可从定义 5.6 中看出：定义半双线性型 $\mathfrak{a}(\cdot,\cdot)$ 的内积，在 $\mathcal{X}_\sharp$ 上计算时实际上是由 N 项组成的和，如今则被封装为 $\mathcal{X}_\sharp$ 上的简单乘积，从而显著简化了记号。

该半双线性型的主要性质如下所述，这些性质对于后续各节中界面模的分析十分重要。其证明思路与 [32, 定理 3] 相同（简要说明见注 5.8）。为简化记号，我们记

$$\tilde{v}_n := \iota^* v_n(\cdot;0) \quad \text{for } 1 \le n \le 4, \tag{5.16}$$

双狄拉克锥处阻塞的 Floquet-Bloch 本征模。

命题 5.7。 $\mathfrak{a}(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j; n)$ 的值与格点 n 无关，即，

$$\mathfrak{a}(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j; n) \equiv \mathfrak{a}(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j; 0) =: \mathfrak{a}(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) \quad (1 \le i, j \le 4). \tag{5.17}$$

当 $i = j$, $\mathfrak{a}(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j)$ 与色散曲线 $\mu_{j,\sharp}$ 在 $\kappa_1 = 0$ 处的斜率成正比时，即，

$$\mathfrak{a}(\tilde{v}_j, \tilde{v}_j) = \begin{cases} i|\alpha_*|, & j = 1, 2, \\ -i|\alpha_*|, & j = 3, 4. \end{cases} \tag{5.18}$$

当 $i \neq j$ 时，有

$$\mathfrak{a}(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = 0. \tag{5.19}$$

我们对式 (5.7) 作如下解释。从物理上看，式 (5.18) 说明了半双线性型$\mathfrak{a}(\cdot,\cdot)$这一名称的由来：将其作用于弗洛凯-布洛赫本征模时，其值与这些本征模携带的能流成正比，因为若忽略所有单位，后者等于群速度。此外，式 (5.17) 表明，在不同格点˜处计算得到的能流值相同；这仅仅是因为 $\tilde{v}_i$ 是 $\mathcal{H}_{b,\sharp}$ 的本征模，即，

$$(\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp} - \lambda_*)\tilde{v}_i = 0$$

且不会出现源。最后，根据 (5.19)，我们看到，不同的本征模在 $\mathfrak{a}(\cdot,\ \cdot)$ 的作用下彼此解耦。从数学角度来看，命题 5.7 表明，被阻塞的本征模 $\tilde{v}_i$ 通过半双线性型 $\mathfrak{a}(\cdot,\ \cdot)$ 进行了正交化。正如我们在本节开头所述，这种正交化对于研究界面模似乎十分重要。

关于 Floquet-Bloch 模态所对应能流的思想，我们是在原论文 [32], 中了解到的；有关半双线性型 $\mathfrak{a}(\cdot,\ \cdot)$ 连续版本的详细讨论，敬请读者参阅该文。我们还扩展了该型的一些方面，而这些方面在 [32]中并未得到证明；参见 [59, 第 6] 节。

注 5.8。 我们简要评论一下命题 *5.7* 的证明。该证明仅依赖于算子的能带结构，因此 *[32,*定理 *3]*可直接推广到我们的情形。我们注意到， *[32,* 定理 *3]* 中的关键步骤是适用于条带中函数的高斯-格林公式，而在我们的情形下，该公式具有如下离散对应形式

$$\sum_{k \le m \le k+p} (f_i(m), \phi_j(m))_{\mathbb{C}^{6N}} - (\phi_i(m), f_j(m))_{\mathbb{C}^{6N}} = \mathfrak{a}(\phi_i, \phi_j; k) - \mathfrak{a}(\phi_i, \phi_j; k+p+1) \tag{5.20}$$

with

$$f_i := (\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp} - \lambda)\phi_i \quad (i = 1, 2).$$

其余细节留给感兴趣的读者。

5.2. 界面模态的离散层势表述。本节将基于离散层势框架，建立研究界面模的基本框架。与第 5.1.3 节一样，为了简化记号，我们倾向于使用 NNH 条带哈密顿量。具体而言，我们将求解以下等价的本征值问题：

$$(\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp} - \lambda)u = 0 \quad \text{with } \tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp} := \iota \mathcal{H}_{zig,\sharp} \iota^*, \tag{5.21}$$

对于 $\lambda \in \mathcal{I}_\delta$ （体谱隙）和 $u \in \mathcal{X}_\sharp$。根据 (2.12)，NNH 界面哈密顿量 $\mathcal{H}_{zig,\,\sharp}$ 的核可以显式写为

$$\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(n,m) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{H}}_{\delta,\sharp}(n,m), & n,m \geq 0, \\ \tilde{\mathcal{H}}_{-\delta,\sharp}(n,m), & n,m < 0, \\ (\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp} + \delta \tilde{\mathcal{E}}_\sharp)(n,m), & \text{otherwise}, \end{cases}$$

with $\mathcal{O}^{:=\iota^*}\mathcal{O}\iota$ 对于 $\mathcal{O} \in \{\mathcal{H}_{\pm\delta,\sharp}, \mathcal{H}_{b,\sharp}, \mathcal{E}_\sharp\}$，下标表示对 $\mathcal{X}_\sharp$ 的限制 .

第一个关键观察是，如果 $u \in \mathcal{X}_\sharp$ 满足 (5.21)，则可以通过（离散）分部积分证明，$u(n)$具有以下层势表达式[11]

$$u(n) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(n,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{\delta,\sharp}(-1,0)a - \tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(n,0)\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(0,-1)b, & n \geq 0, \\ -\tilde{\mathcal{G}}_{-\delta,\sharp}(n,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(-1,0)a + \tilde{\mathcal{G}}_{-\delta,\sharp}(n,0)\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta,\sharp}(0,-1)b, & n < 0, \end{cases} \tag{5.22}$$

其中 $a = u(0)$ $b = u(-1) \in \mathbb{C}^{6N}$，并且

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\pm\delta,\sharp} = \tilde{\mathcal{G}}_{\pm\delta,\sharp}(\lambda) := (\tilde{\mathcal{H}}_{\pm\delta,\sharp} - \lambda)^{-1} = \iota^*(\mathcal{H}_{\pm\delta,\sharp} - \lambda)^{-1}\iota.$$

在全文中，若不会引起混淆，我们将省略 λ 对$\mathcal{G}_{\pm\delta,\sharp}$ 的依赖。此外，将(5.22)代入 $n = -1,0$处的(5.21)，可得以下边界匹配方程：

$$\mathcal{M}(\lambda,\delta)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \tag{5.23}$$

其中厄米矩阵 $\mathcal{M}(\lambda,\delta) \in \mathbb{C}^{12N\times 12N}$ 定义为

(5.24)

$$\mathcal{M}(\lambda,\delta) := \begin{pmatrix} -\tilde{\mathcal{H}}_{\delta,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(-1,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{\delta,\sharp}(-1,0) & -\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(0,-1)+\tilde{\mathcal{H}}_{\delta,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(0,-1) \\ -\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{G}}_{-\delta,\sharp}(-1,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(-1,0) & +\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{G}}_{-\delta,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta,\sharp}(0,-1) \\ -\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(-1,0)+\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{G}}_{-\delta,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(-1,0) & -\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{G}}_{-\delta,\sharp}(0,0)\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta,\sharp}(0,-1) \\ +\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{\delta,\sharp}(-1,0) & -\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(0,0)\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(0,-1) \end{pmatrix}.$$

另一方面，在(5.22)中令 $n = -1,0$，可得以下条件：

$$\mathcal{M}^{aux}(\lambda,\delta)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{5.25}$$

with

$$\mathcal{M}^{aux}(\lambda,\delta) := \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{\delta,\sharp}(-1,0) & -\tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(0,0)\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(0,-1) \\ -\tilde{\mathcal{G}}_{-\delta,\sharp}(-1,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(-1,0) & \tilde{\mathcal{G}}_{-\delta,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta,\sharp}(0,-1) \end{pmatrix}. \tag{5.26}$$

值得注意的是，只要特征值问题 (5.23) 有非平凡解，且 (5.25) 的左侧不为零，就可以验证，由离散

[11]具体而言，要得到关于 $n \geq 0$的公式(5.22)，只需在(5.20)中取 $\phi_1(m) = u(m)$，$\phi_2(m) = \tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(m,n)$，$k = 0$，将$\mathcal{H}_{b,\sharp}$ 替换为$\mathcal{H}_{zig,\sharp}$，并利用最后一项在 $p \to \infty$时趋于零这一事实； $n < 0$ 的情形可用类似方法证明。

层势公式 (5.22) 构造的函数 确实是一个满足 (5.21) 的非平凡本征模。这意味着我们已经推导出一个关于*(5.21)* 解存在性的等价表述。

命题 5.9。 本征值问题 (5.21) 有解，当且仅当 f

1) 特征值问题 (5.23) 有非平凡解 $(\lambda,(a,b)^\top) \in \mathcal{I}_\delta \times(\mathbb{C}^{6N} \times \mathbb{C}^{6N})$；*2) 1)* 中的解满足 $\mathcal{M}^{aux}(\lambda,\delta)(a,b)^\top \neq 0$。

现在我们来考虑界面模的确切数量。为此，命题 5.9 中概述的表述并不充分：两个不同的解（例如 $(a_i,b_i)^\top$ 对于 $i = 1,2$）可能会产生相同的界面模。重要的是，公式 (5.25) 消除了这一冗余自由度：如果 $(a_i,b_i)^\top$ 也满足 (5.25)，那么由 (5.22) 构造的界面模必定线性无关，因为它们在 $n = -1,0$ 处的数据彼此独立。总之，我们论证了以下结果成立。

命题 5.10。 假设本征值问题 (5.21) 有解。那么，按重数计，(5.21)的本征值总数等于方程组 (5.23) 和 (5.25)的特征值总数。

注 5.11。 引入 *NNH* 条带哈密顿量的另一项优点（事实上，也是主要原因）体现在界面模的层势公式中，即(5.23) 和(5.25)；在这些公式中， $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^{aux}$ 的矩阵元可简洁地表示为最近邻块跃迁元的乘积，而无需展开为所有 N 个邻居的求和。

5.3. **边界算子的极限**。 本节研究边界算子 $\mathcal{M}$和 $\mathcal{M}^{aux}$ 在 $\delta \to 0^+$时的极限，这些极限是求解边界匹配方程 (5.23) 和 (5.25) 时最重要的组成部分。接下来，我们将体谱隙 $\mathcal{I}_\delta$ 中的能量（在其复邻域内）重新参数化为

$$\lambda = \lambda_* + \delta \cdot h, \quad h \in \mathcal{J} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < |c_*\beta_*|\},$$

其中， c_*， $\beta_* \in \mathbb{R}$ 在定理 2.7 中引入。采用这一记号，本节的主要结果如下。

命题 5.12。 当 $\delta \to 0^+$ 时，矩阵 $\mathcal{M}(\lambda_* + \delta \cdot h,\ \delta) \in \mathbb{C}^{12N\times 12N}$ 关于 $h \in \mathcal{J}$ 一致地按矩阵范数收敛:

$$\lim_{\delta\to 0^+} \left\| \mathcal{M}(\lambda_* + \delta \cdot h, \delta) - \left(\mathcal{M}^{p.v.} + \xi(h)\mathcal{A}\right) \right\|_{\mathbb{C}^{12N\times 12N}} = 0, \tag{5.27}$$

其中，在极限算子中， $\mathcal{M}^{p.v.}$ 通过将 (5.24) 中的格林算子 $\tilde{\mathcal{G}}_{\pm\delta,\ \sharp}$ 替换为 $\tilde{\mathcal{G}}_b^{p.v.}{}_{,\ \sharp} := \iota^*\mathcal{G}_b^{p.v.}{}_{,\ \sharp}\ \iota$，并将哈密顿量替换为 $\tilde{\mathcal{H}}_{b,\ \sharp}$来定义:

$$\mathcal{M}^{p.v.} := \begin{pmatrix} -2\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(-1,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0) & -\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)+2\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1) \\ -\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)+2\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0) & -2\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(0,0)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1) \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

函数 $\xi(h)$ 在 $h \in \mathcal{J}$ 上解析，且其显式表达式为

$$\xi(h) := \frac{h}{|\alpha_*|\sqrt{\beta_*^2 - h^2}}, \tag{5.29}$$

且矩阵 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{C}^{12N}$上的四维投影:

$$\mathcal{A} := \sum_{k=1}^{4} \begin{pmatrix} -\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{v}_k(-1)\overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{v}_k(-1)}^\top & \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{v}_k(-1)\overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{v}_k(0)}^\top \\ \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{v}_k(0)\overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{v}_k(-1)}^\top & -\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{v}_k(0)\overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{v}_k(0)}^\top \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

其中，（分块的）弗洛凯-布洛赫本征模 $\tilde{v}_k$ 在(5.16)中引入。类似地，算子 $\mathcal{M}^{aux}$ 满足以下范数极限：

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left\|\mathcal{M}^{aux}(\lambda_*+\delta\cdot h,\delta)-\left(\mathcal{M}^{aux,p.v.}+\xi(h)\mathcal{A}_1^{aux}+\eta(h)\mathcal{A}_2^{aux}\right)\right\|_{\mathbb{C}^{12N\times 12N}}=0, \tag{5.31}$$

其中

$$\mathcal{M}^{aux,p.v.}:=\begin{pmatrix}\tilde{\mathcal{G}}_{b,\sharp}^{p.v.}(0,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0) & -\tilde{\mathcal{G}}_{b,\sharp}^{p.v.}(0,0)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\\ -\tilde{\mathcal{G}}_{b,\sharp}^{p.v.}(-1,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0) & \tilde{\mathcal{G}}_{b,\sharp}^{p.v.}(-1,0)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\end{pmatrix}, \tag{5.32}$$

$$\mathcal{A}_1^{aux}:=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\tilde{v}_k(0)\overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{v}_k(-1)}^{\top} & -\tilde{v}_k(0)\overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{v}_k(0)}^{\top}\\ -\tilde{v}_k(-1)\overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{v}_k(-1)}^{\top} & \tilde{v}_k(-1)\overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{v}_k(0)}^{\top}\end{pmatrix}, \tag{5.33}$$

$$\mathcal{A}_2^{aux}:=\sum_{k=1}^{4}\frac{s(k)}{2}\begin{pmatrix}\tilde{v}_k(0)\overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{v}_{p(k)}(-1)}^{\top} & -\tilde{v}_k(0)\overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{v}_{p(k)}(0)}^{\top}\\ \tilde{v}_k(-1)\overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{v}_{p(k)}(-1)}^{\top} & -\tilde{v}_k(-1)\overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{v}_{p(k)}(0)}^{\top}\end{pmatrix}, \tag{5.34}$$

and

$$\eta(h):=\frac{\beta_*}{|\alpha_*|\sqrt{\beta_*^2-h^2}}. \tag{5.35}$$

这里，在 (5.34) 中， $s(k)$ 表示整数的奇偶性

$$s(k)=1\quad \textit{for even } k,\quad s(k)=-1\quad \textit{for odd } k,$$

而 $p:=(13)(24)$ 是有限集 $\{1,2,3,4\}$ 上的一个置换。

注释5.13。 正如稍后将看到的，(5.27) 中的极限算子属于*"Fredholm*型*"*，也就是说， $\mathcal{M}^{p.v.}$ 是伪可逆的，其核空间的维数与 $N-$无关，而投影 $\mathcal{A}$ 的维数也与 $N-$无关。我们指出，在以往的论文 *[57, 59],* 中，边界空间是无限维的，此时相应的边界算子实际上是通常意义下的 *Fredholm* 算子。

注 5.14。 我们讨论界面两侧不存在能带反转的情形。考虑在(2.12)中用 $\mathcal{H}_\delta$ 替换 $\mathcal{H}_{-\delta}$ 的情况，即界面两侧体介质的控制算子相同。在这种情况下，尽管体哈密顿量之间仍存在共同的带隙，但带隙端点处不存在能带反转。因此，我们将看到极限边界匹配算子发生显著变化：将(5.24) 中的 $-\delta\to\delta$ 替换掉，并按照命题 *5.12* 计算其极限，结果为

$$\mathcal{M}^{p.v.}+\xi(h)\mathcal{A}+2\eta(h)\begin{pmatrix}-\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1) & 0\\ 0 & \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\end{pmatrix}\mathcal{A}_2^{aux}. \tag{5.36}$$

与(5.27)相比，这里多出了一个与 $\eta(h)$成正比的投影算子。按照第*5.4*节中的计算，可以证明，对于所有 $h\in\mathcal{J}$，算子(5.36) 都是可逆的，这与(5.27) 中的极限算子形成鲜明对比，后者具有四个特征值。利用这一事实，可以直接证明，对于缺少跨界面能带反转的界面模型，不存在界面模，这与物理直觉完全一致。

在给出命题 5.12的证明之前——该证明基于对格林算子 $\tilde{\mathcal{G}}_{\pm\delta,\sharp}$的渐近分析——我们先介绍极限 (5.27) 中主导算子 $\mathcal{M}^{p.v.}$的以下性质。要找到界面模，求解边界匹配方程 (5.23) 至关重要。

命题 5.15。 在(5.28) 中定义的矩阵 $\mathcal{M}^{p.v.} \in \mathbb{C}^{12N\times 12N}$ 是厄米的。此外， $\mathcal{M}^{p.v.}$ 的零空间由（分块的）弗洛凯-布洛赫本征模的边界数据张成，即：

$$\ker \mathcal{M}^{p.v.} = span\Big\{\big(\tilde{v}_k(0), \tilde{v}_k(-1)\big)^\top, 1 \le k \le 4\Big\}. \tag{5.37}$$

Th本节其余部分将用于证明命题 5.12 和 5.1 5.

命题 *5.12* 的证明。 我们声称，收敛关系 (5.27) 和 (5.31) 可由以下格林算子的收敛性推出：

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0^+} \tilde{\mathcal{G}}_{\pm\delta,\sharp}(\lambda_* + \delta\cdot h)(n,m)\\ &= \tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(n,m) + \frac{1}{2}\xi(h)\sum_{1\le k\le 4}\tilde{v}_k(n)\overline{\tilde{v}_k(m)}^\top \pm \frac{1}{2}\eta(h)\sum_{1\le k\le 4} s(k)\tilde{v}_k(n)\overline{\tilde{v}_{p(k)}(m)}^\top\end{aligned} \tag{5.38}$$

对于任意 n， $m \in \mathbb{Z}$。事实上，利用 (5.38)，可以逐元素验证 $\mathcal{M}(\lambda_* + \delta\cdot h,\ \delta)$ 和 $\mathcal{M}^{aux}(\lambda_* + \delta\cdot h,\ \delta)$ 的收敛性。例如，考察 $\mathcal{M}(\lambda_* + \delta\cdot h,\ \delta)$ 的左上元素，可计算得：

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0^+}\Big(-\tilde{\mathcal{H}}_{\delta,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(-1,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{\delta,\sharp}(-1,0) - \tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{G}}_{-\delta,\sharp}(-1,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(-1,0)\Big)\\ &\overset{(i)}{=} -\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\Big(\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(-1,-1) + \frac{1}{2}\xi(h)\sum_{k=1}\tilde{v}_k(-1)\overline{\tilde{v}_k(-1)}^\top + \frac{1}{2}\eta(h)\sum_{k=1}s(k)\tilde{v}_k(-1)\overline{\tilde{v}_{p(k)}(-1)}^\top\Big)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\\ &-\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\Big(\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(-1,-1) + \frac{1}{2}\xi(h)\sum_{k=1}\tilde{v}_k(-1)\overline{\tilde{v}_k(-1)}^\top - \frac{1}{2}\eta(h)\sum_{k=1}s(k)\tilde{v}_k(-1)\overline{\tilde{v}_{p(k)}(-1)}^\top\Big)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\\ &\overset{(ii)}{=} -2\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(-1,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0) - \xi(h)\sum_{k=1}^{4}\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{v}_k(-1)\overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{v}_k(-1)}\\ &= \mathcal{M}^{p.v.}_{11} + \xi(h)\mathcal{A}_{11},\end{aligned}$$

wh式 (*i*) 由 (5.38) 得出，而在 (*ii*) 中，我们应用了厄米性 y

$$\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(n,m) = \overline{\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(m,n)}^\top.$$

矩阵其他元素的收敛可用类似的方法验证 .

~步骤1. 现在我们证明 $\mathcal{G}_{\delta,\sharp}$ 情形下的 (5.38)，而 $\mathcal{G}_{-\delta,\sharp}$ 的情形可用类似方法处理。为此，我们首先将格林算子拆分为若干部分：先将 (5.38) 展开为傅里叶级数（类似于 (5.10)），然后按照不同的积分域对傅里叶展开进行分解。具体而言，我们写作

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(\lambda_* + \delta\cdot h)(n,m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\kappa_1 \sum_{1\le k\le 6}\frac{\tilde{v}_{k,\delta,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde{v}_{k,\delta,\sharp}(m;\kappa_1)}^\top}{\mu_{k,\delta,\sharp}(\kappa_1) - (\lambda_* + \delta\cdot h)}, \tag{5.39}$$

~其中 $\mu_{k,\ \delta,\ \sharp}(\kappa_1)$ 是 $\mathcal{H}_{\delta,\ \sharp}$ 的解析标记 Floquet-Bloch本征值，而 $\tilde{v}_{k,\ \delta,\ \sharp}(;\kappa_1) =\iota^* v_{k,\ \delta}(;\kappa_1\ell_1^*)$ 是相应的（分块）本征模；注意，对于 $1 \le n \le 4$ 且 κ_1 较小时，这些特征对可通过定理 4.1 得到详细的渐近展开。接下来，

我们将 (5.39) 分解如下：

(5.40)

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(\lambda_* + \delta\cdot h)(n,m)\\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\kappa_1 \sum_{k=5,6} \frac{\tilde{v}_{k,\delta,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde{v}_{k,\delta,\sharp}(m;\kappa_1)}^{\top}}{\mu_{k,\delta,\sharp}(\kappa_1) - (\lambda_* + \delta\cdot h)} + \frac{1}{2\pi}\int_{(-\pi,-\delta^{1/3})\cup(\delta^{1/3},\pi)} d\kappa_1 \sum_{1\le k\le 4} \frac{\tilde{v}_{k,\delta,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde{v}_{k,\delta,\sharp}(m;\kappa_1)}^{\top}}{\mu_{k,\delta,\sharp}(\kappa_1) - (\lambda_* + \delta\cdot h)}}_{\text{regular part}}\\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta^{1/3}}^{\delta^{1/3}} d\kappa_1 \sum_{1\le k\le 4} \frac{\tilde{v}_{k,\delta,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde{v}_{k,\delta,\sharp}(m;\kappa_1)}^{\top}}{\mu_{k,\delta,\sharp}(\kappa_1) - (\lambda_* + \delta\cdot h)}}_{\text{singular part}}\\
&=: \tilde{\mathcal{G}}^{reg}_{\delta,\sharp}(\lambda_* + \delta\cdot h)(n,m) + \tilde{\mathcal{G}}^{sing}_{\delta,\sharp}(\lambda_* + \delta\cdot h)(n,m).
\end{aligned}$$

正如很快就会更加清楚的那样，前两个积分上标中的‘reg’表示其被积函数关于扰动参数 δ 表现规则，因为分母足够大（至少为 $\sim \delta^{1/3}$ 的量级，远大于 $\sim \delta$）；同理，‘sing’表示奇异积分，其收敛需要利用定理 4.1 的结果进行详细的渐近分析。

我们断言，(5.40) 中的三个积分分别按如下方式收敛：

$$\lim_{\delta\to 0^+} \tilde{\mathcal{G}}^{reg}_{\delta,\sharp}(\lambda_* + \delta\cdot h)(n,m) = \tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(n,m) \tag{5.41}$$

and

$$\lim_{\delta\to 0^+} \tilde{\mathcal{G}}^{sing}_{\delta,\sharp}(\lambda_* + \delta\cdot h)(n,m) = \frac{1}{2}\xi(h)\sum_{k=1} \tilde{v}_k(n)\overline{\tilde{v}_k(m)}^{\top} + \frac{1}{2}\eta(h)\sum_{k=1} s(k)\tilde{v}_k(n)\overline{\tilde{v}_{p(k)}(m)}^{\top}. \tag{5.42}$$

于是，(5.38) 的收敛性可直接得出。接下来，我们分别证明 (5.41) 和 (5.42)。

步骤 2. (5.41) 的证明基于对正则扰动理论的标准应用，沿用我们先前工作的思路 [57, 附录 F] 和 [59, 引理 5。5]；这里我们仅概述证明的主要思路，详细内容请读者参阅上述文献。首先，我们指出以下估计：

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\kappa_1 \sum_{k=5,6} \frac{\tilde{v}_{k,\delta,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde{v}_{k,\delta,\sharp}(m;\kappa_1)}^{\top}}{\mu_{k,\delta,\sharp}(\kappa_1) - (\lambda_* + \delta\cdot h)} = \int_{-\pi}^{\pi} d\kappa_1 \sum_{k=5,6} \frac{\tilde{v}_{k,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde{v}_{k,\sharp}(m;\kappa_1)}^{\top}}{\mu_{k,\sharp}(\kappa_1) - \lambda_*} + \mathcal{O}(\delta), \tag{5.43}$$

其中，$\mu_{k,\sharp}(\kappa_1) = \mu_k(\kappa_1\ell_1^*)$ 和 $\tilde{v}_{k,\sharp}(\cdot;\kappa_1) = \iota^* v_k(\cdot;\kappa_1\ell_1^*)$ 是未扰动 Floquet-Bloch 本征对（按解析方式标记的阻塞本征对）。事实上，由于根据假设 (2.8) 和 (2.9)，第五和第六能带与 λ_* 保持一致地有界分离（具有与 δ–无关的隔离距离），因此 (5.43) 的分母一致有界，即存在 $c > 0$ 使得

$$\left|\mu_{k,\delta,\sharp}(\kappa_1) - (\lambda_* + \delta\cdot h)\right| > c > 0 \quad \forall\, k = 5,6,\ \kappa_1 \in (-\pi,\pi),\ h \in \mathcal{J} \text{ and small } \delta. \tag{5.44}$$

另一方面，标准微扰理论给出

$$\left|\mu_{k,\delta,\sharp}(\kappa_1) + \delta\cdot h - \mu_{k,\sharp}(\kappa_1)\right| = \mathcal{O}(\delta), \quad \left\|\tilde{v}_{k,\delta,\sharp}(n;\kappa_1) - \tilde{v}_{k,\sharp}(n;\kappa_1)\right\|_{\mathbb{C}^{6N}} = \mathcal{O}(\delta). \tag{5.45}$$

由式 (5.44) 和 (5.45) 可直接得到估计式 (5.43)。

现在，我们证明式 (5.41) 另一部分的收敛性。第一步是得到以下估计：

$$\begin{aligned}&\int_{(-\pi,-\delta^{1/3})\cup(\delta^{1/3},\pi)} d\kappa_1 \sum_{1\le k\le 4} \frac{\tilde v_{k,\delta,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde v_{k,\delta,\sharp}(m;\kappa_1)}^{\top}}{\mu_{k,\delta,\sharp}(\kappa_1)-(\lambda_*+\delta\cdot h)}\\ &=\int_{(-\pi,-\delta^{1/3})\cup(\delta^{1/3},\pi)} d\kappa_1 \sum_{1\le k\le 4} \frac{\tilde v_{k,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde v_{k,\sharp}(m;\kappa_1)}^{\top}}{\mu_{k,\sharp}(\kappa_1)-\lambda_*}+\mathcal{O}(\delta^{1/3}).\end{aligned} \tag{5.46}$$

这个思路与证明 (5.43) 时类似，不同之处在于分母的一致下界 (5.44) 不再成立。尽管如此，由于我们对积分域终止点 $\delta^{1/3}$ 的设计，定理 4.1 和 2.5 表明我们仍然可以控制分母。事实上，存在 $c>0$ 使得

$$\left|\mu_{k,\delta,\sharp}(\kappa_1)-(\lambda_*+\delta\cdot h)\right|>c\delta^{1/3}\quad \forall\, k=1,2,3,4,\ |\kappa_1|>\delta^{1/3},\ h\in\mathcal{J}\text{ and small }\delta. \tag{5.47}$$

由 (5.47) 以及 (5.45)，可得到估计 (5.46)。接下来，由于 $\mu_{k,\sharp}(\kappa_1)$ 在 $\kappa_1=0$ 处具有非零导数（这归功于狄拉克锥和解析标记），我们可以将 (5.46) 中右侧积分的 $\delta\to 0$ 移入积分号内，从而得到一个柯西主值积分

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{(-\pi,-\delta^{1/3})\cup(\delta^{1/3},\pi)} d\kappa_1 \sum_{1\le k\le 4} \frac{\tilde v_{k,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde v_{k,\sharp}(m;\kappa_1)}^{\top}}{\mu_{k,\sharp}(\kappa_1)-\lambda_*}=p.v.\int_{-\pi}^{\pi} d\kappa_1 \sum_{1\le k\le 4} \frac{\tilde v_{k,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde v_{k,\sharp}(m;\kappa_1)}^{\top}}{\mu_{k,\sharp}(\kappa_1)-\lambda_*}.$$

然后，结合 (5.46) 和 (5.43)，我们完成 (5.41) 的证明。

步骤 2. 现在，我们通过仔细的渐近分析证明奇异部分 (5.42) 的收敛。首先注意到，由于前四条能带构成了双狄拉克锥附近的全部能带，因此，定义 (5.42) 的积分之和（见 (5.40)）也可以用按递增顺序标记的特征对表示：

$$\int_{-\delta^{1/3}}^{\delta^{1/3}} d\kappa_1 \sum_{1\le k\le 4} \frac{\tilde v_{k,\delta,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde v_{k,\delta,\sharp}(m;\kappa_1)}^{\top}}{\mu_{k,\delta,\sharp}(\kappa_1)-(\lambda_*+\delta\cdot h)}=\int_{-\delta^{1/3}}^{\delta^{1/3}} d\kappa_1 \sum_{1\le k\le 4} \frac{\tilde u_{k,\delta,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde u_{k,\delta,\sharp}(m;\kappa_1)}^{\top}}{\lambda_{k,\delta,\sharp}(\kappa_1)-(\lambda_*+\delta\cdot h)}. \tag{5.48}$$

接下来，我们应用定理 4.1 的结果来估计右侧。根据定理 4.1 中得到的特征对的渐近行为，我们按照各条能带的主导阶贡献和其余贡献对 (5.48) 进行分解，即：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta^{1/3}}^{\delta^{1/3}} d\kappa_1 \sum_{1\le k\le 4} \frac{\tilde u_{k,\delta,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde u_{k,\delta,\sharp}(m;\kappa_1)}^{\top}}{\lambda_{k,\delta,\sharp}(\kappa_1)-(\lambda_*+\delta\cdot h)}=\sum_{1\le k\le 4}\Big(\mathcal{K}^{(0)}_{k,\delta}(n,m)+\mathcal{K}^{(1)}_{k,\delta}(n,m)\Big). \tag{5.49}$$

这里，$\mathcal{K}^{(0)}_{k\,\delta}$,包含第 $k-$ 个能带的主导阶贡献：5.50

$$\mathcal{K}^{(0)}_{1,\delta}(n,m):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta^{1/3}}^{\delta^{1/3}}\frac{d\kappa_1}{1+f^2(\kappa_1,\delta)}\frac{\big(-f(\kappa_1,\delta)\tilde u_1(n)+\tilde u_3(n)\big)\overline{\big(-f(\kappa_1,\delta)\tilde u_1(m)+\tilde u_3(m)\big)}^{\top}}{-\sqrt{\beta_*^2\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}-\delta\cdot h}, \tag{5.51}$$

$$\mathcal{K}^{(0)}_{2,\delta}(n,m):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta^{1/3}}^{\delta^{1/3}}\frac{d\kappa_1}{1+f^2(\kappa_1,\delta)}\frac{\big(-f(\kappa_1,\delta)\tilde u_2(n)+\tilde u_4(n)\big)\overline{\big(-f(\kappa_1,\delta)\tilde u_2(m)+\tilde u_4(m)\big)}^{\top}}{-\sqrt{\beta_*^2\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}-\delta\cdot h}, \tag{5.52}$$

$$\mathcal{K}^{(0)}_{3,\delta}(n,m):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta^{1/3}}^{\delta^{1/3}}\frac{d\kappa_1}{1+f^2(\kappa_1,\delta)}\frac{\big(\tilde u_2(n)+f(\kappa_1,\delta)\tilde u_4(n)\big)\overline{\big(\tilde u_2(m)+f(\kappa_1,\delta)\tilde u_4(m)\big)}^{\top}}{\sqrt{\beta_*^2\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}-\delta\cdot h},$$

and

$$\mathcal{K}^{(0)}_{4,\delta}(n,m) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta^{1/3}}^{\delta^{1/3}} \frac{d\kappa_1}{1+f^2(\kappa_1,\delta)} \frac{\big(\tilde{u}_1(n)+f(\kappa_1,\delta)\tilde{u}_3(n)\big)\overline{\big(\tilde{u}_1(m)+f(\kappa_1,\delta)\tilde{u}_3(m)\big)}^{\top}}{\sqrt{\beta_*^2\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}-\delta\cdot h}, \tag{5.53}$$

其中，函数 $f(\kappa_1,\delta)$ 定义为

$$f(\kappa_1,\delta) := \frac{\alpha_*\kappa_1}{\beta_*\delta+\sqrt{\beta_*^2\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}}$$

并且 $\tilde{u}_k := \iota^* u_k$，其中 u_k 是双狄拉克点处 Floquet-Bloch 模态的简写记法，如定理 4.1 所示。矩阵 $\mathcal{K}^{(1)}_{k\,\delta}$，包含第 $k-$ 带的其余贡献：

$$\mathcal{K}^{(1)}_{k,\delta}(n,m) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta^{1/3}}^{\delta^{1/3}} d\kappa_1 \sum_{1\le k\le 4} \frac{\tilde{u}_{k,\delta,\sharp}(n;\kappa_1)\overline{\tilde{u}_{k,\delta,\sharp}(m;\kappa_1)}^{\top}}{\lambda_{k,\delta,\sharp}(\kappa_1)-(\lambda_*+\delta\cdot h)} - \mathcal{K}^{(0)}_{k,\delta}(n,m).$$

根据定理 4.1 中给出的特征对估计，可以验证

$$\big\|\mathcal{K}^{(1)}_{k,\delta}(n,m)\big\|_{\mathbb{C}^{6N\times 6N}} \le C\delta^{\frac{1}{3}}\big\|\mathcal{K}^{(0)}_{k,\delta}(n,m)\big\|_{\mathbb{C}^{6N\times 6N}} \tag{5.54}$$

对于某个 $C>0$。

利用这些准备工作，我们将分两步计算 $\sum_{1\le k\le 4}\mathcal{K}^{(0)}_{k\,\delta}(n,m)$ 和 $\sum_{1\le k\le 4}\mathcal{K}^{(1)}_{k\,\delta}(n,m)$ 的极限，从而结合分解 (5.49) 完成 (5.42) 的证明。

步骤 2.1。 我们声称

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0^+}\Big(\mathcal{K}^{(0)}_{1,\delta}(n,m)+\mathcal{K}^{(0)}_{4,\delta}(n,m)\Big)\\ &=\frac{\xi(h)}{2}\big(\tilde{u}_1(n)\overline{\tilde{u}_1(m)}^{\top}+\tilde{u}_3(n)\overline{\tilde{u}_3(m)}^{\top}\big)+\frac{\eta(h)}{2}\big(\tilde{u}_1(n)\overline{\tilde{u}_1(m)}^{\top}-\tilde{u}_3(n)\overline{\tilde{u}_3(m)}^{\top}\big),\end{aligned} \tag{5.55}$$

and

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0^+}\Big(\mathcal{K}^{(0)}_{2,\delta}(n,m)+\mathcal{K}^{(0)}_{3,\delta}(n,m)\Big)\\ &=\frac{\xi(h)}{2}\big(\tilde{u}_2(n)\overline{\tilde{u}_2(m)}^{\top}+\tilde{u}_4(n)\overline{\tilde{u}_4(m)}^{\top}\big)+\frac{\eta(h)}{2}\big(\tilde{u}_2(n)\overline{\tilde{u}_2(m)}^{\top}-\tilde{u}_4(n)\overline{\tilde{u}_4(m)}^{\top}\big).\end{aligned} \tag{5.56}$$

于是，根据 按照注 5.3 中的规则 (5.4)，用 $\tilde{v}_k$ 替换 $\tilde{u}_k$，我们得出 t

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0^+}\sum_{1\le k\le 4}\mathcal{K}^{(0)}_{k,\delta}(n,m)\\ &=\frac{\xi(h)}{2}\big(\tilde{u}_1(n)\overline{\tilde{u}_1(m)}^{\top}+\tilde{u}_2(n)\overline{\tilde{u}_2(m)}^{\top}+\tilde{u}_3(n)\overline{\tilde{u}_3(m)}^{\top}+\tilde{u}_4(n)\overline{\tilde{u}_4(m)}^{\top}\big)\\ &\quad+\frac{\eta(h)}{2}\big(\tilde{u}_1(n)\overline{\tilde{u}_1(m)}^{\top}+\tilde{u}_2(n)\overline{\tilde{u}_2(m)}^{\top}-\tilde{u}_3(n)\overline{\tilde{u}_3(m)}^{\top}-\tilde{u}_4(n)\overline{\tilde{u}_4(m)}^{\top}\big)\\ &=\frac{\xi(h)}{2}\sum_{1\le k\le 4}\tilde{v}_k(n)\overline{\tilde{v}_k(m)}^{\top}\pm\frac{\eta(h)}{2}\sum_{1\le k\le 4}s(k)\tilde{v}_k(n)\overline{\tilde{v}_{p(k)}(m)}^{\top},\end{aligned} \tag{5.57}$$

这恰好对应于 (5.42) 的右侧。

现在我们证明 (5.55)，而 (5.56) 的证明类似。注意， $f(\kappa_1,\delta)$ 是关于 κ_1 的奇函数，其在 $(-\delta^{1/3},\delta^{1/3})$ 上的积分为零。因此，

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}^{(0)}_{1,\delta}(n,m)+\mathcal{K}^{(0)}_{4,\delta}(n,m)\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta^{\frac13}}^{\delta^{\frac13}}\frac{d\kappa_1}{1+f^2(\kappa_1,\delta)}\Big[\frac{f^2(\kappa_1,\delta)\tilde u_1(n)\overline{\tilde u_1(n)}^{\top}+\tilde u_3(n)\overline{\tilde u_3(n)}^{\top}}{\delta\cdot h+\sqrt{\beta_*^2\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}}+\frac{\tilde u_1(n)\overline{\tilde u_1(m)}^{\top}+f^2(\kappa_1,\delta)\tilde u_3(n)\overline{\tilde u_3(m)}^{\top}}{\delta\cdot h-\sqrt{\beta_*^2\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}}\Big].\end{aligned}$$

利用以下恒等式:

$$\frac{1-f^2(\kappa_1,\delta)}{1+f^2(\kappa_1,\delta)}=\frac{\beta_*\delta}{\sqrt{\beta_*^2\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}},$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}^{(0)}_{1,\delta}(n,m)+\mathcal{K}^{(0)}_{4,\delta}(n,m)\\&=\Big[\frac{h}{2\pi}\int_{-\delta^{\frac13}}^{\delta^{\frac13}}\frac{\delta}{\big(\beta_*^2-h^2\big)\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}d\kappa_1\Big]\big(\tilde u_1(n)\overline{\tilde u_1(m)}^{\top}+\tilde u_3(n)\overline{\tilde u_3(m)}^{\top}\big)\\&\quad+\Big[\frac{\beta_*}{2\pi}\int_{-\delta^{\frac13}}^{\delta^{\frac13}}\frac{\delta}{\big(\beta_*^2-h^2\big)\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}d\kappa_1\Big]\big(\tilde u_1(n)\overline{\tilde u_1(m)}^{\top}-\tilde u_3(n)\overline{\tilde u_3(m)}^{\top}\big).\end{aligned}\tag{5.58}$$

利用反三角函数可以显式计算（5.58）中的积分。直接给出结果如下:

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_{-\delta^{\frac13}}^{\delta^{\frac13}}\frac{\delta}{\big(\beta_*^2-h^2\big)\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}d\kappa_1=\frac{\pi}{|\alpha_*|\sqrt{\beta_*^2-h^2}}.$$

由该恒等式和（5.58），（5.55）的证明得以完成。

步骤 2.2. 利用（5.57），只需证明以下结论，即可完成（5.42）的证明:

$$\lim_{\delta\to0^+}\mathcal{K}^{(1)}_{k,\delta}(n,m)=0,\quad \text{for } 1\le k\le4.\tag{5.59}$$

我们仅对 $k=1$ 证明这一点；其他情形可采用相同的方法处理。利用 (5.50)、估计式 (5.54)，以及 $f(\kappa_1,\delta)$ 和 $\|\tilde u_k(n)\|_{\mathbb{C}^{6N}}$ 均一致有界这一事实，可以看出， $\mathcal{K}^{(1)}_{1\,\delta},(n,m)$ 可直接用下面的初等积分进行估计

$$\big\|\mathcal{K}^{(1)}_{1,\delta}(n,m)\big\|_{\mathbb{C}^{6N\times6N}}\le C\delta^{\frac13}\int_{-\delta^{\frac13}}^{\delta^{\frac13}}\frac{d\kappa_1}{\delta\cdot h+\sqrt{\beta_*^2\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}}\tag{5.60}$$

对某个 $C>0$ 成立。对于 $h\in\mathcal{J}$，有 $|h|\le c_*|\beta_*|$，其中常数 $c_*<1$ 是定理 2.7 中引入的。因此，

$$\int_{-\delta^{\frac13}}^{\delta^{\frac13}}\frac{d\kappa_1}{\delta\cdot h+\sqrt{\beta_*^2\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}}\le\frac{1}{1-c_*}\int_{-\delta^{\frac13}}^{\delta^{\frac13}}\frac{d\kappa_1}{\sqrt{\beta_*^2\delta^2+|\alpha_*|^2\kappa_1^2}}=\mathcal{O}(\log\delta).$$

然后，结合 (5.60)，我们完成 (5.59) 的证明。 □

命题 *5.15* 的证明。 步骤1。 的厄米性 直接由哈密顿量和格林算子的厄米性得到。为证明（5.37），我们从下式开始

$$\mathcal{M}^{p.v.}\begin{pmatrix}\tilde v_k(0)\\ \tilde v_k(-1)\end{pmatrix}=0,\quad 1\le k\le4.\tag{5.61}$$

我们只对 $k=1$ 进行证明。事实上，对 $\phi_1(m)=\tilde{v}_1(m)$、$\phi_2(m)$、$\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(m,n)$（其中 $n\geq 0$）应用离散分部积分公式（5.20），取 $k=0$、$p>0$，并回顾恒等式（5.12），可得

$$-\tilde{v}_1(n)=\mathfrak{a}\big(\tilde{v}_1(\cdot),\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(\cdot,n);0\big)-\mathfrak{a}\big(\tilde{v}_1(\cdot),\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(\cdot,n);p+1\big). \tag{5.62}$$

根据命题 5.12 中所示物理格林算子的远场渐近行为，我们知道

$$\lim_{m\to\infty}\Big[\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(m,n)-\frac{i}{2|\alpha_*|}\big(\tilde{v}_1(m)\overline{\tilde{v}_1(n)}^{\top}+\tilde{v}_2(m)\overline{\tilde{v}_2(n)}^{\top}-\tilde{v}_3(m)\overline{\tilde{v}_3(n)}^{\top}-\tilde{v}_4(m)\overline{\tilde{v}_4(n)}^{\top}\big)\Big]=0.$$

因此，(5.62) 中的最后一项趋于

$$\begin{aligned}&\lim_{p\to\infty}\mathfrak{a}\big(\tilde{v}_1(\cdot),\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(\cdot,n);p+1\big)\\&=-\frac{i}{2|\alpha_*|}\Big[\mathfrak{a}(\tilde{v}_1,\tilde{v}_1)\tilde{v}_1(n)+\mathfrak{a}(\tilde{v}_1,\tilde{v}_2)\tilde{v}_2(n)-\mathfrak{a}(\tilde{v}_1,\tilde{v}_3)\tilde{v}_3(n)-\mathfrak{a}(\tilde{v}_1,\tilde{v}_4)\tilde{v}_4(n)\Big]=\frac{1}{2}\tilde{v}_1(n),\end{aligned}$$

其中，最后一步由命题 5.7 中所示的正交性得出。因此，(5.62) 等于

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\tilde{v}_1(n)&=\mathfrak{a}\big(\tilde{v}_1(\cdot),\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(\cdot,n);0\big)\\&\overset{(i)}{=}\overline{\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(0,n)}^{\top}\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(1,0)\tilde{v}_1(-1)-\overline{\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(-1,n)}^{\top}\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,1)\tilde{v}_1(0)\\&\overset{(ii)}{=}\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(n,0)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(1,0)\tilde{v}_1(-1)-\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(n,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,1)\tilde{v}_1(0),\end{aligned} \tag{5.63}$$

其中，(i) 由形式 $\mathfrak{a}$ 的定义得出，(ii) 则是厄米性的推论

$$\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(n,m)=\overline{\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(m,n)}^{\top}.$$

取 $n=0$ 并将等式两边乘以 $\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)$，得到

$$\begin{aligned}-\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{v}_1(0)&=-2\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,1)\tilde{v}_1(0)\\&\quad+2\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(0,0)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(1,0)\tilde{v}_1(-1).\end{aligned}$$

利用周期性 $\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(n,m)=\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(n-1,m-1)$，并将恒等式写成矩阵形式，便可得到结果

$$\begin{pmatrix}-\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)+2\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0) & -2\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(0,0)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{v}_1(0)\\ \tilde{v}_1(-1)\end{pmatrix}=0,$$

回想 $\mathcal{M}^{p.v.}$ 的定义可知，这恰好是所需恒等式 (5.61) 的第二个分量。第一个分量的证明类似；此时我们需要在左半条带中使用分部积分技巧，也就是对于 n，k，$p<0$；此处略去细节。

步骤 2. 现在我们继续证明另一个方向，即

$$\ker\mathcal{M}^{p.v.}\subset\operatorname{span}\big\{\big(\tilde{v}_k(0),\tilde{v}_k(-1)\big)^{\top},\,1\leq k\leq 4\big\},$$

结合 (5.61)，这就完成了 (5.37) 的证明。回想一下，半双线性型$\mathfrak{a}$ 使右侧的空间正交化，因此只需证明以下命题：

$$\mathcal{M}^{p.v.}\begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_{-1}\end{pmatrix}=0,\quad \mathfrak{a}(\phi,\tilde{v}_k;0)=0\Longrightarrow\begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_{-1}\end{pmatrix}=0, \tag{5.64}$$

˜其中 $\phi := \mathbb{1}_{\{0\}} \otimes \phi_0 + \mathbb{1}_{\{-1\}} \otimes \phi_{-1} \in \mathcal{X}_\sharp$（即延拓为零）。假设条件˜ (5.64) 成立。则我们通过层势表达式构造以下函数 $u_\phi \in \mathcal{X}_\sharp$：

$$u_\phi(n) := \begin{cases} \tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(n,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\phi_0 - \tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(n,0)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\phi_{-1}, & n \geq 0, \\ -\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(n,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\phi_0 + \tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(n,0)\tilde{\mathcal{H}}_{-b,\sharp}(0,-1)\phi_{-1}, & n < 0. \end{cases} \tag{5.65}$$

根据定义 (5.65)，显然

$$\Big[(\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp} - \lambda_*)u_\phi\Big](n) = 0 \quad \text{for all } n \neq 0, -1. \tag{5.66}$$

值得注意的是，假设 (5.64) 意味着对于 $n = 0,\ -1$，(5.66) 也成立。事实上，

$$\begin{aligned} &\Big[(\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp} - \lambda_*)u_\phi\Big](0) \\ &= \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,1)u_\phi(1) + \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,0)u_\phi(0) + \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)u_\phi(-1) - \lambda_* u_\phi(0) \\ &= \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,1)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(1,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\phi_0 - \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,1)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(1,0)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\phi_{-1} \\ &\quad + \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,0)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\phi_0 - \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,0)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(0,0)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\phi_{-1} \\ &\quad - \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(-1,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\phi_0 + \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\phi_{-1} \\ &\quad - \lambda_*\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\phi_0 + \lambda_*\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(0,0)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\phi_{-1} \\ &\overset{(i)}{=} -2\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(-1,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\phi_0 + 2\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\phi_{-1} \\ &\quad - \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\phi_{-1} \\ &\overset{(ii)}{=} 0, \end{aligned} \tag{5.67}$$

其中，(i) 是以下恒等式（等价于 (5.12)）的推论：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}:|k-n|\leq 1} \big(\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp} - \lambda_*\big)(n,k)\tilde{\mathcal{G}}^{p.v.}_{b,\sharp}(k,m) = \delta_{n,m}$$

而 (ii) 则直接由我们的假设 $\mathcal{M}^{p.v.}\begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_{-1}\end{pmatrix} = 0$ 得出。对$n = -1$ 验证 (5.66) 的过程类似。因此，我们得出结论：u_ϕ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 都满足 (5.66)。另一方面，条件 $\mathfrak{a}(\phi,\ \tilde{v}_k; 0) = 0$ 连同命题 5.4 中物理格林算子的远场渐近行为表明，当 $n \to \infty$ 时，$u_\phi(n) \to 0$。总之，我们已经论证了，在 (5.65) 中构造的 u_ϕ 是条带哈密顿算子 $\tilde{\mathcal{H}}_{b,\ \sharp}$ 的一个 ℓ^2 本征模，因此，λ_* 是相应的特征值。然而，这与周期算子 $\mathcal{H}_{b,\ \sharp}$ [62] 的谱˜具有绝对连续性相矛盾。因此，必有

$$u_\phi(n) \equiv 0, \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

但这样一来，(5.67) 中唯一剩下的项是

$$-\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\phi_{-1} = 0. \tag{5.68}$$

类似地，可以证明

$$\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\phi_0 = 0, \tag{5.69}$$

这意味着 $\phi_{-1}=\phi_1=0$，因为$\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)$和$\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)$均非奇异[12]。证明至此完成。□

注 5.16。正如我们在命题 *5.15* 的证明中看到的，物理格林算子的远场渐近行为主要用于研究矩阵 $\mathcal{M}^{p.v.}$的核空间，该矩阵由双狄拉克点处传播模态的边界数据构成。这表明，$\mathcal{M}^{p.v.}$实际上编码了未扰动系统中倏逝波与传播波之间耦合的信息。正如我们将在下一节看到的，这些信息对于研究界面模至关重要。

5.4. **界面模的存在性**。现在我们证明定理 2.11 的第一部分，即界面模的存在性。

步骤1。根据命题 5.9，我们首先证明特征值问题 (5.23) 有非平凡解。具体而言，可由 Gohberg-Sigal [9,34] 理论得到如下结果。记

$$\underline{\mathcal{M}}(h;\delta):=\mathcal{M}(\lambda_*+\delta\cdot h,\delta). \tag{5.70}$$

我们首先考察当 $\delta\to 0^+$ 时 $\underline{\mathcal{M}}(h;\delta)$ 的极限。由命题 5.12，得到

$$\lim_{\delta\to 0^+}\underline{\mathcal{M}}(h;\delta)=\mathcal{M}^{p.v.}+\xi(h)\mathcal{A}=:\underline{\mathcal{M}}(h;0).$$

右侧的两个矩阵根据定义 (5.28) 和 (5.30) 可知都是厄米矩阵；事实上，它们完全正交化，如下所示。我们声称，极限算子 $\underline{\mathcal{M}}(h;0)$ 在 $h\in\mathcal{J}$ 内有四个特征值（计及重数）。实际上，假设

$$\underline{\mathcal{M}}(h;0)\begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_{-1}\end{pmatrix}=0, \tag{5.71}$$

或者等价地，利用 (5.30)，

$$\mathcal{M}^{p.v.}\begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_{-1}\end{pmatrix}+\xi(h)\sum_{1\le k\le 4}\overline{\mathfrak{a}(\tilde{v}_k,\phi;0)}\begin{pmatrix}-\tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(0,-1)\tilde{v}_k(-1)\\ \tilde{\mathcal{H}}_{b,\sharp}(-1,0)\tilde{v}_k(0)\end{pmatrix}=0, \tag{5.72}$$

满足 $\phi:=\mathbb{1}_{\{0\}}\otimes\phi_0+\mathbb{1}_{\{-1\}}\otimes\phi_{-1}\in\mathcal{X}_\sharp$。于是，将 $(\tilde{v}_k(0)\ \overline{\tilde{v}_k(-1)})$ 两边同时乘以 (5.72)，并回顾命题 5.15 和命题 5.7，可得

$$\xi(h)\mathfrak{a}(\tilde{v}_k,\phi;0)=0.$$

我们分两种情况讨论：(i) $\xi(h)=0$，或 (ii) 对所有 $1\le k\le 4$，$\mathfrak{a}(\tilde{v}_k,\phi;0)=0$。假设 (ii) 成立。那么，由 (5.71)、(5.72) 和命题 5.15 可知

$$\begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_{-1}\end{pmatrix}\in\operatorname{span}\left\{\left(\tilde{v}_k(0),\tilde{v}_k(-1)\right)^\top,\ 1\le k\le 4\right\}.$$

但如果 $(\phi_0,\phi_{-1})^\top$ 非平凡，这就与假设 (ii) 矛盾。因此，我们只剩下唯一的可能性 (i)。值得注意的是，根据 (5.29) 中得到的 $\xi(h)$ 的显式形式，我们知道 $\xi(h)=0$ 有唯一解 $h=0$。总之，我们得到 (5.71) 的四个特征解

$$h^{(k)}=0,\quad \begin{pmatrix}\phi_0^{(k)}\\ \phi_{-1}^{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{v}_k(0)\\ \tilde{v}_k(-1)\end{pmatrix},\quad 1\le k\le 4. \tag{5.73}$$

[12]考虑定理 2.11 中的假设 (2.14)，可以验证这些矩阵是上三角矩阵，且具有非奇异对角块。

对于 $h \neq 0$，我们知道 $\xi(h) \neq 0$；然后，按照之前相同的论证可知，$\mathcal{M}(h;0)$ 是可逆的。

现在，我们汇总已知的所有信息：

(i) 当 $\delta \to 0^{+}$ 时，$\mathcal{M}(h;\delta)$ 的极限记为 $\mathcal{M}(h;0)$，它在 $h \in \mathcal{J}$ 内有唯一的四重特征值 $h=0$。对于所有 $h \neq 0$，$\mathcal{M}(h;0)$ 都是可逆的；(ii) 算子 $\mathcal{M}(h;\delta)$ 关于 $h \in \mathcal{J}$ 是解析的，这是由谱隙 $\mathcal{I}_\delta$ 内预解式 $\mathcal{G}_{\pm\delta,\sharp}$（对应体哈密顿量 $\mathcal{H}_{\pm\delta,\sharp}$）的解析性所致；(iii) $\mathcal{M}(h;\delta)$ 是厄米的。

根据 (i)–(iii)，广义 Rouch´e 定理（参见 [8, 第 1] 章）得出：存在 $\delta=0$ 的一个邻域，在该邻域内，算子 $\mathcal{M}(h;\delta)$（换言之，问题 (5.23)）有四个特征值（按重数计），它们从 (5.73) 分岔而来，记为

$$h_\delta^{(k)} = o(1), \quad \begin{pmatrix} \phi_{\delta,0}^{(k)} \\ \phi_{\delta,-1}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_k(0) \\ \tilde{v}_k(-1) \end{pmatrix} + o(1), \quad 1 \le k \le 4. \tag{5.74}$$

证明的第一部分到此结束。

步骤 2. 利用 (5.74)，现在可以直接验证命题 5.9 的条件 (2)。事实上，我们只需检查首项非零。例如，取 $k=1$ 可得

$$\begin{aligned} &\lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{M}^{aux}(\lambda_* + \delta \cdot h_\delta^{(1)}, \delta) \begin{pmatrix} \phi_{\delta,0}^{(1)} \\ \phi_{\delta,-1}^{(1)} \end{pmatrix} \\ &\overset{(i)}{=} \left(\mathcal{M}^{aux,p.v.} + \frac{\operatorname{sgn}(\beta_*)}{|\alpha_*|}\mathcal{A}_2^{aux}\right) \begin{pmatrix} \tilde{v}_1(0) \\ \tilde{v}_1(-1) \end{pmatrix} \\ &\overset{(ii)}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{v}_1(0) \\ \tilde{v}_1(-1) \end{pmatrix} - \frac{\operatorname{sgn}(\beta_*)}{2|\alpha_*|}\frac{}{\mathfrak{a}(\tilde{v}_1,\tilde{v}_1)} \begin{pmatrix} \tilde{v}_3(0) \\ \tilde{v}_3(-1) \end{pmatrix} \\ &\overset{(iii)}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{v}_1(0) \\ \tilde{v}_1(-1) \end{pmatrix} + \frac{i\cdot\operatorname{sgn}(\beta_*)}{2} \begin{pmatrix} \tilde{v}_3(0) \\ \tilde{v}_3(-1) \end{pmatrix} \neq 0. \end{aligned} \tag{5.75}$$

这里，等式 (i) 和 (iii) 以及最后一步由收敛性 (5.31)、命题 5.7 和布洛赫模态线性无关这一事实得出。中间步骤 (ii) 则由以下恒等式推得：

$$\mathcal{M}^{aux,p.v.}\begin{pmatrix} \tilde{v}_1(0) \\ \tilde{v}_1(-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{v}_1(0) \\ \tilde{v}_1(-1) \end{pmatrix},$$

该等式的第一分量由 (5.63) 证明，第二分量也可类似验证。至此，界面模存在性的证明完成。

注 5.17. 事实上，(5.63) 中的计算可以推广到任意 $1 \le k \le 4$，所得结果为

$$\mathcal{M}^{aux,p.v.}\begin{pmatrix} \tilde{v}_k(0) \\ \tilde{v}_k(-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{v}_k(0) \\ \tilde{v}_k(-1) \end{pmatrix}. \tag{5.76}$$

详细内容留给感兴趣的读者。

5.5. **界面模的数量**。现在我们继续讨论定理 2.11 的第二部分，即界面模的确切数量及其奇偶性。思路与我们先前的工作相同，例如 [59, 节 9] 和 [45, 节 8]。特别是，基于我们已建立的界面模问题的离散层势表述，可以将上述研究在连续系统背景下的分析直接

应用于此处考虑的离散设置。我们仅展示主要思路，省略细节。

第一步是证明至少存在两个线性无关的界面模。事实上，利用层势公式 (5.22) 和 (5.74) 中的边界数据，很容易构造出这样两个界面模。我们定义

$$u_\delta^{(k)}(n)=\begin{cases}\tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(\lambda_*+h_\delta^{(k)})(n,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{\delta,\sharp}(-1,0)\phi_{\delta,0}^{(k)}\\ \quad-\tilde{\mathcal{G}}_{\delta,\sharp}(\lambda_*+h_\delta^{(k)})(n,0)\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(0,-1)\phi_{\delta,-1}^{(k)},\quad n\geq 0,\\ -\tilde{\mathcal{G}}_{-\delta,\sharp}(\lambda_*+h_\delta^{(k)})(n,-1)\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\sharp}(-1,0)\phi_{\delta,0}^{(k)}\\ \quad+\tilde{\mathcal{G}}_{-\delta,\sharp}(\lambda_*+h_\delta^{(k)})(n,0)\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta,\sharp}(0,-1)\phi_{\delta,-1}^{(k)},\quad n<0,\end{cases}\tag{5.77}$$

对于 $k=1,\ 2$。函数 $u_\delta^{(k)}$ 满足 $\tilde{\mathcal{H}}_{zig,\ \sharp}u_\delta^{(k)}=(\lambda_*+h_\delta^{(k)})u_\delta^{(k)}$，这一点可从上一节的讨论中看出。通过类似于 (5.75) 的计算，可以验证 $u_\delta^{(k)}$ (0) 的值线性无关。事实上，$u_\delta^{(k)}$ (0) 的首阶项，对于 $k=1,\ 2$，由下式给出

$$u_\delta^{(1)}(0)\sim\frac{1}{2}\tilde{v}_1(0)+\frac{i\cdot\mathrm{sgn}(\beta_*)}{2}\tilde{v}_3(0),\quad u_\delta^{(2)}(0)\sim\frac{1}{2}\tilde{v}_2(0)-\frac{i\cdot\mathrm{sgn}(\beta_*)}{2}\tilde{v}_4(0),$$

根据布洛赫模态 $\tilde{v}_k$ 的正交性，它们显然线性无关。因此，(5.77) 确实给出了两个线性无关的界面模。

第二步是证明至多存在两个线性独立的界面模。这可利用辅助方程 (5.25) 得到证明。事实上，根据命题 5.12，(5.25) 在 $\delta\to 0^+$ 时的首阶方程为

$$\left(\mathcal{M}^{aux,p.v.}+\xi(h)\mathcal{A}_1^{aux}+\eta(h)\mathcal{A}_2^{aux}-\mathbb{I}\right)\begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_{-1}\end{pmatrix}.$$

利用 (5.76) 可以证明，在 $h=0$ 时，上述方程只有两个线性独立的解，而非四个：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\phi_0^{mode,(1)}\\ \phi_{-1}^{mode,(1)}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\tilde{v}_1(0)\\ \tilde{v}_1(-1)\end{pmatrix}+i\cdot\mathrm{sgn}(\beta_*)\begin{pmatrix}\tilde{v}_3(0)\\ \tilde{v}_3(-1)\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}\phi_0^{mode,(2)}\\ \phi_{-1}^{mode,(2)}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\tilde{v}_2(0)\\ \tilde{v}_2(-1)\end{pmatrix}-i\cdot\mathrm{sgn}(\beta_*)\begin{pmatrix}\tilde{v}_4(0)\\ \tilde{v}_4(-1)\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5.78}$$

上标“mode”表示它们是界面模边界数据的首阶项。这证实了特征值接近 $h=0$ 时，界面模至多有两个。事实上，当 δ 较小时，可以利用 Lyapunov–Schmidt 约化构造方程 (5.25) 的完整解（包括余项），详见 [45, 命题 7.1]。

我们注意到，上述计算也表明了界面模的奇偶性。例如，记与边界数据 $(\phi^{mode}{}_{,0}^{(1)},\ \phi^{mode}{}_{,-1}^{(1)})^\top$ 相关的界面模为 u_1^{zig}。由于界面哈密顿量 $\mathcal{H}_{zig}$ 具有 $\mathcal{F}_x$ 不变性，其本征函数 u_1^{zig} 相对于 $\mathcal{F}_x$ 具有偶宇称或奇宇称。要确定具体的宇称，只需考察原点处函数值 u_1^{zig} (0) 的首项：

$$u_1^{zig}(\mathbf{0})\sim v_1(\mathbf{0})+i\cdot\mathrm{sgn}(\beta_*)v_3(\mathbf{0}).$$

然后，根据式 (5.4) 以及由表示 (3.10) 指定的布洛赫模态的反射宇称，可以验证

$$F_x^{int}\Big(v_1(\mathbf{0})+i\cdot\mathrm{sgn}(\beta_*)v_3(\mathbf{0})\Big)=v_1(\mathbf{0})+i\cdot\mathrm{sgn}(\beta_*)v_3(\mathbf{0}).$$

这意味着 u_1^{zig} 关于 $\mathcal{F}_x$ 反射具有偶宇称。类似地，可以验证，另一个与边界数据 $(\phi^{mode,(2)}_{0}, \phi^{mode,(2)}_{-1})^\top$ 相关的界面模具有奇宇称。此处省略细节。

6. Robustness of Interface Modes

现在我们证明界面模的对称性保护。如定理 2.16 后的讨论所述，这通过一种周期近似论证实现，该论证利用了受扰界面模态在一列 L–条带上的行为。在介绍细节之前，我们需要先介绍一些预备知识。

首先定义以下希尔伯特空间：

$$\mathcal{X}_{L,\sharp}:=\{u\in\ell^2_{loc}(\Lambda)\otimes\mathbb{C}^6:\,u(\boldsymbol{n}+L\boldsymbol{\ell}_2)=u(\boldsymbol{n}),\quad\sum_{\substack{n_1\in\mathbb{Z}\\0\le n_2\le L-1}}\|u(n_1\boldsymbol{e}_1)\|^2<\infty\}.$$

（下文中我们将省略 $\mathbb{C}^6$ 向量和 $\mathbb{C}^{6\times6}$ 范数的下标。）$\mathcal{X}_{L,\sharp}$中的函数具有 $L\boldsymbol{\ell}_2$-周期性。$\mathcal{X}_{L,\sharp}$ 配备内积：

$$(u,v)_{\mathcal{X}_{L,\sharp}}:=\sum_{\substack{n_1\in\mathbb{Z}\\0\le n_2\le L-1}}\big(u(\boldsymbol{n}),v(\boldsymbol{n})\big)_{\mathbb{C}^6}=\sum_{\boldsymbol{n}\in\Lambda_L}\big(u(\boldsymbol{n}),v(\boldsymbol{n})\big)_{\mathbb{C}^6},\quad\forall\,u,v\in\mathcal{X}_{L,\sharp},$$

其中 Λ_L 是横穿界面的条带，其宽度等于 $L>0$

$$\Lambda_L:=\big\{\boldsymbol{n}\in\Lambda:\,|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\ell}_2|\le\frac{L}{2}\big\}.$$

注意， Λ_L 是圆柱面 $\Lambda/L\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2$的一个特殊同构副本，它被选为关于 x–轴镜面对称。例如，图3中的背景晶格点构成了 Λ_L，其中 $L=3$。此外，我们引入关于反射算子 $\mathcal{F}_x$具有偶宇称的 $\mathcal{X}_{L,\sharp}$ 子空间：

$$\mathcal{X}^e_{L,\sharp}:=\{u\in\mathcal{X}_{L,\sharp}:\,\mathcal{F}_xu=u\}.$$

上标“e”表示任意 $u\in\mathcal{X}^e_{L,\sharp}$ 相对于反射对称性 $\mathcal{F}_x$具有偶宇称。类似地，奇宇称函数空间定义为

$$\mathcal{X}^o_{L,\sharp}:=\{u\in\mathcal{X}_{L,\sharp}:\,\mathcal{F}_xu=-u\}.$$

直接可验证，未扰动界面哈密顿量 $\mathcal{H}_{zig}$ 在 $\mathcal{X}^e_{L,\sharp}$ 和 $\mathcal{X}^o_{L,\sharp}$ 上均保持不变，因为 $\mathcal{H}_{zig}$ 具有反射对称性且 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2-$ 平移不变；因此，其限制 $\mathcal{H}^{L,e/o}_{zig}:=\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}^{e/o}_{L},\sharp}$ 是良定义的。然而，由于周期性的丧失，受扰界面哈密顿量$\mathcal{H}_{zig,\mathcal{W}}=\mathcal{H}_{zig}+\mathcal{W}$ 在这些条带空间上并不保持不变。为定义其限制，我们引入以下限制与周期化算子。首先，限制算子 $\mathfrak{R}^L$ 直接将整个晶格 Λ 上的函数截断至条带 Λ_L：

$$\mathfrak{R}^L:\ell^\infty(\Lambda)\otimes\mathbb{C}^6\to\ell^\infty(\Lambda_L)\otimes\mathbb{C}^6,\quad(\mathfrak{R}^Lu)(\boldsymbol{n}):=u(\boldsymbol{n}),\quad\boldsymbol{n}\in\Lambda_L.$$

周期化算子 $\mathfrak{S}^L$ 首先将函数限制到 $\Lambda_{L/2}$，然后将其周期性延拓：

$$\mathfrak{S}^L : \ell^\infty(\Lambda)\otimes\mathbb{C}^6 \to \ell^\infty(\Lambda)\otimes\mathbb{C}^6, \quad (\mathfrak{S}^L u)(\boldsymbol{n}) := \begin{cases} (\mathfrak{R}^{L/2}u)(\boldsymbol{m}), & \text{if } \boldsymbol{n}-\boldsymbol{m} \in L\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2 \text{ with } \boldsymbol{m}\in\Lambda_{L/2}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

显然， $\mathfrak{S}^L u$ 是周期性的，并且由于 Λ_L的对称形状，保持了 $\mathcal{F}_x$对称性。

命题 6.1。对于任意 $u \in \ell^\infty(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^6$，函数 $u^L := \mathfrak{S}^L u$ 满足 $u^L(\boldsymbol{n} + L\boldsymbol{\ell}_2) = u^L(\boldsymbol{n})$，对所有 $\boldsymbol{n} \in \Lambda$均成立。此外，若 $\mathcal{F}_x u = \pm u$，则相应地有 $\mathcal{F}_x u^L = \pm u^L$。

经过这些准备，我们现在可以定义条带上扰动哈密顿量的限制。定义如下算子：

$$\mathcal{W}^L := \mathfrak{S}^L \mathcal{W} \mathfrak{R}^L \in \mathcal{B}(\ell^\infty(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^6).$$

根据命题 6.1， $\mathcal{W}^L$ 在$\mathcal{X}^e_{L,\sharp}$和$\mathcal{X}^o_{L,\sharp}$上均为不变。因此，哈密顿量 $\mathcal{H}_{zig} + \mathcal{W}^L$ 在 $\mathcal{X}^{e/o}_{L,\sharp}$上的限制是良定义的；我们将其记为

$$\mathcal{H}^{L,e/o}_{zig,\mathcal{W}} := \left(\mathcal{H}_{zig} + \mathcal{W}^L\right)\Big|_{\mathcal{X}^{e/o}_{L,\sharp}}.$$

还需注意，算子 $\mathcal{W}^L$ 弱收敛到 $\mathcal{W}$，其意义为

$$(\mathcal{W}^L u, v)_{\mathcal{X}} \to (\mathcal{W} u, v)_{\mathcal{X}} \quad \text{for any } u \in \ell^\infty(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^6 \text{ and compactly supported } v.$$

6.1. 证明的主要思想。证明思路是，首先构造一列扰动界面模态，它们从定理 2.11 中找到的未扰动界面模分岔而来，并位于条带 $\mathcal{X}^{e/o}_{L,\sharp}$ 中。然后，我们证明该序列（的一个子序列）在$L \to \infty$时弱收敛，其极限恰好是定理 2.16 中所述的全空间扰动界面模。正如预期的那样，这一紧性论证的关键在于扰动界面模在 L–条带上的一致有界性。这一点源于以下引理。回顾一下，从现在起我们将固定参数 δ （在界面哈密顿量 $\mathcal{H}_{zig}$中）。为强调界面模的奇偶性，我们将未扰动特征对记为 $\lambda_{zig,e/o} := \lambda_{zig,1/2}$ 和 $u_{zig,e/o} := u_{zig,1/2}$。

引理 6.2. 假设定理 *2.11* 中的条件成立。那么，对于所有 $L > 0$， $\mathcal{I}_\delta$ 是 $\mathcal{H}^{L,\ e/o}_{zig}$ 的本质间隙，其含义是 $Spec_{ess}(\mathcal{H}^{L,\ e/o}_{zig}) \cap \mathcal{I}_\delta = \emptyset$。此外， $\mathcal{H}^{L,\ e/o}_{zig}$ 在 $\mathcal{I}_\delta$ 内有一个唯一特征值：

$$Spec_{disc}(\mathcal{H}^{L,e/o}_{zig}) \cap \mathcal{I}_\delta = \{\lambda_{zig,e/o}\}. \tag{6.1}$$

因此，将 $\mathcal{H}^{L,\ e/o}_{zig}$ 投影到其带隙内特征值所对应的投影记为

$$\mathbb{P}^{L,e/o}_{zig} := \mathbb{1}_{\{\lambda_{zig,e/o}\}}(\mathcal{H}^{L,e/o}_{zig}),$$

则 *Fredholm* 算子

$$\mathbb{Q}^{L,e/o}_{zig} := (\mathbb{P}^{L,e/o}_{zig})^\perp (\mathcal{H}^{L,e/o}_{zig} - \lambda_{zig,e/o})(\mathbb{P}^{L,e/o}_{zig})^\perp$$

在 $Ran(\mathbb{P}^{L,\ e/o}_{zig})^\perp$ 上可逆，且满足一致界：

$$\left\|(\mathbb{Q}^{L,e/o}_{zig})^{-1}\right\|_{Ran(\mathbb{P}^{L,e/o}_{zig})^\perp \to Ran(\mathbb{P}^{L,e/o}_{zig})^\perp} \le d^{-1}_{zig,e/o},$$

其中 i 溶解距离 $d_{zig,\ e/o} := d_{zig,\ 1/2} > 0$ （定义见 (2.17)）与 L 无关。

下文中，我们始终假设定理 2.11 中的条件成立，不再重复说明。根据引理 6.2、 $\mathcal{W}$ 的反射对称性，以及受扰动哈密顿量 $\mathcal{H}^{L,e/o}_{zig,\mathcal{W}}$ 在 $\mathcal{X}^{e/o}_{L,\sharp}$ 上保持不变这一事实，标准微扰理论表明，只要适当控制扰动的大小，条带中的界面特征值就会持续存在。此外，利用李雅普诺夫-施密特约化论证，我们能够为每个 $L>0$ 显式构造扰动界面模态。

命题 6.3。 假设微扰算子 $\mathcal{W}$ 属于 *(A)* 类。那么，存在$c_{\mathcal{W}}\in(0,\frac{1}{2})$ 使得只要常数 $M_{\mathcal{W}}$ 满足 (2.18) 中的条件，

$$M_{\mathcal{W}}<c_{\mathcal{W}}d_{zig,e/o},$$

受微扰条带哈密顿量 $\mathcal{H}^{L,e/o}_{zig,\mathcal{W}}$,就有唯一的带隙内特征值 $\lambda^{L,e/o}_{zig,\mathcal{W}}\in\mathcal{I}_\delta$ ，且满足估计

$$|\lambda^{L,e/o}_{zig,\mathcal{W}}-\lambda_{zig,e/o}|<\frac{1}{2}d_{zig,e/o}. \tag{6.2}$$

相应的本征模可明确表示为

$$\begin{aligned} u^{L,e/o}_{zig,\mathcal{W}} &= u_{zig,e/o}-\Big[1+(\mathbb{Q}^{L,e/o}_{zig})^{-1}\big(\mathcal{W}^L-\lambda^{L,e/o}_{zig,\mathcal{W}}+\lambda_{zig,e/o}\big)\Big]^{-1}\mathbb{Q}^{L,e/o}_{zig}\mathcal{W}^L u_{zig,e/o}\\ &=: u_{zig,e/o}+u^{L,e/o,(1)}_{zig,\mathcal{W}}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

特别地， $u^{L,e/o\,(1)}_{zig\,\mathcal{W}}$,,是一致有界的，即存在 $C>0$ 使得

$$\|u^{L,e/o,(1)}_{zig,\mathcal{W}}\|_{\mathcal{X}_{L,\sharp}}\le C<\infty,\quad \textit{for all } L>0. \tag{6.4}$$

注意，首阶部分 $u_{zig,e/o}$ 在 (6.3) 中与 L无关。因此，我们只需考虑扰动部分 $u^{L,e/o\,(1)}_{zig\,\mathcal{W}}$,, 的收敛。由于其一致有界，可通过紧性论证提取子序列 L_i ，使得 $u^{L_i,e/o,(1)}_{zig,\mathcal{W}}$ 在适当意义下弱收敛至一个束缚态，而该束缚态恰为定理 2.16 中的散射波。

命题 6.4。 存在一个子序列 L_i ，使得扰动后的特征值 $\lambda^{L_i,e/o}_{zig\,\mathcal{W}}$ 收敛于 $\lambda^{e/o}_{zig}$, $\mathcal{W}\in\mathcal{I}_\delta$, 且在 (6.3) 中定义的散射态 $u^{L_i,e/o,(1)}_{zig,\mathcal{W}}$ 弱收敛于 $u^{e/o,(1)}_{zig}$, $\mathcal{W}\in\ell^2(\Lambda)\otimes\mathbb{C}^6$ ，其意义为

$$(u^{L_i,e/o,(1)}_{zig,\mathcal{W}},v)_{\mathcal{X}}\to(u^{e/o,(1)}_{zig,\mathcal{W}},v)_{\mathcal{X}}\quad \textit{for any compactly supported } v\in\mathcal{X}.$$

此外，函数 $u^{e/o}_{zig,\mathcal{W}}:=u_{zig,e/o}+u^{e/o,(1)}_{zig\,\mathcal{W}}$ 对所有 $\boldsymbol{n}\in\Lambda$ 都满足以下方程：

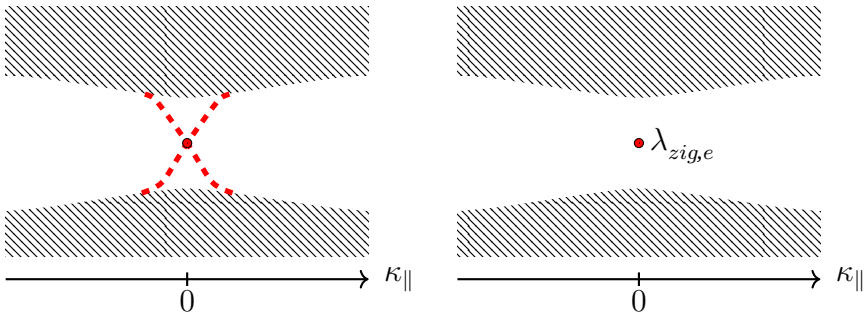
$$\Big[\big(\mathcal{H}_{zig,\mathcal{W}}-\lambda^{e/o}_{zig,\mathcal{W}}\big)u^{e/o}_{zig,\mathcal{W}}\Big](\boldsymbol{n})=0. \tag{6.5}$$

定理 2.16 的证明至此完成。在本节的其余部分，我们证明引理 6.2 以及命题 6.3 和命题 6.4。我们只考虑偶宇称情形，即在上述段落中取指标 'e'。奇宇称情形的证明相同。

6.2. **引理 6.2 和命题 6.3 的证明**。

引理 *6.2* 的证明。 关键观察是，根据分解 $\mathcal{X}_{L,\sharp}=\mathcal{X}^e_{L,\sharp}\oplus\mathcal{X}^o_{L,\sharp}$，我们有

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{H}^{L,e}_{zig})=\mathrm{Spec}\big(\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}^e_{L,\sharp}}\big)\subset\mathrm{Spec}\big(\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}_{L,\sharp}}\big). \tag{6.6}$$



(a) 谱$\left(\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}_{L,\sharp}}\right)$ (b) 谱$(\mathcal{H}^{L,e}_{zig})$

FIGURE 6. (a) 在体谱隙内，$\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}_{L,\sharp}}$ 只有离散谱，它恰好是界面特征值曲线 $\lambda_{zig,n}(\kappa_\parallel)$（由推论 2.12 得到）在 $\kappa_\parallel \in \mathcal{A}_L$ 处的取值。(b) (a) 中唯一在反射下保持不变的带隙内特征值位于 $\kappa_\parallel = 0, \pm\pi$；进一步可知它是 $\lambda_{zig,e}$，因为我们在所考虑的空间上施加了偶宇称条件，并假设 (2.20) 成立。

由于 $\mathcal{H}_{zig}$ 沿 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2$具有周期性，谱 $\mathrm{Spec}\left(\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}_{L,\sharp}}\right)$ 可通过离散傅里叶变换分解:

$$\mathrm{Spec}\left(\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}_{L,\sharp}}\right) = \bigcup_{\kappa_\parallel \in \mathcal{A}_L} \mathrm{Spec}\left(\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}_{\kappa_\parallel}}\right),$$

其中 $\mathcal{X}_{\kappa_\parallel}$ i在（2.13）中定义的 s，以及平行动量的离散集合 $\mathcal{A}_L$ 定义为 s

$$\mathcal{A}_L := \left\{\kappa_\parallel = \frac{2n\pi}{L} : -\frac{L}{2} \le n \le \frac{L}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

特别地，对每个 $\kappa_\parallel \in \mathcal{A}_L$，$\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}_{\kappa_\parallel}}$ 在体谱隙 $\mathcal{I}_\delta$ 内仅有离散谱（示意见图6(a)），这可由基于 Weyl判据的标准论证得出。因此，（6.6）表明 $\mathcal{H}^{L,e}_{zig}$ 在 $\mathcal{I}_\delta$ 内仅有离散谱，这些离散谱也是某个 $\kappa_\parallel \in \mathcal{A}_L$ 对应的 $\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}_{\kappa_\parallel}}$ 的特征值。值得注意的是，为了找到一个具有偶宇称关联本征函数的 $\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}_{\kappa_\parallel}}$ 的特征值，必须满足 $\kappa_\parallel = 0,\ \pm\pi$。事实上，若 $u \in \mathcal{X}_{\kappa_\parallel}$ 是这样一个本征函数，写作 $u(\boldsymbol{n}) = e^{i\kappa_\parallel n_2} u_{per}(\boldsymbol{n})$，其中周期部分为 $u_{per}(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\ell}_2) = u_{per}(\boldsymbol{n})$，则有

$$\mathcal{F}_x u = u \quad \Longrightarrow \quad (\mathcal{F}_x u_{per})(\boldsymbol{n}) = e^{i2\kappa_\parallel n_2} u_{per}(\boldsymbol{n}),$$

这立即导致与 u_{per} 的周期性相矛盾，如果 $2\kappa_\parallel \neq 0,\ \pm 2\pi$。然后，结合假设2.20，我们得出结论：$\mathcal{H}^{L,e}_{zig}$ 的唯一带隙内特征值是 $\mathcal{H}_{zig}\big|_{\mathcal{X}_\sharp}$ 的偶宇称特征值，即式（6.1）成立。引理 6.2 的其余部分由自伴算子的约化预解式的标准估计推出（参见例如 [39, 第 I 章，第 3] 节）。

□

命题 *6.3* 的证明。根据引理 6.2，受微扰条带哈密顿量 $\mathcal{H}^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}$ 存在唯一带隙内特征值 $\lambda^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}$，这可由微扰理论直接得出（参见 [39,第 VI 章]）。因此，利用标准的 Lyapunov-Schmidt 约化论证，可显式构造受微扰特征模 (6.3)，这与第 4 节中的 (4.16) 类似。现在，我们证明 (6.3) 中的扰动部分一致有界。由于

投影 $\mathbb{Q}^{L,e}_{,zig}$ 及其逆由引理 6.2 可知一致有界，因此只需证明存在与 L 无关的 $C_1, C_2 > 0$, 使得

$$\|\mathcal{W}^L - \lambda^{L,e}_{zig,\mathcal{W}} + \lambda_{zig,e}\|_{\mathcal{X}^e_{L,\sharp}\to\mathcal{X}^e_{L,\sharp}} \le C_1, \tag{6.7}$$

and

$$\|\mathcal{W}^L u_{zig,e}\|_{\mathcal{X}_{L,\sharp}} \le C_2. \tag{6.8}$$

对于 (6.7)，注意到以下不等式

$$\begin{aligned}\|\mathcal{W}^L\|_{\mathcal{X}^e_{L,\sharp}\to\mathcal{X}^e_{L,\sharp}} &\overset{(i)}{\le} \sup_{\boldsymbol{n}\in\Lambda_L}\sum_{\boldsymbol{m}\in\Lambda_L}\|\mathcal{W}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})\| \le \sup_{\boldsymbol{n}\in\Lambda}\sum_{\boldsymbol{m}\in\Lambda}\|\mathcal{W}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})\| \\ &\le \sup_{n_1\in\mathbb{Z}}\sum_{n_2\in\mathbb{Z},\boldsymbol{m}\in\Lambda}\|\mathcal{W}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})\| \overset{(ii)}{\le} M_{\mathcal{W}},\end{aligned}$$

其中，(i) 是 Schur估计以及 $\mathcal{W}^L$ 自伴这一事实的推论，而 (ii) 则由假设 (2.18) 得出。接着，注意到 $|\lambda^{L,\ e}_{zig,\ \mathcal{W}} - \lambda_{zig,\ e}| < \frac{1}{2}d_{zig,\ e}$，且右侧与 L 无关，即可得出 (6.7)。对于 (6.8)，关键在于未扰动界面模 $u_{zig,\ e}$ 是 $\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2$-周期的，且横向局域化

$$\sup_{n_2\in\mathbb{Z}}\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\|u_{zig,e}(n_1\boldsymbol{\ell}_1 + n_2\boldsymbol{\ell}_2)\|_{\mathbb{C}^6} = \sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\|u_{zig,e}(n_1\boldsymbol{\ell}_1)\|_{\mathbb{C}^6} < \infty, \tag{6.9}$$

其中，最后一个不等式来自 $u_{zig,\ e}$ 的指数衰减；这一点可由标准的 Combes-Thomas估计证明, 适用于与孤立本征值相关的本征模（参见 [41, 定理 11.2]）。牢记这一事实，可以计算得出

$$\begin{aligned}\|\mathcal{W}^L u_{zig,e}\|^2_{\mathcal{X}_{L,\sharp}} &= \sum_{\substack{n_1\in\mathbb{Z}\\ 0\le n_2\le L-1}}\big\|(\mathfrak{S}^L\mathcal{W}\mathfrak{R}^L u_{zig,e})(\boldsymbol{n})\big\|^2 \overset{(i)}{\le} \sum_{\boldsymbol{n}\in\Lambda}\big\|(\mathcal{W}\mathfrak{R}^L u_{zig,e})(\boldsymbol{n})\big\|^2 \\ &\le \sum_{\boldsymbol{n}\in\Lambda}\Big[\sum_{\boldsymbol{m}\in\Lambda_L}\|\mathcal{W}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})\|\|u_{zig,e}(\boldsymbol{m})\|\Big]^2 \\ &\le \sum_{\boldsymbol{n}\in\Lambda}\Big[\sum_{m_2\in\mathbb{Z}}\sum_{m_1\in\mathbb{Z}}\|\mathcal{W}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})\|\|u_{zig,e}(\boldsymbol{m})\|\Big]^2 \\ &\le \sum_{\boldsymbol{n}\in\Lambda}\Big[\sum_{m_2\in\mathbb{Z}}\sup_{m_1\in\mathbb{Z}}\|\mathcal{W}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})\|\sum_{m_1\in\mathbb{Z}}\|u_{zig,e}(\boldsymbol{m})\|\Big]^2 \\ &\le \sum_{\boldsymbol{n}\in\Lambda}\Big\{\Big(\sum_{m_2\in\mathbb{Z}}\sup_{m_1\in\mathbb{Z}}\|\mathcal{W}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})\|\Big)\Big(\sup_{m_2\in\mathbb{Z}}\sum_{m_1\in\mathbb{Z}}\|u_{zig,e}(\boldsymbol{m})\|\Big)\Big\}^2 \\ &\overset{(ii)}{\lesssim} \sum_{\boldsymbol{n}\in\Lambda}\Big(\sum_{m_2\in\mathbb{Z}}\sup_{m_1\in\mathbb{Z}}\|\mathcal{W}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})\|\Big)^2 \\ &\le \Big(\sum_{\boldsymbol{n}\in\Lambda}\sum_{m_2\in\mathbb{Z}}\sup_{m_1\in\mathbb{Z}}\|\mathcal{W}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})\|\Big)^2\end{aligned}$$

其中，(i) 根据周期化算子 $\mathfrak{S}^L$ 的定义得出，(ii) 则由 (6.9) 得出。结合扰动 $\mathcal{W}$ 的纵向局域化（如 (2.18) 中所假设），这一估计完成了 (6.8) 的证明。

□

6.3. 命题 6.4 的证明。 命题 6.4 的证明基于以下关于一致有界的 L-周期序列弱紧性的引理。

引理 6.5. 假设 $u^{(L)} \in \mathcal{X}_{L,\sharp}$ 一致有界，即 $\sup_L \|u^{(L)}\|_{\mathcal{X}_{L,\sharp}} < \infty$。那么，$u^{(L)}$ 存在一个子序列 $u^{(L_i)}$，它弱收敛于 $u \in \mathcal{X}$，其意义为

$$(u^{(L_i)}, v)_{\mathcal{X}} \to (u, v)_{\mathcal{X}} \quad \textit{for any compact supported } v \in \mathcal{X}. \tag{6.10}$$

在证明引理 6.5 之前（该证明推迟到本节末尾），我们先应用引理 6.5 来证明命题 6.4。回顾一下，我们已经找到一列扰动特征值 $\lambda^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}$，以及（$L\mathbb{Z}\boldsymbol{\ell}_2$-周期）本征模 $u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}} = u_{zig,e} + u^{L,e,(1)}_{zig,\mathcal{W}}$，它们对应于$L \in \mathbb{N}$，并满足

$$\Big[\big(\mathcal{H}_{zig} + \mathcal{S}^L\mathcal{W}\mathcal{R}^L - \lambda^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}\big)u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}\Big](\boldsymbol{n}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{n} \in \Lambda. \tag{6.11}$$

现在，根据扰动特征对的一致有界性（(6.2) 和 (6.4)），并借助引理 6.5，我们可以抽取一个特征对的子序列。为方便记号，仍用 L 为其指标，使得

$$\lambda^{L,e}_{zig,\mathcal{W}} \to \lambda^{e}_{zig,\mathcal{W}} \in \mathcal{I}_\delta, \tag{6.12}$$

and

$$u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}} \rightharpoonup u^{e}_{zig,\mathcal{W}} = u_{zig,e} + u^{e,(1)}_{zig,\mathcal{W}} \quad \text{weakly in the sense of (6.10).} \tag{6.13}$$

我们声称，(6.11) 的左侧弱收敛。为此，我们将证明以下结论

$$(\mathcal{H}_{zig}u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}, v)_{\mathcal{X}} \to (\mathcal{H}_{zig}u^{e}_{zig,\mathcal{W}}, v)_{\mathcal{X}}, \tag{6.14}$$

$$(\mathcal{S}^L\mathcal{W}\mathcal{R}^L u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}, v)_{\mathcal{X}} \to (\mathcal{W}u^{e}_{zig,\mathcal{W}}, v)_{\mathcal{X}}, \tag{6.15}$$

$$\lambda^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}(u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}, v)_{\mathcal{X}} \to \lambda^{e}_{zig,\mathcal{W}}(u^{e}_{zig,\mathcal{W}}, v)_{\mathcal{X}}, \tag{6.16}$$

对任意紧支撑的 $v \in \mathcal{X}$。由此可得

$$\Big(\big[\mathcal{H}_{zig} + \mathcal{W} - \lambda^{e}_{zig,\mathcal{W}}\big]u^{e}_{zig,\mathcal{W}}, v\Big)_{\mathcal{X}} = 0.$$

取任意示性函数作为测试函数，即可完成 (6.5) 的证明。

现在我们证明 (6.14)–(6.16)。注意，最后一个收敛式 (6.16) 直接由 (6.12) 和 (6.13) 得出。对于 (6.14)，我们首先注意到[13]

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}_{zig}u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}, v)_{\mathcal{X}} &= \sum_{\boldsymbol{n}\in\Lambda}\sum_{\boldsymbol{m}\in\Lambda}\big(\mathcal{H}_{zig}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}(\boldsymbol{m}), v(\boldsymbol{m})\big)_{\mathbb{C}^6} \\
&\overset{(i)}{=} \sum_{\boldsymbol{n}\in\Lambda}\sum_{\boldsymbol{m}\in\Lambda}\big(u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}(\boldsymbol{m}), \mathcal{H}_{zig}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})v(\boldsymbol{m})\big)_{\mathbb{C}^6} \\
&\overset{(ii)}{=} \sum_{\boldsymbol{m}\in\Lambda}\sum_{\boldsymbol{n}\in\Lambda}\big(u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}(\boldsymbol{m}), \mathcal{H}_{zig}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})v(\boldsymbol{m})\big)_{\mathbb{C}^6} \\
&= (u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}, \mathcal{H}_{zig}v)_{\mathcal{X}},
\end{aligned} \tag{6.17}$$

其中，应用厄米性 $\mathcal{H}_{zig}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}) = \mathcal{H}_{zig}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})^\top$ 可~~推导出 (i);~~ 而 (ii) 中求和顺序的交换是合理的，因为 $\mathcal{H}_{zig}$ 是有限程的（因此，双重求和实际上只包含一个无限和）。由于测试函数 v 是紧支撑的

[13](6.17) 仅仅说明了 $\mathcal{H}_{zig}$ 作用于 $\ell^1 - \ell^\infty$ 对时的“自伴性”

且哈密顿量 $\mathcal{H}_{zig}$ 是有限程的，因此函数 $\mathcal{H}_{zig}v$ 也是紧支撑的；于是， $u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}}$ 的弱收敛意味着

$$(\mathcal{H}_{zig}u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}},v)_{\mathcal{X}}=(u^{L,e}_{zig,\mathcal{W}},\mathcal{H}_{zig}v)_{\mathcal{X}}\to(u^{e}_{zig,\mathcal{W}},\mathcal{H}_{zig}v)_{\mathcal{X}}=(\mathcal{H}_{zig}u^{e}_{zig,\mathcal{W}},v)_{\mathcal{X}},$$

其中，最后一步可由类似于（6.17）中的论证得到。至此，（6.14）的证明完成。（6.15）的证明类似，只需注意，对于任意$u\in\ell^\infty(\Lambda)\otimes\mathbb{C}^6$和紧支撑的 $v\in\mathcal{X}$,

$$(\mathcal{R}^Lu,v)_{\mathcal{X}}=(u,v)_{\mathcal{X}},\quad(\mathcal{S}^Lu,v)_{\mathcal{X}}=(u,v)_{\mathcal{X}},\quad\text{for sufficiently large } L>0$$

根据限制和周期化算子的定义。其余细节留给有兴趣的读者。

引理 *6.5* 的证明。 不妨设 $u^{(L)}$ 为实值且非负，即对于所有带有 $\mathbb{R}_+:=[0,\infty)$的 $\boldsymbol{n}\in\Lambda$， $u^{(L)}(\boldsymbol{n})\in\mathbb{R}^6_+$

定义 $w^{(L',L)}:=\mathcal{R}^{L'}u^{(L)}\in\mathcal{X}$对于任意 $(L',L)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，即将 $u^{(L)}$限制在L'-条带上。显然，对于任意固定的 L'， $w^{(L',L)}$ 关于 L一致有界:

$$\sup_L\|w^{(L',L)}\|_{\mathcal{X}}\lesssim\sup_L\|u^{(L)}\|_{\mathcal{X}_{L,\sharp}}<\infty.$$

因此，希尔伯特空间 $\mathcal{X}$ 的弱紧性表明，存在一个子序列$_{w^{(L',L_i)}}$ 和 $w_{L'}\in\mathcal{X}$，使得

$$(w^{(L',L_i)},v)_{\mathcal{X}}\to(w_{L'},v)_{\mathcal{X}}\quad\text{for any } v\in\mathcal{X}.\tag{6.18}$$

显然，子序列极限 $w_{L'}$ 的支集位于 L'-条带 $\Lambda_{L'}$中。接下来，我们选取 $\{L_i\}_{i\geq1}$的一个子序列，为方便记号，仍记为 $\{L_i\}$，使得 $w^{(L'+1,L_i)}$在 中按与 (6.18) 相同的意义弱收敛至 $i\to\infty$，其极限记为 $w_{L'+1}$。 在 (6.18) 中取一个实值的、支集包含于 $\Lambda_{L'}$的测试函数，可以验证子序列极限 $w_{L'}$ 非负，并且 $w_{L'+1}$ 在条带 $\Lambda_{L'}$上与 $w_{L'}$ 一致:

$$w_{L'+1}(\boldsymbol{n})=w_{L'}(\boldsymbol{n})\in\mathbb{R}^6_+,\quad\forall\boldsymbol{n}\in\Lambda_{L'}.\tag{6.19}$$

通过对角线论证，可以归纳构造一个序列，记为 $\{w^{(i,L_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$，使其在每个 $j-$条带 Λ_j 上的限制都弱收敛至 w_j。我们声称， $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{X}$中强收敛，其极限记为 $u\in\mathcal{X}$。事实上，由 (6.19) 和单调收敛定理可知， w_i 有逐点极限 u；因此，只需证明该极限有界。这是 $u^{(L)}$ 的一致有界性的结果:

$$\|w_j\|_{\mathcal{X}}\leq\liminf_{i\to\infty}\|\mathcal{R}^jw^{(i,L_i)}\|_{\mathcal{X}}=\liminf_{i\to\infty}\|\mathcal{R}^ju^{(L_i)}\|_{\mathcal{X}}\leq\sup_L\|u^{(L)}\|_{\mathcal{X}_L}<\infty,\quad\forall j\in\mathbb{N},$$

其中，第一个不等式由范数的弱下半连续性得出。根据 $w_i\to u$ 的收敛性，可立即得出 $u^{(L_i)}$ 弱收敛到 u。事实上，对于任意紧支撑测试函数 v，我们选取 $j\in\mathbb{N}$ 使得

$$\operatorname{supp}(v)\subset\Lambda_j.\tag{6.20}$$

于是，我们看到

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty}(u^{(L_i)},v)_{\mathcal{X}}&\overset{(i)}{=}\lim_{i\to\infty}(\mathcal{R}^ju^{(L_i)},v)_{\mathcal{X}}\overset{(ii)}{=}\lim_{i\to\infty}(\mathcal{R}^j\mathcal{R}^iu^{(L_i)},v)_{\mathcal{X}}\\&=\lim_{i\to\infty}(\mathcal{R}^jw^{(i,L_i)},v)_{\mathcal{X}}=(w_j,v)_{\mathcal{X}}\overset{(iii)}{=}(u,v)_{\mathcal{X}},\end{aligned}$$

其中，等式 (i) 是 (6.20) 的推论，(ii) 来自限制算子的层级关系： $\mathcal{R}^j=\mathcal{R}^j\mathcal{R}^i$ 对于 $i\geq j$, 而 (iii) 则由 (6.19)-(6.20) 得出。至此，证明完成。□

References

[1] Habib Ammari、Silvio Barandun、Jinghao Cao、Bryn Davies 和 Erik Orvehed Hiltunen。非厄米皮肤效应的数学基础。《理性力学与分析档案》，248(3):33，2024年。[2] Habib Ammari、Silvio Barandun、Bryn Davies、Erik Orvehed Hiltunen、Thea Kosche 和 Ping Liu。有限谐振器链中的指数局域界面本征模。Stud. Appl. Math.，153(4):论文编号 e12765，25，2024年。[3] Habib Ammari、Silvio Barandun 和 Ping Liu。切比雪夫多项式与托普利兹理论在拓扑超材料中的应用。Reviews in Physics，13:论文编号 100103，2025年。[4] Habib Ammari、Bryn Davies 和 Erik Orvehed Hiltunen。亚波长谐振器错位系统中的稳健边缘模。J. Lond. Math. Soc. (2)，106(3):2075–2135，2022年。[5] Habib Ammari、Bryn Davies 和 Erik Orvehed Hiltunen。亚波长区域中的安德森局域化。《数学物理通讯》，405(1):论文编号 1，20，2024年。[6] Habib Ammari、Bryn Davies 和 Erik Orvehed Hiltunen。超材料的数学理论：从凝聚态理论到亚波长物理。NSF–CBMS Regional Conf. 美国数学会，普罗维登斯，2026年。[7] Habib Ammari、Bryn Davies、Erik Orvehed Hiltunen 和 Sanghyeon Yu。一维亚波长谐振器链中的拓扑保护边缘模。J. Math. Pures Appl. (9)，144:17–49，2020年。[8] Habib Ammari、Brian Fitzpatrick、Hyeonbae Kang、Matias Ruiz、Sanghyeon Yu 和 Hai Zhang。光子学与声子学中的数学与计算方法，数学调查与专著第235卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018年。[9] Habib Ammari、Hyeonbae Kang 和 Hyundae Lee。谱分析中的层势技术，数学调查与专著第153卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009年。[10] Habib Ammari 和 Thea Kosche。蜂窝状弗洛凯超材料中的拓扑现象。Math. Ann.，388(3):2755–2785，2024年。[11] Habib Ammari 和 Jiayu Qiu。谐振器晶体中非线性共振的分析：紧束缚近似与亚波长类孤子解的存在性。arXiv 预印本 arXiv:2509.04184，2025年。[12] Habib Ammari 和 Jiayu Qiu。有限二维遍历无序系统的体边对应。arXiv 预印本 arXiv:2512.11092，2025年。[13] Julio Cesar Avila、Hermann Schulz-Baldes 和 Carlos Villegas-Blas。周期性二维模型中边缘态的拓扑不变量。Mathematical Physics, Analysis and Geometry，16(2):137–170，2013年。[14] Sven Bachmann、Alex Bols、Wojciech De Roeck 和 Martin Fraas。有能隙相互作用系统中的电导量子化。Annales Henri Poincar´e，19(3):695–708，2018年。[15] Guillaume Bal。拓扑绝缘体的连续体与界面描述。《数学物理杂志》，60(8)，2019年。[16]Guillaume Bal。连续绝缘体中的拓扑电荷守恒。《数学物理杂志》，64(3)，2023年。[17]Guillaume Bal。连续拓扑绝缘体分类与体边对应。arXiv 预印本 arXiv:2412.00919，2024年。[18] Gregory Berkolaiko 和 Andrew Comech。石墨烯谱中的对称性与狄拉克点。《谱理论杂志》，8，2014年。[19] B. Andrei Bernevig 和 Taylor L. Hughes。《拓扑绝缘体与拓扑超导体》。普林斯顿大学出版社，2013年。[20] Chris Bourne、Johannes Kellendonk 和 Adam Rennie。拓扑绝缘体的 K 理论体边对应。载于 Annales Henri Poincar´e，第18卷，1833–1866页。施普林格，2017年。[21] Chris Bourne 和 Adam Graham Rennie。连续拓扑相模型的陈数、局域化与体边对应。Mathematical Physics, Analysis and Geometry，21:1–62，2016年。[22] Ying Cao 和 Yi Zhu。周期性薛定谔算子能带结构中的双狄拉克锥。Multiscale Modeling & Simulation，21(3):1147–1169，2023年。¨ Ying Cao 和 Yi Zhu。对称形变超蜂窝结构中的边缘态。SIAM Journal on Mathematical Analysis，57(3):2384–2415，2025年。[23] Jean-Michel Combes 和 Fran[24] cois Germinet。霍尔电流量子化中的边缘效应与杂质效应。《数学物理通讯》，256(1):159–180，2005年。

[25] Horia D. Cornean、Massimo Moscolari 和 Stefan Teufel。《从轨道磁性到体边对应》。载于《亨利·庞加莱年刊》，第1–55页。施普林格，2024年。[26] Alexis Drouot 和 Micheal I Weinstein。边缘态与谷霍尔效应。《数学进展》，368：107142，2020年。[27] Alexis Drouot 和 Xiaowen Zhu。曲线界面的体边对应，2024年。[28] Alexander Elgart、Gian M. Graf 和 Jeffrey H. Schenker。迁移率隙中体与边缘霍尔电导的相等性。《数学物理通讯》，259(1)：185–221，2005年。[29]Charles Fefferman、J Lee-Thorp 和 Michael I Weinstein。一维系统中的拓扑保护态，第247卷。美国数学会，2017年。[30] Charles L Fefferman、James P Lee-Thorp 和 Michael I Weinstein。蜂窝结构中的边缘态。《偏微分方程年刊》，2(2)：1–80，2016年。[31] Charles. L. Fefferman 和 Michael. I. Weinstein。蜂窝晶格势与狄拉克点。《美国数学会杂志》，25(4)：1169–1220，2012年。[32] Sonia Fliss 和 Patrick Joly。周期波导中的时谐波动方程解：渐近行为与辐射条件。《理性力学与分析档案》，219(1)：349–386，2016年。[33] Liang Fu。拓扑晶体绝缘体。《物理评论快报》，106(10)：106802，2011年。[34] I. C. Gohberg 和 E. I. Sigal。对数留数定理与Rouch´e定理的算子推广。《数学文集（新辑）》，84(126)：607–629，1971年。[35] David Gontier。通道中二阶椭圆算子的边缘态。《谱理论杂志》，12(3)：1155–1202，2023年。[36] Gian Michele Graf 和 Marcello Porta。二维拓扑绝缘体的体边对应。《数学物理通讯》，324：851–895，2013年。[37] Gian Michele Graf 和 Jacob Shapiro。无序手征链的体边对应。《数学物理通讯》，363：829–846，2018年。[38] Lucien Jezequel、Cl´ement Tauber 和 Pierre Delplace。估算有限开放手征链中的体与边缘拓扑指标。《数学物理杂志》，63(12)，2022年。[39] Tosio Kato。线性算子微扰理论，第132卷。施普林格科学与商业媒体，2013年。[40] Johannes Kellendonk 和 Hermann Schulz-Baldes。连续磁算子的边缘电流量子化。《泛函分析杂志》，209(2)：388–413，2004年。[41] Werner Kirsch。随机薛定谔算子导论。arXiv预印本 arXiv:0709.3707，2007年。[42] Yosuke Kubota。受控拓扑相与体边对应。《数学物理通讯》，349(2)：493–525，2017年。[43] James P Lee-Thorp、Michael I Weinstein 和 Yi Zhu。具有蜂窝对称性的椭圆算子：狄拉克点、边缘态及其在光子石墨烯中的应用。《理性力学与分析档案》，232(1)：1–63，2019年。[44] Daniel Leykam、Haoran Xue、Baile Zhang 和 YD Chong。拓扑光子学的局限与可能性。《自然综述：物理学》，8(1)：55–64，2026年。[45] Wei Li、Junshan Lin、JIAYU QIU 和 Hai Zhang。反射对称性破缺的蜂窝拓扑光子结构中的界面模。arXiv预印本 arXiv:2405.03238，2024年。[46] Junshan Lin 和 Hai Zhang。一维拓扑光子材料的数学理论。《物理学杂志A：数学与理论》，55(49)：495203，2022年。[47] Matthias Ludewig 和 Guo Chuan Thiang。拓扑边缘跟随态的余边不变性。arXiv预印本 arXiv:2001.08339，2020年。[48] M. Makwana 和 R. V. Craster。六角晶格与蜂窝结构的均匀化。《力学与应用数学季刊》，67(4)：599–630，2014年。[49] Borui Miao 和 Yi Zhu。亚波长区域中的广义蜂窝结构材料。《SIAM应用数学杂志》，84(3)：1116–1139，2024年。[50] Borui Miao 和 Yi Zhu。广义蜂窝结构材料紧束缚模型的零能边缘态。arXiv预印本 arXiv:2504.09565，2025年。[51] Tomoki Ozawa、Hannah M. Price、Alberto Amo、Nathan Goldman、Mohammad Hafezi、Ling Lu、Mikael C. Rechtsman、David Schuster、Jonathan Simon、Oded Zilberberg 和 Iacopo Carusotto。拓扑光子学。《现代物理评论》，91：015006，2019年。[52] A. Pankov。周期非线性薛定谔方程及其在光子晶体中的应用。《米兰数学杂志》，73(1)：259–287，2005年。

[53] Alexander Pankov。具有可饱和非线性的周期离散非线性薛定谔方程中的带隙孤子。《数学分析与应用杂志》，371(1)：254–265，2010年。[54]德米特里·E·佩利诺夫斯基。周期势中的局域化：从薛定谔 ¨算子到*Gross–Pitaevskii*方程，第390卷。剑桥大学出版社，2011年。[55] 埃米尔·普罗丹和Hermann Schulz-Baldes。复拓扑绝缘体的体与边界不变量。核，2016年。[56] 祁晓亮和张首晟。拓扑绝缘体与超导体。《现代物理评论》，83：1057–1110，2011年。[57] JIAYU QIU、Junshan Lin、谢鹏和Hai Zhang。由狄拉克点分岔产生的波导界面模的数学理论。《数学科学通讯》，24(第3期)：749–796，2026年。[58] JIAYU QIU 和 Hai Zhang。关于无带隙开启的光子波导中狄拉克点的分岔。*arXiv*预印本 *arXiv:2310.17964*，2023年。[59] JIAYU QIU 和 Hai Zhang。光子学中整数量子霍尔效应的数学理论。*arXiv*预印本 *arXiv:2405.17200*，2024年。[60]JIAYU QIU 和 Hai Zhang。有限光子结构中的体边对应。*arXiv*预印本 *arXiv:2501.15531*，2025年。[61] JIAYU QIU 和 Hai Zhang。非量子化自旋输运的广义体界面对应。*arXiv*预印本 *arXiv:2505.16331*，2025年。[62] 亚历山大·V·索博列夫和乔纳森·沃尔索。周期波导中的绝对连续性。《伦敦数学会会刊》，85(3)：717–741，2002年。[63] 阿迈勒·塔阿拉布特。连续磁性随机薛定谔算子的体与边缘霍尔电导相等性，2014年。[64] Guo Chuan Thiang 和 Hai Zhang。具有反演对称性的一维拓扑材料的体界面对应。《皇家学会会刊*A*辑》，479(2270)：20220675，2023年。[65] 戴维·范德比尔特。电子结构理论中的贝里相位：电极化、轨道磁化与拓扑绝缘体。剑桥大学出版社，2018年。[66] 吴龙华和胡晓。利用介电材料实现拓扑光子晶体的方案。《物理评论快报》，114：223901，2015年。

(H. Ammari) Department of Mathematics, ETH Zürich, Rämistrasse 101, CH-8092 Zürich,Switzerland电子邮箱地址：habib.ammari@math.ethz.ch

(J.Qiu) Department of Mathematics, ETH Zürich, Rämistrasse 101, CH-8092 Zürich, Switzerland电子邮箱地址：jiayu.qiu@sam.math.ethz.ch